UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPOS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

IGOR MATEUS DA SILVA SOUSA

UM ESTUDO DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA COM APLICAÇÃO A UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

CAMPINA GRANDE - PB
2019

IGOR MATEUS DA SILVA SOUSA

UM ESTUDO DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA COM APLICAÇÃO A UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE - PB
2019

S725e Sousa, Igor Mateus da Silva.
Um estudo do teorema do passo da montanha com aplicação a uma classe de problemas elípticos [manuscrito] / Igor Mateus da Silva Sousa. - 2019.
55 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Teorema do Passo da Montanha. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Espaços de Sobolev. 4. Espaços de Lebesgue. I. Título

21. ed. CDD 515.25

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

IGOR MATEUS DA SILVA SOUSA

UM ESTUDO DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA COM APLICAÇÃO A UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 11 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Luciana Brito

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ao eterno Deus Todo-Poderoso, Criador dos Céus e da Terra, Dono de toda sabedoria e conhecimento, Soberano em repartir dons e talentos aos homens conforme a Sua vontade e misericórdia.

A Deus, por me trazer a existência e tudo o mais, à minha família por ter me criado e apoiado, aos amigos e professores por toda ajuda emocional, intelectual e amizade,

DEDICO.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me incluído no Seu plano e projeto, me escolhido desde o ventre e me guiado desde então a fim de que eu chegasse até aqui. Agradeço a Ele por ter me iluminado e me dado força, pois a tudo Ele dá forças, para que eu vencesse mais uma etapa da vida.

Agradeço à instituição UEPB, aos professores, em especial à Emanuela e Aldo, membros da banca, pelo auxílio que me prestaram durante a graduação, e funcionários em geral, por terem me recebido tão bem e me dado inúmeras oportunidades, das quais acredito que pude aproveitar de modo intenso, pleno e especial, pois por trás de todo mérito pessoal se encontra os meios disponíveis para todas as realizações.

Agradeço à minha família, pai, mãe, tios e outros, por me disponibilizar meios dos mais variados, incluindo materiais, emocionais e espirituais, para que eu me tornasse esta pessoa que sou. De modo especial à minha avó Irene Sousa Ferreira, por ter me criado, educado e estar presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço ao professor de Matemática que tive no ensino médio, Manassés, por ter me influenciado a seguir esta carreira tão nobre que é a docência, e em especial nesta ciência tão pura que é a Matemática, pois através de sua postura profissional e pelo seu belo trabalho em sala de aula incluindo a exposição da disciplina, me fez ver a beleza que existe por trás dos números.

Agradeço ao CNPQ que por meio de dois PIBICs me auxiliou através de bolsa, a qual foi muito útil e importante para incentivar os meus estudos.

Agradeço a todos os professores que tive durante o curso, e à fim de ser curto nas palavras, não citarei o nome de todos, pois são vários. Agradeço a minha orientadora, a Dra. Luciana Roze de Freitas, que durante dois anos me ajudou e orientou em dois PIBICs, os quais me foram de extrema importância para meu amadurecimento intelectual e para que enveredasse no ramo da Matemática Pura.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os amigos que fiz durante estes anos de curso, todos imprescindíveis para desanuviar o estresse e a tensão e alegrar os meus momentos de aula e estudo. Dentre eles cito: Yalorisa, Renner, Willian, Deiversson, Rozilane, Hellen, Mayrton, Wuandson, Lisandra, Natália, e tantos outros que não caberiam nesta lista, mas que tiveram uma importância grande pra meu crescimento como pessoa.

Resumo

Atualmente, existem inúmeros métodos de resolução de equações diferenciais, dentre eles, destacamos os métodos variacionais que consiste basicamente em associar o problema a um funcional diferenciável apropriado, de modo que os pontos críticos desse funcional sejam as soluções procuradas. A proposta deste trabalho consiste em estudar um teorema clássico da teoria dos pontos críticos, conhecido como Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz. O estudo do Teorema foi abordado tendo como base o livro intitulado Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations do autor Rabinowitz P. H. e a aplicação referente aos resultados de existência de solução para problemas elípticos foi abordado tendo como base o livro intitulado Minimax Theorems do autor Michel Willem. No decorrer do trabalho, estivemos frequentemente utilizando conteúdos de Análise Funcional, que é um pré-requisito para o nosso estudo, e abordamos também os Espaços de Sobolev, pois toda a nossa discussão acontece em espaços deste tipo.

Palavras Chaves: Teorema do Passo da Montanha. Equações Diferenciais Parciais. Espaços de Sobolev.

Abstract

Currently, there are numerous methods of solving different equations, among them, we highlight the variational methods that consists basically in associating the problem with an appropriate differentiable functional so that the critical points of this functional are the solutions sought. The purpose of this work consisitng of to study a classical theorem of the critical point theory, known as the Mountain Pass Theorem, due to Ambrosetti and Rabinowitz. The study of the Mountain Pass Theorem, were approached based the book titled Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations from the author Rabinowitz PH. andas the application concerning the results of the existence of a solution to elliptical problems were approached based the book titled Minimax Theorems from the author Michlel Willem. In the course of the work, we have often been using Functional Analysis content, which is a prerequisite for our study and, we approached also Sobolev Spaces, because all our discussion happens in spaces of this type.

Keywords: Theorem of the Step Mountain. Partial Differential Equations. Sobolev Spaces.

Sumário

Introdução

A Matemática carrega em sua história os fatos e acontecimentos que ao longo dos tempos, a começar da antiguidade até os dias de hoje, levaram ao seu tão amplo desenvolvimento, chegando atualmente a ser um imenso sistema de variadas e extensas áreas. Fatos estes muitas vezes ocasionados por necessidades da vida cotidiana. Hoje, a Matemática desempenha um papel fundamental em solucionar problemas necessários ao desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade. Assim sendo, o conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contras-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos, desta forma deve ser encarada como uma ciência viva, importante e em constante desenvolvimento.

Por outro lado, a Matemática se caracteriza por ser um campo de conceitos abstratos inter-relacionados, munida de precisão, rigor lógico e caráter irrefutável de suas conclusões, haja vista os teoremas matemáticos serem demonstrados rigorosamente através do raciocínio lógico que os tornam incontestáveis. Além de ter, também, um extenso campo de aplicações em inúmeros aspectos práticos da vida cotidiana, bem como nas diversas ciências, com destaque para a Física e suas correlatas, não excluindo as Ciências Humanas.

A Matemática já evoluiu bastante e na atualidade, possui várias ramificações nas áreas de Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática. Na denominada Matemática Pura se destacam três grandes áreas: Análise, Geometria Diferencial e Álgebra Abstrata. Na perspectiva da Análise, temos um campo de estudo rico em aplicações, as Equações Diferenciais Parciais. Embora a Matemática Pura seja muitas vezes encarada com certo medo, preconceito, até mesmo incompreensão, ela deve sua importância na influência mútua que tem com a Matemática Aplicada.

Um grande desafio de vários matemáticos é encontrar soluções para Equações Diferenciais Parciais, equações estas que aparecem com bastante frequência em modelos físicos, químicos, dentre outros, daí o grau de sua importância. Atualmente, existem inúmeros métodos de resolução de equações diferencias, dentre eles, destacamos os Métodos Variacionais, que consistem em associar o problema a um funcional diferenciável apropriado de modo que os pontos críticos desse funcional sejam as soluções procuradas.

A proposta deste trabalho consiste em estudar um teorema clássico da Teoria dos Pontos Críticos que, nas últimas décadas, tem sido uma importante ferramenta na abordagem de diversos tipos de problemas em Equações Diferenciais Parciais, conhecido como Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz. Esse Teorema garante a existência de um ponto crítico do tipo minimax para o funcional diferenciável definido em um espaço de Banach, satisfazendo certas condições.

Para isto é necessário fazer algum uso da Teoria da Integração e da Medida, ver alguns resultados de Análise Funcional, em especial os que tratam de convergência, e trabalhar com os espaços de Sobolev. O trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo veremos os espaços vetoriais normados mais importantes na teoria estudada, que são os espaços de Lebesgue $L_p, 1 \leq p \leq \infty$, e os espaços de Sobolev. Estudaremos ainda alguns resultados de convergência, distribuições, espaços de funções teste, e por fim, as imersões nos espaços de Sobolev que são usadas com bastante frequência em aplicações.

No segundo capítulo será demonstrado o Teorema mais importante do trabalho, que se trata do Teorema do Passo da Montanha, antecedendo a este o teorema de deformação, que serve como lema para o mesmo, e inicialmente falaremos de campos pseudo-gradiente.

No terceiro e último capítulo apresentaremos uma aplicação do teorema do passo da montanha, que consistirá no problema de Dirichlet semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u, \\ \quad u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde demonstraremos que este problema possui solução não trivial.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo são apresentados conceitos e resultados prévios, imprescindíveis para os capítulos posteriores. É feito um estudo introdutório sobre os Espaços Vetoriais Normados L_p, com $1 \leq p \leq \infty$, espaços estes, bastante importantes em Análise Funcional e em Equações Diferenciais Parciais (*EDPs*). Em seguida são apresentados conceitos relacionados aos Espaços de Sobolev, espaços estes onde moram as soluções das *EDPs* elípticas que estudamos, e resultados envolvendo as imersões nestes, tão úteis em aplicações. As definições e resultados deste capítulo se encontram nas referências [2] e [11]. Alguns conceitos e resultados da Teoria da Integração e da Medida podem ser consultados no Apêndice B.

1.1 Os espaços de Lebesgue $L_p, 1 \leq p \leq \infty$

1.1.1 O espaço L_1

Definição 1.1 *Seja (X,χ,μ) (ver apêndice B) um espaço de medida. Se f pertence a $L(X,\chi,\mu)$, definimos*

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu.$$

Será mostrado que N_μ é uma semi-norma no espaço $L(X,\chi,\mu)$.

Lema 1.1 *O espaço $L(X,\chi,\mu)$ é um Espaço Vetorial sob as operações definidas por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in X, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e N_μ é uma semi-norma em $L(X,\chi,\mu)$. Além disso, $N_\mu(f) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para μ-q.t.p. em X (ver apêndice B).

Demonstração. É fácil ver que $L(X,\chi,\mu)$ é um espaço vetorial com as operações indicadas.

É claro que $N_\mu(f) \geq 0$ para $f \in L$, e que

$$\begin{aligned} N_\mu(\alpha f) &= \int |\alpha f| d\mu \\ &= |\alpha| \int |f| d\mu \\ &= |\alpha| N_\mu(f), \end{aligned}$$

ou seja,

$$N_\mu(\alpha f) = |\alpha| N_\mu(f).$$

Além disso, segue da desigualdade triangular e da linearidade da integral que

$$\begin{aligned} N_\mu(f+g) &= \int |f+g| d\mu \\ &\leq \int (|f|+|g|) d\mu \\ &= \int |f| d\mu + \int |g| d\mu \\ &= N_\mu(f) + N_\mu(g), \end{aligned}$$

ou seja,

$$N_\mu(f+g) = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Daí N_μ é uma semi-norma em $L(X,\chi,\mu)$, e $N_\mu(f) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ $\mu - q.t.p$ (ver [2]).

A fim de tornar $L(X,\chi,\mu)$ em um espaço vetorial normado, devemos identificar duas funções que são iguais em quase todo ponto; isto é, usamos classes de equivalência de funções em vez de funções.

Definição 1.2 *Duas funções em $L = L(X,\chi,\mu)$ são ditas serem μ-equivalentes se elas são iguais μ-q.t.p.*

A classe de equivalência determinada por f em L é algumas vezes denotada por $[f]$ e consiste do conjunto de todas funções em L que são μ-equivalentes a f. O espaço de Lebesgue $L_1 = L_1(X,\chi,\mu)$ consiste de todas as classes de μ-equivalência em L. Se $[f]$ pertence a L_1, definimos a norma por

$$||[f]||_1 = \int |f| d\mu. \tag{1.1}$$

Teorema 1.2 *O espaço de Lebesgue $L_1(X,\chi,\mu)$ é um Espaço Vetorial Normado.*

Demonstração. Entende-se, claro, que as operações vetoriais em L_1 são definidas por

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f]+[g] = [f+g],$$

e que o vetor zero de L_1 é $[0]$. Devemos checar somente que a equação (2.1) é uma norma em L_1. Claramente $||\,[f]\,||_1 \geq 0$ e $||\,[0]\,||_1 = 0$. Além disso, se $||\,[f]\,||_1 = 0$ então

$$\int |f| d\mu = 0,$$

logo, $f(x) = 0$ em $\mu - q.t.p.$ Daí $[f] = [0]$. Finalmente, é fácil ver que as propriedades (iii) e (iv) da Definição 2.1 são satisfeitas. Portanto, $||\,.\,||_1$ é uma norma em L_1.

Deve sempre ser lembrado que os elementos de L_1 são na realidade classes de equivalência de funções em L. Contudo, é conveniente e costumeiro considerar esses elementos como sendo funções e subsequentemente faremos isso. Assim, vamos fazer referência à classes de equivalência $[f]$ referindo-se a "o elemento f de L_1", e vamos escrever $||f||_1$ em lugar de $||\,[f]\,||_1$.

1.1.2 Os espaços L_p, $1 \leq p < \infty$

Vamos considerar uma família de espaços vetoriais normados relacionados à classes de equivalência de funções mensuráveis.

Definição 1.3 *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L_p = L_p(X, \chi, \mu)$ consiste de todas as classes de μ-equivalência de funções χ-mensuráveis a valores reais f para qual $|f|^p$ tem uma integral finita com repeito a μ sobre X. Definimos*

$$||f||_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Se $p = 1$, isso se reduz a norma introduzida previamente no espaço L_1 de classes de equivalência de funções integráveis. Vamos mostrar subsequentemente que se $1 \leq p < \infty$, então L_p é um espaço vetorial normado com a norma dada em (2.2), e é completo sob esta norma; assim L_p é um Espaço de Banach. Entende-se que a operação vetorial entre classes de equivalência em L_p são definidas pontualmente: a soma das classes de equivalência contendo f e g é a classe de equivalência contendo $f + g$ e semelhantemente para o produto cf.

A fim de estabelecer que (2.2) é uma norma em L_p, vamos precisar da seguinte desigualdade básica.

Teorema 1.3 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, onde $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L_1$ e $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$.*

Demonstração. Seja α um número real satisfazendo $0 < \alpha < 1$, e considere a função φ definida para $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha}.$$

Verifica-se que $\varphi^{'}(t) < 0$ para $0 < t < 1$ e $\varphi^{'}(t) > 0$ para $t > 1$. Segue do Teorema do Valor Médio do Cálculo que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ e que $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim, temos

$$\alpha t - t^{\alpha} \geq \alpha - 1,$$

o que implica

$$t^{\alpha} \leq \alpha t + (1-\alpha), \quad t \geq 0.$$

Se a, b são não negativos, $b \neq 0$, e se tomarmos $t = \frac{a}{b}$ e multiplicarmos por b, obtemos a desigualdade

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $t = 1$, ou seja, $a = b$.

Agora sejam p e q satisfazendo $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e tome $\alpha = \frac{1}{p}$. Segue que se A, B são quaisquer números reais não negativos, então fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} A^p + (1 - \frac{1}{p}) B^q,$$

de onde segue

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}, \tag{1.3}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $t = \frac{A^p}{B^q} = 1$, isto é, se $A^p = B^q$.

Suponha $f \in L_p$, $g \in L_q$, $||f||_p \neq 0$ e $||g||_q \neq 0$. O produto fg é mensurável (ver apêndice B) e (2.3) com $A = \frac{|f(x)|}{||f||_p}$ e $B = \frac{|g(x)|}{||g||_q}$ implica em

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_p ||g||_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q||g||_q^q}.$$

Já que ambos os termos à direita são integráveis, segue que fg é integrável. Além disso, na integração obtemos

$$\frac{||fg||_1}{||f||_p ||g||_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ou seja,

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q,$$

que é a desigualdade de Hölder como queríamos demonstrar.

A desigualdade de Hölder garante que o produto de uma função em L_p e uma função em L_q é integrável quando $p > 1$ e q satisfaz a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou, equivalentemente, quando $p + q = pq$. Dois números satisfazendo esta relação são ditos serem **índices conjugados.** Observa-se que $p = 2$ é o único índice **próprio conjungado.** Assim, o produto de duas funções em L_2 é integrável.

Corolário 1.4 ***(Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz)*** *Se f e g pertencem a L_2, então fg é integrável e*

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

Teorema 1.5 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se f e h pertencem a L_p, $p \geq 1$, então $f + h$ pertence a L_p e*

$$||f + h||_p \leq ||f||_p + ||h||_p. \tag{1.4}$$

Demonstração. Se $A = ||f+h||_p = 0$, então a equação (2.4) é trivial, portanto, vamos supor $A \neq 0$. O caso $p = 1$ já foi tratado, então supomos $p > 1$. A soma $f+h$ é evidentemente mensurável. Daí

$$\begin{aligned} |f+h|^p &\leq (|f|+|h|)^p \\ &\leq [2sup\{|f|,|h|\}]^p \\ &\leq 2^p\{|f|^p+|h|^p\}, \end{aligned}$$

e como $f,h \in L_p$, segue que $f+h \in L_p$. Além disso

$$|f+h|^p = |f+h||f+h|^{p-1} \leq |f||f+h|^{p-1} + |h||f+h|^{p-1}. \tag{1.5}$$

Como $f+h \in L_p$, então $|f+h|^p \in L_1$; desde que $p = (p-1)q$ segue que $|f+h|^{p-1} \in L_q$.

Daí, podemos aplicar a desigualdade de Hölder para inferir que

$$\int |f||f+h|^{p-1}d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+h|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

e

$$\int |h||f+h|^{p-1}d\mu \leq \left(\int |h|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+h|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Isto é,

$$\int |f||f+h|^{p-1}d\mu \leq ||f||_p||f+h||_p^{\frac{p}{q}}$$

e

$$\int |h||f+h|^{p-1}d\mu \leq ||h||_p||f+h||_p^{\frac{p}{q}}.$$

Somando as duas desigualdades acima e combinando com (2.5) temos

$$||f+h||_p^p \leq ||f+h||_p^{\frac{p}{q}}(||f||_p + ||h||_p),$$

dividindo esta desigualdade por $A^{\frac{p}{q}}$, segue

$$||f+h||_p^{(p-\frac{p}{q})} \leq (||f||_p + ||h||_p),$$

desde $p - \frac{p}{q} = 1$, obtemos

$$||f+h||_p \leq (||f||_p + ||h||_p),$$

que é a desigualdade de Minkowski como queríamos demonstrar.

Mostra-se que o espaço L_p é um espaço vetorial e que a fórmula (2.2) define uma norma em L_p. A única coisa não trivial para ser checada aqui é a desigualdade (iv) da Definição 2.1 e esta é a desigualdade de Minkowski. Vamos agora observar que L_p é completo sob esta norma no seguinte sentido

Definição 1.4 *Uma sequência (f_n) em L_p é uma* ***sequência de Cauchy*** *se, para cada número positivo ε, existe um $M(\varepsilon)$ tal que, se $m,n \geq M(\varepsilon)$, então $||f_m - f_n||_p < \varepsilon$. Uma sequência (f_n) em L_p* ***converge para*** *f em L_p se, para cada número positivo ε existe um $N(\varepsilon)$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então $||f - f_n||_p < \varepsilon$. Um espaço vetorial normado é* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do espaço.*

Lema 1.6 *Se a sequência (f_n) converge para f em L_p, então é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, se $m,n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$, então

$$||f - f_m||_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad ||f - f_n||_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí temos

$$||f_m - f_n||_p \leq ||f_m - f||_p + ||f - f_n||_p < \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

O próximo resultado diz que toda sequência de Cauchy em L_p converge em L_p. Este resultado é também chamado de Teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 1.7 ***(Teorema da Completude)*** *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço L_p é um espaço vetorial completo sob a norma*

$$||f||_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver referência [1].

Um Espaço Vetorial normado completo é usualmente chamado de **Espaço de Banach.** Assim, o precedente Teorema poderia ser formulado: o Espaço L_p é um Espaço de Banach sob a norma dada em (2.2).

1.1.3 O espaço L_∞

Definição 1.5 *O espaço $L_\infty = L_\infty(X, \chi, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções χ-mensuráveis a valores reais que são limitadas em quase todo ponto. Se $f \in L_\infty$ e $\Omega \in \chi$ com $\mu(\Omega) = 0$, definimos*

$$S(\Omega) = sup\{|f(x)| : x \notin \Omega\}$$

e

$$||f||_\infty = inf\{S(\Omega) : \Omega \in \chi, \mu(\Omega) = 0\}. \tag{1.6}$$

Um elemento de L_∞ é chamado de ***função essencialmente limitada.***

Segue que se $f \in L_\infty$, então $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ para quase todo x. Além disso, se $A < ||f||_\infty$, então existe um conjunto E, com medida positiva tal que $|f(x)| \geq A$ para $x \in E$. Note também que a norma em (2.6) está bem definida[1] em L_∞.

Teorema 1.8 *O espaço L_∞ é um Espaço Vetorial Normado completo sob a norma dada pela fórmula* (2.6).

Demonstração. Ver referência [1].

Definição 1.6 *Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, denota-se por $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das funções numéricas u, mensuráveis em Ω, equipado com a família de semi-normas*

$$\{p_{\mathscr{O}};\ \mathscr{O} \text{subconjunto aberto limitado de } \Omega\},$$

em que

$$p_{\mathscr{O}}(u) = \left(\int_{\mathscr{O}} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Alguns resultados de convergência

Nesta seção apresentamos alguns resultados referentes a convergência de funções integráveis.

Teorema 1.9 (***da convergência monótona***) *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\chi)$ que converge para f, então*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu. \tag{1.7}$$

Demonstração. A função f é mensurável. Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Para estabelecer a desigualdade oposta, seja α um número real satisfazendo $0 < \alpha < 1$ e seja φ uma função mensurável simples satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Seja

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

[1]Como $S(\Omega) \geq 0, \forall \Omega \in \chi, \mu(\Omega) = 0$, então existe, pelo postulado de Dedekind, o ínfimo sobre $\{S(\Omega) : \Omega \in \chi, \mu(\Omega) = 0\}$.

portanto $A_n \in \chi$, $A_n \subset A_{n+1}$, e $X = \bigcup A_n$. Daí, segue que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{1.8}$$

Uma vez que a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, então

$$\int \varphi d\mu = lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

Portanto, tomando o limite em (2.8) com respeito a n, obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu.$$

Como isso vale para todo α com $0 < \alpha < 1$, inferimos que

$$\int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu.$$

e como φ é uma função arbitrária simples em M^+ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$, concluímos que

$$\int f d\mu = sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu.$$

Se combinarmos isso com a desigualdade oposta, obtemos (2.7) como queríamos demonstrar.

Lema 1.10 (***de Fatou***) *Se (f_n) pertence a $M^+(X,\chi)$, então*

$$\int (lim\ inf f_n) d\mu \leq lim\ inf \int f_n d\mu. \tag{1.9}$$

Demonstração. Seja $g_m = inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ assim $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Portanto,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \quad m \leq n,$$

e

$$\int g_m d\mu \leq lim\ inf \int f_n d\mu.$$

Como a sequência (g_m) é crescente e convergente para $lim\ inf f_n$, o Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\int (lim\ inf f_n) d\mu = lim \int g_m d\mu \leq lim\ inf \int f_n d\mu,$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 1.11 (***da Convergência Dominada de Lebesgue***) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis em $L_1(X)$ que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável a valores reais f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu. \tag{1.10}$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n, f em um conjunto de medida nula, podemos assumir que a convergência ocorre em todos os pontos de X. Segue que f é integrável.[2] Como $g + f_n \geq 0$, podemos aplicar o Lema de Fatou para obter

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f) d\mu \leq lim\, inf \int (g+f_n) d\mu.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= lim\, inf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + lim\, inf \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\int f d\mu \leq lim\, inf \int f_n d\mu. \tag{1.11}$$

Como $g - f_n \geq 0$, outra aplicação do Lema de Fatou produz

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \\ &\leq lim\, inf \int (g - f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu - lim\, sup \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

da qual segue que

$$lim\, sup \int f_n \leq \int f d\mu \tag{1.12}$$

Combinando (2.11) e (2.12) podemos inferir que

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu,$$

como queríamos demonstrar.

1.3 Introdução aos Espaços de Sobolev

Nesta seção serão fixadas terminologia, a notação e certos resultados sobre integração e teoria das distribuições. Em seguida serão apresentados os resultados básicos para aplicação às Equações Diferenciais Parciais, incluindo a noção de Espaço de Sobolev, certas propriedades, bem como os teoremas de imersão, incluindo as imersões compactas.

[2] Da Teoria da Integração e da Medida tem-se: se f é mensurável, g é integrável, e $|f| \leq |g|$, então f é integrável, e como por hipótese temos $|f_n| \leq g$, sendo f o limite de (f_n), então $|f| \leq g$, donde se conclui que f é integrável.

1.3.1 Alguns resultados sobre distribuições

Representaremos por $\mathbb{K}$, o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Por $\mathbb{N}$ representaremos o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Dado $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ (n-vezes), define-se

i) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$;

ii) $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$

iii) Se β, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, então $\beta \leq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i, \quad i = 1, ...n$.

Por D^α, representa-se o **operador de derivação de ordem** α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

No que segue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Assim, se $u = u(x_1, ..., x_n)$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}; \quad D^0 u = u \quad e \quad D^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Exemplo 1.1 *Seja $n = 3$, $\alpha = (1, 2, 4)$, e considere a função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, $u = u(x_1, x_2, x_3)$. Assim, temos por definição:*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^7 u}{\partial^1 x_1 . \partial^2 x_2 . \partial^4 x_3}.$$

Definição 1.7 ***(Suporte de funções)*** *Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(O_i)_{i \in I}$ a família de todos os abertos $O_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ q.t.p. em O_i. Defina*

$$O = \bigcup_{i \in I} O_i$$

*e observe que $O \subset \Omega$ é o maior aberto tal que $u = 0$ q.t.p. O **suporte de u**, denotado por $suppu$, é definido como sendo*

$$suppu = \Omega - O.$$

Note que $suppu$ é um fechado relativo em Ω.

Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definimos o suporte de u, como sendo o seguinte conjunto:

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.8 ***(Função Translação)*** *Fixada uma função $u:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos por, $\mathscr{C}_y(u)$ a função translação de u por y, dada da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_y(u): \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathscr{C}_y(u)(x) = u(x-y). \end{aligned}$$

Mostra-se que $supp(\mathscr{C}_y(u)) \subset y + supp(u)$.

Definição 1.9 ***(Convolução de Funções)*** *Sejam $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a convolução de u e v denotada por $u*v$, é a função definida da seguinte forma*

$$\begin{aligned} u*v: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (u*v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z)dz. \end{aligned}$$

É possível mostrar que $supp(u*v) \subset supp(u) + supp(v)$.

1.3.2 Espaço das funções teste

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Por $C_0^\infty(\Omega)$ representa-se o espaço vetorial de todas as funções numéricas, com suporte compacto em Ω, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes. Resumindo:

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall \alpha\}$$

e

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : supp(u) \subset\subset \Omega\},$$

em que $\subset\subset$ significa compacto e contido.

Observação 1.1 $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *no sentido de que se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então*

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Em $C_0^\infty(\Omega)$ usamos a seguinte noção de convergência: Dizemos que $\{\Phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para 0 se:

i) Existe um compacto K, com $K \subset \Omega$ tal que $supp\Phi_n \subseteq K, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha \Phi_n \longrightarrow 0$ uniformemente em Ω quando $n \longrightarrow \infty$.

Dizemos que $\{\Phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se a sequência $\{\Phi_n - \varphi\}$ converge para 0.

Definição 1.10 *No que segue, $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência anterior será chamado o espaço das funções testes, sendo denotado por $D(\Omega)$.*

1.3.3 Distribuições sobre $D(\Omega)$

Uma distribuição em $D(\Omega)$ é uma transformação linear $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que é contínua com a noção de convergência dada em $D(\Omega)$, ou seja, satisfaz:

i) $\langle T, \Phi + \lambda\psi\rangle = \langle T, \Phi\rangle + \lambda\langle T, \psi\rangle, \forall \Phi, \psi \in D(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$ implicar em

$$\langle T, \Phi_n\rangle \longrightarrow \langle T, \Phi\rangle \quad em \quad \mathbb{R}.$$

Vamos denotar o conjunto de todas as distribuições em $D(\Omega)$ por $D'(\Omega)$, ou seja

$$D'(\Omega) = \{T;\ \ T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é uma distribuição}\}.$$

Exemplo 1.2 *Dado $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, a função*

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi &\longmapsto \langle T_u, \Phi\rangle = \int_\Omega u\Phi dx = \int_\Omega u(x)\Phi(x)dx \end{aligned}$$

é um distribuição. De fato, primeiro notemos que T_u está bem definida, ou seja, $\langle T_u, \Phi\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall \Phi \in D(\Omega)$. Temos,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u\Phi dx\right| &= \left|\int_{supp\Phi} u\Phi dx\right| \\ &= \left|\int_K u\Phi dx\right| \\ &\leq \int_K |u||\Phi| dx \\ &\leq ||\Phi||_\infty \int_K |u| dx < \infty. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle T_u, \Phi\rangle = \left|\int_\Omega u\Phi dx\right| < \infty.$$

Logo, T_u é bem definida. Agora, usando a linearidade da integral, é fácil ver que T_u é linear.

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Phi, \psi \in D(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \langle T_u, \lambda\Phi + \psi\rangle &= \int_\Omega u(\lambda\Phi + \psi) dx \\ &= \lambda \int_\Omega u\Phi dx + \int_\Omega u\psi dx \\ &= \lambda\langle T_u, \Phi\rangle + \langle T_u, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Por fim, resta-nos ver que T_u é contínua. De fato, seja $\{\Phi_n\} \subset D(\Omega)$ com $\Phi_n \longrightarrow \Phi$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \Phi_n\rangle - \langle T_u, \Phi\rangle| &= \left|\int_\Omega u(\Phi_n - \Phi) dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u||\Phi_n - \Phi| dx. \end{aligned}$$

Considere K um compacto tal que $supp(\Phi_n - \Phi) \subset K$, então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \Phi_n \rangle - \langle T_u, \Phi \rangle| &\leq \int_K |u||\Phi_n - \Phi| dx \\ &\leq ||\Phi_n - \Phi||_\infty \int_K |u| dx \\ &\leq c||\Phi_n - \Phi||_\infty \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\langle T_u, \Phi_n \rangle \longrightarrow \langle T_u, \Phi \rangle.$$

Sendo T_u linear e contínua, segue que T_u é uma distribuição.

Observação 1.2 *Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tem-se T_u univocamente determinada por u sobre Ω, quase sempre, no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ $\mu - q.t.p.$ em Ω. De fato, sejam u e $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $D'(\Omega)$, implica que*

$$\langle T_u, \Phi \rangle = \langle T_v, \Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in D(\Omega),$$

de onde segue

$$\langle T_u - T_v, \Phi \rangle = 0, \quad \forall \Phi \in D(\Omega),$$

ou seja

$$\int (u - v)\Phi = 0, \quad \forall \Phi \in D(\Omega),$$

portanto[3]

$$u - v = 0 \quad q.t.p.,$$

logo

$$u = v \quad q.t.p.$$

Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u.

1.3.4 Convergência em $D'(\Omega)$

Definição 1.11 *Dizemos que uma sequência de distribuições $\{T_n\} \subset D'(\Omega)$ converge para a distribuição 0 em $D'(\Omega)$ se*

$$\langle T_n, \Phi \rangle \longrightarrow 0, \quad \forall \Phi \in D(\Omega).$$

No caso geral, uma sequência de distribuições $\{T_n\} \subset D'(\Omega)$ converge para uma distribuição $T \in D'(\Omega)$ se a distribuição $T_n - T$ converge para a distribuição 0 em $D'(\Omega)$.

[3]Esta implicação decorre do Lema de Du-Bois Raymond. Para mais detalhes ver [11].

Exemplo 1.3 ***(Distribuição delta de Dirac).*** *Para cada $p \in \Omega$, definimos*

$$\delta_p : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi \longmapsto \Phi(p).$$

Vamos mostrar que $\delta_p \in D'(\Omega)$. De fato, sejam $\Phi, \psi \in D(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \delta_p, \lambda\Phi + \psi \rangle &= (\lambda\Phi + \psi)(p) \\ &= \lambda\Phi(p) + \psi(p) \\ &= \lambda\delta_p(\Phi) + \delta_p(\psi). \end{aligned}$$

Usando o fato de que a convergência uniforme implica na convergência pontual, mostra-se que δ_p é contínua. De fato, seja $\{\Phi_n\} \subset D(\Omega)$ com $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$, então

$$\langle \delta_p, \Phi_n \rangle = \Phi_n(p) \longrightarrow \Phi(p) = \langle \delta_p, \Phi \rangle.$$

Observação 1.3 *Vimos que se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então T_u é uma distribuição, mas é oportuno observar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como é o caso da distribuição δ_p.*

Mostra-se que a distribuição δ_p não é definida por uma função u de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega u(x)\Phi(x)dx = \Phi(p), \text{ para toda } \Phi \in D(\Omega).$$

Isto é, tal que

$$\langle u, \Phi \rangle = \delta_p(\Phi), \text{ para toda } \Phi \in D(\Omega).$$

1.3.5 A derivada de uma distribuição

Definição 1.12 *Considere $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Definimos a derivada $D^\alpha T$ como sendo a seguinte distribuição*

$$D^\alpha T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi \longmapsto \langle D^\alpha T, \Phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \Phi \rangle.$$

De fato, $D^\alpha T$ é linear, pois se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Phi, \psi \in D(\Omega)$, então usando as conhecidas regras de derivação e o fato de T ser linear, temos:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T, \lambda\Phi + \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha(\lambda\Phi + \psi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \lambda D^\alpha\Phi + D^\alpha\psi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\lambda\langle T, D^\alpha\Phi \rangle + (-1)^{|\alpha}\langle T, D^\alpha\psi \rangle \\ &= \lambda\langle D^\alpha T, \Phi \rangle + \langle D^\alpha T, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Agora, seja $(\Phi_n) \subset D(\Omega)$ tal que $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$. Então, $D^\alpha T$ é contínua. De fato, usando a linearidade e continuidade de T respectivamente, e o fato de que toda transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo, temos

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha T, \Phi_n\rangle - \langle D^\alpha T, \Phi\rangle| &= |(-1)^{|\alpha|}||\langle T, D^\alpha \Phi_n\rangle - \langle T, D^\alpha \Phi\rangle| \\ &= |\langle T, D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi\rangle| \longrightarrow \langle T, 0\rangle = 0. \end{aligned}$$

De fato, como $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$, então existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que

$$D^\alpha \Phi_n \longrightarrow D^\alpha \Phi \text{ uniformemente em K } \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,$$

ou seja,

$$D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi \longrightarrow 0.$$

Da continuidade de T, segue

$$\langle T, D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi\rangle \longrightarrow 0.$$

Logo, $D^\alpha T$ é uma distribuição.

Observação 1.4 *Nem sempre podemos afirmar que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, considere a função de Heaviside*

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0, \\ 0, & se \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Note que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Afirmação 1.1 *A derivada de H, no sentido das distribuições é igual a função delta de Dirac δ_0. De fato, resolvendo a integral imprópria e usando o fato que Φ se anula fora de seu suporte compacto, segue*

$$\begin{aligned} \langle D^1 H, \Phi\rangle &= \langle H', \Phi\rangle \\ &= (-1)\langle H, \Phi'\rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} H\Phi' dx \\ &= -\int_0^\infty \Phi'(x) dx \\ &= -\lim_{b\longrightarrow\infty} \int_0^b \Phi'(x) dx \\ &= -\lim_{b\longrightarrow\infty} \Phi(x)\Big|_0^b \\ &= -\lim_{b\to\infty} (\Phi(b) - \Phi(0)) \\ &= \Phi(0) = \langle \delta_0, \Phi\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle D^1 H, \Phi\rangle = \langle \delta_0, \Phi\rangle, \ \forall \Phi \in D(\Omega), \quad onde \quad \Omega \subset \mathbb{R}.$$

Logo,

$$D^1 H = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Observação 1.5 *Lembre que não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_p, \Phi\rangle = \int u\Phi dx, \ \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ou seja, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_p = u$. Portanto, escrevemos que $\delta_p \notin L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 1.13 *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}$ é uma $\alpha-$ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \Phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\Phi(x) dx, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sabemos que existem as distribuições T_u e $D^\alpha T_u$ (que pode não pertencer a $L^1_{loc}(\Omega)$) e denotaremos por $D^\alpha T_u = v_\alpha$.

Observação 1.6 *Toda derivada fraca é uma derivada no sentido das distribuições. Porém a recíproca não é verdadeira, uma vez que a função de Heaviside tem derivada no sentido das distribuições $H^1 = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e não tem derivada fraca.*

1.4 Espaços de Sobolev

Para o leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos, recomendamos as referências [4] e [11].

Sejam $p \in [1, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Definimos o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^p(\Omega), \ i = 1, 2, ..., N \right\},$$

cuja norma

$$||u||_{1,p} = ||u||_p + \sum_{i=1}^N \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p.$$

Para $p = \infty$, temos $W^{1,\infty}(\Omega)$ dado por

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega); \ \frac{\partial u}{\partial x_i} := v_i \in L^\infty(\Omega) \right\}$$

e

$$||u||_{1,\infty} = ||u||_\infty + \sum \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_\infty.$$

Para $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty)$ definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \ D^\alpha u := v_\alpha \in L^p, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N com \ |\alpha| \leq m \right\}$$

munido da norma

$$||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.13}$$

A expressão dada em (2.13) define uma norma. A demonstração deste fato será omitida, mas pode ser encontrada em [11].

De modo análogo, definimos

$$W^{k,\infty}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\infty}(\Omega);\ D^{\alpha}u := v_{\alpha} \in L^{\infty},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{N}\ \ com\ \ |\alpha| \leq k \right\}$$

e

$$||u||_{k,\infty} = ||u||_{\infty} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} ||D^{\alpha}u||_{\infty}.$$

Teorema 1.12 *O espaço $(W^{m,p}(\Omega), ||\cdot||_{m,p})$ é de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Ver referência [11].

Para o caso $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^{m}(\Omega)$, o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_2,$$

onde $(.,.)_2$ é o produto interno usual em $L^2(\Omega)$ dado por

$$(u,v)_2 = \int_{\Omega} |u.v| dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Observação 1.7 *Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, temos $C_0^{\infty}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, mais do que isso, $D(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ (ver [11]).*

Definição 1.14 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ por*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W_{m,p}(\Omega)}.$$

Assim, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe $\{\varphi_n\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que $||\varphi_n - u||_{m,p} \longrightarrow 0$.

Seguem algumas consequências da Definição 2.15 (para mais detalhes ver [11]):

i) $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{m,p}(\Omega)$;

ii) Para $p = 2, W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^{m}(\Omega)$;

iii) $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach ;

iv) Em geral $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um subespaço próprio de $W^{m,p}(\Omega)$. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos a igualdade $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.13 *O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo*[4] *para $1 \leq p < \infty$ e, é separável*[5] *para $1 < p < \infty$. Além disso, $W^{m,\infty}(\Omega)$ não é separável e nem reflexivo.*

Demonstração. Ver referência [4].

1.4.1 O dual de $W^{m,p}(\Omega)$

Para $1 < p < \infty$, considere $q \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Denotamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, ou seja

$$W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))^*.$$

Quando $p = 2$, denotamos

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))^*.$$

Então, $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ significa que f é um funcional linear contínuo

$$f : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

no seguinte sentido

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad em \quad W_0^{m,p}(\Omega),$$

então

$$\langle f, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad em \quad \mathbb{R}.$$

1.5 Imersões nos espaços de Sobolev

Nesta seção apresentamos o conceito de imersão contínua e compacta, bem como os conhecidos teoremas de imersão de Sobolev, tão usados em aplicações.

1.5.1 Imersão contínua

Diremos que $(X, ||\cdot||_X)$ está imerso continuamente em $(Y, ||\cdot||_Y)$, quando:

i) X é subespaço vetorial de Y;

[4] Seja X um espaço de Banach e $J : X \longrightarrow X^{**}$ a injeção canônica de X em X^{**}. Diremos que X é reflexivo se $J(X) = X^{**}$ (para mais detalhes ver [10]).

[5] Diremos que um espaço métrico $(X.d)$ é separável se X possuir um subconjunto enumerável e denso (para mais detalhes ver [10]).

ii) A identidade $i : (X, ||\cdot||_X) \longrightarrow (Y, ||\cdot||_Y)$ é contínua, ou seja, existe $M > 0$, tal que

$$||i(x)||_Y \leq M||x||_X, \forall x \in X$$

isto é, $||x||_Y \leq M||x||_X, \forall x \in X$.

Denotamos este fato por $X \hookrightarrow Y$.

1.5.2 Imersão compacta

Dizemos que $(X, ||\cdot||_X)$ está imerso compactamente em $(Y, ||\cdot||_Y)$ quando:

i) X é subespaço vetorial de Y;

ii) A identidade $i : (X, ||\cdot||_X) \longrightarrow (Y, ||\cdot||)_Y$ é linear compacta,

ou seja, se $\{x_n\}$ é limitada em $(X, ||\cdot||_X)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $||x_n|| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$, então existem $\left\{x_{n_j}\right\} \subset \{x_n\}$ e $z \in Y$ tais que

$$||x_{n_j} - z||_Y \longrightarrow 0 \quad quando \ \ n_j \longrightarrow \infty$$

ou seja, $x_{n_j} \longrightarrow z$ em Y.

Exemplo 1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, então $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, se $p > q$. De fato, se $f \in L^p(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega |f|^q dx = \int_\Omega 1.|f|^q dx \leq \left(\int_\Omega |1|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\Omega (|f|^q)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p}},$$

onde γ é o expoente conjugado de $\frac{p}{q}$, isto é, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\frac{p}{q}} = 1$. Na desigualdade acima usamos Hölder. Logo,

$$\int_\Omega |f|^q dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} = |\Omega|^{\frac{1}{\gamma}} ||f||_p^q < \infty.$$

Assim $f \in L^q(\Omega)$. Isto mostra que $L^p(\Omega)$ é um subespaço de $L^q(\Omega)$. Da última desigualdade, obtemos

$$\left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{\gamma q}} ||f||_p,$$

o que implica

$$||f||_{L^q} \leq |\Omega|^{\frac{1}{\gamma q}} ||f||_p.$$

Desse modo, o operador linear $i : (L^p(\Omega), ||\cdot||_p) \longrightarrow (L^q(\Omega), ||\cdot||_q)$ é contínuo.

Exemplo 1.5 $(W^{m,p}, ||\cdot||_{m,p}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. *De fato, seja*

$$||u||_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembrando que $\alpha = 0 \Longrightarrow D^0 u = u$, tem-se

$$||u||_{m,p}^p = ||u||_{L^p}^p + \sum_{0<|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p^p \geq ||u||_p^p,$$

de onde segue que

$$||u||_{m,p} \geq ||u||_p.$$

1.5.3 Teorema da imersão de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular, isto é, $\partial\Omega$ é uma superfície de classe C^∞, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$ as imersões abaixo são contínuas:

(i) se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq \infty$;

(iii) se $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$;

(iv) se $m-1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega),\ 0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$, onde $C_B^j(\Omega)$ é o subespaço de $C(\Omega)$ formado pelas funções que, juntamente com as suas derivadas até a ordem j são limitadas em Ω. Neste espaço usamos a norma

$$||u||_{C_B^j(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Observação 1.8 *Se Ω é limitado nas imersões (i) e (ii) podemos assumir, respectivamente $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$ e $1 \leq q < \infty$.*

1.5.4 Teorema da imersão compacta de Rellich-Kondrachov

Seja Ω um domínio regular limitado, $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as imersões abaixo são compactas:

(i) se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$;

(iii) se $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^{j,\alpha}(\Omega)$ e $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$;

(iv) se $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$;

(v) se $m-1 < \frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

Exemplo 1.6 *a) Se $p < N,\ j = 0,\ m = 1$ então por (i), segue*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) = W^{0,q}(\Omega), \quad onde \quad p \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$$

b) Se $p = 2,\ j = 0,\ m = 1$, então por (i), segue

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = W^{0,2}(\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado.

Definição 1.15 *O número $\frac{Np}{N-p}$, fazendo $m = 1$, é chamado de expoente crítico de Sobolev sendo denotado por p^*, ou seja, $p^* = \frac{Np}{N-p}$.*

Teorema 1.14 (***Desigualdade de Poincaré***) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Então, existe uma constante $c > 0$, tal que*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Demonstração. Ver referência [6].

Capítulo 2

Teorema do passo da montanha

Neste capítulo iremos demonstrar algumas versões do Teorema de Deformação, uma delas servirá como ferramenta fundamental na demonstração do resultado mais importante deste trabalho, que se trata do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [1]. Alguns resultados da teoria da existência e unicidade de solução para Equações Diferenciais Ordinárias utilizadas aqui podem ser encontrados na referência [6].

2.1 Teorema de Deformação

2.1.1 Campo pseudo-gradiente

Definição 2.1 *Seja X um espaço de Banach. Um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, que verifica*

$$||V(u)||_X \leq \alpha||\phi'(u)||_{X'}$$

e

$$\langle\phi'(u),V(u)\rangle \geq \beta||\phi'(u)||^2_{X'}$$

com $0<\beta<\alpha$ e

$$Y = \left\{u \in X; \phi'(u) \neq 0\right\}.$$

Lema 2.1 *Assumindo as condições da Definição 3.1, existe um campo pseudo-gradiente para ϕ em Y.*

Demonstração. Por simplicidade, denotaremos as normas em X,Y e X' por $||\cdot||$. Seja $\tilde{u} \in Y$, então $\phi'(\tilde{u}) \neq 0$. Sendo $\phi'(\tilde{u})$ um funcional linear contínuo, temos

$$||\phi'(\tilde{u})|| = \sup_{w\in X,||w||=1} \langle\phi'(\tilde{u}),w\rangle.$$

Uma vez que $0 < \beta < \alpha$, obtemos

$$||\phi'(\tilde{u})|| > \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)}||\phi'(\tilde{u})|| \qquad (pois \ \frac{2\beta}{\alpha+\beta} < 1).$$

Por propriedade de sup, existe $(w_n) \subset X$ com $||w_n|| = 1$ e

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w_n \rangle \longrightarrow ||\phi'(\tilde{u})||.$$

Assim, existe $w = w_n$ para n suficientemente grande, tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)}||\phi'(\tilde{u})||. \tag{2.1}$$

Agora, definido a função

$$\begin{aligned} v : Y &\longrightarrow X \\ \tilde{u} &\longmapsto v(\tilde{u}) = \frac{(\alpha+\beta)}{2}||\phi'(\tilde{u})||w, \end{aligned}$$

temos

$$||v(\tilde{u})|| = \frac{\alpha+\beta}{2}||\phi'(\tilde{u})||||w||,$$

o que implica

$$||v(\tilde{u})|| = \frac{(\alpha+\beta)}{2}||\phi'(\tilde{u})|| < \alpha||\phi'(\tilde{u})||,$$

ou seja,

$$||v(\tilde{u})|| < \alpha||\phi'(\tilde{u})||.$$

Além disso,

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \langle \phi'(\tilde{u}), \frac{(\alpha+\beta)}{2}||\phi'(\tilde{u})||w \rangle,$$

o que implica

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \frac{(\alpha+\beta)}{2}||\phi'(\tilde{u})||\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle$$

De (3.1), obtemos

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \frac{(\alpha+\beta)}{2}||\phi'(\tilde{u})||\frac{2\beta}{(\alpha+\beta)}||\phi'(\tilde{u})||$$

logo,

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \beta||\phi'(\tilde{u})||^2.$$

Sendo $\phi' : X \longmapsto X'$ contínua, existe uma vizinhança aberta de $\tilde{u} \in Y$, que denotaremos por $V_{\tilde{u}}$, tal que para cada $u \in V_{\tilde{u}}$,

$$||v(\tilde{u})|| < \alpha||\phi'(u)||, \quad \forall u \in V_{\tilde{u}} \tag{2.2}$$

e

$$\langle \phi'(u), v(\tilde{u}) \rangle > \beta||\phi'(u)||^2, \quad \forall u \in V_{\tilde{u}}. \tag{2.3}$$

Observe que a família $\{V_{\tilde{u}}; u \in Y\}$ é uma cobertura para Y. Além disso, $Y \subset X$ é metrizável[1] e portanto paracompacto[2]. Logo, existe um refinamento localmente finito[3] $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i\in I}$. Assim, existe uma partição da unidade contínua e localmente Lipschitiziana $\{\phi_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{V_{\tilde{u}_i}\}_{i\in I}$ com $0 \leq \phi_i \leq 1$ e suporte em $V_{\tilde{u}_i}$, com $\sum_{i\in I}\phi_i = 1$ em Y.

Considerando $V(u) = \sum_{i\in I}\phi_i(u)v_i$; $v_i = v(\tilde{u}_i), \forall u \in Y$, para cada $u \in Y$, existe $J \subset I$ finito, tal que

$$V(x) = \sum_{i\in I}\phi_i(x)v_i, \quad \forall x \in B_\delta(u).$$

Para fixar a ideia, vamos supor $J = \{1, 2, ..., n_0\}$, $n_0 = n_0(u)$ e $\delta = \delta(u)$. Assim,

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n_0}\phi(u)v_i, \quad \forall x \in B_\delta(u),$$

em particular

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)v_i.$$

Note que, V é localmente Lipschitziana, pois V é uma soma finita de funções $\phi_i(u)v_i$ localmente Lipschitziana. Além disso,

$$||V(u)|| = ||\sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)v_i|| \leq \sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)||v_i||.$$

Assim, usando (3.2),

$$||V(u)|| < \sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)\alpha||\phi'(u)||,$$

o que implica

$$||V(u)|| < \alpha||\phi'(u)||\sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u) = \alpha||\phi'(u)||\sum_{i\in I}\phi_i(u),$$

isto é,

$$||V(u)|| < \alpha||\phi'(u)||. \tag{2.4}$$

Note agora, que

$$\langle\phi'(u), V(u)\rangle = \langle\phi'(u), \sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)v_i\rangle,$$

segue

$$\langle\phi'(u), V(u)\rangle = \sum_{i=1}^{n_0}\phi_i(u)\langle\phi'(u), v_i\rangle.$$

[1]Um espaço topológico X é metrizável se existe uma métrica em X que define a topologia de X.

[2]Um espaço métrico M chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita.

[3]Uma família $\mathbb{C} = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ e uma vizinhança V que contém x tais que $V \cap C_\lambda \neq \emptyset \Longrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Por (3.3), obtemos

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u) \beta ||\phi'(u)||^2,$$

o que implica

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta ||\phi'(u)||^2 \sum_{i=1}^{n_0} \phi_i(u),$$

portanto

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle > \beta ||\phi'(u)||^2. \tag{2.5}$$

De (3.4) e (3.5) segue que V é um campo pseudo-gradiente para ϕ.

Definição 2.2 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se existe $u \in X$ com $\phi'(u) = 0$ e $\phi(u) = c$.*

O conjunto de todos os pontos críticos no "nível"c será designado por

$$K_c = \left\{ u \in X; \;\; \phi'(u) = 0 \;\; e \;\; \phi(u) = c \right\}$$

e denotaremos por ϕ^c o conjunto de todos os pontos em nível menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{ u \in X; \;\; \phi(u) \leq c \}.$$

Definição 2.3 *Dado um subconjunto $S \subset X$ e $\alpha > 0$, designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por*

$$S_\alpha = \{ u \in X; \;\; d(u, S) \leq \alpha \},$$

sendo $d(u, S) = inf \{ ||u - v||; \;\; v \in S \}$.

Teorema 2.2 ***(de Deformação):*** *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $4\beta > \alpha$ e ε, $\delta > 0$ são tais que*

$$||\phi'(u)||_{X'} \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}, \;\; \forall u \in \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon \left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\varepsilon \left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta}.$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, $\forall u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon \left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right), c + 2\varepsilon \left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] \right) \cap S_{2\delta}$;

(iii) $\eta\left(1, \phi^{c + \varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1 \right)} \cap S \right) \subset \phi^{c - \varepsilon} \cap S_\delta$;

(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Sejam $A = \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$,

$$B = \phi^{-1}\left(\left[c - \varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + \varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{\delta}$$

e

$$Y = \left\{u \in X; \quad \phi'(u) \neq 0\right\}.$$

Assim, note que $B \subset A \subset Y$[4]. Considere $V : Y \longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e uma função localmente lipschitiziana $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u) = \frac{d(u, X - A)}{d(u, X - A) + d(u, B)},$$

de onde segue que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(u) = 1$ se $u \in B$ e $\rho(u) = 0$ se $u \in X - A$. Considere ainda a seguinte aplicação localmente lipschitiziana $f : X \longrightarrow X$ definida por:

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\frac{V(u)}{||V(u)||}, & \text{se} \quad u \in A, \\ 0, & \text{se} \quad u \notin A. \end{cases}$$

Se $u \notin A$, então $f(u) = 0$, daí, $||f(u)|| < 1$.

Se $u \in A$, então $||f(u)|| = |\rho(u)|\frac{||V(u)||}{||V(u)||} \leq 1$, ou seja, $||f(u)|| \leq 1, \ \forall u \in X$.

Segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) & = & f(w(t)), \\ w(0) & = & u \end{cases}$$

tem para cada $u \in X$, uma solução[5] definida para todo $t \in \mathbb{R}$, a qual denotaremos por $w(t, u)$.

Seja $\eta : [0, 1] \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Então,

(i) $\eta(0, u) = w(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$.

De fato, considerando $w_1(t) = u, \ \forall t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$w_1'(t) = 0 = f(w_1(t)) = f(u), \quad se \quad u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} w'(t) & = & f(w_1(t)), \quad \text{se} \quad u \notin A, \\ w_1(0) & = & u. \end{cases}$$

[4] $B \subset A$ é imediato, e $A \subset Y$, pois por hipótese, $\forall u \in A$, $||\phi'(u)|| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}$, assim $\phi'(u) \neq 0$ e $u \in Y$.

[5] Teorema de Existência e Unicidade em *EDO*, quando f é lipschitziana (para mais detalhes ver [6]).

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, se $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u, \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

portanto $\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u, \ \ \forall t \in [0,1]$;

(iii) $\eta\left(1, \phi^{c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S\right) \subset \phi^{c-\varepsilon} \cap S_{\delta}$.

De fato, note que para todo $t \geq 0$ e $u \in S$, temos

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau,$$

o que implica

$$||w(t,u) - u|| \leq \int_0^t ||f(w(\tau,u))||d\tau \leq \int_0^t d\tau = t.$$

De modo que, sendo $S_{\delta} = \{v \in X; \ \ d(v,S) \leq \delta\}$, sendo $d(v,S) = inf\{||v-u||; \ \ u \in S\}$, obtemos que $\forall t \in [0,\delta]$

$$||w(t,u) - u|| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t,u),S) \leq \delta, \quad \forall u \in S,$$

o que implica

$$w(t,u) \in S_{\delta}, \ \ \forall u \in S,$$

ou seja,

$$w(t,S) \subset S_{\delta}, \ \ \forall t \in [0,\delta]$$

logo,

$$\eta(t,S) \subset S_{\delta}, \ \ \forall t \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))w'(t,u),$$

e do problema de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))f(w(t,u)).$$

Da definição de f, tem-se $\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ se $w(t,u) \notin A$ e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi'(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{||V(w(t,u))||}.$$

Assim, de (3.3),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\beta\rho(w(t,u))\frac{||\phi'(w(t,u))||^2}{||V(w(t,u))||} \tag{2.7}$$

ou seja,
$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
donde concluímos que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S$, note que:

a) Se $\phi(w(\tilde{t},u)) < c-\varepsilon$, para algum $\tilde{t} \in [0,\,\delta)$, então
$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\tilde{t},u)) < c-\varepsilon.$$
Portanto, de (3.6),
$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta.$$

b) Observe que para todo $t \in [0,\,\delta)$, temos
$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right),$$
consequentemente
$$\phi(w(t,u)) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right).$$
Dessa forma, supondo que
$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}\left(\left[c-\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right), c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)\right]\right) \cap S_\delta, \quad \forall t \in [0,\delta],$$
usando (3.4) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos
$$\begin{aligned}\phi(w(\delta,u)) &= \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))dt \\ &\leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\delta ||\phi'(w(t,u))||dt,\end{aligned}$$
logo
$$\phi(w(\delta,u)) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{4\varepsilon\delta}{\delta} \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right) - \frac{\beta}{\alpha}4\varepsilon,$$
mostrando que
$$\phi(w(\delta,u)) \leq c-\varepsilon.$$
Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b)
$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta, \quad se \quad u \in \phi^{c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S;$$

(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que η é contínua e que possui inversa contínua.

Assim, considere as seguintes funções
$$g : X \longrightarrow X$$

$$u \longmapsto g(u) = w(\delta t, u)$$

e

$$h : X \longrightarrow X$$
$$u \longmapsto h(u) = w(-\delta t, u).$$

Dessa forma, tem-se

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)),$$

de onde segue

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando a propriedade de fluxo[6], obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

ou seja,

$$(g \circ h)(u) = u.$$

De modo análogo, temos

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Logo, $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$ possui inversa, dada por $\eta^{-1}(t,u) = w(-\delta t, u)$. Note ainda que $\eta(t,.)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Da mesma forma, temos $\eta^{-1}(.,u)$ também contínua, donde concluímos que $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo.

Definição 2.4 *Seja $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale-(PS), se qualquer sequência (u_n) tal que $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, possui uma subsequência convergente.*

Como consequência do **Teorema 3.2**, considerando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, obtemos os seguintes teoremas:

Teorema 2.3 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que ϕ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ. Então, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, $\forall u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

(i) $\eta(0,u) = u$;

[6] Seja T um grupo topológico e X um espaço métrico. Um fluxo em X é uma aplicação $\pi : X \times T \to X$ que satisfaz as condições:

(i) (propriedade da identidade) $\pi(x,0) = x$, para $x \in X$;

(ii) (propriedade de grupo) $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$, para $x \in X$ e $t,s \in T$;

(iii) π é contínua.

(ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\varepsilon}) \subset \phi^{c-\varepsilon}$;

(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Devem existir constantes $\theta, \gamma > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $||\phi'(u)|| \geq \gamma$, pois, caso contrário, $\forall \theta, \gamma > 0 \quad \exists u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$ tal que

$$||\phi'(u)|| < \gamma.$$

Tome $\theta = \frac{1}{2n}, \gamma = \frac{1}{n}, \; \forall n, \, c - \frac{1}{n} < \phi(u_n) < c + \frac{1}{n}$ e $||\phi'(u_n)|| < \frac{1}{n}$, isto é, existe uma sequência (u_n) com

$$\phi(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad \phi'(u_n) \longrightarrow 0, \quad quando \quad n \longrightarrow \infty. \tag{2.8}$$

Por hipótese, ϕ satisfaz a condição (PS), logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k} \longrightarrow u$ em X. Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \longrightarrow \phi(u) \tag{2.9}$$

e

$$\phi'(u_{n_k}) \longrightarrow \phi'(u). \tag{2.10}$$

De (3.8) a (3.10), e da unicidade do limite, tem-se

$$\phi(u) = c \quad \phi'(u) = 0,$$

donde concluímos que c é um valor crítico de ϕ, contrariando a hipótese, logo mostramos que existem constantes $\theta, \gamma > 0$ tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $||\phi'(u)|| \geq \gamma$.

Assim, considerando $S = X$, $\varepsilon \in (0, \theta]$ fixado e $\delta = \frac{4\varepsilon}{\gamma}$, ou seja, $\gamma = \frac{4\varepsilon}{\delta}$, pelo **Teorema 3.2**, segue o resultado.

Observação 2.1 *Na demonstração acima, observe que o **Teorema 3.3** é válido sob a seguinte condição mais fraca de compacidade introduzida por Brézis-Coron-Nirenberg:*

Condição $(PS)_c$: Se uma sequência (u_n) é tal que $\phi(u_n) \longrightarrow c$ e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, então c é um valor crítico de ϕ.

Teorema 2.4 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale - (PS). Se U é uma vizinhança aberta de K_c, com $c \in \mathbb{R}$, então para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que $\forall u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

(i) $\eta(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

(iii) $\eta(1,\phi^{c+\varepsilon}(U))\subset\phi^{c-\varepsilon}$;

(iv) $\eta(1,.):X\longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $S=X-U$. Então, existem constantes $\varepsilon,\delta>0$ tais que, se $u\in\phi^{-1}([c-2\varepsilon,c+2\varepsilon])\cap S_{2\delta}$, temos $||\phi'(u)||\geq\frac{4\varepsilon}{\delta}$, pois, caso contrário, para cada $\varepsilon=\frac{1}{2n}$ e $\delta=\frac{1}{2\sqrt{n}}$, com $n\in N$, existiria

$$u_n\in\phi^{-1}\left(\left[c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n}\right]\right)\cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}},\quad com\quad ||\phi'(u_n)||\leq\frac{4\sqrt{n}}{n},$$

ou seja,

$$\phi(u_n)\in\left[c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n}\right]\quad e\quad u_n\in S_{\frac{1}{\sqrt{n}}},\quad com\quad ||\phi'(u_n)||\leq\frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim, teríamos uma sequência $(u_n)\subset S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ com

$$\phi(u_n)\longrightarrow c\quad e\quad \phi'(u_n)\longrightarrow 0,\quad quando\quad n\longrightarrow\infty. \tag{2.11}$$

Por hipótese, ϕ satisfaz a condição (PS), logo existiria uma subsequência $(u_{n_k})\subset(u_n)$ tal que $u_{n_k}\longrightarrow u$ em X. Sendo $\phi\in C^1(X,\mathbb{R})$, segue-se

$$\phi(u_{n_k})\longrightarrow\phi(u) \tag{2.12}$$

e

$$\phi'(u_{n_k})\longrightarrow\phi'(u) \tag{2.13}$$

De (3.11) a (3.13), e da unicidade do limite, tem-se

$$\phi(u)=c\quad e\quad \phi'(u)=0,$$

donde concluímos que $u\in K_c$.

Por outro lado, $u_n\in S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, o que implica $d(u_n,S)\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$. Além disso, sendo d uma função contínua, obtemos $d(u,S)=0$. Dessa forma, uma vez que $S=X-U$ é um conjunto fechado, segue-se $u\in S$.

Portanto, $u\in S\cap K_c$, o que é uma contradição, pois $S\cap U=\phi$, logo mostramos que existem constantes $\varepsilon,\delta>0$ tais que, se $u\in\phi^{-1}([c-2\varepsilon,c+2\varepsilon])\cap S_{2\delta}$, temos $||\phi'(u)||\geq\frac{4\varepsilon}{\delta}$.

Assim, considerando $S=X-U$, pelo **Teorema 3.2**, segue o resultado.

2.1.2 Teorema do Passo da Montanha

Teorema 2.5 *Seja E um espaço de Banach real e $I\in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale - (PS). Suponha que $I(0)=0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(I_1) *existem constantes $\alpha,\rho>0$ tais que $I|_{\partial B_\rho}\geq\alpha$, e*

(I_2) *existe um* $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$ *tal que* $I(e) \leq 0$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, *com*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$$

sendo $\Gamma = \{g \in C([0,1], E);\ g(0) = 0 \ e \ g(1) = e\}$.

Demonstração. Seja $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$, ou seja, $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$. Afirmamos que c está bem definido. De fato, pois sendo $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], E)$, segue que $I \circ g \in C([0,1], \mathbb{R})$ é uma função contínua e como $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $I \circ g$ possui máximo em $[0,1]$.

Afirmação 2.1 $\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \quad \forall g \in \Gamma.$

De fato, seja $g \in \Gamma$ e defina

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow h(t) = ||g(t)||_E.$$

Observe que h é uma composição de funções contínuas, logo h é contínua. Além disso, sendo $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$ (por I_2), temos

$$h(0) = ||g(0)|| = ||0|| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = ||g(1)|| = ||e|| > \rho, \quad (e \notin \overline{B_\rho})$$

ou seja, $h(0) < \rho < h(1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = ||g(t_0)|| = \rho$, de onde segue pela condição (I_1) que $g(t_0) \in \partial B_\rho$, daí $I(g(t_0)) \geq \alpha$, logo

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \alpha, \forall g \in \Gamma, \tag{2.14}$$

mostrando assim a **Afirmação 3.1.**

Definido $H = \left\{ \max_{t \in [0,1]} I(g(t));\ g \in \Gamma \right\}$, segue da **Afirmação 3.1**, que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, $\inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$ está bem definido.

De (3.14), α é uma cota inferior para H, consequentemente pela definição de c, segue que $c \geq \alpha$.

Resta provar que c é um valor crítico para I.

Suponha, por contradição que c não é um valor crítico. Então pelo **Teorema de Deformação 3.4**, dado $0 < \varepsilon < \frac{c-\alpha}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que

(i) $\eta(t,u)=u$ se $u\notin I^{-1}([c-2\varepsilon,c+2\varepsilon])$ e $t\in[0,1]$;

(ii) $\eta(1,I^{c+\varepsilon})\subset I^{c-\varepsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $g\in\Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t))\leq c+\varepsilon \tag{2.15}$$

Considere $\tilde{h}(t)=\eta(1,g(t))$. Note que $\tilde{h}\in C([0,1],E)$. De fato, $\tilde{h}=\eta_1\circ g\in C([0,1],E)$. Uma vez que $I(e)<\alpha<c-2\varepsilon$, tem-se $I(e)\notin[c-2\varepsilon,c+2\varepsilon]$, o que implica $e\notin I^{-1}([c-2\varepsilon,c+2\varepsilon])$. Da mesma forma, sendo $I(0)=0<\alpha<c-2\varepsilon$, tem-se $I(0)\notin[c-2\varepsilon,c+2\varepsilon]$, ou seja, $0\notin I^{-1}([c-2\varepsilon,c+2\varepsilon])$. Assim, de (i),

$$\tilde{h}(0)=\eta(1,g(0))=\eta(1,0)=0$$

e

$$\tilde{h}(1)=\eta(1,g(1))=\eta(1,e)=e$$

donde concluímos, que $\tilde{h}\in\Gamma$. Por (3.15), obtemos

$$I(g(t))\leq\max_{t\in[0,1]} I(g(t))\leq c+\varepsilon$$

o que implica

$$g(t)\in I^{c+\varepsilon},\quad \forall t\in[0,1].$$

De (ii)

$$\tilde{h}(t)=\eta(1,g(t))\in I^{c-\varepsilon},\quad \forall t\in[0,1],$$

ou seja,

$$I(\tilde{h}(t))\leq c-\varepsilon,\quad \forall t\in[0,1],$$

logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(\tilde{h}(t))\leq c-\varepsilon,$$

e sendo, $c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]} I(g(t))$, temos

$$c\leq\max_{t\in[0,1]} I(\tilde{h}(t))\leq c-\varepsilon$$

visto que $\tilde{h}\in\Gamma$. Assim

$$c\leq c-\varepsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para I, finalizando assim a demonstração do **Teorema 3.5**.

Capítulo 3

Problema de Dirichlet semilinear

Neste capítulo, consideramos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \\ u \geq 0, \ \ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

sendo Ω é um domínio de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$. O principal resultado é o seguinte:

Teorema 3.1 *Assuma que* $|\Omega| < \infty$ *e* $2 < p < 2^*$. *Então, o problema* (4.1) *tem uma solução não trivial se, e somente, se* $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, *onde* $\lambda_1(\Omega) := \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega),\ |u|_2 = 1} ||\nabla u||_2^2$.

Demonstração. (Condição necessária) Suponha que u é uma solução não trivial de (4.1). Seja $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ uma função própria[1] de $-\Delta$ correspondendo a $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ com $e_1 > 0$ em Ω. Temos

$$\lambda \int_\Omega ue_1 = \int_\Omega (u^{p-1} + \Delta u)e_1 > \int_\Omega \Delta u e_1 = -\lambda_1 \int_\Omega ue_1,$$

na última igualdade estamos usando a segunda identidade de Green[2], que garante $\int_\Omega \Delta u e_1 = \int_\Omega u \Delta e_1 = -\lambda_1 \int_\Omega ue_1$ e assim $\lambda > -\lambda_1$.

(Condição suficiente) Suponha $\lambda > -\lambda_1$, de modo que $c_1 := 1 + min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1}) > 0$. Em $H_0^1(\Omega)$ temos, pela Desigualdade de Poincaré,

$$||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 \geq c_1 ||\nabla u||_2^2.$$

De fato, vamos separar a demonstração deste fato em dois casos:

i) $\lambda > 0 \quad (C_1 = 1)$

$$||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 \geq ||\nabla u||_2^2 = C_1 ||\nabla u||_2^2. \tag{3.2}$$

ii) $\lambda < 0 \quad (C_2 = 1 + \frac{\lambda}{\lambda_1})$

[1] Isso significa que $-\Delta e_1 = \lambda_1 e_1$.

[2] Fórmula de Green: $\int_\Omega \Delta u v - \int_\Omega u \Delta v = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Theta - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Theta$.

Como $\lambda_1 \leq \frac{||\nabla u||_2^2}{|u|_2^2}$, pois $\lambda_1 = \inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega),\ ||u||_2=1} ||\nabla u||_2^2 = \inf\limits_{u\in H_0^1 u\neq 0} \dfrac{||\nabla u||_2^2}{||u||_2^2}$, temos

$$||u||_2^2 \leq \frac{||\nabla u||_2^2}{\lambda_1},$$

o que implica

$$\lambda ||u||_2^2 \geq \frac{\lambda}{\lambda_1} ||\nabla u||_2^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 &\geq ||\nabla u||_2^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1} ||\nabla u||_2^2 \\ &= (1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}) ||\nabla u||_2^2 \\ &= C_2 ||\nabla u||_2^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 \geq C_2 ||\nabla u||_2^2. \tag{3.3}$$

Assim, de (4.2) e (4.3), e tomando c_1 como na definição acima, temos

$$||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2 \leq c_1 ||\nabla u||_2^2.$$

Agora, em $H_0^1(\Omega)$ escolhemos a norma $||u|| := \sqrt{||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2}$. Vamos definir $f(u) := (u^+)^{p-1}$ e $F(u) := \frac{(u^+)^p}{p}$. O funcional

$$\Phi(u) := \int_\Omega \left[\frac{||\nabla u||^2}{2} + \lambda \frac{u^2}{2} - F(u) \right]$$

é de classe $C^2(H_0^1, \mathbb{R})$. Vamos verificar as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. A condição $(PS)_c$ segue do Lema 4.2. Pelo Teorema das Imersões de Sobolev, existe $c_2 > 0$ tal que, em $H_0^1(\Omega)$,

$$||u||_p \leq c_2 ||u||.$$

Portanto, obtemos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2} ||u||^2 - \frac{1}{p} ||u||_p^p \geq \frac{1}{2} ||u||^2 - \frac{c_2^p}{p} ||u||^p$$

e como $p > 2$, existe $r > 0$, tal que

$$b := \inf_{||u||=r} \Phi(u) > 0 = \Phi(0).$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u > 0$ em Ω. Temos, para $t \geq 0$,

$$\Phi(tu) = \frac{t^2}{2} (||\nabla u||_2^2 + \lambda ||u||_2^2) - \frac{t^p}{p} ||u||_p^p.$$

Desde que $p > 2$, existe $e := tu$ (com t suficientemente grande) tal que $||e|| > r$ e $\Phi(e) \leq 0$.

Pelo Teorema do Passo da Montanha, Φ tem um valor crítico e o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u), \\ \quad u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

tem uma solução não trivial u. Multiplicando a equação por u^- e integrando sobre Ω, obtemos

$$-\Delta u u^- + \lambda u u^- = (u^+)^{p-1} u^-,$$

e integrando vem

$$-\int_\Omega \Delta u u^- + \lambda u u^- = (u^+)^{p-1} u^-.$$

Usando o fato que $u = u^+ + u^-$ temos,

$$-\int_\Omega \Delta u^+ u^- - \int_\Omega \Delta u^- u^- + \lambda \int_\Omega u^+ u^- + \lambda \int_\Omega u^- u^- = \int_\Omega (u^+)^{p-1} u^-.$$

Agora, faça $S_1 = \{x \in \Omega;\ u(x) \leq 0\}$ e $S_1 = \{x \in \Omega;\ u(x) \geq \Omega\}$ e sabendo que $\int_\Omega f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f$, vem

$$-\int_{S_1} \Delta u^+ u^- - \int_{S_2} \Delta u^+ u^- - \int_\Omega \Delta u^- u^- + \lambda \int_{S_1} u^+ u^- + \lambda \int_{S_2} u^+ u^- + \lambda \int_\Omega u^- u^- = \int_\Omega (u^+)^{p-1} u^-.$$

Por fim, anulando os termos em que aparecem u^+ e u^- simultaneamente por causa da própria definição dessas funções, segue

$$-\int_\Omega \Delta u^- u^- + \lambda \int_\Omega u^- u^- = 0,$$

isto é,

$$0 = ||\nabla u^-||_2^2 + \lambda ||u^-||_2^2 = ||u^-||^2.$$

Consequentemente $u^- = 0$ e u é uma solução de (4.1) como queríamos demonstrar.

Lema 3.2 *Seja p sob as condições do Teorema* (4.1), *se $\lambda > -\lambda_1$ qualquer sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, tal que*

$$d := \sup_n \Phi(u_n) < \infty \ \ e \ \ \Phi'(u_n) \to 0$$

contém uma subsequência convergente.

Demonstração. 1) Para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} d + 1 + ||u_n|| &\geq \Phi(u_n) - p^{-1}(\Phi'(u_n), u_n) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(||\nabla u_n||_2^2 + \lambda ||u_n||_2^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)||u_n||^2. \end{aligned}$$

Vamos justificar a primeira desigualdade acima:

$$-p^{-1}(\Phi'(u_n),u_n) \leq |-p^{-1}(\Phi'(u_n),u_n)| = p^{-1}|(\Phi'(u_n),u_n)|.$$

Agora, como $p > 2$, isto é, $p^{-1} < 1$, e usando que $\Phi'(u_n)$ é um operador linear contínuo, vem:

$$p^{-1}|(\Phi'(u_n),u_n)| \leq ||\Phi'(u_n)||||u_n||.$$

Como $\Phi'(u_n) \longrightarrow 0$, para n suficientemente grande, podemos considerar $||\Phi'(u_n)|| \leq 1$, donde

$$||\Phi'(u_n)||||u_n|| \leq ||u_n||.$$

Resumindo,

$$-p^{-1}(\Phi'(u_n),u_n) \leq ||u_n||.$$

Como por definição $d+1 \geq \Phi(u_n)$, e $||u_n|| \geq -p^{-1}(\Phi'(u_n),u_n)$, segue

$$d+1+||u_n|| \geq \Phi(u_n) - p^{-1}(\Phi'(u_n),u_n).$$

Portanto,

$$d+1+||u_n|| \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)||u_n||^2.$$

Assim, segue que $||u_n||$ é limitado.

De fato, supondo por absurdo $||u_n|| \longrightarrow \infty$ quando $n \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} d+1 &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)||u_n||^2 - ||u_n|| \\ &= ||u_n||^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{||u_n||}\right) \longrightarrow \infty \text{ quando n} \to \infty, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto $||u_n||$ é limitado.

2) Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, levando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $u_n \to u$ fracamente[3] em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema de Relich, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. O teorema $B.1$ implica que $f(u_n) \to f(u)$ em $L^q(\Omega)$ onde $q := \frac{p}{(p-1)}$. Observe que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, a derivada a Fréchet[4] de Φ em u é dada por

$$\Phi'(u)v = ||\nabla u \nabla v||_2^2 + \lambda||uv||_2^2 - \int_\Omega u^{p-1}v,$$

[3]Dizemos que $u_n \to u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, se para toda $f \in H_0^1(\Omega)^*$ implicar $f(u_n) \to f(u)$.

[4]Sejam U um aberto de um espaço de Banach X e $\Psi : U \to \mathbb{R}$ um funcional. O funcional Ψ tem derivada de Fréchet $f \in X^*$ em u se

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{||h||}[\Psi(u+h)-\Psi(u)-\langle f,h\rangle] = 0, \quad \forall h \in X.$$

Neste caso, denotamos $\Psi' = f$, que chamamos de derivada de Fréchet de Ψ.

donde segue

$$||u_n - u||^2 = (\Phi'(u_n) - \Phi'(u), u_n - u) + \int_\Omega (f(u_n) - f(u)(u_n - u))dx.$$

É claro que

$$(\Phi'(u_n) - \Phi'(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \;\; n \longrightarrow \infty,$$

pois $u_n \longrightarrow u$ fracamente e Φ' é um funcional linear contínuo, donde $\Phi'(u_n) \longrightarrow \Phi'(u)$, isto é, $\Phi'(u_n) - \Phi'(u) \longrightarrow 0$.

Segue da Desigualdade de Hölder que

$$\left| \int_\Omega (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \right| \leq ||f(u_n) - f(u)||_q ||u_n - u||_p \longrightarrow 0, \;\; n \longrightarrow \infty.$$

Assim, provamos que $||u_n - u|| \longrightarrow 0, \;\; n \longrightarrow \infty$ como queríamos demonstrar.

Capítulo 4

Conclusões

Este trabalho originou-se da nossa participação em dois projetos de iniciação científica. O primeiro projeto intitulado *Espaços Métricos e Topologia Geral: teoria e aplicações à Análise Funcional* e o segundo *Teoria do Pontos Críticos: Um estudo sobre o Teorema do Passo da Montanha com Aplicação a uma Classe de Porblemas Elípticos*.

Os elementos da Topologia Geral, em especial, dos Espaços Métricos, configuram uma teoria fundamental, pois servem de pré-requisito básico em vários ramos da matemática, a exemplo de Análise Funcional, Geometria Diferencial, Equações Diferenciais e Álgebra.

Com respeito ao segundo projeto, o estudo das equações diferenciais é de fundamental importância para o profissional da área de matemática, pois além de ser um campo de estudos rico em aplicações em diversas áreas do conhecimento, possui uma vasta teoria abordada, tanto na graduação como nos cursos de pós-graduação na área de Matemática Pura e Aplicada. O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante os três últimos séculos e ainda continua sendo uma área de pesquisa dinâmica, com muitas questões interessantes em aberto. A Teoria dos Pontos Críticos reúne técnicas e resultados que auxiliam na determinação de pontos críticos, sejam eles, mínimos, máximos ou do tipo minimax, para funcionais diferenciáveis definidos em espaços vetoriais apropriados, por isso a importância de se estudar essa teoria quando se busca encontrar soluções para algumas equações diferenciais parciais que cumprem certas condições, o que na prática, ou seja, nas aplicações, é o que realmente importa. O estudo de alguns conceitos e resultados básicos da teoria dos pontos críticos, nos permitiu compreender a demonstração do Teorema do Passo da Montanha e, consequentemente, estivemos prontos para estudar um resultado de existência de solução para uma classe de problemas elípticos.

Por fim, destacamos a importância deste estudo para a minha formação acadêmica, servindo como principal motivador para a escolha pela área da Matemática Pura, em especial, do ramo da Análise, na qual pretendo aprofundar meus estudos numa pós-graduação em breve.

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. **Dual variational methods in critical point theory and apllications**. J. Functional Analysis 14. ed. (1973). p. 349-381.

[2] BARTLE G. R. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. Wiley, 1995.

[3] BOTELHO G.; PELLEGRINO D.; TEIXEIRA E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] BREZIS H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations**. Springer, 2011.

[5] COSTA, D. G. **An Invitation to Variational Methods in Diferential Equations**. Birkhauser Advanced Texts, 2007.

[6] COSTA, D. G. **Tópicos em Análise não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais**. VIII Escola Latino Americana de Matemática - Rio de Janeiro, 1986.

[7] FERNADEZ J. P. **Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[8] GARLING D. J. H. **A Course in Mathematical Analysis, Volume II: Metric and Topological Spaces, Functions of a Vector Variable**. Cambridge, 2013.

[9] ISNARD C. **Introdução à Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[10] KREYSZIG E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Wiley, 1989.

[11] MEDEIROS, L. A. J.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev**. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

[12] OLIVEIRA C. R. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[13] RABINOWITZ P. H. **Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations**. American Mathemathical Society, 1988.

[14] WILLEM M. **Minimax Theorems**. Birkhauser, 1986.

Apêndice A

Primeiro Apêndice

Neste Apêndice serão apresentados as definições de norma e Espaços Normados, incluindo alguns exemplos.

Definição A.1 *Se V é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$, então uma função à valor real $N : V \to \mathbb{R}$ é dita ser uma* ***norma*** *em V caso satisfaça:*

(i) $N(v) \geq 0$, *para todo* $v \in V$;

(ii) $N(v) = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$;

(iii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$, *para todo* $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$, *para todo* $u, v \in V$.

Se a condição (ii) não se verificar, a função N é dita ser uma **semi-norma** ou uma **pseudo-norma** em V. Um **Espaço Vetorial Normado** é um Espaço Vetorial V com uma norma em V.

Exemplo A.1 *(a) A função que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa ao valor absoluto $|x|$ é uma norma no conjunto dos números reais.*

(b) O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ de n-uplas de números reais pode ser normado, definindo, por exemplo, as seguintes funções:

i) $N_1(u_1, ..., u_n) = |u_1| + ... + |u_n|$,

ii) $N_p(u_1, ..., u_n) = (|u_1|^p + ... + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$,

iii) $N_\infty(u_1, ..., u_n) = sup\{|u_1|, ..., |u_n|\}$,

para $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. Nota-se que N_1 e N_∞ são normas e que N_p satisfaz (i), (ii), (iii). É uma consequência da Desigualdade de Minkowski, que N_p satisfaz (iv).

(c) O Espaço Vetorial l_1 de todas as sequências de números reais $u = (u_n)$ tal que $N_1(u) = \sum |u_n| < \infty$, é um espaço vetorial normado com a norma N_1. Semelhantemente, se $1 \leq p < \infty$, a coleção l_p de todas as sequências tal que $N_p(u) = (\sum |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ é um Espaço Normado com a norma N_p.

(d) A coleção $B(X)$ de todas as funções a valores reais limitadas no conjunto X é um espaço vetorial normado com a norma definida por

$$N(f) = sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Em particular, o espaço vetorial das funções contínuas em $X = [a,b]$ é normado, com a norma acima.

Todos os exemplos precedentes têm sido normas próprias em um espaço vetorial. A seguir são apresentados alguns exemplos de semi-normas.

Exemplo A.2 *(a) No espaço $\mathbb{R}^n$, a função*

$$N_0(u_1,...,u_n) = sup\{|u_2|,...,|u_n|\}, \ \forall (u_1,...,u_n) \in \mathbb{R}^n$$

é uma semi-norma.

Aqui, $N_0(u_1,...,u_n) = 0$ se, e somente se, $u_2 = ... = u_n = 0$, mas nada se conclui a respeito de u_1.

(b) No Espaço Vetorial $C[0,1]$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, defina a semi-norma

$$N_0(f) = sup\left\{|f(x)| : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Neste caso $N_0(f) = 0$ se, e somente se, $f(x)$ se anula em $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

(c) No Espaço Vetorial das funções de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ que tem derivadas contínuas, considere a semi-norma

$$N_0(f) = sup\left\{|f'(x)| : a \leq x \leq b\right\}.$$

Aqui, $N_0(f) = 0$ se, e somente se, f é constante em $[a,b]$.

Apêndice B

Segundo Apêndice

Neste Apêndice serão apresentados algumas definições da Teoria da Integração e da Medida e resultados que foram mencionadas ao longo deste trabalho.

Definição B.1 *Uma família χ de subconjuntos de um conjunto X é dita ser uma σ-álgebra (ou um σ-campo) quando satisfaz:*

1. *$\emptyset$,X pertencem a χ.*

2. *Se A pertence a χ, então o complementar $C(A) = X - A$ pertence a χ.*

Um par ordenado (X, χ) consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra χ de subconjuntos de X é chamado um espaço mensurável. Qualquer conjunto em χ é chamado um conjunto χ- mensurável.

Definição B.2 *Uma função f de X em $\mathbb{R}$ é dita ser χ-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada número real α o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertence a χ.

Definição B.3 *A coleção de todas as funções de valor real estendido χ-mensuráveis de X é denotada por $M(X, \chi)$, e a coleção de todas as funções χ-mensuráveis não-negativas de X em $\overline{\mathbb{R}}$ por $M^+(X, \chi)$, onde $\overline{\mathbb{R}}$ é o conjunto dos reais estendido: $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.*

Definição B.4 *Uma medida é um função de valor real estendido μ definido numa σ-álgebra χ de subconjuntos de X tal que:*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*

2. *$\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \chi$;*

3. μ *é aditivo contável no sentido que se* (E_n) *é qualquer sequência disjunta de conjuntos em* χ*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição B.5 *Um espaço de medida é uma tripla* (X,χ,μ) *consistindo de um conjunto X, uma* σ*-álgebra* χ *de subconjuntos de X, e uma medida* μ *definida em* χ.

Definição B.6 *Dizemos que certa propriedade vale em* μ*-quase todo ponto* $(\mu - q.t.p.)$*, se existe um subconjunto* $N \in \chi$ *com* $\mu(N) = 0$ *tal que a propriedade vale no complementar de N.*

Definição B.7 *A coleção* $L = L(X,\chi,\mu)$ *de funções integráveis consiste de todas as funções* χ*-mensuráveis a valores reais f definidas em X, tal que ambas as partes positivas e negativas* f^+, f^- *de f têm integrais finitas com respeito a* μ*, isto é,* $\int_X f^+ d\mu < \infty$ *e* $\int_X f^- d\mu < \infty$.

Teorema B.1 *Assuma que* $|\Omega| < \infty$*,* $1 \leq, r < \infty$*,* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *e*

$$|f(x,u)| \leq (1 + |u|^{\frac{p}{r}}).$$

Então, para cada $u \in L^p(\Omega)$*,* $f(.,u) \in L^r(\Omega)$ *e o operador*

$$A : L^p(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega) : u \longmapsto f(x,u)$$

é contínuo.