UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATEUS ALVES DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NO RAMO TÊXTIL

PATOS - PB

2021

MATEUS ALVES DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NO RAMO TÊXTIL

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientadora: Profª. Drª. Sally Andria Vieira da Silva

PATOS - PB

2021

O48m Oliveira, Mateus Alves de.
Modelagem matemática aplicada no ramo têxtil [manuscrito] / Mateus Alves de Oliveira. - 2021.
21 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2021.
"Orientação : Profa. Dra. Sally Andria Vieira da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Modelagem matemática. 2. Redes de dormir. 3. Tear duplo. 4. Ramo têxtil. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por José E. da S. Eugênio - CRB - 15/591 BSC7/UEPB

MATEUS ALVES DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NO RAMO TÊXTIL

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Aprovado em: 03/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

Sally Andria Vieira da Silva

Profª. Drª. Sally Andria Vieira da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Marciel Medeiros de Oliveira

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Elias da Silva

Prof. Me. José Elias da Silva
Instituto Federal da Paraíba (ECIT Dr. Elpídio de Almeida)

Lista de Figuras

Sumário

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NO RAMO TÊXTIL

Mateus Alves de Oliveira

RESUMO

A Modelagem Matemática nos permite moldar situações decorrentes da necessidade de compreender e resolver problemas do cotidiano utilizando problemas inteiramente matemáticos. O presente trabalho tem como objetivo utilizar a modelagem matemática para resolver o problema da produção de redes de dormir mescladas, produzidas por uma nova máquina de tear duplo existente na indústria têxtil de produção de redes. As redes mescladas são consideradas perdas, pois dificilmente se consegue vendê-las, e assim precisam ser transformadas em tapetes. A questão ao se utilizar este tear é que a única unidade de medida para calcular a quantidade de fio que é colocada em cada carretel, é o número de voltas que o carretel dará enquanto o fio é enrolado. Nesse sentido, utilizamos a modelagem matemática para encontrar equações que fornecem o número de voltas necessárias, em cada carretel, para que se produza uma certa quantidade de redes no tear duplo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Produção de Redes de Dormir. Tear Duplo.

RÉSUMÉ

La modélisation mathématique nous permet de façonner des situations découlant du besoin de comprendre et de résoudre des problèmes quotidiens en utilisant des problèmes entièrement mathématiques. L'objectif de ce travail est d'utiliser la modélisation mathématique pour résoudre le problème de la production de hamacs du repos mélangés, produits par une nouvelle machine à tisser double existant dans l'industrie textile de production de filets. Les filets mélangés sont considérés déchets des pertes, car il est difficile de les vendre et ils doivent donc être transformés en tapis. La question lors de l'utilisation de ce métier est que la seule unité de mesure pour calculer la quantité de fil qui est placé sur chaque bobine, est le nombre de tours que la bobine donnera pendant que le fil est enroulé. Dans ce sens, nous utilisons la modélisation mathématique pour trouver des équations qui fournissent le nombre de tours nécessaires, sur chaque bobine, pour produire une certaine quantité de réseaux dans le métier à tisser double.

Mots-clés: Modélisation Mathématique. Production de Filets de Couchage. Métier à Tisser Double.

1 Introdução

Muitos problemas reais precisam ser antes resolvidos teoricamente. Quando existe a necessidade de se utilizar conceitos matemáticos, chamamos essa teorização de modelagem matemática.

A modelagem matemática pode surgir em qualquer lugar. Através dela estuda-se a simulação de sistemas reais buscando prever o comportamento destes. De fato, a modelagem é empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia, engenharias, além da própria matemática, veja como exemplo [6], [7] e [8].

Pelo fato de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real, a modelagem é um ótimo caminho para a motivação e exemplos de aplicabilidade dos conceitos matemáticos estudados da escola ao ensino superior, veja [1], [3], [4], e [5]. Como dito por Bertone(2014), "A compreensão de Modelagem é apresentada em termos do processo de construção do modelo matemático, traduzido em esquemas explicativos."E segundo Bassanezi (1994), um modelo matemático é "quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise."Recomendo [2] para uma introdução ao estudo da modelagem matemática.

O problema ao qual foi aplicada a modelagem matemática se deu em uma das etapas da produção de tecidos para redes de dormir nas indústrias têxteis, localizadas na cidade de São Bento na Paraíba. A cidade é um polo industrial têxtil, sendo conhecida como a capital mundial das redes, produzindo cerca de 12 milhões de redes por ano. Em [10] pode-se encontrar um pouco da história dessas indústrias.

Até então, as fábricas existentes na cidade possuíam apenas máquinas que produziam redes feitas com fios de algodão, e que teciam um pano de rede por vez. Em 2020 Surgiu um tear mecânico capaz de produzir dois tecidos de rede por vez e esta rede tem como matéria prima o nylon. As redes de nylon tem sido muito procuradas pois elas são apropriadas para um descanso após um banho de piscina, de rio ou de mar, uma vez que o nylon não tem aderência a líquidos, sua higienização e durabilidade são maiores que as redes de algodão e portanto, estas redes são muito bem aplicadas em hotéis, pousadas, bares e restaurantes.

O processo de produção de uma rede de dormir tem basicamente 3 etapas:

- Urdidura: preparação do(s) carretel(éis) com os fios nas cores desejadas;
- Tecelagem: produção do pano da rede;
- Acabamento: execução dos detalhes finais que compõem a rede como costuras, franjas/varandas, punhos/argolas e acabamento de acordo com do modelo da rede.

A etapa da urdidura deste novo tear é realizada por meio mecânico, e a máquina que realiza esse processo possui uma única unidade de medida para saber a quantidade de fio que será colocado em cada carretel, que é o número de voltas que o carretel dará durante o processo. Foi aqui onde a modelagem matemática foi aplicada, pois como as voltas nem sempre possuem os mesmos tamanhos foi necessário relacionar o número de voltas com a quantidade de fio que é colocada nos carretéis.

Após a modelagem do problema, foi desenvolvida uma fórmula que relaciona o número de panos P produzidos pelo tear duplo, com a quantidade de voltas necessárias nos carretéis dianteiros e nos carretéis traseiros para produzi-las, respectivamente:

$$v_f(P) = \sqrt{\frac{459048,25 \cdot P}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \tag{1}$$

$$v_t(P) = \sqrt{\frac{663642 \cdot P}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \tag{2}$$

O artigo está dividido da seguinte forma, na seção 2 explicarei com mais detalhes o funcionamento da máquina de tear e qual o real problema na produção das redes. Na seção 3 mostrarei a solução para o problema do tear duplo, e na seção 4 terá algumas aplicações das equações encontradas na seção anterior em alguns problemas, encontrando uma solução geral para saber qual é a quantidade mínima de trocas de carretéis necessárias para produzir uma certa quantidade de redes. Finalizarei com a seção 5 explicitando a eficácia da modelagem realizada.

2 O problema da máquina de tear duplo

Este tear duplo utiliza 12 carretéis ao todo, sendo 6 carretéis a frente da máquina e 6 carretéis atrás (veja a Figura 1). A trama do tecido é diferente do tear de redes de algodão, e percebeu-se que para produzir um pano nesta máquina, se utiliza mais fio de nylon dos carretéis da frente do que dos carretéis de trás. Logo, não seria possível colocar a mesma quantidade de fio de nylon em todos os carretéis, pois os da frente acabariam primeiro e seriam trocados por carretéis de cores diferentes, produzindo então panos mesclados. Estes tecidos mesclados não são a preferência dos clientes, e a fábrica obtém prejuízos.

Observe que o problema não era tão simples de ser resolvido. Não seria viável ter mais carretéis da mesma cor dos panos que estavam sendo tecidos no momento, pois desta forma a produção de redes não seria variada. A troca de carretéis é um processo trabalhoso e realizado por no mínimo 4 pessoas, uma vez que a cada troca é necessário amarrar fio a fio. Cada carretel dianteiro (respectivamente, traseiro) possui de 180 fios (respectivamente, 170) organizados e enrolados de tal maneira que cada fio fica sobreposto sobre si mesmo (veja a Figura 2). Ou seja, a cada troca de carretéis é necessário amarrar mais de 1000 fios e assim, a troca de carretéis leva um tempo considerável e o adequado é fazer o mínimo de trocas possível. Como o nylon dos carretéis dianteiros acaba primeiro, o ideal seria colocar os carretéis traseiros com a quantidade necessária de fio de nylon para que o nylon de todos os carretéis acabe por igual.

A quantidade de fio colocada nos carretéis da frente foi fixada como sendo a maior possível (2900 voltas de fio de nylon) e desejava-se encontrar a quantidade de fios nos carretéis traseiros para que o nylon de todos os carretéis acabasse ao mesmo tempo. O tecedor decidiu colocar quantidades aleatórias de fio nos carretéis, mas isto não funcionou, pois a cada troca de carretéis a quantidade de redes mescladas que o tear tecia era cada vez maior.

Figura 1: Tear duplo.

Figura 2: Processo de urdidura.

Analisando a produção da máquina durante 4 trocas de cores de carretéis, construí a tabela 1, detalhando a quantidade de panos tecidos e se a cor era a desejada ou mesclada.

Momento	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis dianteiros**	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis traseiros**	**Total de panos tecidos**
1	518 - cor 1 (2900 voltas)	384 - cor 1	384 de cor 1
2	134 - cor 1	450 - cor 2(1800 voltas)	134 mesclados
3	518 - cor 2 (2900 voltas)	316 - cor 2	316 de cor 2
4	202 - cor 2	460 - cor 3 (1850 voltas)	202 mesclados
5	518 - cor 3 (2900 voltas)	258 - cor 3	258 de cor 3
6	260 - cor 3	??? - cor 4	-

Tabela 1: Produção de panos entre 4 trocas de carretéis.

Pela tabela, percebe-se (ao somar a produção de panos, na última coluna, com a produção de 260 panos mesclados que será tecido no momento 6) que dentre os 1554 panos produzidos, 596 são mesclados o que equivale a 38,35% da produção em questão. Além disso, a quantidade de panos mesclados estava crescendo a cada troca de carretéis.

Analisando os momentos seguintes, temos:

- No momento 5: os carretéis da frente tinham nylon suficiente para ser tecido 518 panos de rede da cor 3, mas os carretéis de trás tinham nylon suficiente para serem tecidos apenas 258 panos de rede da cor 3.
- No momento 6: Após os 258 panos de cor 3 serem tecidos, o nylon dos carretéis de trás acabou, porém ainda resta nylon suficiente nos carretéis da frente para que seja tecido 260 panos de rede da cor 3.

É fácil notar que serão tecidos 260 panos de rede mesclado, uma vez que resta nylon da cor 3 no carretel dianteiro e serão colocados carretéis com nylon da cor 4 atrás do tear. Como os carretéis dianteiros produzem 518 panos, para que nesta troca dos carretéis traseiros fossem produzidos os 260 panos mesclados, restando ainda fio para serem produzidos 518 panos na cor 4, é necessário colocar nos carretéis de trás a quantidade de nylon suficiente para serem tecidos 778 panos, então é preciso saber quantas voltas de fio de nylon colocar nos carretéis traseiros para que seja tecido essa quantidade. A partir daí, descobrindo a quantidade de voltas de fio necessária nos carretéis traseiros para produzir 518 panos, acontecerá que todas as trocas dos carretéis, com suas devidas quantidades de nylon, deverão acabar juntas (veja a tabela 2).

Momento	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis dianteiros**	**Quantidade de panos que podem ser tecidos com os carretéis traseiros**	**Total de panos tecidos**
7	cor 3 - 260	cor 4 - 778	260 mesclados
8	cor 4 - 518	cor 4 - 518	518 de cor 4
9	cor 5 - 518	cor 5 - 518	518 de cor 5

Tabela 2: Próximas trocas de carretéis do tear desejadas.

3 Resolvendo o problema

Antes de iniciar a solução do problema, é preciso deixar claro que as contas precisam ser feitas separadamente para os carretéis dianteiros e para os carretéis traseiros, pois, apesar de possuírem o mesmo tamanho, nos carretéis dianteiros são colocados 180 fios de nylon enquanto que nos carretéis de trás são colocados em média 170 fios tendo assim uma variação na quantidade de fios por espaço ocupado. Além disso, para que os cálculos sejam precisos, é necessário que a máquina que faz a urdidura esteja sempre bem regulada (uma certa quantidade de voltas deve ocupar sempre o mesmo raio do carretel). Além disso, vejamos alguns pontos importantes:

I. O pano tem 300 centímetros de comprimento, e o tecido é feito em zigue-zague. É necessário descobrir quantos centímetros de nylon em cada carretel é necessário para tecer um pano.

II. O número de voltas nos carretéis dianteiros é sempre 2900 voltas, e é possível ser colocado no máximo 3040 voltas nos carretéis de trás, ocupando 16 cm dos 17 cm disponíveis.

III. Quanto às medidas do carretel, veja a figura 3. O raio (segmento vermelho) é 27 cm, porém 10 cm constituem a parte interna (segmento verde) e o fio é colocado nos 17 cm restantes (segmento amarelo).

IV. Como a máquina tece dois panos por vez, vamos considerar metade da produção para podermos encontrar os comprimentos desejados. Assim, os carretéis da frente,

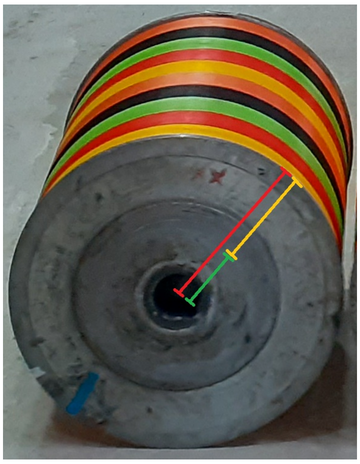

Figura 3: Carretel com medidas destacadas.

com 2900 voltas, preenchendo 16 cm do raio, produzem 259 panos; já os carretéis de trás, com 1800 voltas, preenchendo 9.47 cm do raio, produzem 226 panos.

V. Em nossos cálculos iremos desprezar a espessura do fio de nylon, pois no momento em que a máquina de urdidura enrola os fios nos carretéis há uma variação no cálculo desta espessura. Além disso, por se tratar de um valor muito pequeno, a espessura do fio não fará diferença significativa no resultado final.

Para chegar na solução do problema faremos o seguinte caminho: primeiro vamos encontrar a quantidade de fio necessária nos carretéis dianteiros e nos carretéis traseiros para produzir um pano. A segunda etapa é encontrar o comprimento do nylon em função do raio preenchido do carretel. Terceiro, vamos escrever o comprimento do nylon colocado no carretel em função do número de voltas. E finalmente, encontrar uma função que forneça o número de voltas de fio de nylon em função da quantidade de panos desejada.

Passo 1

Para encontrar a quantidade de fio necessária para produzir um pano utilizaremos os dados nos itens **III** e **IV**.

A ideia é encontrar o valor do comprimento de cada uma das 2900 voltas colocadas no carretel dianteiro, somá-las e dividir pela quantidade de panos produzidos.

Mais precisamente, dividiremos o raio que pode ser preenchido (ou seja, 16 cm) em n partes iguais obtendo $\frac{2900}{n}$ voltas em cada parte de raio $R_k = 10 + k \cdot \frac{16}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.[1] Logo o comprimento C_f total do nylon no carretel da frente será dado por:

[1] Lembre-se que o raio preenchido começa a partir de 10 cm. Assim, a partição do raio nos dá uma sequência de raios $R_1 = 10 + \frac{16}{n}$, $R_2 = 10 + 2 \cdot \frac{16}{n}, \ldots, R_k = 10 + k \cdot \frac{16}{n}, \ldots, R_n = 10 + n \cdot \frac{16}{n} = 26$, que é uma P.A. cujo primeiro termo é $10 + \frac{16}{n}$ e a razão é $\frac{16}{n}$.

$$\begin{aligned}
C_f &= \frac{2900}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \pi \cdot R_k \\
C_f &= \frac{2900}{n} \cdot 2 \cdot \pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{16 \cdot k}{n}\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Note que o último somatório é a soma dos n termos da P.A. formada pelos raios R_k. Sendo assim, como o n-ésimo termo é $10 + n \cdot \frac{16}{n} = 26$ temos:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{16 \cdot k}{n}\right) = \frac{\left(10 + \frac{16}{n} + 26\right)}{2} \cdot n = \frac{(36 \cdot n + 16)}{2} \qquad (4)$$

Substituindo o valor da soma (4) em (3), o comprimento total do nylon nos carretéis dianteiros, com esta partição, será

$$\begin{aligned}
C_f &= \frac{2900}{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{(36 \cdot n + 16)}{2} \\
C_f &= 2900 \cdot \pi \cdot \frac{(36 \cdot n + 16)}{n} \\
C_f &= 2900 \cdot \pi \cdot \left(36 + \frac{16}{n}\right)
\end{aligned}$$

Observe que quanto maior o n maior será a aproximação. Então, para ter a aproximação mais precisa, faremos $n \to \infty$ obtendo o seguinte valor para o comprimento C_f

$$\begin{aligned}
C_f &= 2900 \cdot \pi \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(36 + \frac{16}{n}\right) \\
C_f &= 2900 \cdot \pi \cdot \left(\lim_{n \to +\infty} 36 + \lim_{n \to +\infty} \frac{16}{n}\right) \\
C_f &= 2900 \cdot \pi \cdot (36 + 0) \\
C_f &= 104400 \cdot \pi \\
C_f &\approx 327982\text{cm}
\end{aligned}$$

Em conclusão, o carretel dianteiro preenchido com 2900 voltas e ocupando 16 cm do raio do carretel, contém 327982 cm de fio. E como produz 259 panos, são necessários $\frac{327982}{259} = 1266,34$ cm de nylon em cada carretel dianteiro para tecer um único pano.

Analogamente, para os carretéis traseiros divide-se os $9,47$ cm em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k \cdot \frac{9,47}{n}$, $k = 1, \ldots, n$ irá conter $\frac{1800}{n}$ voltas. Logo comprimento total do nylon, aproximadamente, é dado por

$$
\begin{aligned}
C_t &= \frac{1800}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \pi \cdot R_k \\
C_t &= \frac{1800}{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{9,47 \cdot k}{n}\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Novamente temos a soma dos n termos da P.A. cuja razão é $\frac{9,47}{n}$ e o primeiro termo é $10 + \frac{9,47}{n}$. Como o n-ésimo termo da P.A é $19,47$ cm temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{9,47 \cdot k}{n}\right) &= \frac{\left(10 + \frac{9,47}{n} + 19,47\right)}{2} \cdot n \\
&= \frac{(29,47 \cdot n + 9,47)}{2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor (6) na equação (5) obtemos:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \frac{1800}{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{(29,47 \cdot n + 9,47)}{2} \\
C_t &= 1800 \cdot \pi \cdot \frac{(29,47 \cdot n + 9,47)}{n}
\end{aligned}
$$

Novamente, precisamos tomar o limite quando $n \to \infty$ para encontramos a aproximação mais precisa possível.

$$
\begin{aligned}
C_t &= 1800 \cdot \pi \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(29,47 + \frac{9,47}{n}\right) \\
C_t &= 1800 \cdot \pi \cdot \left(\lim_{n \to +\infty} 29,47 + \lim_{n \to +\infty} \frac{9,47}{n}\right) \\
C_t &= 1800 \cdot \pi \cdot (29,47 + 0) \\
C_t &= 53046 \cdot \pi \\
C_t &\approx 166648,92cm
\end{aligned}
$$

Deste modo, o carretel traseiro, com 1800 voltas, tem 166648,92 cm e faz 226 panos. Assim, são necessários $\frac{166648,92}{226} = 737,38$ cm de nylon em cada carretel traseiro para tecer um único pano.

Passo 2

Queremos saber o comprimento do nylon colocado no carretel em função do raio que ele ocupa e que varia de 10 cm a 26 cm. Para isto, fixamos um número $c \in$

$\mathbb{R}$ tal que $0 < c \leq 16$, e observamos que é possível encontrar o número de voltas necessárias para preencher o carretel até c centímetros através de uma regra de três simples.

Para os carretéis dianteiros:

$$\frac{2900 \text{ voltas}}{v \text{ voltas}} = \frac{16 \text{ cm}}{c \text{ cm}} \to v = \frac{2900 \cdot c}{16} = \frac{725 \cdot c}{4} \tag{7}$$

Para os carretéis traseiros:

$$\frac{1800 \text{ voltas}}{v \text{ voltas}} = \frac{9,47\text{cm}}{c \text{ cm}} \to v = \frac{1800 \cdot c}{9,47} \tag{8}$$

Para encontrar o comprimento do nylon nos carretéis dianteiros dividimos o número de voltas (em função de c) em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k \cdot \frac{c}{n}$, para $k = 1, \ldots, n$, conterá $\frac{\frac{725 \cdot c}{4}}{n}$ voltas. Logo o comprimento do nylon será dado por:

$$\begin{aligned}
C_f &= \frac{\frac{725 \cdot c}{4}}{n} \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \pi \cdot R_k \\
C_f &= \frac{\frac{725 \cdot c}{4}}{n} \cdot 2 \cdot \pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{k \cdot c}{n}\right) \\
C_f &= \frac{\frac{725 \cdot c}{4}}{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(10 + \frac{c}{n} + 10 + c)}{2} \cdot n\right) \\
C_f &= \frac{725 \cdot \pi \cdot c}{4} \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right)
\end{aligned}$$

Para ter uma aproximação mais precisa, tomamos $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
C_f &= \lim_{n \to +\infty} \frac{725 \cdot c}{4} \cdot \pi \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right) \\
C_f &= \frac{725 \cdot \pi \cdot c}{4} \cdot (20 + c)
\end{aligned} \tag{9}$$

Para encontrar o comprimento do nylon nos carretéis traseiros dividimos o núemro de voltas (em função de c) em n partes iguais, e cada parte de raio $R_k = 10 + k \cdot \frac{c}{n}$, para $k = 1, \ldots, n$, conterá $\frac{\frac{1800 \cdot c}{9,47}}{n}$ voltas. Logo o comprimento do nylon será dado por:

$$
\begin{aligned}
C_t &= \frac{\frac{1800 \cdot c}{9{,}47}}{n} \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \pi \cdot R_k \\
C_t &= \frac{\frac{1800 \cdot c}{9{,}47}}{n} \cdot 2 \cdot \pi \sum_{k=1}^{n} \left(10 + \frac{kc}{n}\right) \\
C_t &= \frac{\frac{21800 \cdot c}{9{,}46}}{n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{(10 + \frac{c}{n} + 10 + c)}{2} \cdot n\right) \\
C_t &= \frac{1800 \cdot \pi \cdot c}{9,47} \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \to \infty$, para uma aproximação mais precisa, obtemos

$$
\begin{aligned}
C_t &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1800 \cdot c}{9,47} \cdot \pi \cdot \left(20 + c + \frac{c}{n}\right) \\
C_t &= \frac{1800 \cdot \pi \cdot c}{9,47} \cdot (20 + c) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Passo 3

Agora queremos escrever o comprimento do nylon colocado no carretel em função do número de voltas de fio colocadas. Para isto vamos utilizar o número de voltas a partir das relações (7) e (8), isto é:

$$
c = \frac{4 \cdot v}{725} \qquad \text{e} \qquad c = \frac{9,47 \cdot v}{1800}
$$

Substituindo nas equações dos comprimentos (9) e (10) obtemos o seguinte:

Para os carretéis dianteiros

$$
\begin{aligned}
C_f(v) &= \frac{725 \cdot \pi \cdot c}{4} \cdot (20 + c) \\
C_f(v) &= \frac{725 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{4 \cdot v}{725} \left(20 + \frac{4 \cdot v}{2725}\right) \\
C_f(v) &= \pi \cdot v \cdot \left(20 + \frac{4 \cdot v}{725}\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Para os carretéis traseiros

$$
\begin{aligned}
C_t(v) &= \frac{1800 \cdot \pi \cdot c}{9,47} \cdot (20 + c) \\
C_t(v) &= \frac{1800 \cdot \pi}{9,47} \cdot \frac{9,47 \cdot v}{1800} \left(20 + \frac{9,47 \cdot v}{1800}\right) \\
C_t(v) &= \pi \cdot v \cdot \left(20 + \frac{9,47 \cdot v}{1800}\right) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Passo 4

Para concluir a solução do problema, só precisamos encontrar a função inversa das funções $C_f(v)$ e $C_t(v)$. Observe que estas funções são bijetoras, e suas inversas estão bem definidas, uma vez que o número de voltas é sempre $v \geq 0$.

Para os carretéis da frente, a função é dada por

$$C_f(v) = 20 \cdot \pi \cdot v + \frac{4 \cdot \pi \cdot v^2}{725}$$

Multiplicando a equação por $\frac{725}{4 \cdot \pi}$, temos

$$\frac{725}{4 \cdot \pi} \cdot C_f = 3625 \cdot v + v^2$$

Completando quadrado,

$$\frac{725}{4 \cdot \pi} \cdot C_f = \left(v + \frac{3625}{2}\right)^2 - \left(\frac{3625}{2}\right)^2$$

E portanto a função inversa de C_f é

$$v_f(C) = \sqrt{\frac{725 \cdot C}{4 \cdot \pi} + \left(\frac{3625}{2}\right)^2} - \frac{3625}{2}$$
$$v_f(C) = \sqrt{\frac{725 \cdot C}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \tag{13}$$

Para os carretéis traseiros temos que

$$C_t(v) = 20 \cdot \pi \cdot v + \frac{9,47 \cdot \pi \cdot v^2}{1800}$$

Logo, multiplicando a igualdade por $\frac{1800}{9,47 \cdot \pi}$,

$$\frac{1800}{9,47 \cdot \pi} \cdot C_t = \frac{36000}{9,47} \cdot v + v^2$$

Completando quadrado, obtemos

$$\frac{1800}{9,47 \cdot \pi} \cdot C_t = \left(v + \frac{18000}{9,47}\right)^2 - \left(\frac{18000}{9,47}\right)^2$$

E neste caso, a função inversa de C_t é

$$v_t(C) = \sqrt{\frac{1800 \cdot C}{9,47 \cdot \pi} + \left(\frac{18000}{9,47}\right)^2} - \frac{18000}{9,47}$$
$$v_t(C) = \sqrt{\frac{1800 \cdot C}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \tag{14}$$

As fórmulas (13) e (14) são suficientes para solucionar nosso problema. Porém, para aplicá-las precisamos sempre encontrar o quanto de fio será necessário para tecer a quantidade de redes desejada. Se conseguíssemos escrever estas equações em termo da quantidade de redes que será produzida, elas ficariam muito mais simples de serem utilizadas. Mas isto não é difícil de fazer, basta utilizar a seguinte relação entre o número de redes produzidas P e o comprimento de fio colocados nos carretéis:

$$P = \frac{2 \cdot C_f}{1266,34} \qquad \text{e} \qquad P = \frac{2 \cdot C_t}{737,38} \tag{15}$$

Lembre-se que a máquina produz dois panos por vez, por isso multiplicamos o comprimento por dois na equação (15). Assim, obtemos as relações

$$C_f = \frac{1266,34 \cdot P}{2} = 633,17 \cdot P \qquad \text{e} \qquad C_t = \frac{737,38 \cdot P}{2} = 368,69 \cdot P$$

e substituindo estas igualdades nas equações (13) e (14), obtemos

$$\begin{aligned} v_f(P) &= \sqrt{\frac{725 \cdot 633,17 \cdot P}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\ v_f(P) &= \sqrt{\frac{459048,25 \cdot P}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v_t(P) &= \sqrt{\frac{1800 \cdot 368,69 \cdot P}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ v_f(P) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot P}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \end{aligned} \tag{17}$$

Solução do problema da máquina de tear duplo observada

Agora que sabemos calcular a quantidade necessária de voltas para que seja tecido uma certa quantidade de panos desejada, vamos calcular $v_T(778)$ para assim encerrar a produção de panos mesclados.

O que devemos fazer é substituir $P = 778$ na equação (17)

$$\begin{aligned} v_t(778) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 778}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\ v_t(778) &\approx 2678,28 \end{aligned}$$

Assim, será preciso 2679 voltas nos carretéis traseiros para reiniciar a produção.

Agora sem produzir panos mesclados, vamos calcular a quantidade de voltas de fio de nylon necessárias nos carretéis traseiros para tecer 518 panos, que é o máximo de panos produzidos com 2900 voltas nos carretéis dianteiros. Então, basta substituir $P = 518$ na equação (16)

$$
\begin{aligned}
v_t(518) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 518}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\
v_t(518) &\approx 1993,83
\end{aligned}
$$

Logo, para serem produzidos 518 panos, é necessário que sejam colocadas 1994 voltas nos carretéis traseiros.

Com isso, sempre que se quiser usufruir da produção máxima da máquina sem que haja a produção de tecidos mesclados, é preciso colocar 2900 voltas nos carretéis da frente e 1994 voltas nos carretéis de trás, produzindo assim 518 redes.

4 Aplicações

Na seção anterior, utilizamos as fórmulas encontradas para solucionar o problema específico da máquina observada. Nesta seção irei exibir mais alguns exemplos de como aplicar as fórmulas.

Aplicação 1. Suponha que uma certa fábrica recebeu uma encomenda de 400 redes da mesma cor. Qual a melhor forma de produção de modo que haja a menor quantidade de trocas de carretéis e nenhuma produção extra?

Neste caso, como a quantidade de redes desejada é menor que a quantidade máxima de redes que podem ser produzidas sem que haja troca de carretéis (518 redes), basta utilizar as equações (1) e (2) para encontrar o número de voltas necessárias em cada carretel:

$$
\begin{aligned}
v_f(400) &= \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 400}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5 \\
v_f(400) &\approx 2417,99
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_t(400) &= \sqrt{\frac{663642 \cdot 400}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73 \\
v_t(400) &\approx 1639,81
\end{aligned}
$$

Assim, vemos que é possível produzir 400 redes colocando-se 2418 voltas nos carretéis dianteiros e 1640 voltas nos carretéis traseiros, sem haver produção extra.

Aplicação 2. Suponha que um certa fábrica recebeu uma encomenda de 900 redes da mesma cor. Qual a melhor forma de produção de modo que haja a menor quantidade de trocas de carretéis?

Observe que neste caso não será possível produzir todas as redes sem que haja troca de carretéis, uma vez que a quantidade máxima produzida sem troca é 518.

Comecemos por encontrar o número de voltas necessárias para os carretéis traseiros. Utilizando a equação (17), obtemos

$$v_t(900) = \sqrt{\frac{663642 \cdot 900}{9,47 \cdot \pi} + 3612774,53} - 1900,73$$
$$v_t(900) \approx 2966,37$$

E portanto seriam necessárias 2967 voltas nos carretéis de trás. Como observado no início da **Seção** 3, os carretéis de trás suportam até 3040 voltas, e assim é possível tecer as 900 redes sem que haja troca dos carretéis de traseiros.

Para os carretéis dianteiros já sabemos que será preciso realizar ao menos uma troca. Neste caso, a solução é usar os carretéis da frente em capacidade máxima, ou seja com 2900 voltas (o que irá produzir 518 redes), e depois realizar a trocar dos carretéis de modo que os próximos contenham fio suficiente para produzir 382 redes. Deste modo,utilizamos a equação (16) para encontrar esse número de voltas.

$$v_f(382) = \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 382}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5$$
$$v_f(382) \approx 2339,55$$

Dessa maneira, para produzir 900 redes é necessário que sejam colocadas 2967 voltas de fio de nylon nos carretéis de trás, e nos carretéis da frente, será preciso fazer uma troca de modo que um grupo de carretéis vai conter 2900 voltas e o outro grupo de carretéis vai conter 2340 voltas.

Observação 4.1*.* Note que para resolver o problema anterior, não poderíamos simplesmente fazer $P = 900$ em (17) para encontrar o número de voltas necessárias para produzir 900 redes, e depois subtrair 2900 (que é a quantidade necessária para produzir 518 redes). Se fizéssemos isso o que encontraríamos era o seguinte

$$v_f(900) = \sqrt{\frac{459048,25 \cdot 900}{4 \cdot \pi} + 3.285.156,25} - 1812,5$$
$$v_f(900) \approx 4201,24$$

Ou seja, seriam necessárias 4202 voltas nos carretéis dianteiros para produzir 900 redes. Neste caso, como os primeiros carretéis possuiriam 2900 voltas, os próximos carretéis possuiriam apenas 1302 voltas. Agora, pela equação (11) temos que o comprimento total de nylon em cada carretel dianteiro, contendo 1302 voltas, é de

$$C_f(1302) = 20 \cdot \pi \cdot 1302 + \frac{4 \cdot \pi}{725} \cdot (1302)^2$$
$$C_f(1302) \approx 111190 \text{ cm}$$

Com essa quantidade de fio, utilizando a equação (15), vemos que a quantidade de redes que serão produzidas é

$$P = \frac{2 \cdot 111190}{1266,34} \approx 175,6$$

O que não é suficiente, pois era preciso produzir 382 panos.

Todo esse problema se dá pelo fato das voltas nos carretéis possuírem tamanhos diferentes. Quando fazemos a conta para $v_f(900)$ o que encontramos é número de voltas para se colocar em um mesmo carretel, e neste caso as 1302 voltas finais teriam tamanhos muito maiores.

Aplicação 3. Qual a maior quantidade de panos da mesma cor que podem ser produzidos com apenas uma troca de carretéis?

Pelo exemplo anterior, sabemos que esse número é no mínimo 900. Por outro lado, a maior quantidade de panos produzidos pelos carretéis dianteiros, com apenas uma troca, é 1036, e assim temos que esta quantidade é no máximo 1036. Para resolver este problema, precisamos então calcular a quantidade de redes produzidas pelos carretéis traseiros em capacidade máxima (3040 voltas). Se esse valor for menor que 1036, encontramos a resposta. Caso contrário, a resposta é 1036.

Para encontrar o número de redes produzidas com os carretéis traseiros preenchidos com 3040 voltas, primeiro vamos utilizar a equação (12) para encontrar a quantidade de fio de nylon nos carretéis

$$C_t(3040) = 20 \cdot \pi \cdot 3040 + \frac{9,47 \cdot \pi}{1800} \cdot (3040)^2$$
$$C_t(3040) \approx 343756,47 \text{ cm}$$

Agora basta aplicar esse valor na fórmula do número de panos produzidos (15)

$$P = \frac{2 \cdot 343756,47}{737,38} \approx 932,37.$$

Como a máquina, com os carretéis traseiros em sua capacidade máxima, fabrica 932 redes (que é menor que 1036), concluímos que a quantidade máxima de redes produzidas com apenas uma troca de carretéis é 932 redes.

Observação 4.2. Utilizando a última aplicação, podemos resolver qualquer problema do tipo: "Encontrar a melhor forma de produzir uma quantidade K de redes realizando a quantidade mínima de trocas de carretéis possível". Utilizando o algorítimo da divisão dos inteiros [9, Pág. 5] temos

$$K = q_f \cdot 518 + r_f, \text{ com } 0 \leq r_f < 518,$$

$$K = q_t \cdot 932 + r_t, \text{ com } 0 \leq r_t < 932,$$

para $q_f, q_t, r_f, r_t \in \mathbb{Z}^+$. Encontrando estes valores, temos a resposta. Pois essas equações dizem que para produzir K redes, é preciso utilizar a máquina q_f vezes em capacidade máxima dos carretéis dianteiros (2900 voltas) mais outra vez com os carretéis dianteiros preenchidos com fio suficiente para produzir r_f redes. Com relação aos carretéis de trás, a máquina precisa ser utilizada q_t vezes com os carretéis traseiros em capacidade máxima (3040 voltas) mais uma outra vez com os carretéis traseiros preenchidos com fio suficiente para produzir r_t redes. Neste caso, a quantidade mínima de trocas será $q_f + q_t$.

5 Conclusão

No início da **Seção** 3 ressaltei que todos os cálculos seriam feitos supondo que a máquina de urdidura estaria completamente regulada. Porém, além da máquina se desregular com o tempo, também há pequenas variações que alteram a produção. O nylon que é colocado nos carretéis através da máquina de urdidura as vezes fica um pouco mais apertado ou um pouco mais folgado alterando o número de voltas por centímetro, também dependendo da marca do nylon a espessura pode variar. Mesmo com essas variações, a quantidade de redes fabricadas é bem próxima da quantidade esperada e por diversas vezes o nylon dos carretéis traseiros e dianteiros acabaram por igual. A tabela 3 a seguir ilustra quatro momentos onde a quantidade de redes produzidas foi diferente da esperada.

Quantidade de voltas	**Quantidade desejada de panos tecidos**	**Quatindade real de panos tecidos**	**Diferença**
2112	560	558	-2
2084	550	552	+2
2039	534	528	-6
1941	500	502	+2

Tabela 3: Aplicação da fórmula na prática

Quando ocorrem essas variações, recomenda-se que na próxima troca dos carretéis traseiros sejam colocados um pouco mais/menos de fio de modo a compensar a quantidade de fio que sobrou/faltou nos carretéis dianteiros. Isso ajudará a não desperdiçar fio e produzir a menor quantidade possível de redes mescladas.

Referências

[1] BARBOSA, J. C. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para debate teórico/In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED*, Rio de Janeiro, 24, 2001. 6

[2] BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. da M. *Modelagem Matemática* .Uberlândia, MG : UFU, 2014,187 p. 6

[3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, Contexto*, São Paulo, 2002. 6

[4] BIEMBENGUT, M. S. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais*. **ALEXANDRIA-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009 6

[5] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*, São Paulo, Terceira Edicão, Editora Contexto, 2003. 6

[6] CAVALCANTI, R. N. *Extração de antocianinas de resíduo de jabuticaba (Myrciaria cauliflora) utilizando líquido pressurizado e fluido supercrítico: caracterização química, avaliação econômica e modelagem matemática*. 2013. 197 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia de Alimentos, Campinas, SP. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/254864. 6

[7] COSTA, H. R. DA. *A Modelagem Matemática Através de Conceitos Científicos*. **Ciências e Cognição**, v. 14, n. 3, p. 114-133, 29 set. 2009. 6

[8] DAROIT. L.; HAETINGER. C.; DULLIUS. M. M. *O ensino de fenômenos físicos através da modelagem matemática*. Disponível em: www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_35.pdf. 6

[9] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 19

[10] NOBRE, C. R. *Espaço, inovação e indústria têxtil de redes de dormir em São Bento-PB: do meio natural ao meio técnico-científico-informacional*. **GEOgraphia**, Vol. 16. 2014. 6