



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

FRANCIEL SALES DE SOUZA

**DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE
VIA MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS**

**MONTEIRO - PB
2019**

FRANCIEL SALES DE SOUZA

**DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE
VIA MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Ms. Robson Batista de Sousa

MONTEIRO - PB

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S725d Souza, Franciel Sales de.
Determinação da aceleração da gravidade via método dos mínimos quadrados [manuscrito] / Franciel Sales de Souza. - 2019.
64 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2019.
"Orientação : Prof. Me. Robson Batista de Sousa , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."
1. Mínimos quadrados. 2. Aceleração da gravidade. 3. Esfera metálica. I. Título
21. ed. CDD 510

FRANCIEL SALES DE SOUZA

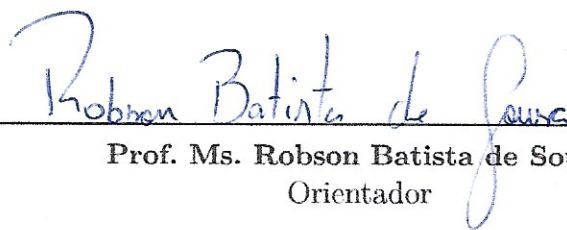
DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE VIA
MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

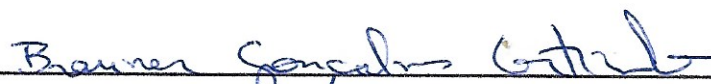
Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

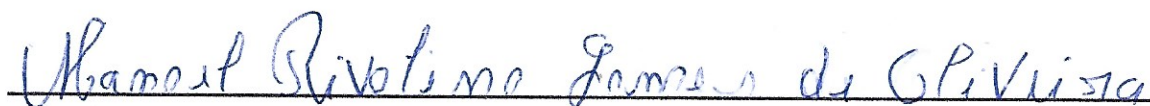
Área de concentração: Matemática aplicada

Aprovada em: 25/11/2019.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Ms. Robson Batista de Sousa
Orientador


Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho
Examinador interno (CCHE/UEPB)


Prof. Dr. Manoel Rivelino Gomes de Oliveira
Examinador Externo (ICTI/UFBA)

Este trabalho é dedicado a Deus, por ter me dado força, coragem e perseverança durante todo o curso, e durante toda a minha vida. A minha família, em especial a minha mãe, irmã e meus sobrinhos, por terem me ajudado no decorrer do curso e da vida. Aos meus colegas de turma por terem me ajudado durante todo o curso e aos meus professores.

Dedico aos meus colegas de viagem que todo os dias viajavam comigo no ônibus, aos motoristas que tive durante o tempo de duração do estudo.

No final, dá tudo certo!

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus, por ter me dado a oportunidade de concluir mais um curso superior, à minha família por aguentar minhas manias, aos meus sobrinhos por me aturar, a meus amigos que fiz durante o curso e que vou levar para a vida inteira.

Quero agradecer especialmente ao meu professor e orientador Robson, que topou fazer esse trabalho comigo e sempre me motivou a terminar, sempre me cobrando. Agradecer também a minha colega de turma e companheira nas orientações Rani, por ter me ajudado nas orientações, tirando minhas dúvidas e ajudando em que precisasse.

À Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, pela oportunidade e confiança de estudar mais uma vez e de concluir mais um curso superior. Quero agradecer a todos que de alguma maneira contribuíram para que eu concluísse o curso.

“Livra-me, meus Deus, dos meus inimigos, defende-me daqueles que se levantam contra mim. Livra-me dos que praticam a iniquidade, e salva-me dos homens sanguinários.”
(Bíblia Sagrada, Salmo 59, 1 e 2)

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo determinar o parâmetro físico da aceleração da gravidade via Método dos Mínimos Quadrados utilizando dados de posição e tempo de queda de uma esfera metálica. A metodologia utilizada foi a pesquisa quantitativa, a qual foi dividida em três fases: a primeira foi a pesquisa bibliográfica, a segunda foi a obtenção dos dados através de um kit de queda de corpos e na terceira foi realizado o tratamento estatístico dos dados. O valor da aceleração da gravidade obtido foi comparado com a literatura e o resultado demonstrou-se satisfatório. O coeficiente de correlação obtido indicou que as variáveis tempo e raiz quadrada do deslocamento são fortemente correlacionadas. O teste para hipótese nula foi realizado e a mesma foi rejeitada indicando que há relação entre as variáveis no modelo estatístico obtido.

Palavras-chave: Mínimos quadrados. Aceleração da gravidade. Esfera metálica.

ABSTRACT

This job had as objective determine the physical parameter of gravity acceleration via minimum squares method using position data and fall time of a metallic sphere. The methodology used was the quantitative research, the which was divided into three phases: the first was bibliographic research, the second was to obtain the data throught a kit of falling of bodies and in the third was accomplished the statistical processing of data. The value of the acceleration of gravity obtained was compared with the literature and the result was satisfactory. The correlation coefficient obtained indicated that the variables time and square root of the displacement are strongly correlated. The null hypothesis test was performed and it was rejected indicating that there is a relationship between the variables in the obtained statistical model.

Key-words: Least Squares. Gravity Acceleration. Metallic sphere.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A posição de um objeto é indicada em relação a um eixo marcado em unidades de comprimento (metros, cm, por exemplo), que se estende indefinidamente nos dois sentidos.	18
Figura 2 – Uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo sofrem a mesma aceleração g , que aumentam a distância entre imagens sucessivas. . . .	25
Figura 3 – Orientação positiva do eixo vertical e as forças que atuam num corpo de massa m	28
Figura 4 – Comportamento de $v(t)$ e $x(t)$	30
Figura 5 – Três modelos de gráfico de dispersão.	35
Figura 6 – Representação gráfica dos diversos desvios.	37
Figura 7 – (a) Uma população sem relação entre as variáveis. (b) Observações amostrais hipotéticas da população tornam aparente uma relação. . . .	42
Figura 8 – Distribuição com suas regiões críticas.	43
Figura 9 – Tipos de pesquisa científica.	48
Figura 10 – Kit de queda de corpos utilizado nesta pesquisa.	49
Figura 11 – Sensor fotoelétrico.	50
Figura 12 – Cronômetro digital multifuncional com rolagem de dados.	51
Figura 13 – Esquema de montagem do experimento de queda da esfera.	52
Figura 14 – Gráfico da raiz quadrada do deslocamento versus o tempo.	62
Figura 15 – Gráfico da velocidade versus o tempo.	63
Figura 16 – Valores da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude. .	69
Figura 17 – Tabela de distribuição t	75
Figura 18 – Tabela da distribuição Normal	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Equações do Movimento com Aceleração Constante.	23
Tabela 2 – Resumo das Equações para um corpo em queda livre.	27
Tabela 3 – Medidas dos deslocamentos e tempos obtidos através do experimento. .	56
Tabela 4 – Medidas do deslocamento e das velocidades da esfera obtidos através do experimento.	58
Tabela 5 – Resultados dos parâmetros físicos obtidos através do experimento. . . .	60
Tabela 6 – Parâmetros encontrados nessa pesquisa.	61
Tabela 7 – Valores da aceleração da gravidade teórica, experimental e o erro per- centual obtido.	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	JUSTIFICATIVA DA PESQUISA	13
1.2	O PROBLEMA DE PESQUISA	14
1.3	OBJETIVOS	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	ALGUMAS NOÇÕES SOBRE O CONCEITO DE MOVIMENTO	16
2.2	MOVIMENTO RETILÍNEO	17
2.2.1	Movimento	17
2.2.2	Posição e Deslocamento	18
2.2.3	Velocidade Média e Velocidade Escalar Média	18
2.2.4	Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea	19
2.2.5	Aceleração	20
2.2.6	Aceleração Constante (um caso especial)	21
2.2.7	Aceleração em Queda Livre	24
2.2.8	Movimento de Queda de um Corpo com força resistiva proporcional a velocidade	27
3	ESTATÍSTICA PARA O TRATAMENTO DOS DADOS EXPERIMENTAIS	31
3.1	Medida de Tendência Central e Variabilidade	31
3.2	Erros de uma medida	33
3.3	Regressão Linear Simples	34
3.3.0.1	Estimação por Mínimos Quadrados	36
3.3.1	Propriedades dos Estimadores de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$	38
3.3.2	Média e Variância dos Estimadores	38
3.3.3	Distribuições Amostrais dos Estimadores dos Parâmetros	39
3.3.3.1	Teste de Hipótese sobre α e β	40
3.3.3.2	Teste de significância para a média	41
3.4	INFERÊNCIAS SOBRE O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA DE REGRESSÃO	42
3.4.1	Coeficiente de Correlação (r)	44
3.4.2	Coeficiente de Determinação r^2	45
4	MATERIAIS E MÉTODOS	47
4.1	ENQUADRAMENTO DA PESQUISA	47
4.1.1	O Kit experimental utilizado	48
4.1.2	O sensor fotoelétrico	49
4.1.3	Cronômetro digital multifuncional com rolagem de dados	50

4.1.3.1	Identificação dos comandos e indicadores	50
4.1.3.2	Especificações de Funcionamento	52
4.1.4	Descrição do experimento	52
4.1.5	Relação entre o erro e o tamanho da amostra	54
4.1.6	Modelo Matemático para a obtenção da aceleração da gravidade	55
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	56
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A OBTENÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRA- VIDADE EM FUNÇÃO DO COEFICIENTE ANGULAR DO AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS	68
	APÊNDICE B – VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRA- VIDADE COM A ALTITUDE E LATITUDE	69
	APÊNDICE C – OBTENÇÃO DAS MÉDIAS E VARIÂN- CIA DOS ESTIMADORES	71
	ANEXO A – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO T	75
	ANEXO B – TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL . . .	76

1 INTRODUÇÃO

Movimentos retilíneos uniformemente acelerados são estudados em cursos de Física no Ensino Básico e no Ensino Superior. O movimento de queda livre de um corpo é classificado com um movimento deste tipo. Tal movimento é relativamente simples de se estudar uma vez que as funções que o descrevem são, no máximo, de segundo grau no tempo.

Para Baptista e Ferracioli (1999), o movimento enquanto estado da matéria, tem feito com que pensadores realizem reflexões ao longo da história filosófica-científica da civilização ocidental. Nussenzveig (2002, p. 35) afirma que “os gregos da época clássica encontravam dificuldades intransponíveis na análise do movimento. Essas dificuldades estavam relacionadas com a formulação dos conceitos básicos do Cálculo Infinitesimal (como os de limite, derivada e integral), que nasceram precisamente do problema de movimento”. Conforme Nussenzveig (2002) a queda livre de um corpo solto em repouso foi um dos problemas analisados por Galileu Galilei¹ (1564 – 1642) em seus trabalhos, que deram origem à era moderna da física.

Para Aristóteles, quanto mais pesado um corpo é, mais depressa ele cai. Assim, por exemplo, uma pedra cai bem mais depressa que uma gota de chuva. Tais ideias baseadas em observações qualitativas predominaram durante cerca de 20 séculos (NUSSENZVEIG, 2002). Foi em Pisa que Galileu procurou verificar experimentalmente se tais ideias eram válidas. Foi através das experiências realizadas por Galileu, que permitiu-se estabelecer que o movimento de queda livre de um corpo lançado ou solto verticalmente, desprezando-se os efeitos de resistência do ar, é um movimento uniformemente acelerado, e, a aceleração é a mesma para todos os corpos, e é conhecida como aceleração da gravidade, representada geralmente pela letra g .

1.1 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Resolvi estudar o Movimento de Queda Livre (MQL) de um corpo devido a um minicurso que participei na UEPB (Campus VI), o qual tratava deste assunto. Neste minicurso, o ministrante abordou um experimento de queda de um corpo (esfera de massa m). O objetivo da atividade experimental foi determinar o valor da aceleração da gravidade utilizando os dados coletados através do experimento. Os dados obtidos experimentalmente receberam tratamentos estatísticos. Isto me motivou por que possuo

¹ Galileu nasceu em Pisa e recebeu educação Aristotélica convencional. De início foi para Pisa estudar medicina. No entanto, interessou-se mais pela matemática e conseguiu mudar para esse campo. Aos 26 anos, devido a sua reputação científica, foi nomeado professor de Matemática na Universidade de Pisa (NUSSENZVEIG, 2002).

formação em Estatística, em particular, sou bacharel em Estatística pela UEPB (curso concluído em 2008). Procurei o professor de física do Campus - VI, para que pudéssemos desenvolver um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que tivesse relação com minha formação inicial. Assim, decidimos estudar o MQL através de um Kit Experimental de queda de corpos e aplicar aos dados obtidos os devidos tratamentos estatísticos.

Com relação a queda de corpos, há alguns livros de física disponíveis na biblioteca do Campus VI que tratam deste tema. Porém, o único que traz alguns cometários acerca da obtenção da aceleração da gravidade experimental é o de Nussenzveig (2002), e, mesmo assim, não é tão óbvio como essa grandeza física é obtida. Dessa forma, acredito que esta pesquisa é importante, pois, servirá como material de apoio que ficará disponível na biblioteca do CCHE e também na versão online para os estudantes (do CCHE e outros locais) que desejam estudar o movimento de queda de um corpo e tenham a curiosidade de saber como é obtida a aceleração da gravidade.

Esta é uma pesquisa interdisciplinar, pois, envolve as disciplinas de Física, Matemática e Estatística. A interdisciplinaridade é verificada através da modelagem matemática do problema físico e do tratamento estatístico dos dados do experimento. Conforme os PCNs a interdisciplinaridade questiona a divisão dos diferentes campos do conhecimento produzida por uma abordagem que não considera a influência e inter-relação entre eles. Também questiona a visão compartimentada das disciplinas escolares (BRASIL, 1998).

Acrescenta-se ainda o fato de que o modelo matemático utilizado para obter o valor da aceleração da gravidade não foi visto em outros trabalhos disponíveis na literatura e também não foi observado pelo autor deste trabalho a realização do teste de hipótese em pesquisas que determinam a aceleração da gravidade utilizando dados de experimento.

1.2 O PROBLEMA DE PESQUISA

A questão norteadora deste trabalho é: **Como obter a Aceleração da Gravidade experimentalmente?**

1.3 OBJETIVOS

A partir da questão norteadora, foi traçado o seguinte objetivo geral:

- Determinar o parâmetro físico da aceleração da gravidade experimentalmente.

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Obter uma relação matemática entre a aceleração da gravidade e o coeficiente angular do ajuste de mínimos quadrados;

- Comparar o parâmetro físico da aceleração da gravidade com os valores encontrados em livros ou artigos científicos;
- Calcular o erro percentual do valor da aceleração gravidade obtido através dos dados do experimento;
- Realizar o tratamento estatístico dos dados obtidos.

Este TCC está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 está posta a introdução. Na mesma são mencionados alguns aspectos históricos do movimento de queda livre, a justificativa do trabalho, o problema de pesquisa e os objetivos.

O Capítulo 2 é o de revisão da literatura. No mesmo são discutidos alguns conceitos básicos da física, tais como o de movimento, posição, deslocamento, velocidade e aceleração e a teoria acerca do movimento de queda livre.

No Capítulo 3 é realizada uma descrição sobre alguns conceitos estatísticos básicos, tais como: a média, desvio padrão, variância. Ainda é abordado o método de regressão linear simples.

No Capítulo 4 está posta a metodologia que será utilizada.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados e discussões.

No Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse Capítulo serão apresentados algumas noções teóricas sobre a evolução do conceito de movimento e a teoria sobre Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Variado (MRUV).

2.1 ALGUMAS NOÇÕES SOBRE O CONCEITO DE MOVIMENTO

Como é sabido o conceito de movimento que é descrito atualmente foi fruto de um longo caminho percorrido. O estudo do movimento foi primeiramente realizado por Aristóteles no século IV a.C. De Aristóteles até Newton a evolução do conceito de movimento passou pela teoria do Impetus desenvolvida na Idade média pré-galileana. Pensadores como d' Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1819) e Hamilton (1805-1865) deram suas contribuições para o edifício teórico da mecânica. Conforme a mecânica analítica, a descrição do movimento consiste em resolver o seguinte problema: dadas a posição inicial (x_0) e a velocidade inicial de uma partícula (v_0) no instante inicial (t_0), obter a posição e a velocidade desta partícula num instante t qualquer (x, v, t) (BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999).

Para os filósofos jônicos¹ o movimento apresenta-se como estado permanente da matéria e é fundamental para se entender os processos de formação que se desenvolvem na natureza. Para Heráclito de Éfeso, o movimento desempenha um papel fundamental na sua concepção cosmogônica. E em sua alegoria do rio é implícita a relação do mesmo com a cinemática das águas (BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999).

Para Demócrito (c.460-370 a.C.) e Anaxágoras (c.500-428 a.C.), é do movimento em vórtice que resulta a formação dos planetas, das estrelas e de todo o universo infinito. Demócrito introduz o conceito de vazio. Chamado de vácuo, o vazio permeando os átomos possibilita o movimento perpétuo dos mesmos.

O problema do movimento é estudado de forma mais sistemática por Aristóteles. O mesmo classifica o movimento em natural (movimento que anima os corpos tendente a levá-los aos seus lugares naturais) e forçado (o corpo se move sob a ação contínua de um agente motor externo).

Conforme Baptista e Ferracioli (1999):

Assim, em qualquer circunstância envolvendo o movimento, é fundamental para Aristóteles, o conceito de Motor, o que o leva à definição do motor

¹ Estes filósofos foram chamados de “Físicos” por Aristóteles (c.384-322 a.C) com excessão de Parmênides (c.540-450 a.C) Baptista e Ferracioli (1999).

da grande esfera celeste, então denominada de Primeiro Móvel. O motor, neste caso, é associado a providência divina. A alma é o motor dos seres vivos e, de forma semelhante, os corpos em movimento deverão ser empurrados por um motor (BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999, p.190).

Jean Buridan (1297-1358) é um dos críticos da teoria da Antiperistásis ou da Mútua Substituição de Platão-Aristóteles. Segundo Clagett (1961 apud BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999) é Jean Buridan que formula o conceito de impetus da seguinte forma: “O impetus impresso pelo projetor sobre o projétil varia, por um lado, com a velocidade do projétil e, por outro, com a quantidade de matéria do corpo em movimento”. Nicole d’Oresme (1320- 1382) é quem inova nas técnicas de estudo do movimento representando-o através de gráficos (BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999).

Para Baptista e Ferracioli (1999):

[...] Sob a perspectiva científica, nesse momento histórico a questão da descrição do movimento estava a um passo para ser apreciada por Galileu Galilei (1564-1642) que direcionaria as ideias que posteriormente Isaac Newton (1642-1727) sistematizaria na formulação das Leis da Mecânica (BAPTISTA; FERRACIOLI, 1999, p.194).

2.2 MOVIMENTO RETILÍNEO

2.2.1 Movimento

O mundo e tudo o que nele existe, está sempre em movimento. Objetos que para nós podem estar em repouso, como um poste, por exemplo, está em movimento por causa da rotação da Terra, da órbita da Terra em torno do Sol, da órbita do Sol em torno do centro da Via Láctea e do deslocamento da Via Láctea em relação às outras galáxias. A classificação e comparação dos movimentos (chamada de cinemática) pode ser um desafio. O que exatamente deve ser medido? E com que deve ser comparado? (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

Analisando algumas propriedades gerais do movimento unidimensional, restringimos a analisar três formas desse movimento:

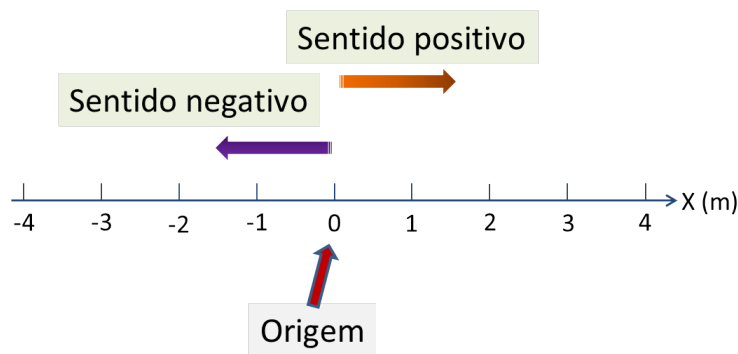
1. A primeira iremos supor que o movimento se dá ao longo de uma linha reta. A trajetória pode ser vertical, horizontal ou inclinada, porém deverá ser retilínea.
2. A segunda vamos supor que o objeto em movimento é uma partícula, ou um objeto que se move como uma partícula (isto é, todas as partes do objeto se movem na mesma direção e com a mesma velocidade).
3. As forças que atuam na partícula modificam o movimento da mesma.

2.2.2 Posição e Deslocamento

Para localizar um objeto necessita-se de um sistema de referência. No caso unidimensional, este sistema pode ser observado na Figura 1. O sentido positivo do eixo é o sentido em que os números (coordenadas) que indicam a posição dos objetos aumentam de valor. Na grande maioria dos casos, esse sentido é para a direita e o sentido oposto é o sentido negativo.

Visando um melhor entendimento do leitor pode-se pensar assim: uma partícula pode estar localizada em $x = 7m$; isso significa que ela está a $7m$ da origem no sentido positivo. Se estivesse localizada em $x = -7m$, estaria também a $7m$ da origem, mas no sentido oposto.

Figura 1 – A posição de um objeto é indicada em relação a um eixo marcado em unidades de comprimento (metros, cm, por exemplo), que se estende indefinidamente nos dois sentidos.



Fonte: Adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 57) .

O deslocamento (Δx) de uma partícula é definido como sendo:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (2.1)$$

em que x_1 e x_2 são respectivamente, a posição inicial e final da partícula. O símbolo Δ , é usado para representar a variação de uma grandeza, e corresponde à diferença entre o valor final e o valor inicial. O deslocamento é uma grandeza vetorial ².

2.2.3 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

Segundo Young e Freedman (2008), velocidade média v_{mx} , é definida como sendo:

² Uma grandeza vetorial é aquela que fica perfeitamente entendida quando fornecemos seu valor numérico, sua unidade de medida, direção e sentido. Neste trabalho não será apresentado a teoria dos vetores. Entretanto, para o leitor que deseja estudar a teoria dos vetores indica-se aqui o Capítulo 3 da obra escrita por Halliday, Resnick e Walker (2016) ou o Capítulo 1 da obra escrita por Young e Freedman (2008).

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2 os subscritos “ m ” e “ x ” indicam, respectivamente, valor médio e componente x da velocidade. A notação indica que a posição é x_1 no instante t_1 e x_2 no instante t_2 . A unidade de v_{mx} no SI³ é o metro por segundo (m/s). A velocidade é uma grandeza vetorial.

A velocidade escalar média s_{med} é uma forma diferente de descrever uma partícula que está em movimento. Enquanto a velocidade média envolve o deslocamento da partícula (Δx) a velocidade escalar média é definida em termos da distância total percorrida, independentemente da direção (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). Logo, a mesma é definida como sendo:

$$s_{med} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Como a velocidade escalar média não depende da orientação do movimento, ela é sempre positiva. Em alguns casos, s_{med} é igual a v_{mx} . Há outros casos em que as duas velocidades podem ser bem diferentes.

2.2.4 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea

Até aqui foram apresentadas duas formas de descrever a rapidez com a qual um objeto está se movendo: a velocidade média e a velocidade escalar média, as duas medidas para um intervalo de tempo Δt . Mas, quando se fala em “rapidez”, em geral estamos pensando na rapidez com a qual um objeto está se movendo em um determinado instante, ou seja, na velocidade instantânea (ou, simplesmente, velocidade), v .

A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. Quando Δt diminui, a velocidade média se aproxima cada vez mais de um valor limite, que é a velocidade instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.4)$$

Conforme Nussenzveig (2002), a velocidade instantânea tem uma interpretação geométrica simples num gráfico x X t . A mesma representa o coeficiente angular da tangente ao gráfico no ponto t_0 ; o que denomina-se de “declive” da curva no ponto. Esta é, de um ponto de vista mais geral, a interpretação geométrica da derivada $\frac{dx}{dt}$; a mesma mede a “taxa de variação” de x com t (NUSSENZVEIG, 2002). A velocidade instantânea também é uma grandeza vetorial, e, logo, possui uma orientação.

³ SI é o Sistema Internacional de Unidades.

Velocidade escalar instantânea, ou, simplesmente, **velocidade escalar**, é o módulo da velocidade, ou seja, a velocidade desprovida de qualquer indicação de orientação. Uma observação importante é que a velocidade escalar e a velocidade escalar média podem ser muito diferentes. A velocidade escalar de um objeto que está se movendo a uma velocidade de $+5m/s$ é a mesma ($5m/s$) que a de um objeto que está se movendo a uma velocidade de $-5m/s$.

2.2.5 Aceleração

Se comparada ao que é entendido na linguagem comum a aceleração tem na física um significado distinto. O entendimento da linguagem comum é que um carro está acelerado quando sua velocidade é elevada, mesmo que a mesma seja constante com o tempo. Entretanto, na física, o conceito de aceleração está ligado a mudança de velocidade (CHAVES, 2001).

Para movimentos ao longo de um eixo, a aceleração média a_m em um intervalo de tempo Δt é dada por:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2.5)$$

em que v_1 é a velocidade da partícula no instante t_1 e v_2 é a velocidade da partícula no instante t_2 .

A aceleração instantânea (ou simplesmente, aceleração) é dada por

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (2.6)$$

Resumindo, a aceleração de uma partícula em um dado momento é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante. Graficamente, a aceleração em qualquer ponto é a inclinação da curva de $v(t)$ nesse ponto. Combinando a Equação 2.6 com a Equação 2.4 pode-se escrever:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Resumindo, a aceleração de uma partícula em um dado instante é a derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo nesse instante. A unidade de aceleração no SI é o metro por segundo ao quadrado, m/s^2 . Da mesma forma que o deslocamento e a velocidade, a aceleração possui um módulo e uma orientação (ou seja, se enquadra como uma grandeza vetorial). O sinal algébrico representa o sentido em relação a um eixo; uma

aceleração com um valor positivo tem o sentido positivo do eixo, enquanto uma aceleração com um valor negativo tem o sentido negativo do eixo.

O sinal da aceleração tem significados diferentes na linguagem popular e na linguagem científica. Na popular, dizer que um objeto tem uma aceleração positiva significa que a velocidade do objeto está aumentando, e dizer que o objeto tem uma aceleração negativa significa que a velocidade do objeto está diminuindo (que o objeto está parando). Aqui o sinal é usado para indicar o sentido da aceleração e não se a velocidade do objeto está aumentando ou diminuindo.

O sinal da aceleração é interpretado apropriadamente da seguinte forma: se a velocidade e a aceleração possuem o mesmo sinal, a velocidade escalar da partícula aumenta. Se os sinais são opostos, a velocidade escalar diminui (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

2.2.6 Aceleração Constante (um caso especial)

Em alguns tipos de movimento, a aceleração é constante ou aproximadamente constante. Por exemplo, quando se acelera uma moto a uma taxa aproximadamente constante, quando a luz do sinal de trânsito muda de vermelho para verde. Mais tarde, quando você freia a moto até parar a aceleração pode ser também constante. Por conta dessas situações foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com elas.

Primeira Equação Básica: quando a aceleração é constante, a aceleração média e a aceleração instantânea são iguais e pode-se escrever a Equação 2.5, com algumas mudanças de notação, como sendo:

$$a = a_m = \frac{v - v_0}{t - 0}, \quad (2.8)$$

em que, v_0 é a velocidade no instante $t = 0$ e v é a velocidade de um instante de tempo posterior t . Explicitando v , obtém-se:

$$v = v_0 + at. \quad (2.9)$$

Nota-se que essa equação se reduz a $v = v_0$ para $t = 0$, como era esperado. Agora, determinando a derivada da Equação 2.9, o resultado é $dv/dt = a$, que corresponde à definição de a .

Segunda Equação Básica: de maneira semelhante, podemos escrever a Equação 2.2 (com algumas mudanças de notação) na forma:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - 0}, \quad (2.10)$$

o que fornece:

$$x = x_0 + v_m t, \quad (2.11)$$

em que x_0 é a posição da partícula em $t = 0$ e v_m é a velocidade média entre $t = 0$ e um instante de tempo posterior t .

Para a função velocidade linear da Equação 2.9, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo (de $t = 0$ a um instante posterior t , digamos) é a média aritmética da velocidade no início do intervalo (v_0) com a velocidade no final do intervalo (v). Para o intervalo de $t = 0$ até um instante posterior t , portanto, a velocidade média é:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (2.12)$$

Substituindo v pelo seu valor, dado pela Equação 2.9, obtém-se:

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (2.13)$$

Portanto, substituindo a Equação 2.13 na Equação 2.11, encontra-se:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.14)$$

Note que a Equação 2.14 se reduz a $x = x_0$ para $t = 0$, como era esperado. Agora, calculando a derivada da Equação 2.14, o resultado é a Equação 2.9, como era esperado.

Três Outras Equações: as Equações 2.9 e 2.14 são equações básicas do movimento com aceleração constante; elas podem ser usadas para resolver qualquer problema que envolva aceleração constante. Mas, outras equações, deduzidas a partir das equações básicas, podem ser úteis em situações específicas. Um problema que envolva uma aceleração constante pode envolver até cinco grandezas: $x - x_0$, v , t , a e v_0 . Normalmente, o problema consiste em encontrar uma dessas grandezas físicas.

As Equações 2.9 e 2.14 têm, cada uma, quatro dessas grandezas, mas não as mesmas. Na Equação 2.9, a grandeza ausente é o deslocamento $x - x_0$. Na Equação 2.14, é a velocidade v . As duas equações podem ser combinadas de três maneiras diferentes para produzir três novas equações, cada uma das equações envolvendo quatro grandezas diferentes. Primeiro podemos eliminar o t para obter,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2.15)$$

A Equação 2.15 será útil no caso em que o valor de t não é conhecido e não precisa determinar o seu valor. Em segundo podemos eliminar a aceleração a , combinando as Equações 2.9 e 2.14 para obter uma equação em que a não aparece:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \quad (2.16)$$

Por último, elimina-se v_0 , para obter:

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \quad (2.17)$$

Observe a diferença entre esta equação e a Equação 2.14. Uma envolve a velocidade inicial v_0 e a outra envolve a velocidade v no instante t .

A Tabela 1 apresenta as equações básicas do movimento com aceleração constante Equações 2.9 e 2.14, as quais foram deduzidas anteriormente. As equações listadas podem ser utilizadas para resolver problemas que envolvem aceleração constante. Uma dica é: escolha uma equação para a qual a variável desconhecida seja a solicitada no problema.

Tabela 1 – Equações do Movimento com Aceleração Constante.

Equações	Grandeza Ausente
$v = v_0 + at$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

Fonte: Adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2016, p.73).

Na Tabela 1 as duas primeiras equações são básicas e a partir delas as outras podem ser deduzidas. As equações podem ser obtidas por integração e com a condição de que a seja uma constante. Para obter a Equação 2.9, escreve-se a definição de aceleração Equação 2.6 na forma:

$$dv = a dt.$$

Depois, integra-se os dois membros

$$\int dv = \int a dt.$$

Como a é constante, pode ser colocada do lado de fora do sinal de integração. Logo temos:

$$\int dv = a \int dt,$$

ou,

$$v = at + C. \quad (2.18)$$

Para determinar a constante de integração C , faz-se $t = 0$ e chama-se de v_0 a velocidade nesse instante. Substituindo esse valor na Equação 2.18, obtém-se:

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Substituindo esse valor na Equação 2.18, obtém-se a Equação 2.9.

Para demonstrar a Equação 2.14, escreve-se a definição de velocidade Equação 2.4 na forma

$$dx = v dt,$$

e integra-se ambos os membros da equação para obter

$$\int dx = \int v dt.$$

Substituindo v pelo seu valor, dado pela Equação 2.9, obtemos:

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt.$$

Como v_0 e a são constantes, escreve-se:

$$\int dx = v_0 \int dt + a \int t dt,$$

integrando-se ambos os membros encontra-se o seguinte resultado:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C', \quad (2.19)$$

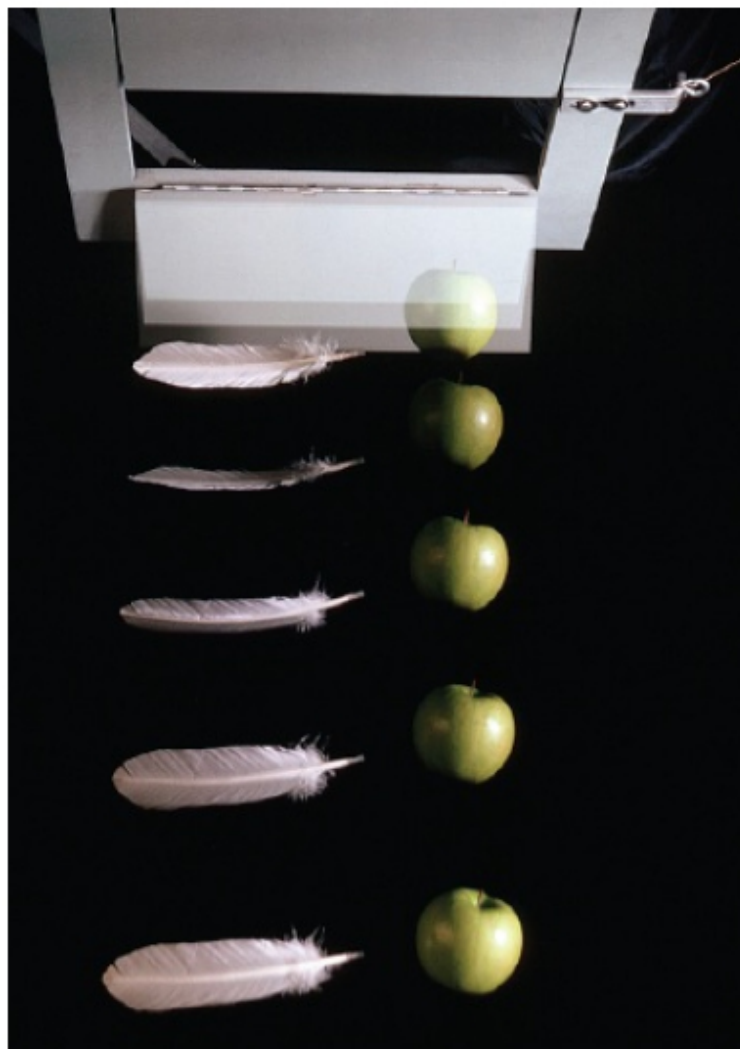
em que C' é outra constante de integração. Para determinar C' , faz-se $t = 0$ e vamos chama-se de x_0 a posição nesse instante. Substituindo esses valores na Equação 2.19, encontramos $x_0 = C'$. Substituindo C' por x_0 Equação 2.19, obtemos a Equação 2.14.

2.2.7 Aceleração em Queda Livre

Chaves (2001, p.28) diz que “a queda livre de corpos sujeitos à gravidade da Terra, na proximidade de sua superfície, é um exemplo importante de movimento uniformemente acelerado”. Se alguém jogasse um objeto para cima ou para baixo e pudesse de alguma forma eliminar o efeito do ar sobre o movimento, notaria que o objeto sofre uma aceleração

constante para baixo, conhecida como **aceleração em queda livre**, cujo módulo é representado pela letra g . O valor dessa aceleração não depende das características do objeto, como massa, densidade e forma; é a mesma para todos os objetos. Segundo Chaves (2001), g varia com a altitude, a latitude e em menor grau com a composição e morfologia local das rochas e seu valor típico é $9,81m/s^2$. Medidas experimentais da aceleração da gravidade feitas pelo National Institute of Standards and Technology (NIST) (Instituto Nacional de Padrão e Tecnologia) próximo a Gaithersburg, Maryland, revelaram valores absolutos da aceleração da gravidade de $g = 9,801018m/s^2$, e o desvio padrão deste valor, não incluindo erros sistemáticos, menor que $0,3.10^{-3}m/s^2$ (TATE, 1966).

Figura 2 – Uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo sofrem a mesma aceleração g , que aumentam a distância entre imagens sucessivas.



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p.79).

Na Figura 2 observam-se dois exemplos de aceleração em queda livre de uma pena e de uma maçã. À medida que caem, os objetos sofrem uma aceleração para baixo, que nos dois casos é igual a g . Logo, as velocidades dos dois objetos aumentam à mesma taxa,

e eles caem juntos.

As equações de movimento da Tabela 1 para aceleração constante também se aplicam à queda livre nas proximidades da superfície da terra, ou seja, se aplicam a um objeto que esteja descrevendo uma trajetória vertical, para cima ou para baixo, contanto que os efeitos do ar possam ser desprezados. Observe, que, no caso da queda livre, por convenção, a direção do movimento é ao longo de um eixo y vertical e não ao longo de um eixo x horizontal, com o sentido positivo de y para cima. A aceleração em queda livre é negativa, ou seja, para baixo, em direção ao centro da Terra, e, portanto, tem valor $-g$ nas equações.

Em um gráfico da aceleração a de um objeto em função do tempo t , a área sobre a curva fornece a velocidade do objeto em qualquer instante dado. Como a aceleração a é definida em termos da velocidade como $a = dv/dt$, pelo o Teorema Fundamental do Cálculo tem-se que:

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a \, dt. \quad (2.20)$$

O lado direito da equação é uma integral definida, v_0 é a velocidade no instante t_0 , e v_1 é a velocidade em um instante posterior t_1 . Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} a \, dt = (\text{área entre a curva da aceleração e o eixo do tempo, de } t_0 \text{ a } t_1). \quad (2.21)$$

Se a unidade de aceleração é $1m/s^2$ e a unidade de tempo é $1s$, a unidade de área no gráfico é

$$(1 \, m/s^2)(1s) = 1m/s,$$

que é a unidade de velocidade. Quando a curva da aceleração está acima do eixo do tempo, a área é positiva; quando a curva está abaixo do eixo do tempo, a área é negativa.

A velocidade v é definida em termos da posição x como $v = dx/dt$, tem-se:

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v \, dt, \quad (2.22)$$

em que x_0 é a posição no instante t_0 , e x_1 é a posição no instante t_1 . Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} v \, dt = (\text{área entre a curva da velocidade e o eixo do tempo, de } t_0 \text{ a } t_1). \quad (2.23)$$

Se a unidade de velocidade é $1m/s$ e a unidade de tempo é $1s$, a unidade de área no gráfico é:

$$(1m/s)(1s) = 1m,$$

que é uma unidade de posição e deslocamento.

Na Tabela 2 observa-se o resumo das equações para um corpo em queda livre.

Tabela 2 – Resumo das Equações para um corpo em queda livre.

Equações	Grandeza(s) física(s) ausente(s).
$v = v_0 + (-g)t$	$y - y_0$
$y - y_0 = v_0t + \frac{1}{2}(-g)t^2$	v
$v^2 = v_0^2 + 2(-g)(y - y_0)$	t
$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$-g$
$y - y_0 = vt - \frac{1}{2}(-g)t^2$	v_0

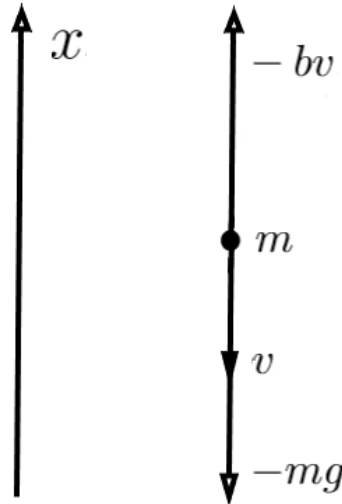
Fonte: O próprio autor.

2.2.8 Movimento de Queda de um Corpo com força resistiva proporcional a velocidade

Quando se estuda movimentos em uma dimensão, o único tipo de força importante que possui dependência da velocidade é a força de atrito. Para meios viscosos (gás, líquido, etc), a dependência das forças de resistência ao movimento de um dado corpo, devido às viscosidades, com a velocidade são mais complexas (WATARI, 2004). A seguir será apresentado um dos problemas mais simples de queda de um corpo em que a força de resistência é proporcional a velocidade.

Considere uma partícula de massa m que cai sob a ação da gravidade e sofre uma força resistiva proporcional à velocidade. Considerando que a mesma foi abandonada a partir do repouso, pretende-se determinar a velocidade, $v(t)$, para os instantes subsequentes. Para solucionar o referido problema, será adotado o referencial proposto na Figura 3.

Figura 3 – Orientação positiva do eixo vertical e as forças que atuam num corpo de massa m .



Fonte: Adaptada de Watari (2004, p.45).

Utilizando a segunda lei de Newton ($\vec{F}_R = m\vec{a}$) verifica-se que a equação diferencial do movimento dessa partícula é dada por $m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$. As forças presentes nesta equação estão esquematizadas na Figura 3. Dividindo-se esta equação por m e rearranjando os termos, resulta em:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = -g, \quad (2.24)$$

que é uma equação linear do tipo (B.5)⁴, onde as correspondências

$$x \rightarrow t, \quad p(x) \rightarrow \frac{b}{m} \quad e \quad q(x) \rightarrow -g$$

podem ser feitas. Como, $\int^e p(n) dn = \int^e \frac{b}{m} dn = \frac{b}{m}\epsilon$, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{b}{m}t} \left[\int^t e^{\frac{b}{m}s} (-)g ds + C \right] = e^{-\frac{b}{m}t} \left[-\frac{mg}{b} e^{\frac{b}{m}t} + C \right] = \\ &= -\frac{mg}{b} + Ce^{-\frac{b}{m}t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

⁴ Neste trabalho não será apresentado o Teorema da Existência e Unicidade. Entretanto, para o leitor que deseja estudar o Teorema indica-se que veja o apêndice B da obra escrita por Watari (2004, p.114).

Considerando $v(0) = 0$, obtém-se: $C = \frac{mg}{b}$. Logo,

$$v(t) = -\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right). \quad (2.26)$$

Qual valor encontrado quando $\frac{b}{m}t \ll 1$, isto é, $t \ll \frac{m}{b}$?. Usando o fato que $e^\epsilon \sim 1 + \epsilon$ quando $\epsilon \ll 1$,

$$v(t) \approx -\frac{mg}{b} \left(1 - 1 + \frac{b}{m}t\right) = -gt, \quad (2.27)$$

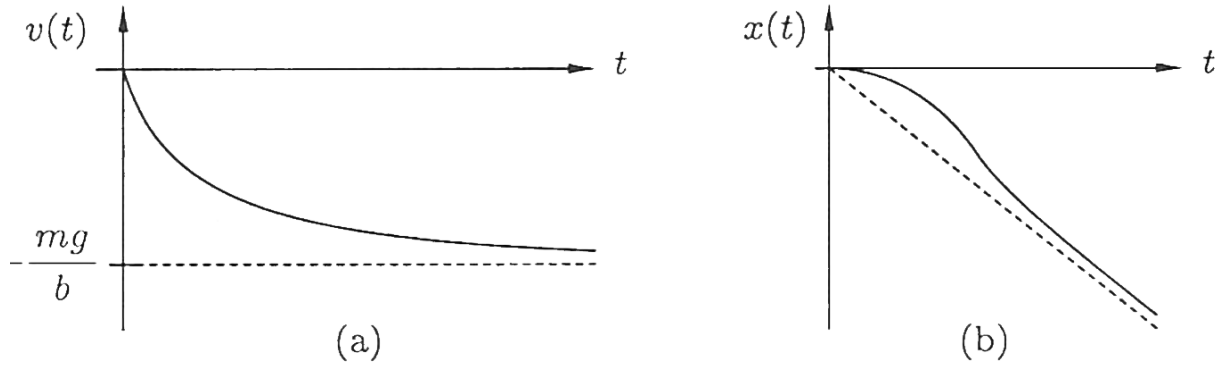
que é o resultado de $v(t)$ para uma partícula em queda livre. Conforme Watari (2004), no início do movimento a velocidade da partícula é muito pequena, e, assim, a força resistiva é insignificante. Sendo esperado que o movimento seja aproximadamente o de queda livre. A velocidade aumenta com o passar do tempo até atingir um valor limite, quando $t \rightarrow \infty$ (após um tempo), dada por $-\frac{mg}{b}$ e denominada velocidade terminal. O comportamento de v em função de t é mostrado na Figura 4 (a). Quando $-mg - bv_{terminal} = 0$, significa que a velocidade aumenta até a força resistiva equilibrar a força peso.

Lembrando-se que $\frac{dx}{dt} = v$, pode-se escrever:

$$\int_0^x dx = x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)dt. \quad (2.28)$$

Substituindo-se $v(t)$ dada por 2.26 e supondo-se que $x(0) = 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t -\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) dt = -\frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\right) \Big|_0^t = \\ &= -\frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b}\right) = \frac{m^2g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - e^{-\frac{b}{m}t}\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Figura 4 – Comportamento de $v(t)$ e $x(t)$.

Fonte: Watari (2004, p.46).

Se analisar esta expressão para $t \ll \frac{m}{b}$, isto é, no início do movimento, como foi feito com $v(t)$, obtém-se:

$$x(t) \approx \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - 1 + \frac{b}{m}t - \frac{1}{2} \frac{b^2}{m^2} t^2 \right) = -\frac{1}{2} g t^2, \quad (2.30)$$

onde foi utilizado $e^\epsilon \sim 1 + \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2$ para $\epsilon \ll 1$. Por outro lado, quando t torna-se grande, $x(t) \rightarrow -\frac{mg}{b}t$, isto é, a partícula tende a cair com velocidade constante, que é a velocidade terminal. O comportamento completo de $x(t)$ é mostrado na Figura 4 (b). Tanto a Equação 2.26 de $v(t)$ quanto a Equação 2.29 de $x(t)$ mostram que, à medida que a força resistiva aproxima-se da força peso, a queda dessa partícula tende a um movimento uniforme com a velocidade limite dada por $\frac{mg}{b}$, em valor absoluto (WATARI, 2004).

3 ESTATÍSTICA PARA O TRATAMENTO DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Nesse capítulo será desenvolvida a estatística básica que será necessária para o tratamento dos dados.

3.1 Medida de Tendência Central e Variabilidade

A maioria dos dados apresenta uma diferente tendência de se agrupar em torno de um ponto central. Assim, para um determinado conjunto de dados, torna-se possível selecionar uma média para fornecer a descrição de todo o conjunto. Este valor descritivo é denominado de **medida de localização** ou **tendência central**. Como tipos de médias de tendência central utilizadas cita-se: a média aritmética, a mediana, a moda, a média do intervalo e a média das juntas ou *midhinge* (LEVINE; BERENSON; STEPHEN, 2008).

- **Média Aritmética**

Em geral, a média aritmética¹ é o tipo de medida central mais utilizada. A média aritmética (\bar{x}) para uma amostra de n observações do conjunto $X (x_1, x_2, \dots, x_n)$, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

A Equação 3.1 pode ser lida assim: a média aritmética de todas as observações é calculada somando-se todas elas e dividindo-se pelo número total de observações. Conforme Levine, Berenson e Stephen (2008), a média funciona como ponto de equilíbrio de modo que as observações que são menores equilibram as maiores.

Um conjunto de dados numéricos pode também ser descrito por uma **variação**. Entende-se por **variação** uma quantidade de **dispersão** ou *spread* nos dados. Com relação a variação nos dados, há duas maneiras geralmente utilizadas que levam em conta o modo como todos os valores estão distribuídos, as quais são: a **variância** e o **desvio padrão**. Tais medidas permitem avaliar o modo como os dados apresentam flutuações em torno da média (LEVINE; BERENSON; STEPHEN, 2008).

¹ Com relação a média aritmética algumas observações devem ser feitas. Uma vez que, a mesma se baseia em todas as observações, torna-se altamente afetada por um ou mais valores extremos da amostra. Para tais casos, verifica-se uma representação distorcida do que os dados estão fornecendo. Logo, para tais tipos de dados, não é conveniente a utilização do cálculo da média aritmética para descrever o conjunto de dados (LEVINE; BERENSON; STEPHEN, 2008).

- **Variância**

A variância de um conjunto de dados é uma medida da variação igual ao quadrado do desvio padrão e é definida conforme Levine, Berenson e Stephen (2008) como sendo:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}. \quad (3.2)$$

Observe que a variância da amostra é aproximadamente a média das diferenças ao quadrado entre cada observação e a média aritmética das observações.

- **Desvio padrão**

Sabe-se que quanto menor for a dispersão ou variabilidade entre os dados de uma amostra, mais correto será o valor da medida de tendência central apresentado. Logo, a dispersão indica o grau de variação dos dados em torno de um valor médio (BORGES, 2003). O desvio padrão é a mais utilizada das medidas de dispersão.

Segundo Bussab e Morettin (2010), o desvio padrão é definido como a raiz quadrada positiva da variância. Logo, pode-se escrever:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}. \quad (3.3)$$

A leitura da Equação 3.3 pode ser feita da seguinte forma: o desvio padrão é a raiz quadrada da soma das diferenças ao quadrado entre a observação e a média aritmética das observações dividida pelo número de observações menos um (1).

Observe que a variância (S^2) e o desvio padrão (S) nunca podem ser negativos e a única condição para que eles sejam zero é quando os dados não apresentam variação, ou seja, são exatamente os mesmos. Entretanto, dados numéricos são inerentemente variáveis. Logo, torna-se importante estudar, além das medidas de tendência central que resumem os dados, também as medidas de variação que refletem a forma como os dados estão dispersos (LEVINE; BERENSON; STEPHEN, 2008). A variância (S^2) e o desvio padrão (S) indicam a dispersão “média” em torno da média aritmética. Observe que quanto mais dispersos estiverem os dados, maiores serão a variância e o desvio padrão. Quanto mais concentrados ou homogêneos estiverem os dados menores serão a variância e o desvio padrão. Para o caso em que todas as observações forem idênticas a variância e o desvio padrão serão nulos ($S^2 = 0$; $S = 0$).

- **Coefficiente de variação (CV)**

O coeficiente de variação é entendido como a medida relativa da variação e mede a dispersão dos dados em relação a média aritmética. Conforme Levine, Berenson e Stephen (2008), é dado por:

$$CV = \left(\frac{S}{\bar{x}} \right) 100\%. \quad (3.4)$$

A Equação 3.4 pode ser lida da seguinte forma: o coeficiente de variação é igual ao desvio padrão dividido pela média aritmética, multiplicado por 100%.

Para Correa (2003), uma distribuição tem baixa, média ou alta dispersão de acordo com os seguintes critérios:

$$\begin{aligned} CV &\leq 15\% \quad (\text{Baixa dispersão}); \\ 15\% &< CV < 30\% \quad (\text{Média dispersão}); \\ CV &\geq 30\% \quad (\text{Alta dispersão}). \end{aligned}$$

3.2 Erros de uma medida

Define-se o **erro** de uma medida como sendo:

$$\epsilon = V - V_R. \quad (3.5)$$

em que, V é o valor medido e V_R é o valor real da medida. Entretanto, em boa parte das vezes o parâmetro V_R de uma medida não pode ser determinado, logo, não há como determinar o erro. Uma sugestão para contornar isso é substituir o valor real pelo valor mais próximo dele e calcular o desvio da medida (SILVA; SILVA; NASCIMENTO, 1995).

Mesmo tendo o conhecimento do erro de uma determinada medida há uma certa dificuldade em avaliar se o mesmo é “pequeno ou grande” devido ao fato de não se ter um parâmetro para comparação. Assim, define-se o **erro relativo** de uma medida como sendo:

$$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{V_R} = \frac{V - V_R}{V_R}. \quad (3.6)$$

O **erro percentual** é definido como o erro relativo multiplicado por 100. Assim, escreve-se:

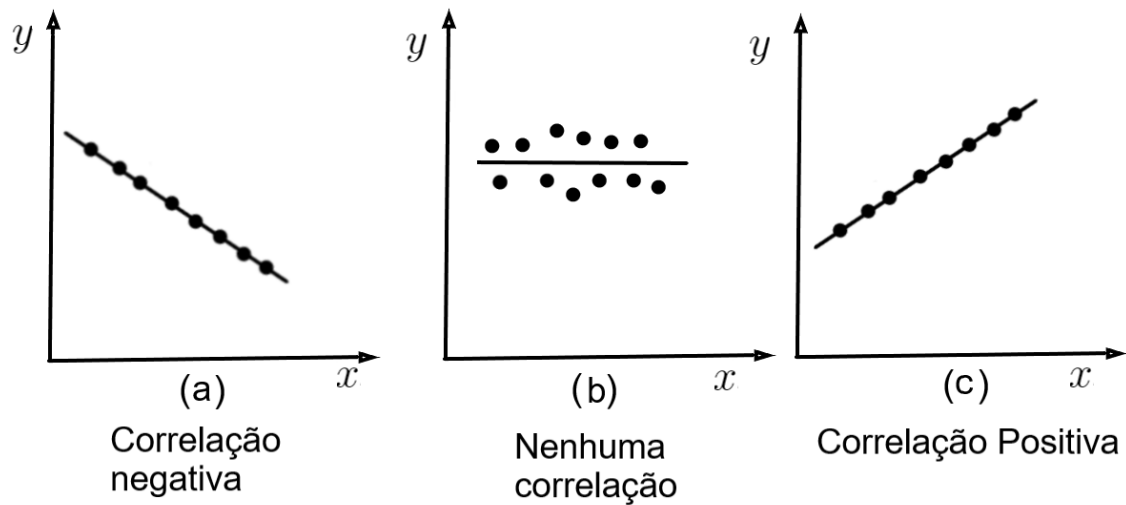
$$\epsilon_p = \epsilon_R \times 100. \quad (3.7)$$

3.3 Regressão Linear Simples

A análise de regressão representa a verificação de uma análise estatística com a finalidade de averiguar a existência de uma associação entre duas variáveis sendo uma dependente e outra independente. Ela equivale à obtenção de uma equação que tente esclarecer a variação da variável dependente pela variação dos níveis da variável independente.

Dentre as muitas maneiras em que equações de regressão são utilizadas, uma delas é em situações em que duas variáveis medem aproximadamente a mesma coisa, sendo uma delas mais simples de lidar em relação a outra (STEVENSON, 1981). Assim, conforme Stevenson (1981), a finalidade da equação de regressão é estimar valores de uma variável, com base em valores conhecidos da outra. Outra utilização das equações de regressão é no sentido de explicar valores de uma variável em termos da outra. Assim, pode-se suspeitar de uma relação de causa e efeito entre duas variáveis (STEVENSON, 1981). É importante destacar que nem todas as situações a serem estudadas podem ser aproximadas por uma equação linear. Sendo assim, é requerido um processo preliminar para fazer essa determinação. O processo mais simples consiste em fazer um gráfico de diagrama de dispersão, para verificar o comportamento dos dados da variável dependente (y) em função da variável independente (x). Na Figura 5 observam-se três gráficos de dispersão. No gráfico (a) os pontos demonstram uma relação negativa entre as variáveis. Já no gráfico (b) os pontos indicam que não há uma relação entre as variáveis. No gráfico (c) os pontos sugerem uma correlação positiva entre as variáveis.

Figura 5 – Três modelos de gráfico de dispersão.



Fonte: Adaptada de Levine, Berenson e Stephen (2008, p. 537).

O comportamento da variável y em relação a variável x pode variar bastante. Para explicar o fenômeno deve-se ter um modelo matemático definido, um modelo que se ajuste a um tipo de curva e equação que mais se aproxima dos pontos do diagrama de dispersão. Contudo, os pontos do gráfico não vão se ajustar por igual à curva do modelo matemático escolhido. A maior parte desses pontos do gráfico vão se encontrar a uma certa distância da curva do modelo. O que causa isso é o fato do fenômeno em estudo sofrer influências que acontecem por acaso.

Para os pontos que ficam um pouco distantes da linha reta do gráfico de dispersão, um dos meios que pode ser utilizado para diminuir os erros é uma equação estimada, essa equação as distâncias entre os pontos do diagrama e os pontos da curva, seja a mínima possível.

Vamos utilizar o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Resumindo, pelo método dos mínimos quadrados a soma de quadrados das distâncias entre os pontos do diagrama e os respectivos pontos na curva da equação estimada é reduzido, obtendo-se, dessa maneira, uma relação entre x e y , com um mínimo de erro possível.

O modelo estatístico para regressão linear simples segundo Bussab e Morettin (2010), é dado por:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad (3.8)$$

onde y_i é o valor observado para a variável dependente y no i -ésimo termo da variável independente x , α é a constante de regressão e representa o intercepto da reta com o eixo

dos y , β é o coeficiente de regressão (também chamado de coeficiente angular), representa a variação de y em função da variação de uma unidade da variável x , x_i é o i -ésimo termo da variável independente $x(i = 1, 2, \dots, n)$, e_i é o erro que está associado à distância entre o valor observado y_i e o correspondente ponto na curva do modelo proposto, para o mesmo termo i de x .

3.3.0.1 Estimação por Mínimos Quadrados

Agora serão obtidos os estimadores de mínimos quadrados para os parâmetros do modelo linear como na Equação 3.8. Para isso, suposições para as variáveis envolvidas serão feitas.

A primeira é que a variável X é, por hipótese, controlada e não tem variações aleatórias. Diz-se que a mesma é uma variável fixa. A segunda é que, para dado valor x de X , os erros distribuem-se ao redor da média $\alpha + \beta x$ com média zero, isto é:

$$E(e_i|x) = 0. \quad (3.9)$$

em terceiro lugar, deve-se supor que os erros seguem uma distribuição normal em torno dos termos de X , ou seja,

$$e \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.10)$$

em quarto lugar, será introduzida a restrição de que os erros sejam não-correlacionados.

Com uma amostra de n indivíduos, tem-se n pares de valores (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, que devem satisfazer a Equação 3.8.

É requerido introduzir um critério que permita encontrar α e β . Vamos utilizar o critério que consiste em encontrar os valores de α e β que minimizam a soma dos quadrados dos erros, a partir da Equação 3.8 obtemos:

$$e_i = y_i - (\alpha + \beta x_i), i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Daí, obtém-se, a quantidade de informação perdida pelo modelo ou soma dos quadrados dos erros (ou desvios), dado por:

$$SQ(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - (\alpha + \beta x_i)\}^2. \quad (3.12)$$

Para cada valor de α e β há um resultado para essa soma de quadrados, e a solução de mínimos quadrados (MQ) é a que torna essa soma mínima. Observa-se que a Equação 3.12 é uma função de α e β . Assim, para minimizar a Equação 3.12 deriva-se a mesma em relação a α e β e igualando a zero, observa-se que as soluções $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ devem satisfazer

$$n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \quad (3.13)$$

e,

$$\hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.14)$$

as quais produzem as soluções:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}, \quad (3.15)$$

e,

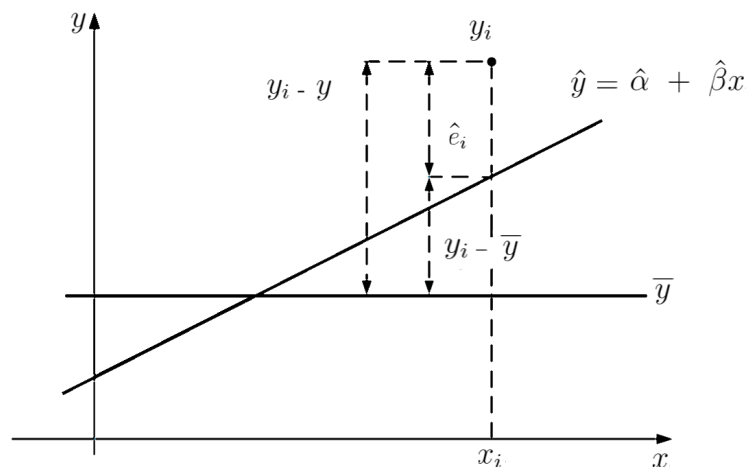
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}. \quad (3.16)$$

Assim, têm-se o modelo final escrito como sendo:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i. \quad (3.17)$$

Na Figura 6 observa-se a disposição geométrica dos parâmetros físicos que vem sendo destacados na obtenção da Equação 3.17.

Figura 6 – Representação gráfica dos diversos desvios.



Fonte: Adaptada de Bussab e Morettin (2010, p.457).

3.3.1 Propriedades dos Estimadores de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$

Os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ possuem importantes propriedades amostrais: uma delas é que a dispersão é a mesma para cada nível da variável X e a outra é que estas distribuições são normais, com a mesma variância.

Segundo escreve Bussab e Morettin (2010), o modelo é:

$$Y_i = E(Y|x_i) + e_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

e deve satisfazer as seguintes suposições:

- Para cada valor de x_i , o erro e_i tem média zero e variância constante σ_e^2 .
- Se $i \neq j$, $Cov(e_i, e_j) = 0$, isto é, para duas observações distintas, os erros são não-correlacionados.

Tem-se que:

$$E(Y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i \quad e \quad Var(Y_i|x_i) = \sigma_e^2,$$

e ainda que Y_i e Y_j são não-correlacionados, para $i \neq j$.

3.3.2 Média e Variância dos Estimadores

Agora serão obtidos a média e a variância dos estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, dados nas Equações 3.15 e 3.16. Destaca-se aqui que toda a dedução que será realizada tem como base o trabalho de Bussab e Morettin (2010, p. 461-462). Para o estimador $\hat{\beta}$, tem-se:

$$E(\hat{\beta}) = \beta, \quad (3.19)$$

e

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.20)$$

Para o estimador $\hat{\alpha}$, têm-se:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha, \quad (3.21)$$

e,

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma_e^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.22)$$

As deduções das Médias e Variância dos Estimadores podem ser vistas em detalhes no Apêndice C.

3.3.3 Distribuições Amostrais dos Estimadores dos Parâmetros

Segundo Bussab e Morettin (2010), os erros e_i são variáveis aleatórias com distribuição normal, ou seja,

$$e_i \sim N(0; \sigma_e^2),^2 \quad (3.23)$$

o que implica em:

$$y_i \sim N(\alpha + \beta x_i; \sigma_e^2). \quad (3.24)$$

Como $\hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}$ têm ambos distribuição normal, com médias e variâncias dadas por Equação 3.19, Equação 3.20 e Equação 3.21, Equação 3.22, isto é,

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha; \frac{\sigma_e^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}\right), \quad (3.25)$$

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta; \frac{\sigma_e^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right). \quad (3.26)$$

De tais resultados obtidos anteriormente, pode-se concluir que

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_e} \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sim N(0, 1),^3 \quad (3.27)$$

e,

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma_e} \sqrt{\frac{n \sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum x_i^2}} \sim N(0, 1).^4 \quad (3.28)$$

² Significa que os erros tem distribuição normal com média igual a zero e variância igual a variância dos erros da amostra. Conforme Stevenson (1981), o gráfico de uma distribuição normal se assemelha muito a um sino. É suave, unimodal, e simétrico em relação à sua média. Menos óbvio é o fato de que a curva se prolonga indefinidamente em qualquer das direções, a partir da média.

³ Significa que a distribuição amostral do parâmetros $\hat{\beta}$ tem distribuição normal com a média do estimador igual a zero, e variância do estimador igual a 1.

⁴ Significa que a distribuição amostral do parâmetros $\hat{\alpha}$ tem distribuição normal com média estimada igual a zero, e a variância do estimador igual a 1.

3.3.3.1 Teste de Hipótese sobre α e β

Entende-se por teste de hipótese uma técnica de se realizar inferência estatística. Assim, a partir de um teste de hipóteses, através dos dados amostrais, pode ser feita a inferência acerca da população⁵ (FONSECA; MARTINS, 2011).

A construção de um teste de hipóteses pode ser explicada da seguinte forma: existe uma variável X associada a dada população e tem-se uma hipótese sobre determinado parâmetro θ dessa população. Afirma-se que o verdadeiro valor de θ é θ_0 .

Testar a hipótese de que o intercepto é igual a um determinado valor, essa hipótese é chamada de hipótese nula, e escreve-se da seguinte forma:

$$H_0 : \theta = \theta_0.$$

Em seguida, será explícita a hipótese que será considerada aceitável, caso H_0 seja rejeitada. Tal hipótese será denominada de hipótese alternativa. A hipótese alternativa é representada da seguinte forma:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Qualquer uma que escolhermos, estamos sujeitos a cometer erros. Para facilitar nosso entendimento, vamos as definições:

Erro de tipo I: rejeitar a hipótese nula quando essa é verdadeira. Onde chamamos de α a probabilidade de cometer esse erro, isto é:

$$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}).$$

Erro do tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa. A probabilidade de cometer esse erro é denotado por β , logo, têm-se:

$$\beta = P(\text{erro do tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}).$$

O teste de hipótese tem como objetivo dizer, usando uma estatística $\hat{\theta}$, se a hipótese H_0 é ou não aceitável. Mas, essa decisão é tomada através da aceitação de uma região crítica RC . Caso o valor observado pertença a essa região, ($\hat{\theta} \in RC$), rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 . A região em estudo é construída de modo que $P(\hat{\theta} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira})$ seja igual a α , fixado a priori. Essa região crítica é sempre construída sob a hipótese de H_0 ser verdadeira (BUSSAB; MORETTIN, 2010).

⁵ Conforme Bussab e Morettin (2010), uma população é definida como sendo o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação. E a amostra é qualquer subconjunto da população.

Para Bussab e Morettin (2010), a chance α de se cometer um erro de tipo I é um valor arbitrário e é conhecido como nível de significância do teste. O resultado da amostra é mais significativo para rejeitar H_0 quando menor for o nível de α . Resumindo, quanto menor for α , menor é a probabilidade de se obter uma amostra pertencente à região crítica do teste.

Bussab e Morettin (2010) dizem que, para criar um teste de hipóteses, os seguintes passos podem ser utilizados:

1. Fixar a hipótese H_0 a ser testada e qual a hipótese alternativa de H_1 .
2. Usar as informações disponíveis para decidir qual estatística (estimador) vai ser usada para testar a hipótese H_0 . Obter as propriedades dessa estatística (distribuição, média, desvio padrão).
3. Fixar a probabilidade de α de cometer o erro do tipo I e usar esse valor para construir a região crítica do teste.
4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.
5. Se o valor calculado com os dados da amostra não pertencer à região crítica, não rejeita H_0 ; caso contrário, rejeite H_0 .

Devemos tomar como H_0 aquela hipótese, que, rejeitada, conduza a um erro de tipo I mais importante de evitar. Se H_0 é rejeitada, implica que x tem importância ao explicar a variabilidade de y .

Conforme afirma Fonseca e Martins (1996), fixado o valor de α , pode-se determinar a probabilidade β de se cometer o erro tipo II. Para o cálculo de β (probabilidade de aceitar H_0 , quando H_0 é falsa), é preciso admitir outros valores para H_0 , já que o seu valor original é considerado falso.

3.3.3.2 Teste de significância para a média

Conforme escreve Fonseca e Martins (2011), os teste de significância são mais utilizados em pesquisas educacionais, sócio-econômicas, etc. O mesmo considera apenas erros do tipo α e para a sua realização os seguintes procedimentos são realizados:

1. Enunciar as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
2. Fixar α . Admitindo que σ^2 é desconhecida, a variável do teste será “t” dStudent, como $\phi = (n - 1)$.

3. Com o auxílio da tabela “t” determinam-se RA (Região de Aceitação) e RC (Região Crítica).

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

onde, \bar{x} é a média amostral, θ_0 é o valor da hipótese nula, s é o desvio-padrão amostral e n é o tamanho da amostra.

4. Conclusão:

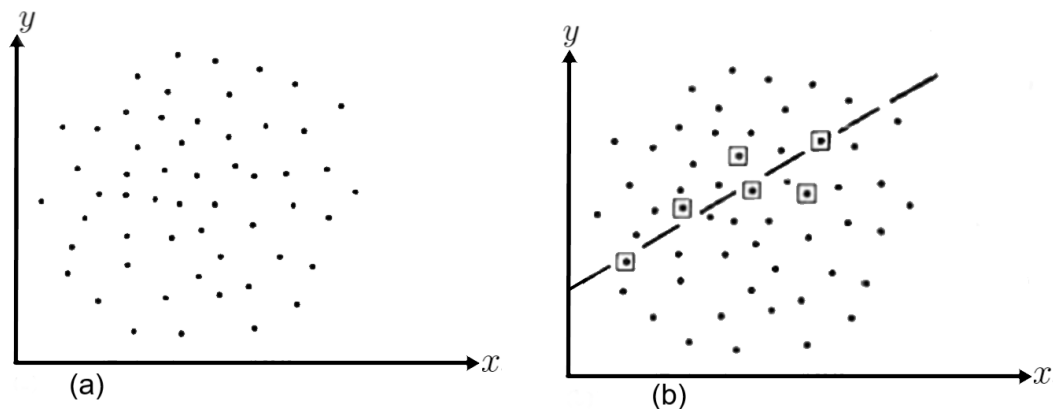
Se $-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq t_{cal} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}$ não se pode rejeitar H_0 .

Se $t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2}}$, rejeita-se H_0 .

3.4 INFERÊNCIAS SOBRE O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA DE REGRESSÃO

Mesmo quando há pouco ou nenhum relacionamento entre as variáveis numa população, torna-se possível obter valores amostrais que façam as variáveis parecerem relacionadas conforme pode-se observar na Figura 7.

Figura 7 – (a) Uma população sem relação entre as variáveis. (b) Observações amostrais hipotéticas da população tornam aparente uma relação.



Fonte: Adaptada de Stevenson (1981, p.356).

O que pode ocorrer é que fatores aleatórios na amostragem produziram um relacionamento onde nenhum existe (STEVENSON, 1981). Por isso é importante verificar os resultados de tais cálculos com o propósito de decidir se são relevantes (isto é, se os verdadeiros parâmetros não são iguais a zero). Deseja-se distinguir entre situações em que as variáveis são relacionadas, e em que não são. Se não, é de esperar um coeficiente angular zero. Por isso testa-se a hipótese nula $H_0 : \theta = \theta_0$ contra a alternativa $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

A significância do coeficiente de regressão pode ser testada comparando-o com seu desvio padrão S .

$$t = \frac{\text{valor amostral} - \text{valor esperado}}{\text{valor padrão}} = \frac{b - 0}{s_b} = \frac{b}{s_b}.$$

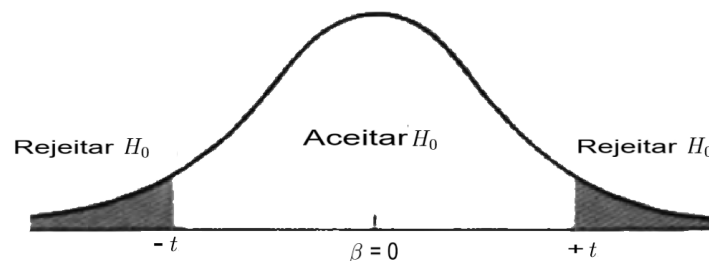
Pode-se testar a hipótese $b = \beta$, isto é, que o coeficiente angular tenha um certo valor. A fórmula para t é:

$$t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

Segundo Stevenson (1981), dependendo da razão ser relativamente pequena ou grande, será um indicativo de que o verdadeiro valor possa ser zero ou o contrário.

A Figura 8 esclarece esse conceito. A distribuição amostral da diferença relativa é uma distribuição t com $n - 2$ graus de liberdade. Usa-se, assim, o valor crítico⁶ obtido de uma tabela t para determinar se o tamanho relativo de b é grande ou pequeno.

Figura 8 – Distribuição com suas regiões críticas.



Fonte: Adaptada de Stevenson (1981, p.356).

A quantidade de dispersão na população pode ser estimada com base na dispersão das observações amostrais em relação à reta de regressão calculada, para esse cálculo vamos usar a seguinte fórmula, segundo Stevenson (1981):

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_c)^2}{n - 2}},$$

onde:

y_i = cada valor de y ;

⁶ O coeficiente angular é diferente de zero se t_{teste} excede $\pm t_{tabela}$ (STEVENSON, 1981, p. 356).

y_c = valor correspondente da reta de regressão, deduzido da equação de regressão;
 n = número de observações.

Para Stevenson (1981), há uma forma mais conveniente de calcular s_e , a qual é dada por:

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a \sum y - b \sum xy}{n - 2}}.$$

O desvio padrão da distribuição amostral do coeficiente angular, segundo Stevenson (1981), é dado por:

$$s_b = s_e \sqrt{\frac{1}{\sum x^2 - [(\sum x)^2/n]}}.$$

As vezes é melhor estabelecer um intervalo de confiança para o verdadeiro valor de β do que simplesmente testar a significância de b . O intervalo de confiança é $b \pm ts_b$, ou ainda,

$$b - ts_b \leq \beta \leq b + ts_b. \quad (3.29)$$

O intervalo de confiança responde a uma dupla finalidade. Indica o intervalo provável em que o verdadeiro valor pode estar, assim como pode ser usado também para testar a significância de um coeficiente angular amostral.

3.4.1 Coeficiente de Correlação (r)

Quando todos os valores das variáveis satisfazem exatamente uma dada equação, diz-se que as mesmas se “apresentam” como perfeitamente correlacionadas ou que existe uma correlação perfeita entre elas (SPIEGEL, 1993). A correlação linear r mede a intensidade da relação linear entre duas ou mais variáveis (CORREA, 2003). Essa correlação pode ser positiva ou negativa, positiva quando as variáveis (x, y) são diretamente proporcionais. E negativa quando as variáveis (x, y) são inversamente proporcionais.

Os seguintes critérios devem ser seguidos ao se testarem hipóteses ou ao se fazerem outras inferências sobre r .

1. Os dados de (x, y) são amostras aleatórias de dados quantitativos independentes. É importante que os dados amostrais não tenham sido coletados com o uso de método não apropriado.
2. O gráfico visual do diagrama de dispersão deve confirmar que os pontos se aproximam do padrão de uma reta.

3. Quaisquer valores atípicos devem ser removidos caso se saiba que são erros. Os efeitos de quaisquer outros valores atípicos devem ser considerados pelo cálculo de r com e sem o valor atípico incluído.

Os itens 2 e 3 são tentativas simplificadas de se verificar este requisito formal. Para verificar o grau de correlação entre as variáveis, calcula-se o coeficiente de correlação linear pela fórmula do coeficiente de correlação, o qual, conforme Bussab e Morettin (2010), é dado por:

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2)}}, \quad (3.30)$$

em que, n são os pares de valores $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Para Correa (2003):

O valor do coeficiente de correlação r tem a variação entre $+1$ e -1 , ou seja, está limitado entre os valores do intervalo $[-1, +1]$. $r = +1$ (correlação positiva entre as variáveis); $r = -1$ (correlação perfeita negativa entre as variáveis); $r = 0$ (não há correlação entre as variáveis ou, ainda, a correlação não é linear, caso exista). Quanto mais próximo o valor de r estiver do valor “1”, mais forte a correlação linear. Quanto mais próximo o valor de r estiver do valor “0”, mais fraca a correlação linear (CORREA, 2003, p. 109).

Multiplicando-se o valor de r por 100, o resultado passa a ser expresso em porcentagem. E os critérios para verificar os diversos níveis do fraco ao forte, chegando até o perfeito, conforme Correa (2003), são:

- $0 < |r| < 0,3$: a correlação é fraca e torna-se difícil estabelecer relação entre as variáveis envolvidas. Em porcentagem: $0 < |r| < 30\%$;
- $0,3 \leq |r| < 0,6$: a correlação é fraca. Entretanto, pode-se considerar a existência de relativa correlação entre as variáveis. Em porcentagem: $30\% \leq |r| < 60\%$;
- $0,6 \leq |r| < 1$: a correlação é de média para forte; a relação entre as variáveis é significativa, o que permite coerência com poucos conflitos na obtenção das conclusões. Em porcentagem: $60\% \leq |r| \leq 100\%$.

3.4.2 Coeficiente de Determinação r^2

O quadrado do coeficiente de correlação de Pearson é chamado de coeficiente de determinação ou simplesmente r^2 para o caso de regressão linear simples. O R^2 explica a proporção da variabilidade explicada pela variável explicativa. Ou seja, fornece uma informação auxiliar ou resultado da análise de variância da regressão, como uma maneira de

se verificar se o modelo proposto é adequado ou não para descrever o fenômeno. Conforme Stevenson (1981), uma medida útil, associada à reta de regressão, é o grau em que as predições baseadas na equação de regressão superam as predições baseadas em \bar{y} .

A variação dos pontos em torno da média é chamada de variação total. Essa variação é calculada com a soma dos desvios elevados ao quadrado. Já os desvios verticais dos y_i 's chama-se variação não-explicada. Essas variações são calculadas com a soma de quadrados de desvios em relação a reta e são dadas por:

$$\text{Variação total} = \sum (y_i - \bar{y})^2.$$

$$\text{Variação não-explicada} = \sum (y_i - \hat{y})^2.$$

Para saber a quantidade de desvios explicada pela reta de regressão é só fazer a diferença entre a variação total e a não explicada, ou seja,

$$\text{variação explicada} = \text{variação total} - \text{variação não explicada}.$$

Para Stevenson (1981) o coeficiente de determinação é dado por:

$$r^2 = \frac{\text{variação explicada}}{\text{variação total}} \quad (3.31)$$

O valor de r^2 varia no intervalo de 0 a 1. Valores próximos de 1 indicam que o modelo proposto é adequado para descrever o fenômeno.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesse capítulo será descrita a metodologia utilizada na confecção desse trabalho.

4.1 ENQUADRAMENTO DA PESQUISA

Quanto a natureza esta pesquisa pode ser enquadrada como básica, uma vez que objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Diante dos objetivos citados esta pesquisa é classificada como **Explicativa**, uma vez, que tem como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos. As pesquisas explicativas nas ciências naturais valem-se quase exclusivamente do método experimental (GIL, 2002).

Com relação aos procedimentos técnicos, a mesma é considerada **bibliográfica e experimental**. Conforme Gil (2002), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. A principal vantagem dessa pesquisa é que ela reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Entretanto, algumas vezes as fontes secundárias apresentam dados coletados ou processados de forma equivocada e assim podem prejudicar a qualidade da pesquisa (GIL, 2002). A pesquisa experimental representa o melhor exemplo de pesquisa científica, pois consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de como controlar e de observação dos efeitos que a variáveis produzem no objeto (GIL, 2002).

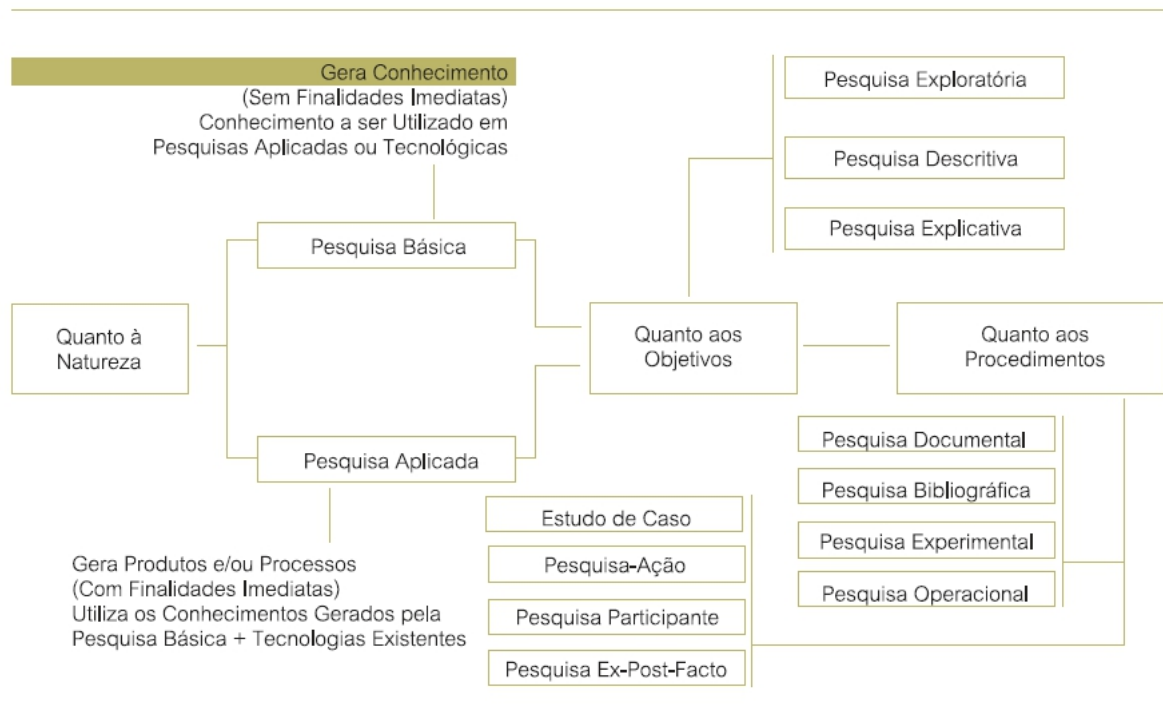
Conforme Severino (2007), a pesquisa experimental torna o próprio objeto em sua concretude como fonte e o coloca em condições técnicas de observação e manipulação experimental nas bancadas e pranchetas de um laboratório, onde são criadas condições adequadas para seu tratamento.

Segundo Gil (2002), a pesquisa experimental tem as seguintes propriedades:

- manipulação;
- controle;
- distribuição aleatória.

Na Figura 9 observam-se os tipos de pesquisas científicas em que pode-se verificar as causas do enquadramento dessa pesquisa.

Figura 9 – Tipos de pesquisa científica.



Fonte: Prodanov e Freitas (2013, p. 51).

4.1.1 O Kit experimental utilizado

A pesquisa desenvolvida neste trabalho teve como base as observações do tempo de queda de uma esfera metálica de massa m liberada a partir do repouso de uma altura y_0 . O kit experimental (CIDEPE) para queda de corpos utilizado pertence ao laboratório de Física do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Estadual da Paraíba. O mesmo é composto de um tripé universal delta max, uma bobina multiuso, conjunto de sensores fotoelétricos e um cronômetro digital multifuncional com rolagem de dados, além das esferas de massa m .

Na Figura 10 pode-se observar o kit para queda de corpos com a bobina multiuso e os sensores fotoelétricos.

Figura 10 – Kit de queda de corpos utilizado nesta pesquisa.



Fonte: O próprio autor.

4.1.2 O sensor fotoelétrico

O sensor CL010 apresenta a seguinte **composição**:

- Emissor de luz policromática.
- Gabinete em aço com três orifícios guias.
- Manípulo M5.
- Cabo miniDIN-miniDIN.

Na Figura 11 observa-se em detalhe o sensor fotoelétrico e o cabo miniDin, o qual conecta o sensor com o cronômetro digital.

Figura 11 – Sensor fotoelétrico.



Fonte: O próprio autor.

4.1.3 Cronômetro digital multifuncional com rolagem de dados

O cronômetro digital multifuncional EQ228A apresenta a seguinte **composição**:

- Resolução de 1ms.
- Faixa de leitura de $50\mu\text{s}$ a 99,99995 s.
- Cabo de força (1q) com norma plugue macho NEMA 5/15 NBR 6147 e plugue fêmea norma IEC.

4.1.3.1 Identificação dos comandos e indicadores

Todas as informações que serão descritas em seguida podem ser verificadas na Figura 12.

No painel frontal identifica-se:

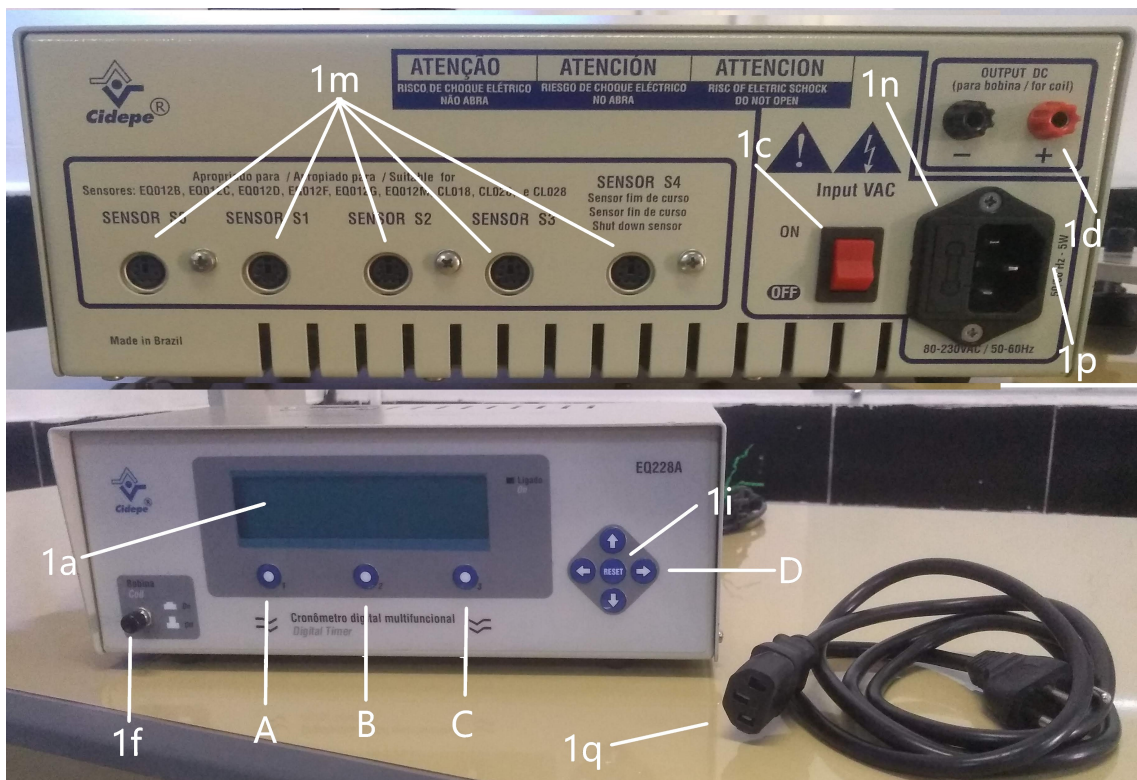
- (1a) display LCD;
- (1f) chave liga bobina;
- (A) tecla de seleção esquerda cuja função depende do texto apresentado na tela acima da mesma.
- (B) tecla de seleção central cuja função depende do texto apresentado acima da mesma.

- (C) tecla de seleção direita cuja função depende do texto apresentado na tela cima da mesma.
- (D) sistema de navegação em duas direções.
- (1i) tecla reset (pressionada levemente reinicia o programa).

No painel traseiro identifica-se:

- (1c) chave geral liga-desliga;
- (1d) saída para bobina de largada e retenção;
- (1m) entradas miniDIN para sensores fotoelétricos e acústicos;
- (1n) fusível;
- (1p) plugue de entrada norma IEC.

Figura 12 – Cronômetro digital multifuncional com rolagem de dados.



Fonte: O próprio autor.

4.1.3.2 Especificações de Funcionamento

O cronômetro multifuncional com rolagem de dados apresenta as seguintes especificações de funcionamento:

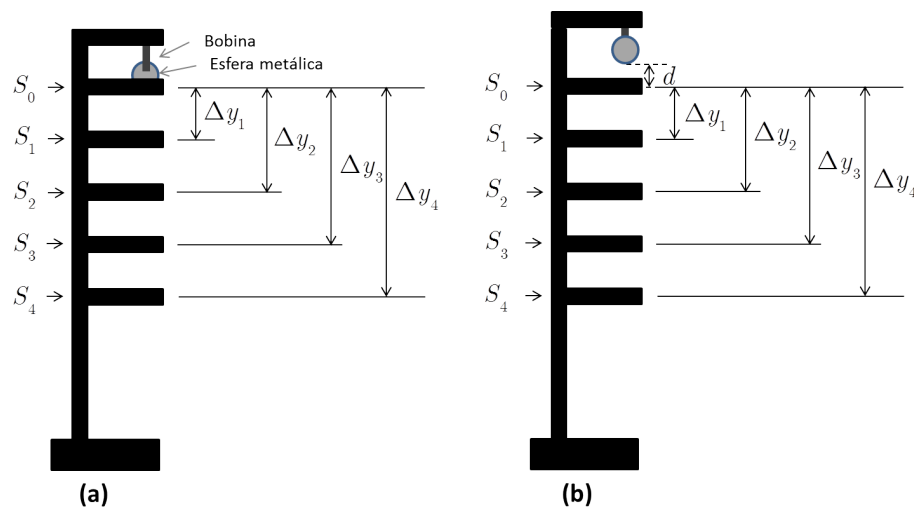
- Alimentação; 80-230 VAC - 50/60 Hz-automático.
- Temperatura de operação 0-40° C.

4.1.4 Descrição do experimento

O método utilizado nesse experimento permite o lançamento de uma esfera de aço e a obtenção automática dos tempos de queda e da velocidade da mesma ao passar por cada sensor fotoelétrico.

A Figura 13 mostra um esquema da montagem do experimento, que foi realizado de acordo com os seguintes passos:

Figura 13 – Esquema de montagem do experimento de queda da esfera.



Fonte: (a) esquema utilizado nesse Trabalho. A ideia principal para confecção da mesma foi do professor Dr. Brauner Gonçalves Coutinho, a qual foi adaptada pelo professor orientador desse TCC. A Figura (b) Adaptação de Coluci et al. (2013, p. 2506-4).

1. Encaixar os cabos (miniDin) no sensor fotoelétrico e no cronômetro;
2. Encaixar os cabos da bobina do kit de queda de corpos na saída para bobina de largada e retenção, a qual pode ser vista na Figura 12;

3. O sensor S_0 (o primeiro sensor de cima para baixo) foi ajustado com a esfera de massa m possuindo diâmetro (D)¹ de $(17,95 \pm 0,05)$ mm, de tal forma que a mesma fosse liberada com velocidade inicial nula ($v_0 = 0$ m/s) com $d = 0$ mm, como pode ser observado na Figura 13 (a). É importante destacar aqui que a esfera é presa a uma bobina multiuso. Na realidade, caso este ajuste entre a parte inferior da esfera e o sensor S_0 não tivesse sido feito, a velocidade da esfera ao passar por este sensor seria $\sqrt{2gd}$, em que d é a distância da extremidade inferior da esfera que não está em contato com a bobina e o sensor supracitado conforme pode ser observado na Figura 13 (b). Observando a Tabela 3, pode-se verificar que a distância máxima percorrida pela esfera é de 400mm. Assim, foi desprezado o efeito do atrito da esfera com o ar. Mohazzabi (2011) apresentou resultados de parâmetros físicos tais como velocidade e tempo de queda de uma esfera maciça de aço com raio 1cm (ou seja diâmetro de 2cm). O mesmo mostrou que para uma distância de 50cm, não considerar o atrito do ar leva a um erro no tempo de queda de 0,02%. Nesse TCC, a esfera utilizada possui diâmetro inferior se comparada com a apresentada no trabalho de Mohazzabi (2011). Além disso, as distâncias consideradas aqui também são inferiores a 50cm. Assim, pode-se sugerir que os erros obtidos nos tempos de queda da esfera são menores que 0,02% . Logo, é justificada a modelagem matemática aqui utilizada tratando a esfera no vácuo;
4. Ajustar os cinco (05) sensores (S_0, S_1, S_2, S_3 e S_4) distando igualmente 100mm um do outro conforme pode ser observado na Figura 13 (a), que é uma ilustração lateral do kit de queda de corpos. Então, na Figura 13 interpreta-se: $\Delta y_1 = (100 \pm 0,5)$ mm, $\Delta y_2 = (200 \pm 0,5)$ mm, $\Delta y_3 = (300 \pm 0,5)$ mm e $\Delta y_4 = (400 \pm 0,5)$ mm. Como a distância entre os sensores foi definida com uma régua milimetrada, sua leitura deve ser expressa na forma $L = (\bar{L} \pm 0,5)$ mm, em que \bar{L} é o valor lido. Entretanto, dependendo dos contornos do objeto, bem como da qualidade da régua, pode-se ou não ter a fração de milímetro estimada (SILVA; SILVA; NASCIMENTO, 1995);
5. Ajustar a inclinação do kit de queda de corpos para que a esfera passe por todos os sensores fotoelétricos;
6. O cronômetro possui algumas funções. Dentre elas, a Função F1 (2 ou 5 sensores) foi a utilizada neste experimento. Uma vez conectados os sensores fotoelétricos ao cronômetro na sequência em que serão utilizadas no experimento, aperta-se a tecla **ok** (tecla de seleção central). Na tela do cronômetro aparece a opção número de sensores e a opção que utilizamos foi a de cinco sensores. Nesta opção foi informada a distância

¹ Essa medida foi realizada utilizando-se de um paquímetro. Um paquímetro é um instrumento que possui um escala principal milimetrada e outra em polegadas gravada no seu corpo. Ele é projetado de tal forma que duas de suas partes tocam no objeto em dois pontos nos quais desejamos medir sua distância. Interessante destacar no paquímetro é que o problema de se observar duas coincidências simultâneas como no caso da régua fica resolvido e pode-se fazer leitura de frações de milímetro com segurança (SILVA; SILVA; NASCIMENTO, 1995).

entre os sensores utilizando o sistema de navegação para fazer a inserção dos dígitos. Uma vez informada a distância entre os sensores aperta-se novamente a tecla **ok** para realizar a conclusão. Em seguida, aparece na tela do cronômetro a informação para iniciar o experimento;

7. Uma vez seguidos os procedimentos relatados anteriormente, aperta-se a chave liga bobina e coloca-se a esfera na bobina do kit de queda de corpos. Solta-se a chave liga bobina e a esfera é liberada passando pelos cinco sensores. Ao passar pelo último sensor a medição é encerrada e aparece na tela do cronômetro a mensagem “experimento finalizado”. Ainda aparece uma instrução para vermos os resultados do experimento (que são os tempos de queda transcorridos entre o primeiro e os demais sensores, ou entre dois sensores consecutivos. Ainda tem-se a opção de verificar a velocidade com que a esfera passa em cada sensor) ou repetirmos o experimento;
8. O experimento foi repetido 70 vezes, uma vez que o desejo do autor do trabalho era que, do ponto de vista estatístico, os dados apresentassem 90% de confiança, o que resultou neste número para amostra.

4.1.5 Relação entre o erro e o tamanho da amostra

Nessa pesquisa a amostra tem um tamanho inferior ao total do universo a ser estudado. Logo, isso acaba gerando um erro nos dados observados. Os dados no universo encontram-se num intervalo com margem de erro mínima, ou padrão. Esses dados em geral são de dois tipos: uma média ou uma proporção. Já o nível de confiança expressa a certeza de que o dado que se busca realmente esteja dentro da margem de erro.

Margem de erro, nível de confiança e tamanho da amostra sempre caminham juntos. O teorema do limite central mostra que, em condições gerais, a soma de muitas variáveis aleatórias independentes se aproxima bem de uma distribuição normal. Como estamos trabalhando com um universo de tamanho muito grande o tamanho da amostra conforme Stevenson (1981), é dada por:

$$n = z^2 \left[\frac{p(1 - p)}{e^2} \right], \quad (4.1)$$

onde, n é o tamanho da amostra que queremos, z é o desvio do valor médio que aceitamos para alcançar o nível de confiança desejado, esse valor é o valor da distribuição normal padrão (valor tabelado), p é a proporção e e é a margem de erro.

Para um nível de confiança de 90%, isso quer dizer que nosso $z = 1,645$, com isso vamos ter um erro de 10%. Como o universo é bastante grande, será utilizado $p = 50\%$. Substituindo esses valores na Equação 4.1, obtém-se:

$$n = \frac{(1,645)^2 \cdot 0,50 \cdot (1 - 0,50)}{0,10^2}; \quad (4.2)$$

$$n = \frac{0,67650625}{0,01} = 67,65. \quad (4.3)$$

Portanto, o experimento realizado neste trabalho constará de 70 amostras.

4.1.6 Modelo Matemático para a obtenção da aceleração da gravidade

Utilizando-se dos dados obtidos através do experimento a aceleração da gravidade foi calculada através do modelo² matemático $g = 2\hat{\beta}^2$. Em que $\hat{\beta}$ é obtido através da Equação 3.16. A dedução deste modelo (modelagem) para g pode ser verificado no Apêndice A.

² Aqui o termo modelo matemático é entendido na mesma visão de Biembengut e Hein (2011), ou seja, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno ou um problema de situação real.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na Tabela 3 encontram-se as medidas dos deslocamentos, tempos de queda e média aritmética dos tempos de queda da esfera de massa m obtidos no experimento. As quatro médias dos tempos de queda para cada deslocamento foram obtidas através das 70 amostras.

Tabela 3 – Medidas dos deslocamentos e tempos obtidos através do experimento.

Δy (mm)	$\Delta y_1 = 100,0$	$\Delta y_2 = 200,0$	$\Delta y_3 = 300,0$	$\Delta y_4 = 400,0$
$\Delta t_1(s)$	0,14690	0,20575	0,25125	0,28945
$\Delta t_2(s)$	0,14505	0,20410	0,24970	0,28780
$\Delta t_3(s)$	0,13525	0,19415	0,23970	0,27785
$\Delta t_4(s)$	0,13675	0,19565	0,24120	0,27935
$\Delta t_5(s)$	0,13735	0,19625	0,24180	0,27995
$\Delta t_6(s)$	0,13815	0,19705	0,24260	0,28080
$\Delta t_7(s)$	0,13840	0,19730	0,24285	0,28105
$\Delta t_8(s)$	0,13900	0,19790	0,24345	0,28170
$\Delta t_9(s)$	0,13925	0,19810	0,24370	0,28200
$\Delta t_{10}(s)$	0,13985	0,19875	0,24430	0,28265
$\Delta t_{11}(s)$	0,14005	0,19900	0,24455	0,28290
$\Delta t_{12}(s)$	0,14040	0,19930	0,24485	0,28320
$\Delta t_{13}(s)$	0,14130	0,20015	0,24570	0,28400
$\Delta t_{14}(s)$	0,14015	0,19910	0,24465	0,28300
$\Delta t_{15}(s)$	0,14295	0,20190	0,24745	0,28610
$\Delta t_{16}(s)$	0,14250	0,20150	0,24705	0,28555
$\Delta t_{17}(s)$	0,14330	0,20220	0,24780	0,28605
$\Delta t_{18}(s)$	0,14295	0,20180	0,24740	0,28565
$\Delta t_{19}(s)$	0,14290	0,20180	0,24740	0,28570
$\Delta t_{20}(s)$	0,14265	0,20155	0,24710	0,28540
$\Delta t_{21}(s)$	0,14355	0,20245	0,24805	0,28630
$\Delta t_{22}(s)$	0,14380	0,20275	0,24830	0,28650
$\Delta t_{23}(s)$	0,14275	0,20165	0,24720	0,28545
$\Delta t_{24}(s)$	0,14455	0,20350	0,24910	0,28730
$\Delta t_{25}(s)$	0,14535	0,20420	0,24970	0,28805
$\Delta t_{26}(s)$	0,14590	0,20480	0,25035	0,28860
$\Delta t_{27}(s)$	0,14585	0,20475	0,25030	0,28855
$\Delta t_{28}(s)$	0,13710	0,19590	0,24145	0,27970

Δy (mm)	$\Delta y_1 = 100,0$	$\Delta y_2 = 200,0$	$\Delta y_3 = 300,0$	$\Delta y_4 = 400,0$
$\Delta t_{29}(s)$	0,13725	0,19620	0,24185	0,28015
$\Delta t_{30}(s)$	0,13715	0,19610	0,24170	0,28005
$\Delta t_{31}(s)$	0,13640	0,19535	0,24100	0,27930
$\Delta t_{32}(s)$	0,13650	0,19545	0,24115	0,27950
$\Delta t_{33}(s)$	0,13640	0,19525	0,24085	0,27915
$\Delta t_{34}(s)$	0,13655	0,19550	0,24115	0,27950
$\Delta t_{35}(s)$	0,13650	0,19545	0,24105	0,27940
$\Delta t_{36}(s)$	0,13650	0,19540	0,24095	0,27915
$\Delta t_{37}(s)$	0,13605	0,19500	0,24060	0,27895
$\Delta t_{38}(s)$	0,13620	0,19505	0,24065	0,27890
$\Delta t_{39}(s)$	0,13660	0,19545	0,24100	0,27930
$\Delta t_{40}(s)$	0,13645	0,19540	0,24105	0,27935
$\Delta t_{41}(s)$	0,13660	0,19540	0,24095	0,27920
$\Delta t_{42}(s)$	0,13640	0,19530	0,24090	0,27920
$\Delta t_{43}(s)$	0,13610	0,19505	0,24065	0,27900
$\Delta t_{44}(s)$	0,13630	0,19520	0,24080	0,27905
$\Delta t_{45}(s)$	0,13580	0,19465	0,24025	0,27850
$\Delta t_{46}(s)$	0,13590	0,19475	0,24030	0,27860
$\Delta t_{47}(s)$	0,13575	0,19465	0,24030	0,27860
$\Delta t_{48}(s)$	0,13635	0,19530	0,24090	0,27920
$\Delta t_{49}(s)$	0,13630	0,19515	0,24075	0,27905
$\Delta t_{50}(s)$	0,13610	0,19505	0,24070	0,27905
$\Delta t_{51}(s)$	0,13595	0,19485	0,24045	0,27875
$\Delta t_{52}(s)$	0,13570	0,19460	0,24020	0,27850
$\Delta t_{53}(s)$	0,13545	0,19425	0,23975	0,27800
$\Delta t_{54}(s)$	0,13575	0,19465	0,24020	0,27850
$\Delta t_{55}(s)$	0,13575	0,19470	0,24030	0,27865
$\Delta t_{56}(s)$	0,1355	0,19445	0,24010	0,27840
$\Delta t_{57}(s)$	0,13530	0,19420	0,23980	0,27810
$\Delta t_{58}(s)$	0,13535	0,19425	0,23990	0,27820
$\Delta t_{59}(s)$	0,13555	0,19445	0,24010	0,27840
$\Delta t_{60}(s)$	0,13585	0,19475	0,24030	0,27860
$\Delta t_{61}(s)$	0,13545	0,19420	0,23975	0,27800
$\Delta t_{62}(s)$	0,13565	0,19455	0,24015	0,27850
$\Delta t_{63}(s)$	0,13600	0,19490	0,24055	0,27890
$\Delta t_{64}(s)$	0,13550	0,19440	0,24005	0,27840
$\Delta t_{65}(s)$	0,13550	0,19455	0,24010	0,27840

Δy (mm)	$\Delta y_1 = 100,0$	$\Delta y_2 = 200,0$	$\Delta y_3 = 300,0$	$\Delta y_4 = 400,0$
$\Delta t_{66}(s)$	0,13555	0,19445	0,24005	0,27835
$\Delta t_{67}(s)$	0,13530	0,19415	0,23980	0,27810
$\Delta t_{68}(s)$	0,13510	0,19395	0,23950	0,27780
$\Delta t_{69}(s)$	0,13500	0,19380	0,23925	0,27750
$\Delta t_{70}(s)$	0,13550	0,19435	0,23990	0,27820
Média	0,13821	0,19711	0,24270	0,28099

Fonte: O próprio autor.

Na Tabela 4 encontram-se as medidas dos deslocamento e das velocidades da esfera de massa m . Entende-se q_1, q_2, \dots, q_{70} como sendo as quedas realizadas pela esfera. Essas 70 amostras foram convertidas em 4 amostras, que são às médias para cada um deslocamento.

Tabela 4 – Medidas do deslocamento e das velocidades da esfera obtidos através do experimento.

$\Delta y(mm)$	100,0	200,0	300,0	400,0
$v(m/s), q_1$	0,680	0,972	1,194	1,381
$v(m/s), q_2$	0,689	0,979	1,201	1,389
$v(m/s), q_3$	0,739	1,030	1,251	1,439
$v(m/s), q_4$	0,731	1,022	1,243	1,431
$v(m/s), q_5$	0,728	1,019	1,240	1,428
$v(m/s), q_6$	0,723	1,014	1,236	1,424
$v(m/s), q_7$	0,722	1,013	1,235	1,423
$v(m/s), q_8$	0,719	1,010	1,232	1,419
$v(m/s), q_9$	0,718	1,009	1,231	1,418
$v(m/s), q_{10}$	0,715	1,006	1,227	1,415
$v(m/s), q_{11}$	0,714	1,005	1,226	1,413
$v(m/s), q_{12}$	0,712	1,003	1,225	1,412
$v(m/s), q_{13}$	0,707	0,999	1,221	1,408
$v(m/s), q_{14}$	0,713	1,004	1,226	1,413
$v(m/s), q_{15}$	0,699	0,990	1,212	1,398
$v(m/s), q_{16}$	0,701	0,992	1,214	1,400
$v(m/s), q_{17}$	0,697	0,989	1,210	1,398
$v(m/s), q_{18}$	0,699	0,991	1,212	1,400
$v(m/s), q_{19}$	0,699	0,991	1,212	1,400
$v(m/s), q_{20}$	0,701	0,992	1,214	1,401
$v(m/s), q_{21}$	0,696	0,987	1,209	1,397
$v(m/s), q_{22}$	0,695	0,986	1,208	1,396

$\Delta y(mm)$	100,0	200,0	300,0	400,0
$v(m/s), q_{23}$	0,700	0,991	1,213	1,401
$v(m/s), q_{24}$	0,691	0,982	1,204	1,392
$v(m/s), q_{25}$	0,687	0,979	1,201	1,388
$v(m/s), q_{26}$	0,685	0,976	1,198	1,386
$v(m/s), q_{27}$	0,685	0,976	1,198	1,386
$v(m/s), q_{28}$	0,729	1,012	1,242	1,430
$v(m/s), q_{29}$	0,728	1,019	1,240	1,427
$v(m/s), q_{30}$	0,729	1,019	1,241	1,428
$v(m/s), q_{31}$	0,733	1,023	1,244	1,432
$v(m/s), q_{32}$	0,732	1,023	1,244	1,431
$v(m/s), q_{33}$	0,733	1,024	1,245	1,432
$v(m/s), q_{34}$	0,732	1,023	1,244	1,431
$v(m/s), q_{35}$	0,732	1,023	1,244	1,431
$v(m/s), q_{36}$	0,732	1,023	1,245	1,432
$v(m/s), q_{37}$	0,735	1,025	1,246	1,433
$v(m/s), q_{38}$	0,734	1,025	1,246	1,434
$v(m/s), q_{39}$	0,732	1,023	1,244	1,432
$v(m/s), q_{40}$	0,732	1,023	1,244	1,431
$v(m/s), q_{41}$	0,732	1,023	1,245	1,432
$v(m/s), q_{42}$	0,733	1,024	1,245	1,432
$v(m/s), q_{43}$	0,734	1,025	1,246	1,433
$v(m/s), q_{44}$	0,733	1,024	1,245	1,433
$v(m/s), q_{45}$	0,736	1,017	1,248	1,436
$v(m/s), q_{46}$	0,735	1,026	1,248	1,435
$v(m/s), q_{47}$	0,736	1,027	1,248	1,435
$v(m/s), q_{48}$	0,733	1,024	1,245	1,432
$v(m/s), q_{49}$	0,733	1,024	1,246	1,433
$v(m/s), q_{50}$	0,734	1,025	1,246	1,433
$v(m/s), q_{51}$	0,735	1,026	1,247	1,434
$v(m/s), q_{52}$	0,736	1,027	1,248	1,436
$v(m/s), q_{53}$	0,738	1,029	1,251	1,438
$v(m/s), q_{54}$	0,736	1,027	1,248	1,436
$v(m/s), q_{55}$	0,736	1,027	1,248	1,435
$v(m/s), q_{56}$	0,737	1,028	1,249	1,436
$v(m/s), q_{57}$	0,739	1,029	1,251	1,438
$v(m/s), q_{58}$	0,738	1,029	1,250	1,437
$v(m/s), q_{59}$	0,737	1,028	1,249	1,436

$\Delta y(mm)$	100,0	200,0	300,0	400,0
$v(m/s), q_{60}$	0,736	1,026	1,248	1,435
$v(m/s), q_{61}$	0,738	1,029	1,251	1,438
$v(m/s), q_{62}$	0,737	1,028	1,249	1,436
$v(m/s), q_{63}$	0,735	1,026	1,247	1,434
$v(m/s), q_{64}$	0,738	1,028	1,249	1,436
$v(m/s), q_{65}$	0,737	1,028	1,249	1,436
$v(m/s), q_{66}$	0,737	1,028	1,249	1,437
$v(m/s), q_{67}$	0,739	1,030	1,251	1,438
$v(m/s), q_{68}$	0,740	1,031	1,252	1,439
$v(m/s), q_{69}$	0,740	1,031	1,253	1,441
$v(m/s), q_{70}$	0,738	1,029	1,250	1,437
Média	0,723	1,014	1,236	1,423

Fonte: O próprio autor.

A partir dos dados na Tabela 3 foi construída a Tabela 5, cujos valores apresentados são lidos da seguinte forma: t_1 é tempo que a esfera gasta para percorrer os dois primeiros sensores cuja distância entre si é de 100mm. O tempo t_2 é o tempo que a esfera gasta para percorrer o 1° e o 3° sensor cuja distância entre si é de 200mm. O tempo t_3 é tempo que a esfera gasta para percorrer o 1° e o 4° sensor que distam entre si 300mm. Por fim, o tempo t_4 é o tempo que a esfera gasta para se deslocar entre o 1° e o 5° sensor que estão distantes um do outro 400mm. Vale lembrar ainda que t_1, t_2, t_3 e t_4 são médias de tempos de 70 quedas da esfera. E, $H = \sqrt{\Delta y}$ em $m^{\frac{1}{2}}$. Os $t_i^2(S^2)$ foram obtidos fazendo cada valor de t_i^2 , já os $t_i H_i(sm^{\frac{1}{2}})$ foi obtido fazendo cada $t_i \cdot H_i$, já os h_i foi calculado pela a raiz quadrada de cada deslocamento, raiz de 0,10cm; ..., raiz de 0,40cm.

Tabela 5 – Resultados dos parâmetros físicos obtidos através do experimento.

i	$t_i(s)$	$H_i(m^{\frac{1}{2}})$	$t_i^2(s^2)$	$t_i H_i(sm^{\frac{1}{2}})$	$H_i^2(m)$
1	0,13821	0,32	0,01910	0,04423	0,1024
2	0,19711	0,45	0,03885	0,08870	0,2025
3	0,24270	0,54	0,05890	0,13106	0,2916
4	0,28099	0,63	0,07896	0,17702	0,3969
Σ	0,85901	1,94	0,19581	0,44101	0,9934

Fonte: O próprio autor.

Uma vez obtidos os coeficientes α obtido através da Equação 3.15 e β obtido através da Equação 3.16 pode-se escrever o modelo para o problema da queda da esfera como

$H_i = 2,15t_i + 0,02$. Com o modelo obtido, pode-se estimar o valor da raiz quadrada do deslocamento da esfera para qualquer tempo.

De acordo com a Tabela 6, o valor obtido para o coeficiente correlação (r) pela Equação 3.30 esse valor indica que a mesma é bastante significativa. A correlação encontrada é positiva de 99,96% entre a variável raiz quadrada do deslocamento e o tempo. Onde à medida que o tempo aumenta a raiz quadrada do deslocamento também aumenta, o que é coerente com o gráfico de dispersão apresentado na Figura 14.

Já o coeficiente de determinação (r^2) calculado pela Equação 3.31 indica que a variável tempo explica 99,92% da variável raiz quadrada do deslocamento. Observando a Figura 15 ela mostra uma forte correlação entra a variável tempo e a variável velocidade. Logo, é vantajosa a adoção do modelo para explicar a raiz quadrada do deslocamento da esfera, em função do tempo. Com relação ao coeficiente de variação (CV) calculado pela Equação 3.4 que gerou um resultado de aproximadamente 28,62%, conforme Correa (2003), o mesmo se enquadra dentro de uma dispersão média. Já o desvio padrão (S) obtido através da Equação 3.3 se afastou em torno da média de 0,061 tanto para valores acima como para valores abaixo. Para o IC obtido através da Equação 3.29 com 90% de confiança o coeficiente $\hat{\beta}$ encontra-se dentro do intervalo calculado . No teste de hipótese com de 10% de significância a hipótese nula é rejeitada. O valor de t calculado foi de 4,06 e o tabelado é de 2,920 conforme verificado na tabela de distribuição tStudent, que pode ser observada no Anexo A. A variância (S^2) foi obtida a partir da Equação 3.2.

Tabela 6 – Parâmetros encontrados nessa pesquisa.

r	r^2	$S^2(s^2)$	CV	$\hat{\alpha}(m^{\frac{1}{2}})$	$\hat{\beta}(\frac{m^{1/2}}{s})$	$S(s)$	t	$IC(\frac{m^{1/2}}{s})$
0,9996	0,9992	0,004	28,62	0,02	2,15	0,061	4,06	$(-1,91 \leq \beta \leq 6,21)$

Fonte: O próprio autor.

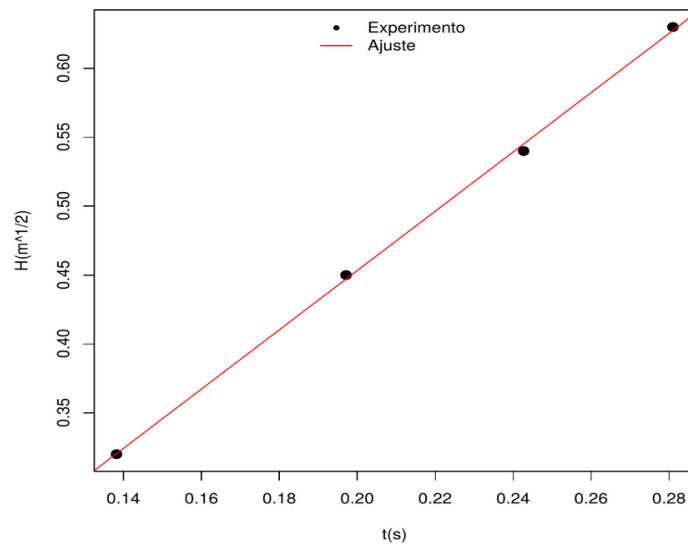
Na Tabela 7 observam-se o valor da aceleração da gravidade obtido por Lopes (2008), o valor experimental, obtido com dados do experimento realizado nessa pesquisa e o erro percentual entre ambos. A gravidade teórica indicada na Tabela 7 foi obtida através da média aritmética entre os dois valores marcados na Figura 16, do Apêndice B os quais correspondem a uma altitude de 600m e latitudes entre 5° e 10°. A altitude, bem como, a faixa de latitudes foram escolhidas pois são os valores que mais se aproximam da cidade de Monteiro - PB, local de realização do experimento. Uma vez que o erro percentual calculado a partir da Equação 3.7 foi de 5,41%, considera-se que o mesmo seja aceitável. Assim, a medida da aceleração da gravidade obtida nessa pesquisa está de acordo com o trabalho de Lopes (2008).

Tabela 7 – Valores da aceleração da gravidade teórica, experimental e o erro percentual obtido.

$g[\text{Lopes (2008)}] (m/s^2)$	$g_{exp}(m/s^2)$	Erro percentual
9,78	9,25	5,41%

Fonte: O próprio autor.

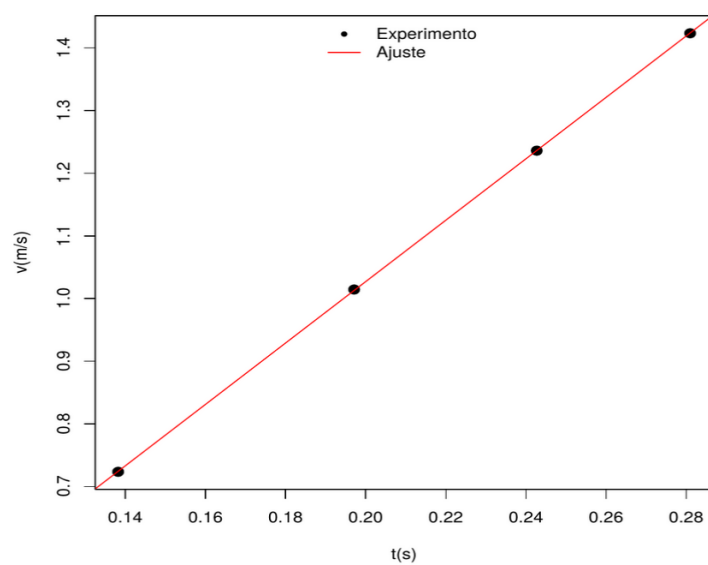
Figura 14 – Gráfico da raiz quadrada do deslocamento versus o tempo.



Fonte: O próprio autor.

Como pode ser observado na Figura 15, era esperado que a curva de $v(t)$ em função de t fosse uma reta. Conforme Watari (2004), ao realizar aproximações para tempos pequenos na Equação 2.27, a mesma apresenta como resultado uma função idêntica ao do estudo de um corpo em queda livre. Assim, o resultado experimental aqui obtido é consistente com o resultado teórico apresentado no trabalho de Watari (2004, p. 46).

Figura 15 – Gráfico da velocidade versus o tempo.



Fonte: O próprio autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram utilizados dados de deslocamento e tempo de queda de uma esfera metálica para obter o valor da aceleração da gravidade. O modelo matemático obtido utilizou a função horária da posição para um corpo em queda sem levar em consideração o atrito do ar que atua no mesmo. A utilização do modelo para o vácuo com dados de um experimento real no qual o atrito do ar atua no corpo é justificada devido as distâncias envolvidas no experimento levarem a erros pequenos (0,02% para uma queda de 50 cm e uma esfera de 2 cm de diâmetro) nas medidas de tempo quando se compara a queda no vácuo e no ar como é colocado no trabalho de Mohazzabi (2011).

O valor da aceleração da gravidade obtido na referida pesquisa foi comparado com dados encontrados no trabalho de Lopes (2008) e o erro obtido foi de aproximadamente 5,41%, o que demonstra uma boa concordância entre ambos.

O valor do coeficiente de correlação obtido indica uma forte correlação entre as variáveis raiz quadrada do deslocamento e o tempo de queda. E o coeficiente de correlação obtido indica que a variável tempo é quem praticamente explica a variável raiz quadrada do deslocamento.

Foi realizado o teste da hipótese nula e a mesma foi rejeitada. Assim, o valor no teste (4,06) para um nível de confiança de 90% indica que o coeficiente angular obtido não é nulo.

Acredita-se que um diferencial dessa pesquisa esteja na utilização da estatística para o tratamento de dados. Em particular, o teste de hipótese que não foi verificado em trabalhos que tratam da obtenção da aceleração da gravidade através de dados de experimentos. Bem como, no modelo ($g = 2\beta^2$) aqui utilizado para calcular a aceleração da gravidade, o qual não foi visto em trabalhos pesquisados durante a elaboração deste TCC.

Sugestões para pesquisas futuras

Nessa pesquisa foi utilizado apenas o kit de queda de corpos da CIDEPE. Então, indica-se utilizar outros kits de outros fabricantes para obter o valor da aceleração da gravidade e compará-los. Tais resultados poderão ser comparados com os apresentados por Maroja, Viturino e Pereira (2019) que realizaram testes com alguns aparelhos e encontraram resultados que, embora estivessem dentro da margem de erro, mostraram-se bem diferentes.

Sugere-se também utilizar a teoria de desvio e a teoria dos erros para verificar as influências de erros em medidas que são obtidas através de outras. Tais estudos podem

ser feitos utilizando os trabalhos de Silva, Silva e Nascimento (1995), Vuolo (1996), entre outros.

Sugere-se realizar o poder de um teste para outras amostras. A teoria do poder do teste pode ser vista no trabalho de Bussab e Morettin (2010), por exemplo.

REFERÊNCIAS

- BAPTISTA, J. P.; FERRACIOLI, L. Evolução do pensamento sobre o conceito de movimento. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 1, p. 187 – 194, março 1999. Citado nas páginas 13, 16 e 17.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011. Citado na página 55.
- BORGES, B. L. M. **Simplificando a Estatística**. 2. ed. Campina Grande: EDUEP, 2003. Citado na página 32.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental: apresentação dos temas transversais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado na página 14.
- BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. Citado nas páginas 32, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45, 65, 71, 75 e 76.
- CHAVES, A. S. **Física : mecânica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso Editores, 2001. Citado nas páginas 20, 24 e 25.
- CLAGETT, M. **The Science of Mechanics in the Middle Ages**. [S.l.]: Madison: The University of Wisconsin Press, 1961. Citado na página 17.
- COLUCI, V. R. et al. Ilustração de incertezas em medidas utilizando experimentos de queda livre. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 2, p. 2506–2 –2056–6, 2013. Citado na página 52.
- COOK, A. H. **Gravity and the earth**. [S.l.]: Wykeham Publications, 1969. Citado na página 70.
- CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e Estatística**. 2. ed. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003. Citado nas páginas 33, 44, 45 e 61.
- FONSECA, J. S. da; MARTINS, G. de A. **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 1996. Citado na página 41.
- FONSECA, J. S. da; MARTINS, G. de A. **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2011. Citado nas páginas 40 e 41.
- GIL, A. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo-SP: Atlas, 2002. Citado na página 47.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1. Citado nas páginas 17, 18, 19, 21, 23 e 25.
- LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L.; STEPHEN, D. **Estatística: Teoria e Aplicações usando o microsoft excel em português**. 5. ed. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2008. Citado nas páginas 31, 32, 33 e 35.

- LOPES, W. Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 25, n. 3, p. 561–568, dezembro 2008. Citado nas páginas 61, 62, 64, 69 e 70.
- MAROJA, A. M.; VITURINO, M. F. C.; PEREIRA, J. de S. Medida da aceleração da gravidade. In: . Disponível em :<http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0297-1.pdf>. Acesso em 14 de nov de 2019: [s.n.], 2019. Citado na página 64.
- MOHAZZABI, P. When does air resistance become significant in free fall? **The Physics Teacher**, v. 49, n. 89, feb 2011. Citado nas páginas 53 e 64.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 4. ed. [S.l.]: Edgar Blücher, 2002. v. 1. Citado nas páginas 13, 14 e 19.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas de Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade FEEVALE, 2013. Citado nas páginas 47 e 48.
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2007. Citado na página 47.
- SILVA, W. P. da; SILVA, C. M. e; NASCIMENTO, M. S. **Tratamento de dados experimentais**. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 1995. Citado nas páginas 33, 53 e 65.
- SPIEGEL, M. R. **Estatística**. 3. ed. Sao Paulo: Pearson Makron Books, 1993. Citado na página 44.
- STEVENSON, W. J. **Estatística Aplicada à Administração**. [S.l.]: Harbra, 1981. Citado nas páginas 34, 39, 42, 43, 44, 46 e 54.
- TATE, D. R. Absolute value of g at the national bureau of standards. **Journal of research of the National Bureau of Standards - C. Engineering and Instrumentation**, v. 70, n. 2, p. 149, abril-junho, 1966. Citado na página 25.
- VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: Edgard Blusher, 1996. Citado na página 65.
- WATARI, K. **Mecânica Clássica**. 2. ed. São Paulo: USP, 2004. v. 1. Citado nas páginas 27, 28, 29, 30 e 62.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I: Mecânica**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008. Citado na página 18.

APÊNDICE A – MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A OBTENÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE EM FUNÇÃO DO COEFICIENTE ANGULAR DO AJUSTE DE MÍNIMOS QUADRADOS

A função que fornece a posição de uma partícula em queda para cada instante de tempo t é dada por:

$$y = y_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}, \quad (\text{A.1})$$

ou,

$$\Delta y = v_0t - \frac{gt^2}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Considerando $v_0 = 0$, a Equação A.2 assume a forma:

$$\Delta y = \frac{gt^2}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Ainda é possível escrever a Equação A.3 como sendo:

$$\sqrt{\Delta y} = \sqrt{\frac{gt^2}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo $H = \sqrt{\Delta y}$ a Equação A.4 torna-se:

$$H = \sqrt{\frac{g}{2}}t. \quad (\text{A.5})$$

Comparando a Equação A.5 com uma função afim ($\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$), obtém-se:

$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{g}{2}} \Rightarrow g = 2\hat{\beta}^2. \quad (\text{A.6})$$

A Equação¹ A.6 foi utilizada para obter o valor da aceleração da gravidade experimental.

¹ Quem primeiro apresentou este método de linearizar a função horária da posição para um corpo em queda foi o Professor José Wagner Cavalcanti Silva ao orientador deste TCC.

APÊNDICE B – VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE COM A ALTITUDE E LATITUDE

No quadro apresentado na Figura 16 estão apresentados valores da aceleração da gravidade em função da altitude em metros e latitude em graus. Como esta pesquisa foi realizada em Monteiro-PB, cuja altitude é de 599 m e latitude de 07° 53' 20"S, os dados do parâmetro da aceleração da gravidade selecionados em vermelho no quadro apresentado na Figura 16 são aqueles que mais se aproximam para altitude e latitude do local de realização do experimento, e, dessa forma, foram comparados ao valor da aceleração da gravidade obtido nesta pesquisa.

Figura 16 – Valores da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude.

Altitude z (m)	Latitude em graus									
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
0	9,7803	9,7807	9,7819	9,7838	9,7864	9,7896	9,7933	9,7974	9,8017	9,8062
50	9,7801	9,7805	9,7817	9,7836	9,7862	9,7894	9,7931	9,7972	9,8016	9,8061
100	9,7800	9,7804	9,7816	9,7835	9,7861	9,7892	9,7929	9,7970	9,8014	9,8059
150	9,7798	9,7802	9,7814	9,7833	9,7859	9,7891	9,7928	9,7969	9,8013	9,8058
200	9,7797	9,7801	9,7812	9,7832	9,7857	9,7889	9,7926	9,7967	9,8011	9,8056
250	9,7795	9,7799	9,7811	9,7830	9,7856	9,7888	9,7925	9,7966	9,8009	9,8054
300	9,7794	9,7798	9,7809	9,7829	9,7854	9,7886	9,7923	9,7964	9,8008	9,8053
350	9,7792	9,7796	9,7808	9,7827	9,7853	9,7885	9,7922	9,7963	9,8006	9,8051
400	9,7791	9,7795	9,7806	9,7825	9,7851	9,7883	9,7920	9,7961	9,8005	9,8050
450	9,7789	9,7793	9,7805	9,7824	9,7850	9,7882	9,7919	9,7960	9,8003	9,8048
500	9,7788	9,7792	9,7803	9,7822	9,7848	9,7880	9,7917	9,7958	9,8002	9,8047
550	9,7786	9,7790	9,7802	9,7821	9,7847	9,7879	9,7916	9,7957	9,8000	9,8045
600	9,7785	9,7789	9,7800	9,7819	9,7845	9,7877	9,7914	9,7955	9,7999	9,8044
650	9,7783	9,7787	9,7799	9,7818	9,7844	9,7876	9,7913	9,7954	9,7997	9,8042
700	9,7782	9,7785	9,7797	9,7816	9,7842	9,7874	9,7911	9,7952	9,7996	9,8041
750	9,7780	9,7784	9,7796	9,7815	9,7841	9,7873	9,7910	9,7950	9,7994	9,8039
800	9,7778	9,7782	9,7794	9,7813	9,7839	9,7871	9,7908	9,7949	9,7993	9,8038
850	9,7777	9,7781	9,7793	9,7812	9,7838	9,7869	9,7906	9,7947	9,7991	9,8036
900	9,7775	9,7779	9,7791	9,7810	9,7836	9,7868	9,7905	9,7946	9,7989	9,8034
950	9,7774	9,7778	9,7789	9,7809	9,7834	9,7866	9,7903	9,7944	9,7988	9,8033
1000	9,7772	9,7776	9,7788	9,7807	9,7833	9,7865	9,7902	9,7943	9,7986	9,8031
1050	9,7771	9,7775	9,7786	9,7805	9,7831	9,7863	9,7900	9,7941	9,7985	9,8030
1100	9,7769	9,7773	9,7785	9,7804	9,7830	9,7862	9,7899	9,7940	9,7983	9,8028
1150	9,7768	9,7772	9,7783	9,7802	9,7828	9,7860	9,7897	9,7938	9,7982	9,8027
1200	9,7766	9,7770	9,7782	9,7801	9,7827	9,7859	9,7896	9,7937	9,7980	9,8025
1250	9,7765	9,7769	9,7780	9,7799	9,7825	9,7857	9,7894	9,7935	9,7979	9,8024
1300	9,7763	9,7767	9,7779	9,7798	9,7824	9,7856	9,7893	9,7934	9,7977	9,8022
1350	9,7762	9,7765	9,7777	9,7796	9,7822	9,7854	9,7891	9,7932	9,7976	9,8021
1400	9,7760	9,7764	9,7776	9,7795	9,7821	9,7853	9,7890	9,7930	9,7974	9,8019
1450	9,7758	9,7762	9,7774	9,7793	9,7819	9,7851	9,7888	9,7929	9,7973	9,8018
1500	9,7757	9,7761	9,7773	9,7792	9,7818	9,7849	9,7886	9,7927	9,7971	9,8016

Fonte: Lopes (2008, p.567).

No trabalho de Lopes (2008) os valores apresentados na Figura 16 foram determinados utilizando a seguinte relação:

$$g_{\lambda,z} \approx g_0 \left(1 + \beta \operatorname{sen}^2 \lambda\right) \left(1 - \frac{2z}{R}\right), \quad (\text{B.1})$$

em que $R = 6,371.10^6$ m é o raio da Terra, z é a altitude, $g_0 = 9,7803 \text{ m/s}^2$ é um valor aproximado para a aceleração da gravidade no equador e ao nível do mar obtido com a relação:

$$g(\lambda) = 9,78032677 \left(1 + 0,0052790414 \operatorname{sen}^2 \lambda + 0,0000232718 \operatorname{sen}^4 \lambda\right), \quad (\text{B.2})$$

em que λ é a latitude medida em graus. O parâmetro $\beta = 5,300.10^{-3}$ é um fator numérico que leva em conta a rotação da Terra em torno do seu eixo e o achatamento polar devido a rotação (COOK, 1969 apud LOPES, 2008, p. 563).

APÊNDICE C – OBTENÇÃO DAS MÉDIAS E VARIÂNCIA DOS ESTIMADORES

Conforme Bussab e Morettin (2010), pode-se escrever β de um modo mais apropriado:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (\text{C.1})$$

De Equação 3.16 tem-se:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (\text{C.2})$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum(x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i - \bar{y} \sum x_i + n\bar{x} \bar{y} \\ &= \sum x_i y_i - n\bar{x} \bar{y} - n\bar{x} \bar{y} + n\bar{x} \bar{y} = \sum x_i y_i - n\bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

De modo similar,

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Definindo-se:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{e} \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum(x_i - \bar{x})^2$$

Agora, tem-se que $\hat{\beta}$ é:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} Y_i = \sum_{i=1}^n w_i Y_i, \end{aligned}$$

usa-se Y (maiúscula) e x (minúscula) para diferenciar o fato de que a primeira está aleatória e a segunda, fixa; e,

$$w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

Usando o fato de que $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ e que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x_i - \bar{x}) = 1. \end{aligned}$$

Propriedades da esperança e variância de somas de variáveis aleatórias.

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(XY) = E(X)E(Y)$;
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$;
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$;
- $Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Usando as propriedades podemos escrever:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\left(\sum_{i=1}^n w_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i E(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (\alpha + \beta x_i) = \alpha \sum_{i=1}^n w_i + \beta \sum_{i=1}^n w_i x_i = \beta, \end{aligned}$$

com isso, pode-se ver o estimador é não-viesado.¹ Para a variância tem-se:

$$Var(\hat{\beta}) = Var\left(\sum_{i=1}^n w_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i^2 Var(Y_i),$$

como as observações são não-correlacionadas, tem-se:

$$Var(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^2 = \sigma_e^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]^2},$$

e o resultado segue.

Para o estimador $\hat{\alpha}$, são necessários os seguintes resultados:

¹ Quer dizer que o estimar não é viciado, não tendencioso.

Provar que $Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}) = 0$. a/ Inicialmente provar que, se X e Y são independentes, $U = aX + bY$ e $V = mX + nY$, então

$$Cov(U, V) = amVar(x) + bnVar(Y).$$

Pela propriedade temos $Cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V)$,

$$E(U) = aE(X) + bE(Y),$$

$$E(V) = mE(X) + nE(Y),$$

$$E(UV) = E[(aX + bY)(mX + nY)] = amE(X^2) + anE(XY) + bmE(XY) + bnE(Y^2).$$

Substituindo na expressão da covariância, temos:

$$\begin{aligned} Cov(U, V) &= amE(X^2) + bnE(Y^2) + (an + am)E(XY) \\ &\quad - [amE^2(X)] + bnE^2(Y) + (an + bm)E(X)E(Y)] \\ &= am[E(X^2) - E^2(X)] + bn[E(Y^2) - E^2(Y)] \\ &\quad + (an + bm)[E(XY) - E(X)E(Y)] = amVar(X) + bnVar(Y), \end{aligned}$$

como as variáveis são independentes, o último termo desaparece. A expressão pode ser generalizada quando X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, com

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum a_iX_i,$$

$$V = b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n = \sum b_iX_i;$$

então, $Cov(U, V) = \sum a_i b_i Var(X_i)$. Quando $Var(X_i) = \sigma^2$, temos:

$$Cov(U, V) = \sigma^2 \sum a_i b_i.$$

b/ $Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}) = 0$. Sabemos que:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum y_i = \sum \frac{1}{n} Y_i = \sum a_i Y_i, \text{ com } a_i = \frac{1}{n},$$

$$\hat{\beta} = \sum w_i Y_i, \text{ com } w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

então,

$$Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}) = Cov(\sum a_i Y_i, \sum w_i Y_i) = \sum a_i w_i Var(Y_i)$$

$$= \sigma_e^2 \sum a_i w_i = 0,$$

pois, $\sum a_i w_i = (\frac{1}{n}) \sum w_i = 0$.

Portanto:

$$Cov(\bar{y}, \hat{\beta}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

Como,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i + e_i) \\ &= \alpha + \beta \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \end{aligned}$$

tem-se:

$$E(\bar{y}) = \alpha + \beta \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(e_i) = \alpha + \beta \bar{x},$$

com x supostamente fixo e não uma v.a. Também,

$$Var(\bar{y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(e_i) = \frac{\sigma_e^2}{n}.$$

Daí tem-se, que

$$E(\hat{\alpha}) = E(\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}) = \alpha + \beta \bar{x} - \beta \bar{x} = \alpha,$$

e,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\alpha}) &= Var(\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}) = Var(\bar{y}) + Var(\hat{\beta} \bar{x}) - 2Cov(\bar{y}, \hat{\beta} \bar{x}) \\ &= Var(\bar{y}) + \bar{x}^2 Var(\hat{\beta}) - 2\bar{x} Cov(\bar{y}, \hat{\beta}). \end{aligned}$$

Substituindo os resultados obtidos obtém-se na Equação 3.22 obtendo assim a variância de α .

ANEXO A – TABELA DE DISTRIBUIÇÃO T

Figura 17 – Tabela de distribuição t.

Tabela V – Distribuição t de Student

Corpo da tabela dá os valores t_c tais que $P(-t_c < t < t_c) = 1 - p$.

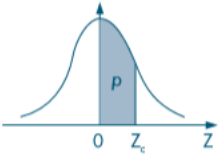
Para $v > 120$, usar a aproximação normal.

Graus de liberdade	p =														
	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%					
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,998	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,756	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	3,025	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,248	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,166	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646
35	0,126	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,126	0,254	0,387	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%

Fonte: Bussab e Morettin (2010, p.513).

ANEXO B – TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Figura 18 – Tabela da distribuição Normal

Tabela III – Distribuição Normal Padrão $Z \sim N(0, 1)$ Corpo da tabela dá a probabilidade p , tal que $p = P(0 < Z < Z_c)$											
											
parte in- teira e primeira decimal de Z_c	Segunda decimal de Z_c										parte in- teira e primeira decimal de Z_c
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	p = 0										
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327	0,8
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0,9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214	1,0
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298	1,1
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147	1,2
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774	1,3
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189	1,4
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408	1,5
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449	1,6
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327	1,7
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062	1,8
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670	1,9
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169	2,0
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574	2,1
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899	2,2
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158	2,3
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361	2,4
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520	2,5
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643	2,6
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736	2,7
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807	2,8
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861	2,9
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900	3,0
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929	3,1
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950	3,2
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965	3,3
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976	3,4
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983	3,5
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989	3,6
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992	3,7
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995	3,8
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997	3,9
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998	4,0
4,5	49999	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	4,5

Fonte: Bussab e Morettin (2010, p.511).