UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROGÉRIO ELOI SILVA

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL

CAMPINA GRANDE
2019

ROGÉRIO ELOI SILVA

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientadora: Dra. Emanuela Régia de S. Coelho

CAMPINA GRANDE

2019

S586e Silva, Rogério Eloi.
Uma equação diferencial aplicada ao crescimento populacional [manuscrito] / Rogerio Eloi Silva. - 2019.
32 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Departamento de Matemática - CCT."

1. Equação diferencial. 2. Matemática aplicada. 3. Modelo Malthusiano. 4. Crescimento populacional. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

ROGÉRIO ELOI SILVA

UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 11 / 12 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José de Brito Silva.

Prof. Me. José de Brito Silva
Universidade de Pernambuco (UPE - Mata Norte)

Dedicatória

À minha querida família e
amigos, DEDICO.

"A física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma"
Antônio Gomes Lacerda

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades. A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes. A minha orientadora, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos. Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas da turma matemática 2014.2 e aqueles que encontrei durante a caminhada, os quais estiveram presentes no decorrer da minha graduação e tiveram sua parcela de contribuição na realização desta conquista, por todos os momentos incríveis que vivemos juntos, e que em todos esses anos me ajudaram, em todos os momentos possíveis.

Resumo

O presente trabalho surge na perspectiva de investigar modelos matemáticos que possam descrever fenômenos reais, sejam eles de ordem natural ou humana. Neste sentido, aplicam-se conceitos estudados na área da Matemática Aplicada, e especialmente neste caso, as teorias do crescimento populacional. Em particular, aplicamos o Modelo Malthusiano para o crescimento populacional com o objetivo de fazer a comparação dos resultados obtidos pelo modelo, com os dados obtidos no laboratório de Biologia da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), no período de 2019.2, no mês de outubro. Com os resultados obtidos através da aplicação de um Modelo adequado, para o crescimento populacional, tem-se a comprovação do modelo e consequentemente a validação da teoria de Malthus, e mais fortemente as contribuições da matemática para esta área da ciência.

Palavras-chave: Equação Diferencial; Matemática Aplicada; Modelo Malthusiano; Crescimento populacional.

Abstract

The present work comes from the perspective of investigating mathematical models that can describe real phenomena, whether natural or human. In this sense, applied concepts studied in the area of Applied Mathematics, and especially in this case, the theories of population growth. Like this, The Malthusian Model for population growth will be applied to to compare the results obtained by the model, with the statistical data obtained in the biology laboratory of the State University of Paraíba (UEPB), in the period 2019.2, especially in the month of October. With the results obtained through the application of a Appropriate modeling for population growth shows the model validation and consequently the validation of Malthus theory, and more strongly the contributions of math for this area of science.

Keywords: Differential Equation; Aplicated Math; Malthusian Model; Population Growth.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Uma Equação Algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto que uma Equação Diferencial - ED é uma equação em que as incógnitas são funções e, em lugar de potências numéricas, os elementos da equação envolvem derivadas das funções procuradas.

As Equações Diferenciais, em geral, são classificadas como Ordinárias (quando as derivadas que aparecem são ordinárias, ou seja, de uma variável apenas) ou Parciais (quando aparecem derivadas parciais envolvendo função de mais de uma variável na equação). Além disso, as ED's podem ser classificadas quanto à ordem, que corresponde a ordem da maior derivada que aparece na equação.

O Estudo das Equações Diferenciais começou no século XVII com o estudo do Cálculo por Isaac Newton [1] e Gottfried Leibniz [2]. As primeiras aplicações desse estudo foram feitas na Física, mas posteriormente apareceram várias aplicações em outras áreas.

Segundo Meira et al (2014), o estudo de fenômenos naturais e biológicos é um dos grandes ramos da matemática aplicada atualmente, e a modelagem deste fenômenos é a estratégia mais utilizada ao desenvolver este processo. Conceitualmente, a modelagem matemática[3] pode ser concebida como tendência que desenvolve uma forma de "transcre-

[1]Isaac Newton (1643-1727) foi um físico, astrônomo e matemático inglês. Seus trabalhos sobre a formulação das três leis do movimento levou à lei da gravitação universal, a composição da luz branca conduziram à moderna física óptica, na matemática ele lançou os fundamentos do cálculo infinitesimal.

[2]Gottfried Leibniz (1646-1716) foi um filósofo e matemático alemão. Estudioso do cálculo integral e do cálculo binário, que seria futuramente importante para o estabelecimento dos programas de computadores. Criador da teoria das Mônadas - unidades primárias do universo que compõem todos os corpos.

[3]A modelagem Matemática consiste na arte (ou tentativa) de descrever matematicamente um fenômeno, ou seja, a modelagem matemática, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão de um fenômeno natural. Esse fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento.

ver" fenômenos, para que estes possam ser estudados e possivelmente explicados.

No presente trabalho, apresentaremos uma aplicação de uma Equação Diferencial de Primeira Ordem, com base na teoria Malthusiana, que descreve um modelo apropriado para definir o crescimento populacional. De início, foi realizado durante 21 dias o acompanhamento do crescimento da espécie conhecida como **Cylindrospermopsis**, no Laboratório de Biologia da Universidade Estadual da Paraíba(UEPB); posteriormente, simulamos o fenômeno com a aplicação do modelo, nos dados coletados, para comparação, e assim, constatar se esse modelo poderia ser utilizado para estimar essa população específica. Além disso, a ideia principal desse processo de investigação é compreender a contribuição da Matemática na Sociedade.

Dito isto, o modelo que apresentaremos deve estimar uma população em um determinado instante de tempo, ou seja, a população está em função do tempo, além disso, para a plicação desse modelo, desconsidera-se os fatores limitantes, que influenciam diretamente no crescimento da população, como por exemplo: temperatura e ambiente.

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentaremos um pouco da história das Equações Diferencias; No Capítulo 2, apresentaremos conceitos e resultados que nos ajudarão a compreender as aplicações. No Capítulo 3 e último, apresentaremos os resultados gráficos e reais obtidos na nossa pesquisa no laboratório de Biologia da Universidade Estadual da Paraíba(UEPB).

Capítulo 2

Equações Diferenciais: Um Breve Histórico

A teoria das Equações Diferenciais foi aplicada primeiramente à Física e, posteriormente, a outras atividades humanas desde a engenharia e a biologia até a medicina, entre outras áreas. Uma Equação Diferencial associa uma função incógnita a uma ou mais de suas derivadas. Resolvê-las significa encontrar todas as suas soluções, isto é, todas as funções que satisfazem a equação. Com o surgimento do Cálculo no final do século XVII por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), inúmeros problemas puderam ser então modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais. Durante esta época, vários desses problemas foram resolvidos explicitamente [1] por matemáticos como os da família Bernoulli [2]. Nesse período de desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram uma maior contribuição para o desenvolvimento e o sucesso do Cálculo, dentre eles podemos citar, Jakob Bernoulli [3], Johann Bernoulli [4], Cauchy [5], entre outros. Newton foi quem forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, através do desenvolvimento do Cálculo e explicações dos princípios básicos da mecânica. Ele classificou

[1] De maneira explícita; demonstrado de forma clara, objetiva; de modo preciso.

[2] A família Bernoulli destacou-se devido ao facto de ter dado ao mundo, durante um século, oito notáveis cientistas na área da matemática e da física.

[3] Jakob Bernoulli, foi primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

[4] Johann Bernoulli foi um matemático suíço, desenvolveu trabalhos que precediam em muito o cálculo de Gottfried Leibniz

[5] Augustin-Louis Cauchy foi um matemático francês o primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na análise matemática

as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas

$$\frac{dy}{dx} = f(x); \frac{dy}{dx} = f(y) \ e \ \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e expandiu um método para resolver a última equação na qual $f(x, y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas. Leibniz autodidata em matemática chegou aos resultados fundamentais do Cálculo independentemente, pouco depois de Newton, mas, foi ele o primeiro a publicar seus estudos, no ano 1684, diferente de Newton que considerava variáveis mudando com o tempo, Leibniz estudava as variáveis x e y variando sobre sequências de valores infinitamente próximos, ele introduziu a notação dx e dy como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências. Leibniz tinha noção da importância de uma boa representação matemática e por isso estabeleceu a notação de derivada $dy \ \ dx$, assim como o sinal de integral $\int$. Em 1691 descobriu o método de separação de variáveis [6] Leibniz mantinha uma relação próxima, por cartas, com outros matemáticos, e foi por esse meio de comunicação, que foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais, os quais contribuíram significativamente com o desenvolvimento de métodos para resolução de equações diferenciais e expansão no campo de suas aplicações. O avanço do Cálculo proporcionou a resolução de inúmeros problemas, os quais puderam ser modelados matematicamente na forma de equações diferenciais, e vários desses problemas foram resolvidos explicitamente por grandes matemáticos, mas, com o passar do tempo, eles perceberam que não seria possível obter procedimentos gerais de resolução explícita para algumas equações diferenciais, e no século XVII, pesquisadores desta ciência começaram a procurar outros métodos de estudo destas equações diferenciais. Leonhard Euler (1707 - 1783), o maior matemático do século XVIII, foi um matemático muito produtivo, chegando, suas obras, a acumular mais de 70 volumes grossos, e seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação, esse matemático, mesmo após ter perdido a visão, continuou seus trabalhos em ritmo acelerado até o dia de sua morte. Joseph-Louis Lagrange [7] (1736 - 1813) veio a suceder Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlim em 1766, contribuiu com as relações diferenciais elementares,

[6]Este método será apresentado nos capítulos que se seguem.

[7]Joseph Louis Lagrange, foi um Matemático italiano, aos dezesseis anos tornou-se Professor de Matemática na Escola Real de Artilharia de Turim.

mostrando que a solação geral de uma Equação Linear Homogênea [8] de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Destacou-se também por seu trabalho fundamental em Equações Diferenciais Parciais. No final do século XVIII, já haviam sido descobertos diversos métodos elementares para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias. As soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas importantes ainda não resolvidos. Para muitos matemáticos, conhecer seus resultados e aplicações de Equações Diferenciais é de extrema importância para quem pretende prosseguir seus estudos nessa área da Matemática. Fonte [2].

[8]Uma equação linear homogênea é uma equação que possui os termos independentes iguais a zero, por exemplo, $2x + 5y - z = 0$.

Capítulo 3

Tópicos de Equações Diferenciais

Nosso trabalho apresenta as comparações entre o crescimento de uma população dada pela Modelagem através de uma EDO. Para estudá-los, precisamos de resultados e definições sobre Equações Diferenciais que são introduzidas neste capítulo.

3.1 Equação Diferencial

Definição 3.1. *Uma Equação Diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e, em lugar de potências numéricas, os elementos da equação envolvem derivadas das funções procuradas.*

Exemplo 3.1. A equação

$$y'' + 2xy = e^x \tag{3.1}$$

é um exemplo de equação diferencial. Enquanto que a equação

$$x + 2 = 0 \tag{3.2}$$

não é uma equação diferencial.

Observação 3.1. *Na equação diferencial (2.1), estamos em busca de uma* ***função*** *y, que depende de uma outra variável x, ou seja, $y = y(x)$ cuja derivada segunda, somada com ela mesma, vezes $2x$ é igual a e^x.*

Por outro lado, na equação não diferencial (2.2), estamos em busca de um ***número****, que somado com 2, resulte 0, ou seja, estamos em busca de um número e não de uma função.*

3.1.1 Classificação das Equações Diferenciais

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma igualdade que contém uma variável independente, x, uma variável dependente, y, e algumas das suas derivadas, $y', y'', ..., y^n$

Exemplo 3.2. As equações

$$xy' + 3y = 6x^3 \tag{3.3}$$

e

$$y'' + y = 0 \tag{3.4}$$

são Equações Diferenciais Ordinárias.

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma igualdade que contém mais de uma variável independente.

Exemplo 3.3. A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) = 0. \tag{3.5}$$

é uma Equação Diferencial Parcial.

3.1.2 Classificação das Soluções

Definição 3.2. *Uma solução de uma Equação Diferencial na função incógnita y e na variável independente x é uma função $y(x)$ que satisfaz identicamente a equação, ou seja, a função que substituída na equação dada, transforma-a em uma identidade.*

Definição 3.3 (Solução Geral). *Chama-se solução geral de uma Equação Diferencial uma solução que figurem n constantes arbitrárias.*

Exemplo 3.4. A equação Diferencial

$$y'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \tag{3.6}$$

tem a seguinte solução geral

$$y(x) = x^3 - 2x^2 + x + c, \quad x, c \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Definição 3.4 (Solução Particular). *Chama-se solução particular toda solução de uma*

Equação Diferencial que se obtém atribuindo valores às constantes arbitrárias que figuram na solução geral.

Exemplo 3.5. Considerando a solução geral do Exemplo 3.7 acima, então a solução particular, quando $y(-1) = 3$ é

$$y(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7 \tag{3.8}$$

uma vez que

$$3 = -1 - 2 - 1 + c \Longrightarrow c = 7.$$

3.1.3 Equações Diferencias a Variáveis Separáveis

Nesta seção vamos estudar as equações diferencias a variáveis separáveis, as quais são importantes para o nosso trabalho. Para isso, vamos fazer uso das definições e resultados presentes no livro Equações Diferenciais Ordinárias de Reginaldo Santos conforme a referência [4].

Definição 3.5 (Equações a Variáveis Separáveis)**.** *Quando uma equação diferencial possui a forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}, N(y) \neq 0. \tag{3.9}$$

diz-se que as variáveis são separáveis, em que M e N são funções integráveis, de uma variável apenas, definidas em intervalos I_x e I_y, respectivamente.

Considerando a equação diferencial (3.9), define-se

$$h(y) = \int_a^y N(\xi)d\xi,$$

em que $a \in I_y$, com isso, tem-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{dh}{dy}(y) = N(y),\ \forall y \in I_y.$$

Substituindo a expressão acima em (3.9), obtém-se

$$\frac{dh}{dy}(y)\frac{dy}{dx}(x) = M(x), \forall x \in I_x, y \in I_y,$$

isto é,

$$\frac{d(h \circ y)}{dx}(x) = M(x), \forall x \in I_x.$$

Integrando ambos os membros, obtém-se , pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$h(y)(x) = \int M(x)dx + c, \forall x \in I_x, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx + c, c \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Exemplo 3.6. Para encontrar a solução geral da equação

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0, \tag{3.11}$$

podemos separar as variáveis da seguinte forma

$$ydy = -xdx. \tag{3.12}$$

Daí, integrando os dois membros da equação, temos:

$$\int ydy = -\int xdx.$$

Logo,

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c,$$

$c \in \mathbb{R}$, Portanto,

$$y^2 + x^2 = 2c,$$

e a solução geral é dada, implicitamente, por

$$y^2(x) + x^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Exemplo 3.7. Procurando a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{senx}{2y}, \tag{3.14}$$

temos:

$$2ydy = -\sin x dx. \tag{3.15}$$

Agora, integrando os dois membros da equação, tem-se:

$$\int 2ydy = \int -\sin x dx, \tag{3.16}$$

e, a solução geral é dada, implicitamente, por

$$y^2 - \cos x = c, c \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Além disso, dando-se uma condição inicial, obtém-se uma solução particular.

Exemplo 3.8. Considerando a Equação (3.17), aplicando a condição $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, tem-se

$$(0)^2 = \cos(\frac{\pi}{2}) + c. \ \textit{Logo}, \ c = 0, \tag{3.18}$$

e, portanto, a solução particular, com essas condições iniciais, é

$$y^2(x) = \cos x. \tag{3.19}$$

Capítulo 4

Aplicação ao Crescimento Populacional

O que vimos até o presente momento teve como objetivo nos dar base para compreender melhor este capítulo que se inicia. Vamos apresentar os conceitos básicos acerca de Crescimento Populacional e de sua relação com EDO, através do Modelo de Malthus. O que introduzimos aqui, segue com base no artigo intitulado *Modelo Malthusiano Aplicado ao Crescimento Populacional* conforme a referência [2].

Compreender os fenômenos da natureza e suas leis tem sido uma busca constante da humanidade, com intuito de favorecer a vida em sociedade do homem. Neste sentido, a busca por alternativas que possam melhorar o desenvolvimento populacional e social tem sido uma questão de grande importância. Historicamente, estas questões foram tratadas principalmente no ramo das ciências humanas, no que tange a estudos geográficos. Entretanto, a partir do século XVIII, o estatístico e economista ***Thomas Malthus*** desenvolveu um modelo matemático para estudar o crescimento populacional mundial, sendo ele um dos precursores da demografia, ciência que estuda a dinâmica de populações. Em seu modelo, Malthus propõe uma equação diferencial, que pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. Assim, podem-se desenvolver estimativas importantes para o contexto histórico em que a teoria foi desenvolvida. Após Malthus, outras teorias matemáticas sobre os estudos demográficos foram desenvolvidas, mas esta continua sendo uma das alternativas mais simples quando se deseja estudar pequenos grupos e populações sem limitantes naturais. Neste sentido, surge esta proposta, que visa modelar, através do modelo Malthusiano, o crescimento populacional da espécie ***Cylindrospermopsis*** estudada no laboratório de Biologia da universidade Estadual da Paraíba(UEPB) no município de Campina Grande-PB. Para esta proposta, foram utilizados dados do ano de 2019 do mês de outubro. Após aplicar a teoria, partiu-se para a comparação dos dados e a avaliação, ou seja, se o modelo de crescimento populacional de Malthus poderia ser utilizado como uma ferramenta matemática para prever o crescimento da espécie em questão para os próximos dias.

4.1 População Estudada - Cylindrospermopsis

A população a qual nosso estudo é feito é chamada de **Cylindrospermopsis**. De acordo com Nishimura, pesquisadora do Departamento de Ecologia da Universidade de São Paulo - USP, a Cylindrospermopsis é uma cianobactéria (Ordem Nostocales) formadora de florações com alto potencial tóxico que vem recebendo atenção da comunidade científica devido ao seu comportamento invasivo em diversos ambientes límnicos do mundo. Esta cianobactéria foi descrita originalmente para região tropical. Nos últimos 10 anos a frequência de florações aumentou nos trópicos. Mais recentemente, a espécie tem sido observada em regiões subtropicais e temperadas, e sua distribuição alcança regiões ao norte da Europa (Alemanha), Nova Zelândia, África do Sul e América do Norte. Na América do Sul, ela é muito conhecida nas águas tropicais brasileiras e subtropicais uruguaias, sendo que na Argentina, foi encontrada apenas como não dominante.

Na década de 80, passou-se a verificar a ocorrência desta cianobactéria em outras regiões brasileiras. A partir da década de 90, observou-se grande expansão na distribuição, devido ao aumento da eutrofização dos sistemas aquáticos nas mais diversas regiões do país. Informações mais detalhadas sobre a espécie podem ser encontradas em [3].

4.1.1 Imagens

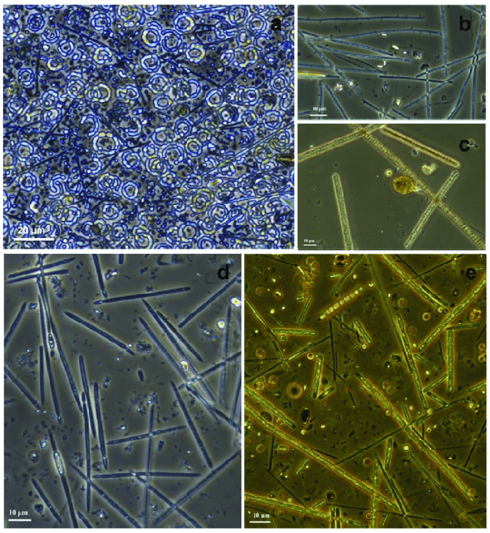

Figura 4.1: Células em formação (Visão Microscópica)

Figura 4.2: Habitat Natural

A Figura 3.1 retrata a espécie **Cylindrospermopsis** sendo visualizada no Microscópio, enquanto que a figura 3.2 mostra sua floração natural, ou seja, como ela aparece no seu Habitat. Note que ela apresenta uma floração verde, isso significa que está presente uma grande quantidade de Células.

Além disso, essa espécie tem ganhado uma maior atenção pelos Pesquisadores, segundo os pesquisadores do Laboratório de Biologia da UEPB, devido seu grande potencial ofensivo para a população que compartilha do mesmo Habitat. Assim como mostram as figuras 3.3 e 3.4, abaixo.

Figura 4.3: Poder Ofensivo

Figura 4.4: Poder Tóxico

A seguir, apresentamos como a **Cylindrospermopsis** é conservada no Laboratório, para estudos, e consequentemente, como é feito o acompanhamento do seu crescimento. Observe as imagens abaixo.

Figura 4.5: Luz Especial

Figura 4.6: Simulador de Ambiente

A figura 3.5 mostra a espécie submetida a uma luz adequada para conservação dos seus nutrientes. Já a figura 3.6 mostra um simulador de Ambiente Natural, ou seja, é um tipo de Freezer com luz especial e monitoramento de temperatura automática, modelo: Lojanetlab, como mostra a figura 3.6, daí, à noite, por exemplo, ela muda de temperatura, simulando o Habitat Natural da espécie em questão.

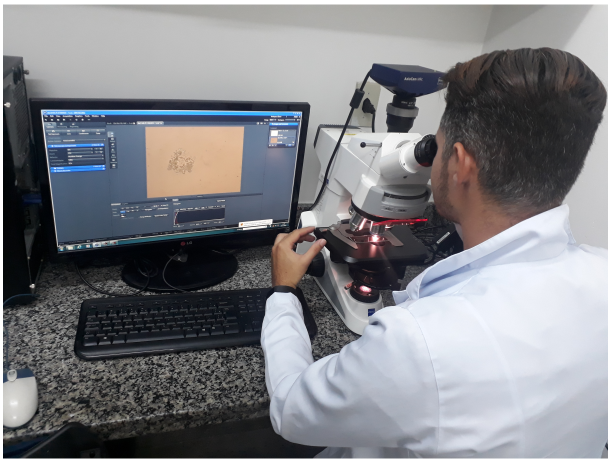

Figura 4.7: Observando o Crescimento

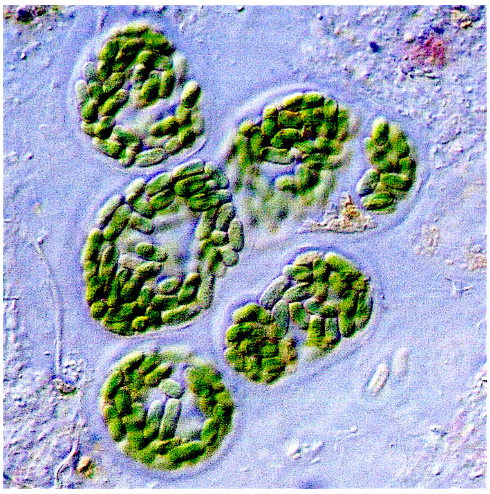

Figura 4.8: Contagem Via Software

A figura 3.7 mostra o processo de observação do crescimento da espécie, a qual é fotografada pelo Microscópio e enviada para o computador, e, via software, é feita a contagem.

4.2 Modelo de Malthus

Uma maneira comum de modelar uma população é por meio de uma função derivável P que aumenta a uma taxa proporcional ao tamanho da população em um momento observado. Um modelo desse tipo de Crescimento Populacional é o advindo de Thomas Malthus, esse modelo é baseado em dois Postulados: [1]

- O alimento é necessário à subsistência do homem;
- A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente.

Supondo, então, que tais Postulados estão garantidos, Malthus afirma que a capacidade de reprodução do homem é superior a capacidade da terra produzir meios para a sua subsistência e, a inibição do Crescimento Populacional é devida à disponibilidade de alimentos. Portanto, Malthus propõe um Crescimento Populacional de vida otimizado, sem guerra, fome, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. Daí, a ideia de Malthus é de que a taxa na qual uma população cresce é proporcional ao seu tamanho, conforme [5].

4.2.1 Thomas Malthus

Thomas Malthus (1766-1834) foi um economista, sociólogo e clérigo anglicano inglês, cujo pensamento social e econômico girava em torno de sua teoria sobre o crescimento da população, que segundo ele, enquanto os meios de subsistência crescem em progressão aritmética, a população cresce em progressão geométrica, havendo necessidade de um controle da natalidade.

Thomas Malthus nasceu em Dorbing, Inglaterra, no dia 13 de fevereiro de 1766. Filho de um rico proprietário rural, amigo do filósofo David Hume, e seguidor fiel da filosofia de Jean-Jacques Rousseau. Inicialmente, Malthus foi educado em casa, e só em 1784, com 18 anos, ingressou no Jesus College de Cambridge, onde se graduou em 1788. Em 1791 obteve a licenciatura em Matemática. Em 1797 ordenou-se sacerdote da Igreja Anglicana.

Teoria de Thomas Malthus Em 1798, Thomas Malthus publicou, de forma anônima, a primeira edição de "Ensaios Sobre o Princípio da População". O livro nasceu como resultado das discursões de Malthus com seu pai, que influenciado pelo filósofo William

[1] O que se considera como fato reconhecido e ponto de partida, implícito ou explícito, de uma argumentação; premissa. Ou ainda, uma afirmação ou fato admitido sem necessidade de demonstração.

Gowin, afirmava que a miséria era consequência do mau desempenho das instituições e que a terra só poderia alimentar a todos os seres humanos se houvesse melhoras na assistência pública à população pobre, para se conseguir uma maior igualdade social.

Malthus diferia radicalmente dessa teoria, pois acreditava que o crescimento demográfico era maior do que os meios de subsistência, pois enquanto a população cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos se da em progressão aritmética. Malthus percebeu que o crescimento populacional havia dobrado entre os anos de 1785 e 1790, em consequência da grande produção de alimentos, das melhores condições sanitárias e do aperfeiçoamento no combate às doenças, resultado da Revolução Industrial ocorrida nessa época.

Malthus acreditava que o aumento ilimitado da população poderia encontrar dois obstáculos, um repressivo que seriam: as epidemias, guerras e a miséria, e os preventivos que seriam: A sujeição moral de retardar o casamento, a abstenção de relações sexuais antes do casamento ou no próprio matrimônio, e ter somente o número de filhos que pudesse sustentar.

Em 1803, a obra foi reeditada com importantes modificações, amenizando algumas teses mais radicais da primeira edição. Numerosos autores provaram a incompatibilidade das duas progressões, principalmente depois que os adeptos do "Malthusianismo" exageraram seus princípios. Com o tempo, sua teoria foi incorporada à teoria econômica, atuando como freio para teses mais otimistas.

Em 1805, Thomas Malthus passou a lecionar História e Economia Política na Est Company' College de Heileybury. Em 1819 foi eleito membro da Royal Society. Em 1811, conheceu o já importante economista David Ricardo, com quem manteve grande amizade, apesar de suas diferenças teóricas. Publicou: "Principales of Political Economy" (1820) e "Definitions in Political Economy" (1827), entre outros.

Thomas Malthus faleceu em Saint Catherine, Somerset, Inglaterra, no dia 23 de dezembro de 1834.

O modelo de Malthus é baseado na ideia de que a taxa de variação de uma população é proporcional a população num determinado instante de tempo. Assim, se $P(t)$ é a população no instante t, e entendendo que a taxa de variação é representada pela derivada, o modelo em forma de Equações Diferenciais é

$$\frac{dP}{dt}(t) = KP(t), t \geq 0. \tag{4.1}$$

em que K é a Constante de crescimento obtido, em geral, por meio de observações.

Observa-se que este é uma Equação Diferencial a variáveis separáveis.

Para chegar a uma função que defina a população em função de um tempo, isto é, um valor de P precisamos resolver esta equação. Daí, podemos reescrever a Equação (4.1), da forma

$$\frac{dP}{P} = K.dt \tag{4.2}$$

Integrando ambos os lados da igualdade, tem-se

$$\int \frac{dP}{P} = \int K.dt. \tag{4.3}$$

Resolvendo as integrais em (4.3), tem-se

$$\ln P = Kt + c. \tag{4.4}$$

Como é de importância deixarmos P isolado, uma vez que essa é a função que descreve a população que desejamos encontrar, então aplicando a exponencial em ambos os membros, tem-se

$$e^{\ln P} = e^{Kt+c},$$

ou seja,

$$P = e^{Kt+c}, t \geq 0 \text{ e } c \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Por conseguinte,

$$P = e^{Kt}.e^{c}. \tag{4.6}$$

Assim, no instante inicial t=0, tem-se

$$P_0 = e^{K0}e^{c} \Longrightarrow P_0 = e^{c}. \tag{4.7}$$

Substituindo as constantes obtidas em (4.7) na equação (4.6), tem-se

$$P(t) = P_0 e^{Kt}, \ t \geq 0, \tag{4.8}$$

em que $P(t)$ é a população que depende do tempo t, P_0 é a população inicial, e K é a constante de crescimento.

Percebe-se que esse modelo conduz a um crescimento exponencial, porém como já citado anteriormente, ele foi introduzido para populações pequenas onde se tem poucos, ou nenhum, limitantes naturais para o crescimento desta população. Nosso objetivo aqui é comparar o modelo de Malthus para a espécie **Cylindrospermopsis**, estudada no laboratório de Biologia da UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. Para isso, devemos observar a taxa de crescimento diário a que a população cresce. Isto é feito com base nos dados apresentados na Tabela 3.1, a baixo, a qual mostra os dados coletados durante o acompanhamento do crescimento da espécie já mencionada, no Laboratório de Biologia.

Dias	População (Células) Dados do Laboratório de Biologia
0	43
1	85
3	253
4	612
5	1220
7	4969
9	19.523
11	76.168
13	296.870
15	1.156.800
17	4.507.190
19	17.561.100
21	68.421.583

Tabela 4.1: Fonte: Laboratório de Biologia-UEPB

Aplicando o modelo de Malthus para calcular o crescimento populacional desta espécie, analisamos os resultados obtidos, observando se são coerentes com o modelo seguido. De acordo com a tabela tem-se $P_0 = 43$ e $K = 0,68$. O valor de K, isto é, a constante de proporcionalidade, é obtida através dos dados da pesquisa, e nesse caso, tomamos como referência os dados do 1º dia. Do modelo, tem-se

$$P(1) = P_0 e^{K.1} \tag{4.9}$$

ou seja,

$$85 = 43e^K; \tag{4.10}$$

logo,

$$e^K = \frac{85}{43} \tag{4.11}$$

e, portanto,

$$K = \ln\left(\frac{85}{43}\right) = 0,68. \tag{4.12}$$

Uma vez conhecida a taxa de proporcionalidade a qual essa espécie cresce, encontraremos qual é a população estimada para cada dia, de acordo com o Modelo de Malthus, e assim, podemos compará-las com os dados obtidos na pesquisa.

Por conseguinte, para $t = 3$ tem-se,

$$P(3) = 43 \cdot e^{K3} \tag{4.13}$$

logo,

$$P(3) = 43 \cdot e^{(0.68)3} = 43 \cdot e^{2.04} = 43 \cdot (7,69),$$

consequentemente,

$$P(3) \approx 330. \tag{4.14}$$

Percebemos então que no terceiro dia a população calculada através do modelo de Malthus não é tão próxima aos dados reais. Calcularemos então uma aproximação para o quarto dia.

Assim,

$$P(4) = 43 \cdot e^{K4} = 43 \cdot e^{(0.68)4} = 43 \cdot (15,18)$$

logo,

$$P(4) \approx 652. \tag{4.15}$$

Assim, percebemos então que no quarto dia a população calculada através do modelo de Malthus mostra-se próxima aos dados reais.
Vejamos para o quinto dia:

$$P(5) = 43 \cdot e^{K5} = 43 \cdot e^{(0.68)5} = 43 \cdot (29,96).$$

Donde

$$P(5) \approx 1288. \tag{4.16}$$

Por fim, calcularemos para o vigésimo primeiro dia.

$$P(21) = 43 \cdot e^{k21} = 43 \cdot e^{(0.68)21} = 43 \cdot e^{14.28} = 43.(1.591.201);$$

donde,

$$P(21) \approx 68.421.667. \tag{4.17}$$

Logo, o resultado mostra-se, também, próximo da realidade.

Portanto, podemos concluir que para esta população o modelo Malthusiano pode ser considerado para estimar a população dessa espécie. Assim, podemos fazer estimativa enquanto os fatores naturais não se tornarem limitantes para o crescimento dessa população. Não serão apresentados os cálculos para todos os dias da tabela 3.1, pois seria apenas repetição de cálculos. Por esse motivo, a estimativa da população, para os demais dias, estará disposta na tabela de comparação 3.2.

Apresentaremos na tabela 3.2, abaixo, a comparação dos dados observados no Laboratório com os dados obtidos após a aplicação do Modelo.

Dias	População (Células) Dados do Laboratório de Biologia	População após a aplicação do Modelo de Malthus
0	43	-
1	85	84
3	253	330
4	612	652
5	1220	1288
7	4939	5020
9	19.523	19.559
11	76.168	76.206
13	296.870	296.914
15	1.156.800	1.156.837
17	4.506.190	4.507.260
19	17.561.100	17.561.158
21	68.421.583	68.421.667

Tabela 4.2: Comparação

4.3 Comparação Gráfica dos Dados da Pesquisa com os Dados da Aplição do Modelo de Malthus

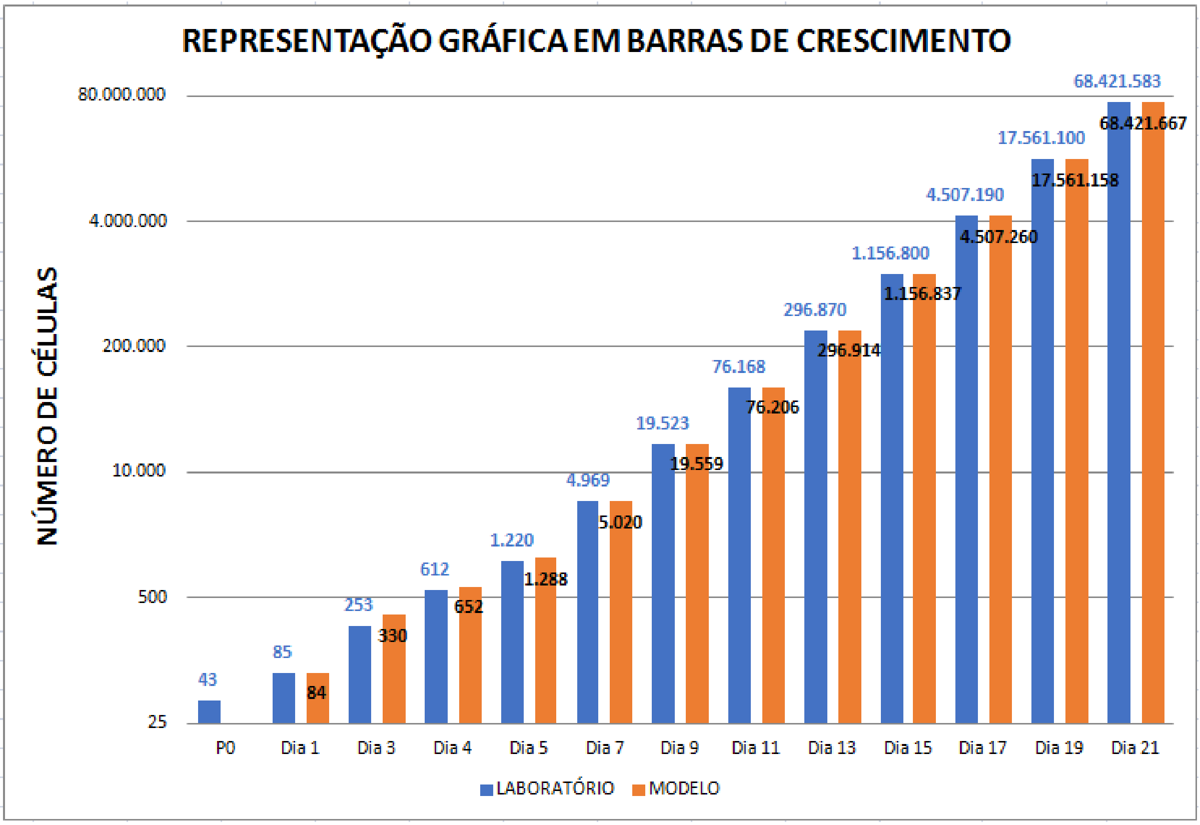

Figura 4.9: Barras

Podemos observar no Gráfico de Barras, figura 3.9, acima, que os valores do Modelo encontram-se equiparados aos valores reais observados no Laboratório.

Por outro lado, observa-se no Gráfico de Dispersão, abaixo, uma pequena dispersão no terceiro dia. Esse fato pode ter ocorrido, segundo os pesquisadores do Laboratório, devido algum fator limitante que pode ter influenciado diretamente no crescimento dessas células, por exemplo: um aumento de temperatura.

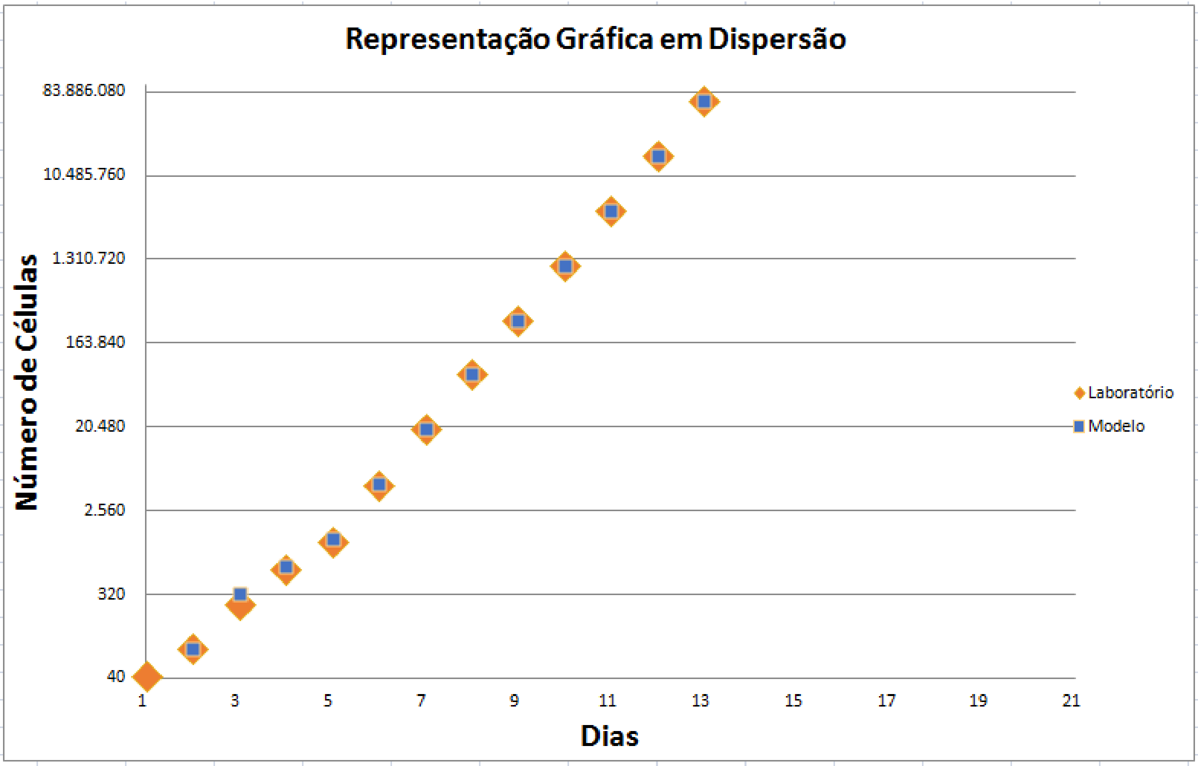

Figura 4.10: Dispersão

Considerações Finais

Introduzida em 1798, a teoria de Malthus foi a primeira teoria demográfica de grande repercussão nos meios acadêmicos, políticos e econômicos. O modelo Malthusiano é recomendado para fazer estimativas para uma pequena população, desde que essa tenha poucos ou nenhum limitante natural. No caso observado, o Modelo se mostrou eficiente, uma vez que os valores obtidos no modelo são próximos dos valores obtidos via observação Laboratorial.

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise de como a modelagem matemática pode contribuir de forma significativa para a sociedade, visto que, mostrando-se eficiente, os modelos podem auxiliar na prevenção de problemas como o crescimento de uma população de bactérias, por exemplo.

Além disso, pessoalmente, pude perceber, através da prática, o quanto o Cálculo Diferencial e a Modelagem Matemática estão presentes no nosso dia dia, pois tive uma compreensão mais detalhada sobre os fenômenos que nos rodeiam, mas não tinha ideia que poderiam ser modelados, por exemplo: ao jogar uma pedra em um lago, forma-se alguns fenômenos, os quais podem ser Modelados por Equações Diferenciais, em especial, neste caso, uma Equação Diferencial Parcial - EDP. Portanto, este trabalho me possibilitou enxergar com mais detalhes o quanto seria importante que todo aluno de Matemática (Licenciatura ou bacharelado) tivessem a oportunidade de realizar um experimento prático com a Modelagem Matemática, em especial, uma aplicação real com as Equações diferenciais.

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC 2006
Luís, Adriano Simonato. Aplicação de Modelagem no Crescimento Populacional Brasileiro. Disponível em: http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario
MEIRA, Juliano. Silveira. et al. Modelo Malthusiano Aplicado ao Crescimento Populacional do Município de Manoel Viana/RS. In: XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, Bagé: 2014. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_Meira_01550181084.pdf
NISHIMURA, Paula Yuri. Populações - Cylindrospermopsis: Cylindrospermopsis raciborskii: uma cianobactéria invasiva e potencialmente tóxica. In: Portal de Ecologia Aquática. Disponível em: http://ecologia.ib.usp.br/portal/index.php?option=com_content\&view=article\&id =148:cylindrospermopsis-raciborskii-uma-cianobacteria-invasiva-e-potencialmente-toxica\&catid=19:artigos-cientificos\&Itemid=436. Acesso em: 4 dez. 2019.
SANTOS, Reginaldo José. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Belo Horizonte: 2016. Disponível em: https://regijs.github.io/