



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALINE DE SOUSA NASCIMENTO

UM ESTUDO SOBRE AS INTEGRAIS CURVILÍNEAS E DE SUPERFÍCIES

Campina Grande - PB

2019

ALINE DE SOUSA NASCIMENTO

UM ESTUDO SOBRE AS INTEGRAIS CURVILÍNEAS E DE SUPERFÍCIES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof^ª. Dra. Luciana Roze de Freitas.

Campina Grande - PB

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N244e Nascimento, Aline de Sousa.
Um estudo sobre as integrais curvilíneas e superfícies
[manuscrito] / Aline de Sousa Nascimento. - 2019.
33 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
1. Integrais Curvilíneas. 2. Curvas. 3. Integral de
superfície. 4. Teorema de Green. I. Título
21. ed. CDD 515.73


ALINE DE SOUSA NASCIMENTO

UM ESTUDO SOBRE AS INTEGRAIS CURVILÍNEAS E DE SUPERFÍCIES

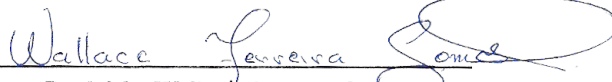
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Trabalho aprovado em 05/12/2019.

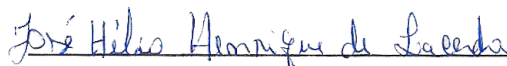
BANCA EXAMINADORA



Prof^a. Dra. Luciana Roze de Freitas.
(Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba



Prof. Ms. Wallace Ferreira Gomes



Prof. Ms. José Hélio Henrique de Lacerda
Universidade Estadual da Paraíba

Dedico o presente trabalho aos meus pais, Carlos e Selma, que sempre fizeram o melhor para eu prosseguir com meus estudos. Ao meu irmão Cleyton que sempre acreditou no meu potencial. A meu sobrinho Samuel que mesmo sendo tão pequeno me deu força para continuar. E ao meu namorado Iago que me incentivou e acreditou em mim.

Agradecimentos

Então primeiramente tenho uma enorme gratidão à Deus, por me guiar nos caminhos certos, e nunca me abandonar, dando-me força e determinação para que eu não desistisse.

Ao meu pai, Carlos que durante toda a minha trajetória ia me buscar no ponto de ônibus, mesmo estando cansado de um dia de trabalho ou até mesmo doente. E não poderia esquecer de tudo que ele fez para que eu conseguisse concluir, tanto financeiramente como também com palavras e ensinamentos.

A minha mãe e rainha Selma, que com seu jeito dócil e amorosa me incentiva a correr atrás de todos os meus objetivos, e principalmente me acalmando quando inúmeras vezes estava estressada por causa dos estudos. E por todos os ensinamentos que fez me tornar a mulher que sou hoje.

A meu irmão que me ajudou com as figuras, mesmo tendo outros compromissos, a minha cunhada e meu sobrinho, por estarem ao meu lado confiando e acreditando em mim.

Ao meu namorado, Iago que sempre me incentivou, e aguentou meu estresse durante todos esses anos, e ter tido paciência por tantas vezes que não nos vimos porque eu estava estudando.

Agradeço também aos meus colegas, Alexsandra, Liliane, Carol e Roberto, por estarem ao meu lado, acreditando no meu potencial e desejando o melhor para mim. E a minha amiga Moniky que sempre esteve o meu lado quando eu mais precisava, e levantando meu astral.

Agradeço a minha orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas, pela oportunidade de ser minha orientadora, e por toda a paciência, compreensão e empenho para que eu concluísse o trabalho. E a todos os professores que passaram seus ensinamentos durante toda a minha graduação, em especial a Wallace Ferreira que por um tempo foi meu orientador e teve muita paciência comigo.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem um infinidade de problemas de Matemática para resolver?.”
(Augustin Louis Cauchy)

Resumo

Este trabalho apresenta um breve estudo sobre integrais curvilíneas e de superfícies. Para isso, abordamos inicialmente conceitos e resultados de cálculo diferencial integral em várias variáveis do \mathbb{R}^3 que são de suma importância no entendimento preliminar, tais como: curvas, campo vetorial, divergente, rotacional. Além disso, estudamos o famoso Teorema de Green e apresentamos alguns exemplos e aplicações da teoria abordada.

Palavras-chaves: Integrais Curvilíneas. Curva. Integral de Superfície.

Abstract

This paper presents a brief study on curvilinear and surface integrals. To this end, we initially approached concepts and results of integral differential calculus on various \mathbb{R}^3 variables that are of paramount importance in the preliminary understanding, such as: curves, divergent, rotational vector field. In addition, we study Green's famous Theorem and present some examples and applications of the theory addressed.

Key-words: Curvy Integrals. Curve. Surface Integral.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva fechada.	11
Figura 2 – Curva simples.	12
Figura 3 – Helice Circular	13
Figura 4 – Circunferência de centro na origem e raio a	14
Figura 5 – $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$	16
Figura 6 – $\vec{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$	16
Figura 7 – A curva de fronteira C e formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$. . .	23
Figura 8 – Função em g	24
Figura 9 – Retângulo	25
Figura 10 – Projeção vertical ou 'sombra' de S sobre um plano coordenado.	27
Figura 11 – Cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$	28

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONCEITOS PRELIMINARES	11
2.1	Curvas	11
2.2	Parametrização de curvas	14
2.3	Campos vetoriais	15
2.3.1	Operadores divergente e rotacional	17
3	INTEGRAIS CURVILÍNEAS	20
3.1	Integral curvilínea de campo escalar	20
3.2	Teorema de Green	22
4	INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES	27
5	CONCLUSÃO	32
	REFERÊNCIAS	33

1 Introdução

O cálculo diferencial e integral é um estudo muito importante na matemática com aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento, ele pode ser desenvolvido através da álgebra e geometria, onde pode ser utilizado para estudar taxas de variação de grandezas, como área de uma região plana ou o volume de um sólido, e entre outros.

O cálculo foi criado com a intenção de ser uma ferramenta auxiliar em diversas áreas das ciências exatas. Ele foi desenvolvido pelo físico e matemático Isaac Newton (1643-1727) e o filósofo Gottfried Leibniz (1646-1716). O termo integral foi criado por Johann Bernoulli (1667-1749), mas foi publicado primeiramente por seu irmão Jaakob Bernoulli (1654-1705). Principalmente com o Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C.) de Newton e Leibniz, as integrais eram apenas derivadas "inversas". E a área era algo intuitivo, onde não poderia ser calculada usando o T.F.C. Então no decorrer dos séculos XVIII e XIX, Newton teve a ideia de combinar limites e áreas para definir integral matematicamente. Mais detalhe pode ser visto em (ROCHA, 2012).

Para o estudo do cálculo diferencial é necessário passar por três teorias iniciais que são, cálculo de limites, cálculo de derivadas de funções e integrais de funções.

O presente trabalho tem como foco o ramo do cálculo, onde utilizamos grandezas vetoriais em deslocamento sobre curvas e suas devidas relações com as propriedades geométricas do espaço ambiente, e desta forma iremos fazer um estudo sobre as curvas, integrais curvilíneas, integrais de superfícies e apresentar algumas aplicações.

Neste trabalho utilizaremos a integral sobre uma superfície para calcular a sua área. No capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos preliminares que utilizaremos nos capítulos que seguem. No capítulo 3 falaremos sobre integrais curvilíneas e o Teorema de Green. Já no capítulo 4, definimos as integrais de superfícies e consequentemente as aplicamos em alguns casos.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições, como, curvas planas, equações paramétricas da curva, parametrização de curvas, campos vetoriais bidimensional e tridimensional, operadores divergentes e rotacional, estritamente necessárias para os assuntos que serão apresentados nos demais capítulos. Os conteúdos abordados podem ser encontrados com mais detalhes em (THOMAS et al., 2002).

2.1 Curvas

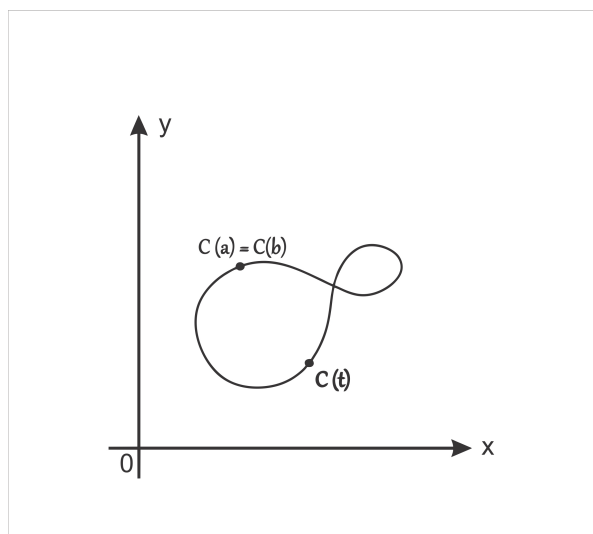
Definição 2.1. (*Curvas planas*) Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, em que f e g são funções reais contínuas definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Isto é, $C = \{(f(t), g(t)); t \in I\}$.

Exemplo 2.1. Os conjuntos $C = \{(\sin t, \cos t), t \in [0, \pi]\}$ e $C_1 = \{(4t^3, 8t - 1), t \in [0, 1]\}$ são exemplos de curvas planas.

Vejamos abaixo alguns tipos especiais de curvas planas.

I. Dizemos que uma curva $C(t) = \{(f(t), g(t)), t \in [a, b]\}$ é fechada quando $(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$, ou seja, quando os pontos das extremidades são iguais.

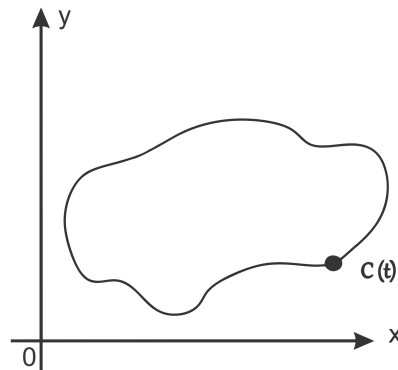
Figura 1 – Curva fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

II. Uma curva é simples quando não admite auto-interseção, ou seja, $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2)), \forall t_1, t_2 \in I$.

Figura 2 – Curva simples.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Definição 2.2. (*Equações paramétricas da curva*) As equações paramétricas de uma curva são equações da forma de $x = f(t)$, $y = g(t)$, em que $t \in I$.

Exemplo 2.2. Sejam (x_0, y_0) , $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^3$ e C uma curva cujos pontos correspondem ao segmento de reta com extremos em (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . As equações paramétricas dessa curva são $C(t) = \{(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0))\}$, com $0 \leq t \leq 1$

Definição 2.3. (*Equação cartesiana de uma curva*) Ao eliminar o parâmetro t nas equações paramétricas obtemos uma equação nas variáveis x e y , onde, $y = h(x)$ a qual é chamada de equação cartesiana da curva.

Exemplo 2.3. Seja uma curva plana dada por $C(t) = \{(a \cos t, b \sin t), t \in (0, 2\pi)\}$, escreva a equação cartesiana.

Solução: Sejam $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, colocando em forma de sistema ,temos

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Elevando ambas as equações ao quadrado obtemos

$$\begin{cases} x^2 = a^2 \cos^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ y^2 = b^2 \sin^2 t \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \end{cases}$$

Somando as equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t.$$

Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portando, obtemos a equação cartesiana da elipse de centro na origem $(0, 0)$.

Definição 2.4. (*Curvas espaciais*) Uma curva espacial é um conjunto C de ternos ordenados $(f(t), g(t), h(t)), t \in I$, em que $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares contínuas definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Isto é, $C = \{(f(t), g(t), h(t)); t \in I\}$.

As equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, com $t \in I$ da mesma forma que a Definição 2.2 são chamadas equações paramétricas da curva C .

Exemplo 2.4. Considere uma curva $C(t) = \{(\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

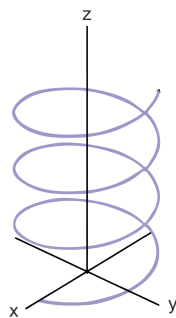
Note que

$$x = \cos t, y = \sin t \text{ e } z = t.$$

Logo

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ e } z = t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Figura 3 – Helice Circular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Dada uma parametrização $\delta(t) = (f(t), g(t))$ de uma curva C , dizemos que a mesma é dita suave em I , se as suas derivadas $f'(t)$ e $g'(t)$ sejam contínuas e não simultaneamente nulas. Uma curva é de classe C^1 se a primeira derivada for uma função contínua.

Seja C uma curva, dada por $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, logo a sua derivada é

$$\alpha'(t) = (f'(t), g'(t)), \tag{2.1}$$

Desta forma a norma de $\alpha'(t)$ é dada por

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}. \quad (2.2)$$

De modo similar caso α for curva espacial denotamos seu vetor tangente por

$$\alpha'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)), \quad (2.3)$$

e a norma de $\alpha'(t)$ por

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}. \quad (2.4)$$

2.2 Parametrização de curvas

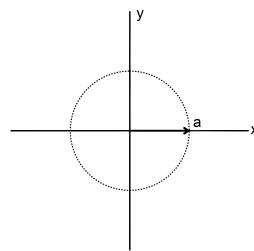
Parametrizar uma curva $C \subset \mathbb{R}^n$, com ($n = 2$ ou 3) consiste em apresentar uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que I é um intervalo e $\alpha(I) = C$. Em outras palavras, é descrever uma curva através de uma função vetorial representada por uma única variável t .

Exemplo 2.5. *Seja C uma curva, cuja equação cartesiana é $C : x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$. Encontre uma parametrização para a curva C .*

Solução: Considere $P = (x, y) \in C$ e t o ângulo entre o eixo positivo x e a semirreta OP . Observe que $x^2 + y^2 = a^2$ é uma circunferência de raio a , onde temos que t aumenta de 0 à 2π , e o ponto $P = (x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ se move sobre C no sentido anti-horário a partir do ponto definido por $(a, 0)$. Desta forma uma parametrização de C é dada pela função $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Figura 4 – Circunferência de centro na origem e raio a



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 2.6. *Seja C uma curva no espaço dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 2$. Apresente uma parametrização para C .*

Solução: Seja $(x, y, z) \in C$. Logo, x e y satisfazem $x^2 + y^2 = 1$. Assim, podemos considerar $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = 2 - x$, então, $z = 2 - \cos t$. Logo,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é uma parametrização de C .

Definição 2.5. (Comprimento da curva C) *Seja C uma curva parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b] = I$, onde f e g são diferenciáveis em I . Suponha que C não se intercepte. O comprimento de C pode ser calculado pela integral*

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Para curvas no espaço, temos

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} dt,$$

onde $C(t) = \{(f(t), g(t), h(t)), t \in [a, b]\}$.

2.3 Campos vetoriais

Em muitas aplicações da física ou matemática aplicada, é necessário associar a cada ponto P de alguma região um único vetor com origem em P . A totalidade de tais vetores, constitui um campo vetorial.

Definição 2.6. (Campo vetorial bidimensional) *Sejam P e Q funções reais, definida em $D \subset \mathbb{R}^2$. Uma função vetorial $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

é chamada de campo vetorial em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 2.7. (Campo vetorial tridimensional) *Sejam P , Q e R funções reais, definida em $D \subset \mathbb{R}^3$. Uma função vetorial $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

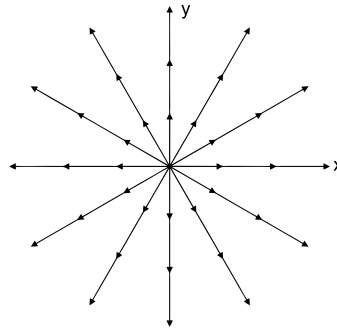
$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

é chamada de campo vetorial em $D \subset \mathbb{R}^3$.

Dizemos que o campo vetorial é contínuo se as funções P e Q ou $(P, Q$ e $R)$ são contínuas. O campo é diferenciável se as funções P e Q ou $(P, Q$ e $R)$ são diferenciáveis.

Exemplo 2.7. O campo vetorial em que cada ponto (x, y) do plano está associado ao vetor $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, está representado na figura 5.

Figura 5 - $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

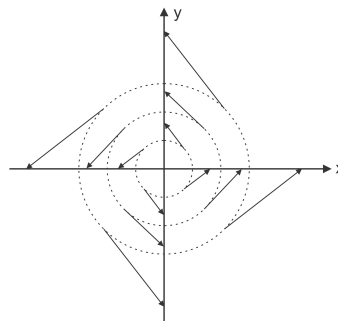
Ou seja, dado um ponto em \mathbb{R}^2 e uma direção, então existe um campo vetorial passando pelo ponto dado.

Exemplo 2.8. Represente o campo vetorial em que cada ponto (x, y) do plano está associado ao vetor $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

Solução: Observemos que, temos o produto escalar $\langle x, y \rangle \cdot \vec{F}(x, y) = \langle x, y \rangle \cdot \langle -y, x \rangle = -xy + xy = 0$. Portanto, $\langle x, y \rangle \perp \vec{F}(x, y)$. Além disso,

$$\|F(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|(x, y)\|.$$

Figura 6 - $\vec{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Ou seja, dado um ponto em \mathbb{R}^2 e uma ortogonalidade, então existe um campo vetorial passando pelo ponto dado.

Definição 2.8. (Campo Gradiente) O campo gradiente de uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo de vetores dado por.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Exemplo 2.9. Encontre o campo gradiente de $f(x, y, z) = xyz$.

Solução: Calculando as derivadas parciais temos

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Logo o campo gradiente de f é $\nabla f(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. Mais detalhes sobre campo gradiente pode ser encontrado em (BARBOZA, 2017).

2.3.1 Operadores divergente e rotacional

Definição 2.9. (Divergente) Seja $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ com P, Q e R dotadas de derivadas parciais em alguma região $D \subset \mathbb{R}^3$. A divergência de F , denotada por $\text{div}F$, ou $\nabla \cdot F$, é dada por:

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Definição 2.10. (Rotacional) Seja $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, onde P, Q e R têm derivadas parciais em alguma região $D \subset \mathbb{R}^3$. O rotacional de F é dado por

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Note que nas definições acima usamos a notação de operador. Sendo assim vamos considerar a notação do operador diferencial vetorial ∇ que é dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

ou melhor,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Considerando o "desenvolvimento" do produto vetorial de ∇ com o campo vetorial $\vec{F} = (P, Q, R)$, temos:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R).$$

Resolvendo, temos que:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot} \vec{F}.$$

Portanto,

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Agora considerando um campo vetorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ e o operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, iremos calcular o "desenvolvimento" do produto interno dos mesmos, assim temos

$$\nabla \cdot \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle.$$

Agora

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \vec{F}.$$

Portanto,

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Exemplo 2.10. Calcule o rotacional e o divergente de F , se

$$\vec{F}(x, y, z) = xy^2z^4\vec{i} + (2x^2y + z)\vec{j} + y^3z^2\vec{k}.$$

Solução: Temos que $\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ e $\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$, assim

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & 2x^2y + z & y^3z^2 \end{vmatrix} = (3y^2z^2 - 1)\vec{i} + 4xy^2z^3\vec{j} + (4xy - 2xyz^4)\vec{k}.$$

Portanto o $\text{rot} \vec{F} = (3y^2z^2 - 1)\vec{i} + 4xy^2z^3\vec{j} + (4xy - 2xyz^4)\vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (xy^2z^4, 2x^2y + z, y^3z^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3z^2) \cdot \\ &= y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z. \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{div}\vec{F} = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z.$$

Temos as seguintes propriedades para rotacional e divergentes, quando a função escalar f e o campo vetorial \vec{F} são de classe C^2 .

- i) $\operatorname{rot}(\nabla \cdot f) = 0$ ou $\nabla \times \nabla \cdot f = 0$
- ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ ou $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
- iii) $\operatorname{div}(\nabla \cdot f) = \Delta \cdot f$ ou $\nabla \cdot (\nabla \cdot f) = \Delta \cdot f$
- iv) $\operatorname{div}(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \operatorname{div}\vec{F} + \langle \nabla \cdot f, \vec{F} \rangle$

Definição 2.11. (Curva de Jordan) Uma curva fechada no \mathbb{R}^2 , sem auto interseção, e que divide o plano em exatamente duas componentes conexas, onde o seu traço é a fronteira dessas componentes é chamada de Curva de Jordan.

3 Integrais Curvilíneas

Neste capítulo vamos apresentar as Integrais Curvilíneas, enunciar e demonstrar o Teorema de Green, e também faremos alguns exemplos do conteúdo abordado para melhor compreensão (FERREIRA, 2013).

3.1 Integral curvilínea de campo escalar

Considere uma função escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a qual queremos integrar sobre uma curva $C \subset D$ dada por, $\delta(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ e δ de classe C^1 . Assim, temos que os valores de f ao longo da curva são obtidos através de uma função composta $f(x(t), y(t))$.

De início, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i , $i = 1, \dots, n$, de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Portanto, a curva C fica dividida em n subarcs de comprimento Δs_i . Seja t_i um ponto qualquer no i -ésimo intervalo I_i .

Assim, definimos a integral curvilínea de f sobre C como sendo o limite abaixo, caso exista.

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\delta(t_i)) \Delta s_i.$$

É possível mostrar que se f é uma função contínua, então o limite existe, e vale

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\delta(t)) \|\delta'(t)\| dt, \quad (3.1)$$

ou melhor,

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.2)$$

Se f é uma função contínua em $D \subset \mathbb{R}^3$ e C é uma curva também em D , que é dada por $\delta(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $a \leq t \leq b$, sendo δ de classe C^1 , a integral curvilínea de f sobre C pode ser calculada da seguinte forma

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\delta(t)) \|\delta'(t)\| dt, \quad (3.3)$$

ou melhor,

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3.4)$$

Quando $f(x, y) = 1$ ou $f(x, y, z) = 1$, temos que o comprimento da curva C pode ser calculado comprimento da curva.

Temos que a integral curvilínea de um campo escalar não depende da parametrização da curva C , mas de sua orientação, ou seja, não importa a parametrização da curva a integral será mesma. A orientação é denotada por C^- quando a curva está no sentido anti-horário e C^+ no sentido horário. Temos:

$$\int_{C^+} f ds = - \int_{C^-} f ds. \quad (3.5)$$

Quando C é uma curva dada por uma parametrização $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) de classe C^1 , e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$, de modo que, $\delta_i = \delta|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^1 , $1 \leq i \leq n$, temos:

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds, \quad (3.6)$$

onde $C_i = \delta_i([t_{i-1}, t_i])$. Outra propriedade válida da integral curvilínea, é a linearidade, explicitamente temos,

$$\int_C (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_C f ds + \beta \int_C g ds, \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.1. Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre o segmento de reta C que une a origem ao ponto $(1, 1, 1)$.

Solução: Escolhemos a parametrização mais simples possível

$$v(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}, 0 \leq t \leq 1.$$

As componentes têm derivadas de primeira ordem contínuas e $\|v(t)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. A integral de f sobre C é

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^1 f(t, t, t) \cdot (\sqrt{3}) dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t) \cdot \sqrt{3} dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) dt \\ &= \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Calcule $\int_C [yzdx + xzdy + xydz]$ onde C é a curva, com equações paramétricas $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 2$.

Solução: Vejamos então

$$\begin{aligned} \int_C [yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz] &= \int_0^2 [t^2 \cdot t^3 + t \cdot t^3 \cdot 2t + t \cdot t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_2^0 (t^5 + 2t^5 + 3t^5) dt \\ &= \int_0^2 6t^5 dt \\ &= [t^6]_0^2 = 2^6 = 64. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Calcule $\int_C (xy \, dx + x^2 \, dy)$ se C é a união dos segmentos retilíneos de $(2, 1)$ a $(4, 1)$ e de $(4, 1)$ a $(4, 5)$.

Solução: Sejam $C_1 : x = t, y = 1, 2 \leq t \leq 4$ e $C_2 : x = 4, y = t, 1 \leq t \leq 5$. Queremos calcular

$$\int_C = \int_{C_1} (xy \, dx + x^2 \, dy) dx + \int_{C_2} (xy \, dx + x^2 \, dy) dy.$$

Assim

$$\int_{C_1} (xy \, dx + x^2 \, dy) = \int_2^4 [t \cdot 1 + t^2 \cdot 0] dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_2^4 = (8 - 2) = 6,$$

e

$$\int_{C_2} (xy \, dx + x^2 \, dy) = \int_1^5 [4 \cdot t \cdot 0 + 4^2] dt = [16t]_1^5 = (80 - 16) = 64,$$

portanto,

$$\int_C (xy \, dx + x^2 \, dy) = 6 + 64 = 70.$$

3.2 Teorema de Green

O Teorema de Green relaciona a integral curvilínea de um campo vetorial com a integral dupla sobre a região delimitada pela curva.

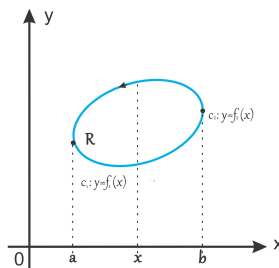
Teorema 3.1 (Teorema de Green no Plano). *Seja D uma região fechada e limitada no \mathbb{R}^2 , cuja fronteira $\partial D = C$ é uma curva de Jordan e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, de modo que ∂D seja percorrida apenas uma vez no sentido anti-horário. Se $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U tal que $D \subset U$. Então*

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.7)$$

$\oint_{\partial D}$ significa que a integral está sendo considerada sobre a curva no sentido que deixa a região a esquerda da curva.

Demonstração: Vamos provar um caso particular. Seja C uma curva fechada, simples e suave no plano xy com propriedade de que retas paralelas aos eixos não cortem em mais de dois pontos. Seja R a região limitada por C e supondo que P e Q e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha C e R .

Figura 7 – A curva de fronteira C e formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Da figura acima, pode-se notar que $C = C_1 \cup C_2$, logo tem-se duas partes orientadas no sentido anti-horário

$$C_1 : y = f_1(x) \text{ e } C_2 : y = f_2(x), \text{ com } a \leq x \leq b.$$

Para qualquer $x \in [a, b]$, pode-se integrar $\frac{\partial P}{\partial y}$ em relação a y de $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$ e obter

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} = P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)). \quad (3.8)$$

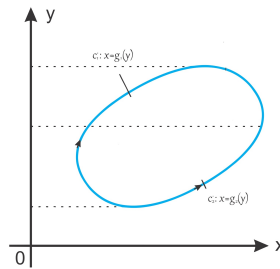
Integrando a expressão (3.8) em relação a x de a até b obtém-se

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \int_a^b P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_b^a P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} P dx - \int_{C_1} P dx \\ &= - \oint_C P dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C P dx = \int \int_O \left(- \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.9)$$

Figura 8 – Função em g .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Da figura 8 pode-se notar que $C = C_1 \cup C_2$, logo tem-se duas partes orientadas no sentido anti-horário

$$C_1 : x = g_1(y) \text{ e } C_2 : x = g_2(y), \text{ com } c \leq y \leq d.$$

Para qualquer $y \in [c, d]$, pode-se integrar $\frac{\partial Q}{\partial x}$ em relação a x de $x = g_1(y)$ até $x = g_2(y)$ e obter

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) \Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} = Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y). \quad (3.10)$$

Integrando a expressão (3.10) em relação a y de c até d obtem-se

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy - \int_c^d Q(g_1(y), y) dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy + \int_d^c Q(g_1(y), y) dy \\ &= \int_{C_2} Q dy + \int_{C_1} Q dy \\ &= \oint_C Q dy. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_C Q dy = \iint_{RR} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy. \quad (3.11)$$

Somando (3.11) e (3.9) obtem-se

$$\begin{aligned}\oint_C Qdy + \oint_C Pdx &= \int \int_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy + \left(- \int \int_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right) \\ &= \int \int_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \int \int_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_C Qdy + \oint_C Pdx = \int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

■

Exemplo 3.4. Use o Teorema de Green para calcular a integral $\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy$, onde C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução: Seja $P(x, y) = 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 + y^2$, note que

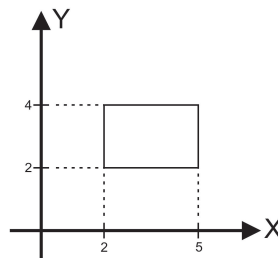
$$P_y(x, y) = 2x \text{ e } Q_x(x, y) = 2x$$

Portanto

$$\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy = \int \int_R [2x - 2x] dA = 0.$$

Exemplo 3.5. Calcule $\oint_C = (e^{x^2} + y)dx + (x^2 + \tan^{-1} \sqrt{y})dy$, onde C é a fronteira do retângulo com vértices $(2, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$ e $(2, 4)$.

Figura 9 – Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Solução: Chamando $P(x, y) = e^{x^2} + y$ e $Q(x, y) = x^2 + \tan^{-1} \sqrt{y}$. Logo as suas derivadas são

$$P_y(x, y) = 1 \text{ e } Q_x = 2x.$$

Observando o retângulo temos que o mesmo é limitado pelas retas $y = 2$ a $y = 4$ e $x = 2$ a $x = 5$, portanto

$$\begin{aligned}\oint_C &= (e^{x^2} + y)dx + (x^2 + \tan^{-1} \sqrt{y})dy \\ &= \int \int_R [2x - 1]dA = \int_2^5 \int_2^4 [2x - 1]dydx \\ &= \int_2^5 [4x - 2]dx = 36.\end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_C = \int \int_R [2x - 1]dA = 36.$$

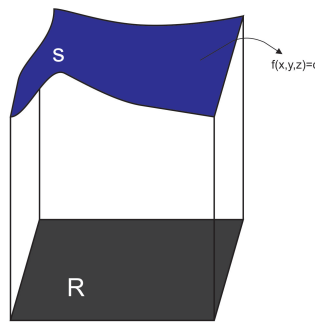
4 Integrais de Superfícies

Já sabemos como integrar uma função sobre uma região no plano já sabemos, mas, agora veremos alguns exemplos de como podemos utilizar uma integral dupla, para calcular a integral de uma função sobre uma superfície. Mas detalhe pode ser encontrado em (SWOKOWSKI, 1995)

Assim para uma função g de 3 variáveis, podemos considerar a integração sobre regiões do espaço e integrais sobre superfícies.

No que segue, consideremos S o gráfico de $z = f(x, y) \in C^1$, onde S tem uma "projeção regular" R sobre o plano xy , isto é, cada ponto de R é a projeção ortogonal de um único ponto de S .

Figura 10 – Projeção vertical ou 'sombra' de S sobre um plano coordenado.

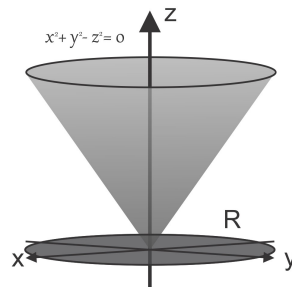


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Para calcular a integral de g sobre uma superfície $f(x, y, z) = c$ consideramos a região plana e limitada R gerada pela projeção da superfície no plano xy e utilizaremos a fórmula

$$\int \int_S g(x, y, z) ds = \int \int_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dA. \quad (4.1)$$

Exemplo 4.1. Calcule $\int \int_S x^2 z dS$ se S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre os planos $z = 2$ e $z = 6$.

Figura 11 – Cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Solução: Observando a figura acima, temos que a projeção R de S sobre o plano xy é a região anular delimitada pelos círculos de raios 2 e 6 com centro na origem. Escrevendo a equação de S na forma

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y),$$

então

$$f_x(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ e } f_y(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Agora, aplicando a equação (4.1), temos

$$\iint_S x^2 z \, ds = \iint_R x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + 1} \, dA.$$

Logo,

$$\iint_S x^2 z \, ds = \iint_R x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA.$$

Assim

$$\iint_S x^2 z \, ds = \iint_R x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \, dA.$$

Utilizando coordenadas polares para calcular integral dupla, tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_2^6 (r^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} r \sqrt{2} r dr d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_2^6 d\theta \\
&= 60\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\
&= 60\sqrt{2} [\sin \theta]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Supondo que $f(x, y) \geq 0$ na região R no plano xy , onde f tem derivadas parciais primeiras contínuas em R . Seja $g(x, y, z) = 1$ para todo (x, y, z) então a equação (4.1), reduz a outra equação, e corresponde a área da superfície S . Vejamos tal equação

$$A = \iint_R \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dA. \quad (4.2)$$

Exemplo 4.2. Encontre a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$.

Solução: Sendo $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, temos

$$A = \iint_R \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dA = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA,$$

onde R é uma região do plano xy delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$, dessa forma poderíamos achar a área do primeiro quadrante, assim, para acharmos a área de R todo é necessário multiplicarmos por 4, então

$$A = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dy dx$$

para calcularmos a integral iremos transformar em coordenadas polares para facilitar o procedimento, vejamos

$$\begin{aligned}
A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} \left[(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} (17^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta \\
&= \frac{1}{3} (17^{\frac{3}{2}} - 1) [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} (17^{\frac{3}{2}} - 1) = 36, 2.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Calcule a integral de superfície $\iint_S g(x, y, z) ds$, com $g(x, y, z) = x + y + z$ e S é a porção do plano $2x + 2y + z = 2$, que está o primeiro octante.

Solução: Temos que $z = 2 - 2x - 2y = f(x, y)$, calculando as derivadas

$$f_x = -2 \text{ e } f_y = -2,$$

e elevando ambas as derivadas ao quadrado, temos

$$f_x^2 = 4 \text{ e } f_y^2 = 4,$$

agora

$$\begin{aligned} \int \int_S g(x, y, z) \, ds &= \int \int_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{-x+1} (x + y + 2 - 2x - 2y) \sqrt{4 + 4 + 1} \, dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{-x+1} (-x - y + 2) \sqrt{9} \, dy dx \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{-x+1} (-x - y + 2) \, dy dx = 3 \int_0^1 \left[-xy - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_0^{-x+1} dx \\ &= 3 \int_0^1 \left[-x(-x+1) - \frac{(-x+1)^2}{2} + 2(-x+1) \right] dx \\ &= 3 \int_0^1 \left(x^2 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{2} - \frac{1}{2} - 2x + 2 \right) dx \\ &= 3 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} \right) dx = 3 \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3x}{2} \right]_0^1 \\ &= 3 \left[\frac{1}{6} - 1 + \frac{3}{2} \right] = 3 \left[\frac{1 - 6 + 9}{6} \right] = 2. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. Determine a área da superfície dada pela parte de baixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$.

Solução: Sendo $f(x, y) = (2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ temos

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \text{ e } f_y = -\frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$

logo

$$A = \int \int_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{2 - x^2 - y^2}} \, dA = \int \int_R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{2 - (x^2 + y^2)}} \, dA,$$

para calcularmos, iremos transformar a área em coordenadas polares para facilitar o procedimento. Vejamos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r}{\sqrt{2-r^2}} \right) dr d\theta \\ &= - \int_0^\pi \left[(2-r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 d\theta \\ &= - \int_0^\pi (1 - 2^{\frac{1}{2}}) d\theta \\ &= -(1 - 2^{\frac{1}{2}}) [\theta]_0^\pi = -\pi(1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Observação: Se a superfície não admite uma projeção regular sobre o plano xy , pode-se definir, de modo análogo, as integrais de superfícies considerando projeções sobre o plano xz ou yz .

5 Conclusão

A teoria bordada reforça o estudo de alguns conceitos e resultados de cálculo aplicada em técnicas de derivação, assim facilitando o desenvolvimento do mesmo, e obtendo o resultado desejável.

Uma das grandes dificuldades encontradas na elaboração do trabalho foi a pesquisa bibliográfica realizada, pois, cada autor faz uma abordagem diferente da teoria, e neste trabalho, buscamos uma forma de apresentar os conceitos e resultados de uma forma simples e acessível ao leitor, e escolher as aplicações, onde, a grande maioria eram extensas e utilizavam outros conteúdos não abordados no trabalho. Com isso percebi que essas dificuldades me fizeram ver que para estudar matemática é necessário se aperfeiçoar a cada dia, pois, a matemática atualiza a cada instante.

O trabalho em geral contribuiu muito com a minha formação acadêmica, pois foi uma oportunidade de pesquisar sobre o assunto que gosto de trabalhar, em que aprofundei mais meus conhecimentos sobre o cálculo, não visto em sala de aula. E perceber que foi muito mais difícil colocar o trabalho em prática, mas que ao mesmo tempo se torna satisfatório por ver que o objetivo foi concluído.

Referências

- BARBOZA, W. F. C. Integração em campos vetoriais. *Notas de aula do professor da UEPB, Campina Grande*, 2017. Citado na página 17.
- FERREIRA, J. C. Integral de linha de campos vetoriais. dissertação (mestrado em educação matemática). *Universidade em Juiz de Fora, Universidade de Minas Gerais, Minas Gerais*, 2013. Citado na página 20.
- ROCHA, J. L. Integrais de superfície. monografia (graduação em bacharel em matemática). *Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande*, 2012. Citado na página 10.
- SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica, vol. 2. *Makron-Books do Brasil Editora Ltda., Rio de Janeiro*, 1995. Citado na página 27.
- THOMAS, G. B. et al. Cálculo, vol. 1 & 2. *10ª Editora: Prentice-Hall*, 2002. Citado na página 11.