UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GLEYTON LIRA DE FREITAS

APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA EM AULAS EXPERIMENTAIS

CAMPINA GRANDE
2019

GLEYTON LIRA DE FREITAS

APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA EM AULAS EXPERIMENTAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE
2019

F866a Freitas, Gleyton Lira de.
Aplicação da trigonometria em aulas experimentais [manuscrito] / Gleyton Lira de Freitas. - 2019.
41 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino de Matemática. 2. Trigonometria. 3. Aula experimental. 4. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 516.24

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

GLEYTON LIRA DE FREITAS

APLICAÇÃO DA TRIGONOMETRIA EM AULAS EXPERIMENTAIS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 22/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano
Prof. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho
Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Freitas
Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais, por todo o esforço, apoio e incentivo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelas oportunidades que a mim foram dadas, para que pudesse alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, Maria das Graças Lira e Hélio Ursulino que, apesar de todas as dificuldades, sempre estiveram presentes me auxiliando e apoiando em busca de meus sonhos.

À minha noiva, Corrinha Silva, que me apoiou inúmeras vezes e que, quando pensei em desistir, esteve sempre ao meu lado me dando forças e ajudando a superar todas as dificuldades.

À minha orientadora, Professora Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, por todo o empenho e ajuda a mim oferecidos durante o curso e, principalmente durante o período de orientação, para que pudesse chegar até aqui.

Aos professores que tive durante toda a vida. Em especial aos professores Marivaldo Coelho, Aldenoura Messias, Ana Cristina Galdino e Gildazio Carneiro Leal, mestres que me inspiraram a seguir carreira neste brilhante ofício; e também a todos os meus professores durante o curso de graduação, por todo conhecimento compartilhado.

À toda Coordenação e Departamento do curso de Licenciatura em Matemática, por todo atendimento, apoio e ajuda quando foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade, e aos meus amigos que estiveram apoiando-me durante esta caminhada.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma, para que eu chegasse até aqui.

RESUMO

Neste trabalho, abordaremos como objeto de estudo a trigonometria, seus conceitos básicos (como seno, cosseno e tangente) e sua aplicabilidade para a resolução de problemas. Para isto, iniciaremos o trabalho com uma breve retomada histórica a respeito dos conceitos de trigonometria, seguida de uma revisão sobre os conceitos básicos da mesma. Após isto, mostraremos exemplos de sua aplicabilidade no cotidiano e como estes conceitos podem ser explorados em sala de aula, de forma experimental, no ensino de matemática, através de medições de objetos de grande altura. Assim, finalizaremos o trabalho mostrando os benefícios alcançados pelos alunos de uma escola de ensino público após terem entendido o motivo de estudar trigonometria e como as aulas experimentais tornam-se um importante instrumento de auxílio para entender a matemática e o mundo.

Palavras-Chave: Trigonometria. Aplicações. Experimentos. Sala de Aula.

ABSTRACT

In this paper, we will approach as object of study the trigonometry, its basic concepts (as sine, cosine and tangent) and its applicability to the problem solving. To this end, we will begin the work with a brief historical review of the concepts of trigonometry, followed by a review of its basic concepts. After this, we will show examples of their applicability in everyday life and how these concepts can be explored in the classroom, experimentally, in mathematics teaching, through measurements of objects of great height. Thus, we will conclude the work by showing the benefits achieved by the students of a public school after understanding the reason for studying trigonometry and how the experimental classes become an important aid to understand mathematics and the world.

Keywords: Trigonometry. Applications. Experiments. Classroom.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática como um todo é frequentemente mistificada por parte dos alunos, que a partir de um certo ponto, quando se aumenta o nível de abstração no conteúdo programático da disciplina, começam a perder o interesse pela mesma, já que naquele dado momento não possuem ferramentas necessárias para a compreensão imediata. O uso de novas linguagens em sala de aula se faz necessário para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem no âmbito escolar, de modo a auxiliar o entendimento e assim facilitar a compreensão da aplicabilidade e importância do conteúdo matemático no cotidiano e na resolução de problemas.

Nesse contexto, nosso trabalho virá a mostrar como os conceitos básicos de trigonometria podem ser vistos de forma experimental em sala de aula, trazendo as razões trigonométricas e sua aplicabilidade. Iremos utilizar em específico a definição da tangente de um ângulo para calcular alturas inacessíveis.

Para tal, nossa pesquisa bibliográfica tem como motivação mostrar que a matemática pode ser vista de forma diferente por nossos alunos. A teoria aliada à prática torna mais atrativa a ideia de aprender matemática e entender em que podemos utilizá-la. O objetivo deste trabalho é estimular que o aluno entenda o porquê e para que se estuda matemática, mostrando que a prática experimental na disciplina é um fator auxiliar no processo de ensino e aprendizagem e a torna mais divertida e de melhor compreensão.

Inicialmente, traremos um breve apanhado histórico da trigonometria, passeando pela trajetória de seus principais colaboradores e trazendo à tona suas principais contribuições. Mostraremos como os avanços deste ramo da matemática influenciaram as civilizações ao longo dos anos e com isso criaram ferramentas que norteiam nossos estudos em trigonometria nos dias atuais.

Em seguida, no capítulo dois, faremos uma abordagem de conceitos básicos, trazendo definições e propriedades importantes para a construção dos conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

No capítulo três, mostraremos a aplicabilidade da razão trigonométrica tangente no cálculo de distâncias e alturas. Iniciamos as aplicações com a resolução de situações-problema que podem ser discutidos em sala de aula e em seguida, mostramos como aplicar este conceito através de uma aula experimental de matemática, realizando um experimento cujo objetivo é medir alturas inacessíveis de diversos objetos (árvores, prédios, paredes, casas, etc).

Por fim, trazemos os resultados obtidos e como esta nova linguagem que alia a teoria à prática pode ser uma ferramenta brilhante no processo de ensino e aprendizagem da matemática nos dias atuais, assim, desmistificando a matemática e tornando-a mais prazerosa de ser estudada.

Capítulo 1
HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

A trigonometria não pode ser vista como obra de uma só pessoa ou de um só povo. Na antiguidade, já existiam registros de Teoremas que envolviam razões em triângulos, utilizados pelos egípcios e babilônios por exemplo. Com o intuito de encontrar soluções e desvendar mistérios, outros povos como chineses, gregos, árabes e hindus, também tiveram contribuições importantes nessa área de estudo da Matemática.

Os egípcios, aplicavam os conceitos de razões entre triângulos semelhantes na construção das históricas pirâmides, como citado por Boyer no trecho de seu livro: “Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo” (1993, p. 13-14). Isto pode ser observado no Papiro Ahmes.

O Papiro Ahmes é uma cópia de um antigo papiro do século XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso, é conhecido como Papiro Rhind. Este Papiro data de aproximadamente 1650 a.C. e faz menção ao **seqt** de um ângulo, que representava a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical.

No Egito também, surgiu a ideia de associar a sombra projetada por uma vara vertical a números em sequência, relacionando o comprimento das sombras com as horas do dia: os famosos relógios de sol. Já os babilônios, destacavam-se por suas brilhantes contribuições no ramo da Astronomia, como com a criação de um calendário astrológico e uma tábua de eclipses lunares.

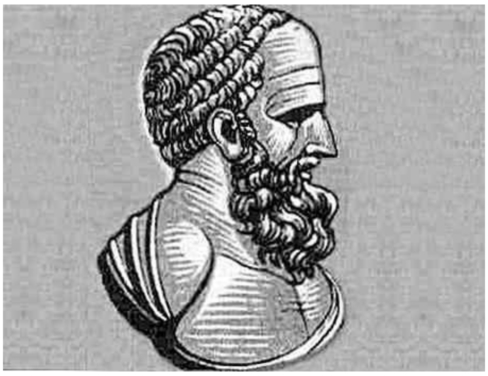
Na Grécia, os principais estudos de trigonometria são atribuídos a grandes estudiosos como Hiparco de Nicéia (180-125 a.C), Thales de Mileto[1] (625-526 a.C) e Pitágoras (570-495 a.C), grande filósofo e matemático grego.

Hiparco nasceu em Nicéia e é provável que tenha falecido na ilha de Rodes. É conhecido por ter sido um brilhante astrônomo na antiguidade. Pouco se sabe sobre a vida de Hiparco e apesar de várias obras e estudos terem sido desenvolvidos por ele, quase todo o conhecimento dos trabalhos de Hiparco é baseado em relatos de terceiros.

---

[1] Thales de Mileto (625-526 a.C), Matemático, filósofo, engenheiro e astrônomo grego; incluído entre os sete sábios da humanidade.

Figura 1: Hiparco de Nicéia



Fonte: https://thpanorama.com/img/images/hiparco-de-nicea-biografa-y-aportaciones.jpg

Suas contribuições foram fundamentais para os avanços da astronomia como Ciência Matemática e para os fundamentos da Trigonometria. Hiparco é conhecido como “pai” da trigonometria, porém, é mais famoso devido às suas contribuições à astronomia.

Ainda Jovem, Hiparco compilou registros sobre os padrões climáticos na sua região ao longo do ano. Tais estudos, aliados com o início dos ventos, serviram como base para criação de calendários meteorológicos, por diversos astrônomos gregos.

A maior parte da vida de Hiparco foi dedicada à pesquisa observacional e astronômica na ilha de Rhodes. Seu trabalho astronômico mais importante se referia às órbitas do Sol e da Lua com determinações de seus tamanhos e as distâncias deles até a Terra, além de estudos sobre eclipses.

Hiparco, assim como outros de sua época, assumiu a Terra estacionária e no centro do universo. Nessa perspectiva, o sol, a lua e os demais planetas giravam como estrelas em torno da terra, todos os dias. Em seus escritos, Hiparco tentou explicar como o sol viajaria com velocidade uniforme ao longo de um caminho circular regular mas, mesmo assim produzia estações de diferentes durações.

Outras contribuições importantes também são de Hiparco, a exemplo do catálogo de estrelas, que foi posteriormente aperfeiçoado por Ptolomeu, grande astrônomo e matemático de Alexandria, em sua obra Almagesto; a classificação das estrelas de acordo com seu brilho, que ficou conhecida como magnitude estelar; e a precessão dos equinócios.

O ato de dividir uma circunferência em 360 partes e denominar cada parte como um arco de um grau, também atribui-se a Hiparco. E não só isso: com influências de estudos de outras civilizações, ainda expôs uma unidade menor e que em teoria seria mais fácil de trabalhar na resolução de problemas, o minuto (que corresponde à divisão de um grau em 60 partes iguais).

Ainda na Grécia, Thales e Pitágoras também contribuíram de forma significativa para os avanços dos estudos em trigonometria, desenvolvendo seus estudos em Geometria, para que pudessem ser atrelados ao desenvolvimento dos conceitos trigonométricos.

No oriente, também foram encontrados indícios da Trigonometria. Na China, para realizar cálculos de distâncias, comprimentos e profundidades, utilizavam-se os triângulos retângulos. Porém, apesar de indícios evidenciados pela literatura chinesa de que havia trigonometria primitiva na China, nada se têm de como eram feitas as medições e quais as unidades de medição utilizadas.

Os povos hindus, trouxeram à tona importantes conceitos para o estudo da trigonometria: introduziram as principais "funções" trigonométricas e, além disso, introduziram o conceito de semi-corda e demonstraram algumas identidades, dentre elas uma que equivale ao que conhecemos hoje como a Relação Fundamental da Trigonometria: $sen^2x + cos^2x = 1$.

Árabes e Persas também tiveram suas contribuições. Os Árabes, através de seus brilhantes estudos, introduziram a ideia de círculo de raio unitário. Já os Persas, contribuíram diretamente para a desvinculação da Trigonometria que, antes atrelada à Astronomia, agora passaria a se figurar como uma ciência independente.

Desde o século XI, na Europa, os conceitos da trigonometria passaram a ser desenvolvidos com o olhar especial para as ditas funções trigonométricas, que foram realmente definidas e passaram a ser utilizadas como função de um ângulo. Formalmente, o termo Trigonometria surge pela primeira vez, no título de um livro publicado em meados do século XVI, por Bartholomäus Pitiscus[1] (1561-1613).

Com todos os avanços dos estudos em trigonometria, esta toma sua forma atual graças aos brilhantes estudos de Leonhard Euler (1707-1783): este adotou a medida do raio de um círculo igual a 1 unidade, formalizou a transição das razões trigonométricas para as funções periódicas e utilizou pela primeira vez as abreviações que usamos hoje (sen, cos, tg, cotg, cossec e sec).

No início, a trigonometria aparecia como coadjuvante da astronomia e, ao decorrer do tempo foi ganhando forma até tornar-se independente, autônoma. Com contribuições de vários povos, tornou-se um dos mais importantes ramos da Matemática e estudada minunciosamente, é um instrumento brilhante para a resolução de problemas no cotidiano da humanidade.

---

[1] Bartholomäus Pitiscus (1561-1613) foi um astrônomo, matemático e teólogo alemão do século XVI. Criou o termo trigonometria.

Capítulo 2
NOÇÕES DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

Neste capítulo mostramos os conceitos básicos de geometria. Realizando uma construção sequenciada desde a ideia de ponto e reta até adentrarmos em triângulos, chegamos à trigonometria e às razões trigonométricas, finalizando-o com as definições de seno, cosseno e tangente. Como base para nossas definições foram tomadas as obras de João Lucas Marques Barbosa e Gelson Iezzi.

2.1 Retas e Semirretas

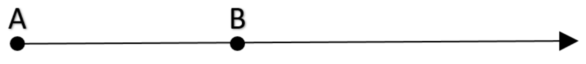
Em Geometria, ponto e reta são conceitos primitivos, portanto, não possuem definição formal. No entanto, a partir da noção de ponto e reta, podemos definir semirretas. Dada uma reta r, consideremos as seguintes definições:

i) O conjunto constituído por dois pontos distintos A e B da reta r e por todos os pontos de r que se encontram entre A e B é chamado de **segmento de reta AB** (e representamos por $\overline{AB}$), ou simplesmente **segmento AB**. Os pontos A e B são chamados de **extremidades** do segmento.

Observação: se dois segmentos de reta $\overline{AB}\ e\ \overline{BC}$ possuem a mesma medida, utilizando uma mesma unidade, dizemos então que os segmentos são **congruentes**, e representamos por $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

ii) Sendo A e B pontos distintos de r, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de **semirreta de origem A contendo o ponto B**, que representamos por $\mathbf{S_{AB}}$. O ponto A é denominado **origem** da semirreta S_{AB}.

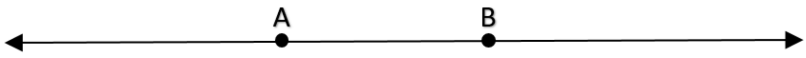
Figura 2: Semirreta S_{AB}.



Fonte: Próprio autor.

Note que dois pontos A e B determinam duas semirretas S_{AB} e S_{BA}, as quais contêm o segmento AB.

Figura 3: Semirretas S_{AB} e S_{BA} na mesma reta.



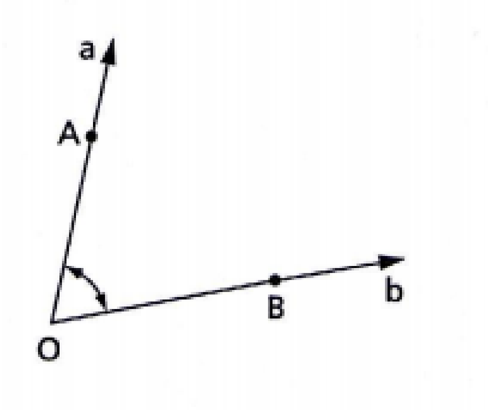
Fonte: Próprio Autor.

2.2 Ângulo

Definição 1: Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem, mas não contidas na mesma reta.

O ângulo abaixo é formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}\ e\ \overrightarrow{OB}$, ambas com origem no ponto O.

Figura 4: Ângulo.



Fonte: IEZZI, 2013.

As partes do Ângulo da figura são:

Lados do ângulo: $\overrightarrow{OA}\ e\ \overrightarrow{OB}$;

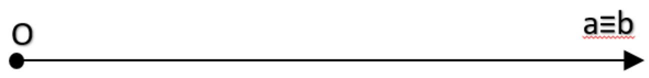
Vértice do ângulo: O

Ângulo: $a\hat{O}b\ ou\ A\hat{O}B$; $b\hat{O}a\ ou\ B\hat{O}A$; $\hat{O}$.

2.2.1 Ângulo Nulo e Ângulo Raso

Particularmente, se as semirretas coincidem, dizemos que elas determinam um **ângulo nulo**.

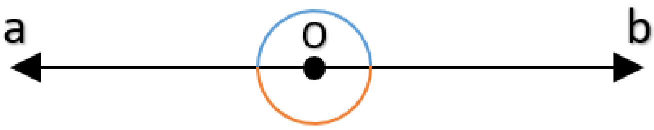
Figura 5: Ângulo nulo



Fonte: Próprio Autor.

Se as semirretas são opostas, dizemos que formam dois **ângulos rasos**.

Figura 6: Ângulo Raso.

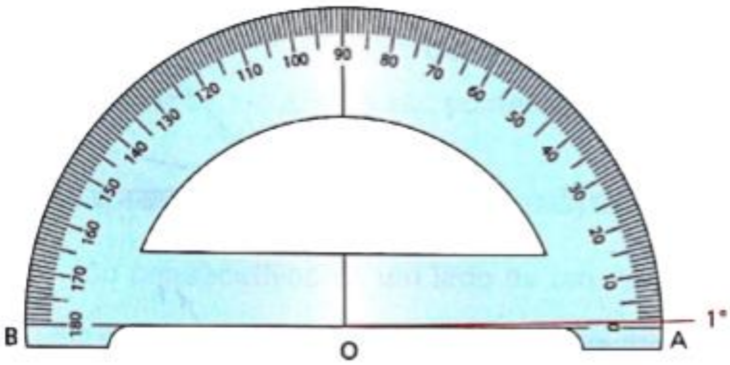


Fonte: Próprio Autor.

2.2.2 Unidade de Medida de ângulos

Vamos considerar um ângulo raso AÔB. Dividamos o ângulo em 180 partes iguais, como mostra a figura:

Figura 7: Divisão do ângulo raso



Fonte: IEZZI, 2013.

i) Chamaremos de **1 grau** (1°) a medida do ângulo que corresponde a $\frac{1}{180}$ do ângulo raso;

ii) O grau possui **submúltiplos**, de modo que 1 minuto (1') corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau e **1 segundo** (1") corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto;

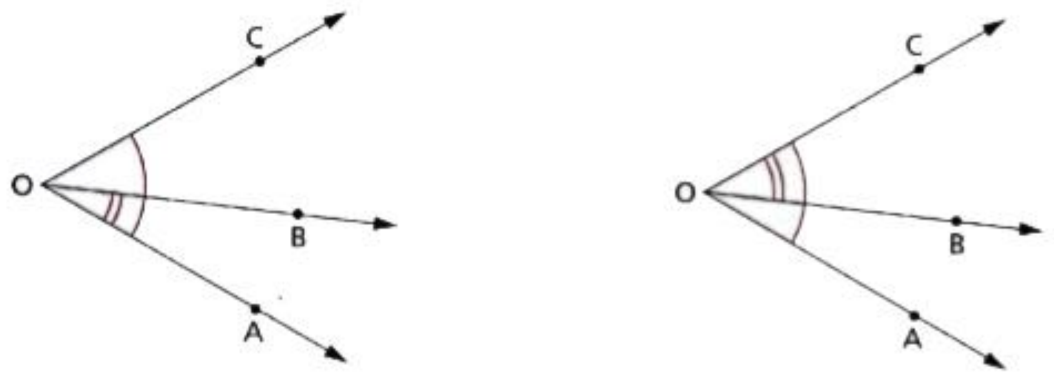
iii) Medir um ângulo, significa verificar quantas unidades de medida (1°) cabem no ângulo dado.

iv) Dois ângulos são ditos **congruentes** quando possuem a mesma medida.

2.2.3 Ângulos consecutivos e Ângulos adjacentes

Definição 2: Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles também é lado do outro.

Figura 8: Ângulos consecutivos.



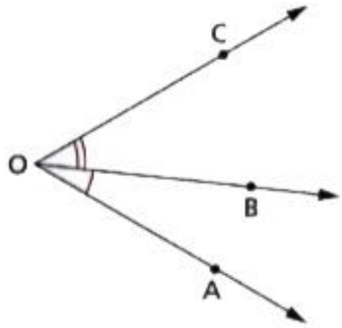
Fonte: IEZZI,2013.

Na figura 8, AÔB e AÔC são consecutivos, possuem $\overrightarrow{OA}$ em comum. Da mesma forma, AÔC e BÔC são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OC}$ em comum.

Definição 3: Sejam dois ângulos consecutivos e sem pontos internos (que pertencem a sua região interna) em comum então dizemos que os ângulos são **adjacentes**.

AÔB e BÔC são adjacentes pois, são consecutivos e não possuem pontos internos em comum, como mostra a figura:

Figura 9: Ângulos adjacentes



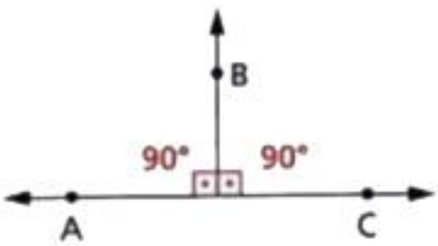
Fonte: IEZZI,2013.

2.2.4 Ângulo Reto

Definição 4: Dois ângulos são ditos suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°.

Definição 5: Se dois ângulos são adjacentes, suplementares e tem medidas iguais, então cada um deles é chamado de **ângulo reto**.

Figura 10: Ângulo reto.



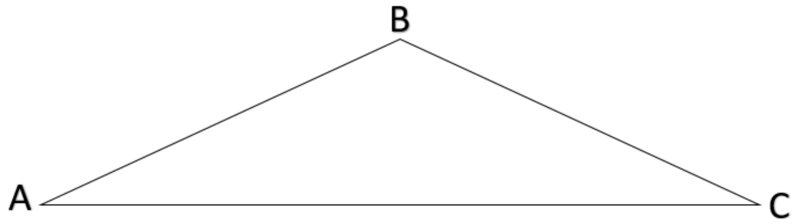
Fonte: IEZZI,2013.

Observação: A medida de um ângulo reto é igual a 90°.

2.3 Triângulos

Definição 6: Consideremos três pontos não colineares, quais sejam A, B e C. Chamamos de triângulo a figura formada pelos pontos A, B e C e pelos três segmentos determinados por estes pontos ($\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$). Aos pontos, daremos o nome de *vértices*, e os segmentos, chamaremos de *lados* do triângulo. Os ângulos $A\hat{B}C$,$B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, são chamados de **ângulos internos** do triângulo.

Figura 11: Triângulo.

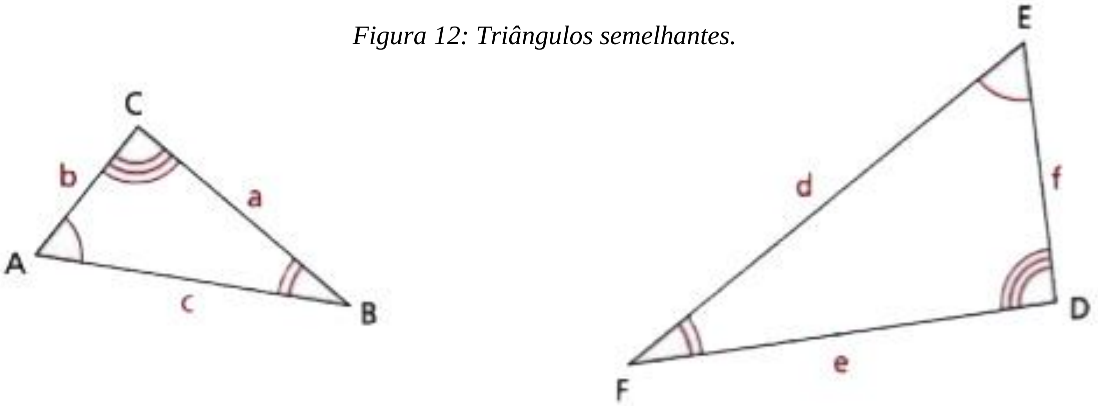


Fonte: Próprio Autor.

2.3.1 Semelhança de triângulos

Definição 7: Dois triângulos são ditos **semelhantes** (e indicamos por ~) se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os *lados homólogos*[1] proporcionais.

Figura 12: Triângulos semelhantes.



Fonte: IEZZI,2013.

Para os triângulos destacados na figura 12, verificamos que os lados homólogos são: **a** e **e**; **b** e **f**; **c** e **d**. Assim:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{E}\ ;\ \hat{B} \equiv \hat{F}\ ;\ \hat{C} \equiv \hat{D} \\ \dfrac{a}{e} = \dfrac{b}{f} = \dfrac{c}{d} \end{cases}$$

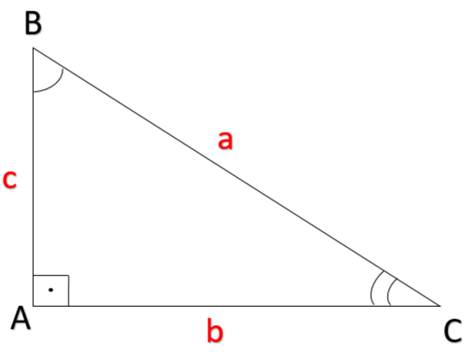
---

[1] Lados homólogos são tais que cada um está em um dos triângulos da semelhança e ambos são opostos a ângulos congruentes.

2.3.2 Triângulo Retângulo

Definição 8: Um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, ou seja, possui medida 90°.

Figura 13: Triângulo Retângulo.



Fonte: Próprio Autor.

Para o triângulo da figura 13, utilizamos as seguintes notações:

i) O lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto e que cuja medida é **a**, chamamos de **hipotenusa** do triângulo;

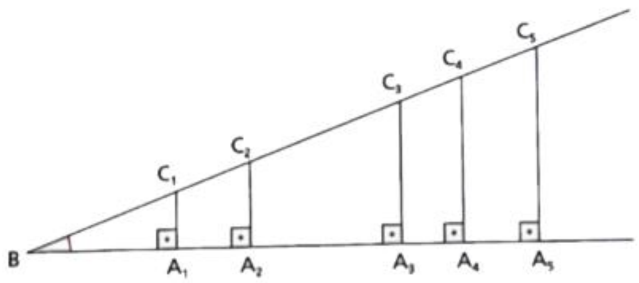
ii) Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ adjacentes ao ângulo reto, cujas medidas são, respectivamente, **c** e **b**, chamamos de **catetos**;

iii) Chamamos os ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ de **ângulos internos** do triângulo.

2.4 Razões Trigonométricas

Consideremos um ângulo $\hat{B}$ e, marquemos sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, A_4... A_n , e tracemos por eles as perpendiculares a este lado $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}$ ... $\overline{A_nC_n}$, como mostrado na figura a seguir:

Figura 14: Triângulos retângulos semelhantes.



Fonte: IEZZI,2013.

Note que os triângulos retângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3... BA_nC_n são todos semelhantes entre si. Desta semelhança, fixando o ângulo $\hat{B}$ do triângulo da figura 14 e, sendo A_nC_n, B_nC_n e B_nA_n as medidas, respectivamente, dos segmentos $\overline{A_nC_n}$, $\overline{B_nC_n}$ e $\overline{B_nA_n}$; decorrem as seguintes relações:

I) $$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \cdots = \frac{A_nC_n}{BC_n}$$

Observe que o **cateto oposto** a $\hat{B}$ e a **hipotenusa** são **diretamente proporcionais**, ou seja, a razão (divisão) entre estes é constante.

II) $$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \cdots = \frac{BA_n}{BC_n}$$

Verificamos que o **cateto adjacente** a $\hat{B}$ e a **hipotenusa** são **diretamente proporcionais**.

III) $$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \cdots = \frac{A_nC_n}{BA_n}$$

E ainda que os **catetos oposto e adjacente** a $\hat{B}$ são **diretamente proporcionais.**

Analisando as relações I, II e III, nota-se que as relações independem do tamanho dos triângulos, dependem apenas do valor do ângulo $\hat{B}$.

Definição 9:

i) O **seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa;

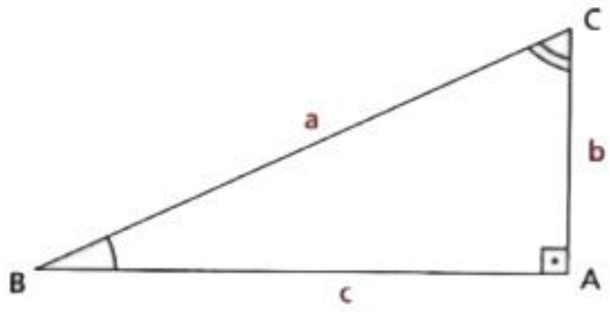
ii) O **cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa;

iii) A **tangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

.

Consideremos agora, o triângulo retângulo da figura a seguir:

Figura 15: Triângulo retângulo ABC.



Fonte: IEZZI,2013.

Em relação ao ângulo agudo $\hat{B}$ do triângulo da figura 15, segue que:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

Os conceitos de seno, cosseno e tangente, embora pareçam abstratos de início para quem os vê em primeiro contato, quando utilizados na resolução de problemas cotidianos podem ser de grande ajuda. No capítulo a seguir, mostraremos aplicações de como o conceito de tangente de um ângulo pode ser utilizado na resolução de problemas, além de exemplificar como isto pode ser abordado na sala de aula, de modo a auxiliar como um recurso benéfico no processo de ensino e aprendizagem nas aulas experimentais de Matemática.

Capítulo 3
APLICAÇÕES DA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA TANGENTE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

No ensino de Matemática, são diversas as formas de mostrar as aplicações de um determinado conteúdo para os alunos. Quando se trata de trigonometria, isto não se torna diferente: existem várias formas de demonstrar aplicações e causar fascínio pelo conteúdo por parte de quem está aprendendo os seus conceitos. Desta forma, as aplicações tornam-se uma via de rápido acesso à desmistificação dos conceitos matemáticos, sanando uma dúvida que assola as mentes de quem tenta aprender matemática: “Professor, aonde vou usar isso? ”.

Esta pergunta, comum no processo de ensino e aprendizagem, traz à tona um importante papel do professor: ser o mediador do conhecimento. Através disto, pode-se abrir uma discussão e em decorrência dela, fazer com que surjam naturalmente situações em que possamos utilizar os conceitos aprendidos em sala como facilitador para obtenção de resultados.

Neste capítulo, iremos mostrar algumas aplicações das razões trigonométricas na resolução de situações-problema, finalizando com uma aplicação da razão trigonométrica tangente de um ângulo agudo como instrumento matemático para medir alturas inacessíveis, através das aulas de Práticas Experimentais em Matemática.

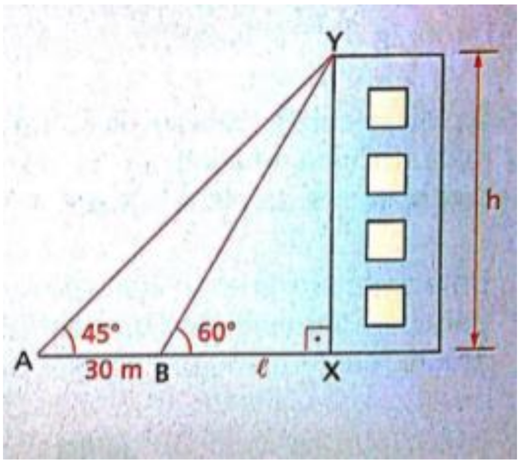
Os valores das tangentes utilizados nos cálculos dos exemplos, foram retirados das tabelas de razões trigonométricas em anexo.

3.1 Problemas

PROBLEMA 1 – (IEZZI,2013.) Um observador vê um prédio, construído em um terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passas a vê-lo sob um ângulo de 45°. Nessas condições, determine a altura do edifício.

Solução: Inicialmente, para facilitar a compreensão do problema, organizamos os dados através de um desenho. Os recursos visuais são de extrema importância nos problemas que envolvem a geometria e as razões trigonométricas. Observe a figura abaixo esquematizando o problema proposto. Note que atribuímos valores literais para as medidas que queremos determinar nos triângulos.

Figura 16: Ilustração do problema 1.



Fonte: IEZZI,2013.

No triângulo BXY, retângulo em X, podemos extrair a seguinte razão:

$$tg60° = \frac{h}{l} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

Do triângulo AXY, retângulo em X, segue:

$$tg45° = \frac{h}{30 + l} \Rightarrow 1 = \frac{h}{30 + l} \Rightarrow h = 30\ + l \quad (2)$$

Das relações (1) e (2) têm-se,

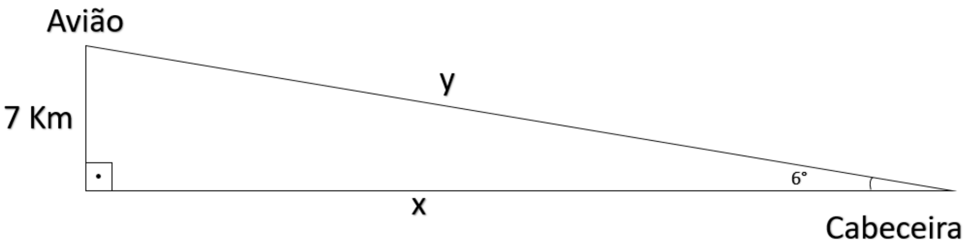
$$h = 30\ + l\ \ \Rightarrow h = 30 + \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,.h = 30\sqrt{3} + h \Rightarrow \sqrt{3}\,.h - \ h = 30\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3} - 1\right)h = 30\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3} - 1\right)}\ m.$$

PROBLEMA 2 – (IEZZI,2013.) Um avião está a 7000 m de altura e inicia a aterrissagem (aeroporto ao nível do mar) em linha reta sob um ângulo de 6° com o solo. A que distância o avião está da cabeceira da pista? Que distância o avião irá percorrer?

Solução: Fazendo a ilustração do problema, temos,

Figura 17: Ilustração do problema 2.



Fonte: Próprio Autor.

Onde x é a distância que o avião está da cabeceira da pista e y é a distância que irá percorrer durante a aterrissagem. Sendo a altura em que se encontra o avião 7000 m = 7 km, da figura, temos,

$$tg6° = \frac{7}{x} \Rightarrow 0{,}10510 = \frac{7}{x} \Rightarrow 0{,}10510x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{0{,}10510} \therefore x = 66{,}6\ km$$

Logo, a distância que o avião está da cabeceira da pista é 66,6 km.

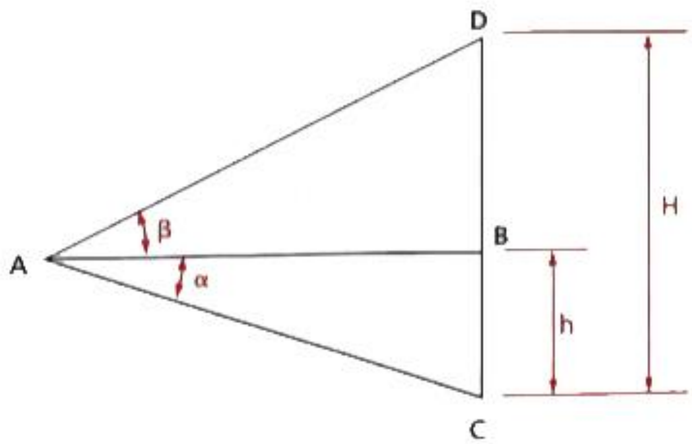
Por outro lado, note que,

$$sen6° = \frac{7}{y} \Rightarrow 0{,}10453 = \frac{7}{y} \Rightarrow 0{,}10453y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{0{,}10453} \therefore y = 66{,}97\ km.$$

Assim, a distância percorrida pelo avião durante a aterrissagem é de 66,97 km.

PROBLEMA 3 – (IEZZI,2013.) Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal $\overline{AB}$ e mediu os ângulos α e β tendo a seguir medido BC = h. Determine a altura da chaminé.

Figura 18: Ilustração do problema 3



Fonte: IEZZI,2013.

Solução: Sejam med$(\overline{AB}) = x$, e med$(\overline{BD}) = y$.

Do ΔABC, segue que

$$tg\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow tg\alpha \,.\, x = h \Rightarrow x = \frac{h}{tg\alpha} \quad (1)$$

Do ΔABD, temos

$$tg\beta = \frac{y}{x} \Rightarrow tg\beta \,.\, x = y \Rightarrow y = \frac{tg\beta}{tg\alpha} \,.\, h \quad (2)$$

Note que, H = BC + BD, donde segue, substituindo (2) na equação anterior,

$$H = h + y \Rightarrow H = h + \frac{tg\beta}{tg\alpha} \,.\, h \ \Rightarrow H = h.\left(1 + \frac{tg\beta}{tg\alpha}\right).$$

Como visto nos exemplos acima, as razões trigonométricas são de grande utilidade para o cálculo de medidas diversas (comprimento de um objeto, distâncias, alturas). Nesse contexto, apresentamos a seguir a aplicação de uma proposta de aula, na disciplina de Práticas Experimentais de Matemática.

3.2 Aplicação em sala de aula: Proposta de aula experimental

Como dito anteriormente, a matemática a partir de certo ponto é vista pelos alunos como algo de grande dificuldade e desinteressante. Isso se deve ao fato do nível de abstração de alguns conteúdos serem maiores e, portanto, não são compreendidos de imediato.

As aulas de Práticas experimentais trazem um dinamismo essencial para que o professor possa lidar com este problema. Estas aulas, proporcionam melhorias no processo de ensino e aprendizagem no âmbito escolar, auxiliam o entendimento e facilitam a compreensão da aplicabilidade e importância do conteúdo matemático no cotidiano e na resolução de problemas.

Entender a diferença entre "o que" se estuda e "para quê" se estuda é importante. A matemática não deve ser apenas a disciplina que o aluno resolve problemas difíceis fazendo cálculos, deve preocupar-se também em desenvolver o senso crítico por parte dos alunos, para que possam, eles próprios encontrar novas descobertas matemáticas, como evidenciado no trecho:

> [...]os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Isto é, na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum. Não vendo uma ligação significativa do conteúdo com sua vida, o aluno apenas repete os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas e em nenhum momento é questionado ou levado a pensar por que a resposta é aquela, ou mesmo se a resposta é coerente, plausível com a pergunta do problema. (NASSER; TINOCO, 2003, p. 02).

A pesquisa, a investigação de uma relação e a experimentação matemática são de extrema importância para a compreensão do mundo que nos cerca, o olhar crítico amplia os horizontes do conhecimento. Provar que algum teorema ou fórmula matemática é verídica não restringe-se somente a mostrar que realmente é verdadeira: mostrar como funciona na prática, além de ajudar na compreensão do que está intrínseco por trás daquele conteúdo, desenvolve habilidades para que os alunos possam aplicar o modelo em outros problemas e ampliar sua visão matemática, ver a disciplina de outra forma. “[...] Pesquisar é: ter uma interrogação, e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentidos, mais dimensões e outra vez...” (notas de aulas do Prof. Joel Martins, PUC-SP, citado por Bicudo, 1993, p. 18-23).

A necessidade de medir distâncias acompanha o homem desde os primórdios: descobrir a extensão do planeta, limites entre países, distâncias entre dois lugares, etc. Quando as distâncias são pequenas, não encontramos problemas em realizar as medições com os instrumentos que temos à nossa disposição. No entanto, se as distâncias são consideravelmente maiores (como a largura de um rio ou a altura de um prédio), é comum utilizar-se um **teodolito**[1].

Nesse contexto, nossa proposta de aula traz uma abordagem do conceito da tangente de um ângulo agudo onde, experimentalmente, os alunos serão expostos a este conceito e, a partir disto, construirão uma ferramenta para medir ângulos e, por fim, utilizarão este conjunto de artifícios para medir alturas consideradas inacessíveis.

3.2.1 Metodologia

A aplicação da proposta se dará em uma turma da 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública. Apesar de aplicada nesta série, o experimento pode ser realizado da mesma forma em qualquer série a partir do nono ano do ensino fundamental.

Na segunda série do ensino médio, há a transição do conteúdo de razões trigonométricas em um triângulo para trigonometria no ciclo e antes de prosseguir com esta ideia, o experimento pode proporcionar melhor compreensão do conteúdo base para tal e assim, garantir melhor aprendizagem do novo.

A seguir, apresentamos os materiais necessários para a realização do experimento. Os materiais utilizados são de baixo custo e facilmente encontrados no âmbito escolar.

---

[1] O teodolito é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais aplicado em diversos setores, como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

Para realizar este experimento, é necessário:

- Papel cartão ou cartolina;
- Transferidor;
- Tesoura;
- Régua;
- Calculadora;
- Canudinhos de plástico;
- Fita adesiva;
- Peso para o fio do prumo (pode-se usar qualquer objeto conveniente);
- Barbante;
- Fita métrica ou trena (de preferência).

Inicialmente, é importante que o professor faça uma abordagem inicial dos conceitos aprendidos anteriormente, a fim de verificar se os alunos estão compreendem o conceito de razão trigonométrica. Em caso negativo, o professor pode propor uma atividade inicial para desenvolver esta afinidade e familiarizar o aluno como uso do transferidor, que será de grande importância em nosso experimento; em caso positivo, avançamos para a próxima etapa do experimento.

Nesta parte inicial (caso seja necessária), é importante que fique claro ao aluno que a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo independe do tamanho do triângulo e sim, depende apenas do ângulo em questão.

Para esta parte inicial, formam-se grupos de três pessoas e, distribui-se papel cartão para que os alunos possam construir triângulos retângulos com indicações de ângulos dadas pelo professor: cada trio fará um triângulo com ângulos previamente determinados. (Algumas sugestões: 90°, 45° e 45°; 90°, 20° e 70°; 90° 50° e 40°; etc.)

Cada grupo deve recortar três triângulos, com medidas de diferentes tamanhos mantendo o mesmo trio de ângulos dados, assim, o intuito desta parte é fazer com que eles percebam que triângulos distintos, construídos por pessoas distintas, irão apresentar tangentes iguais.

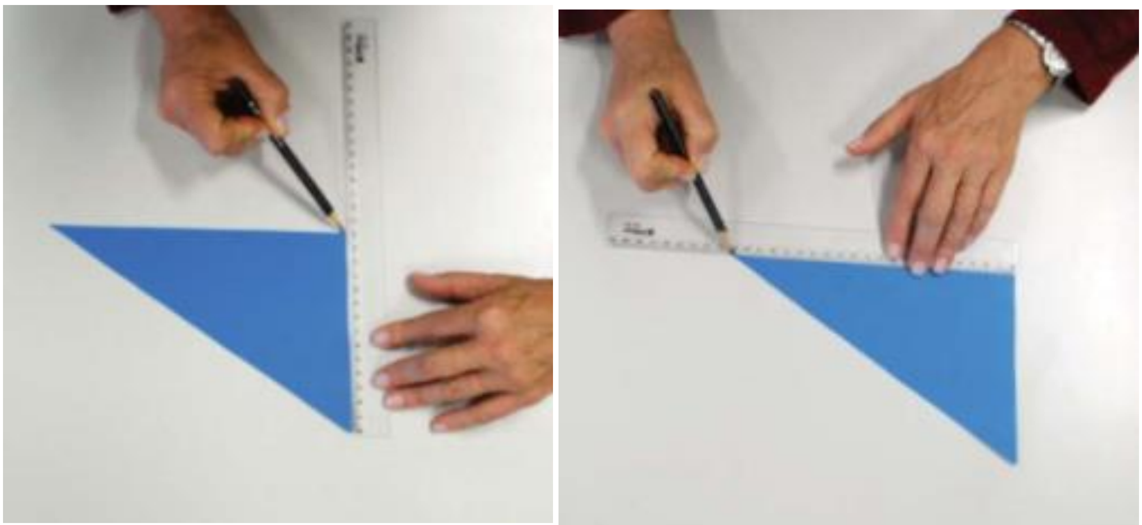
Após isto, o professor auxiliará os alunos na medição dos catetos dos triângulos construídos por eles, e estes, anotarão os dados e farão o cálculo da razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente nos triângulos, para assim verificar e enfatizar o ponto chave: a tangente não depende do tamanho dos catetos, mas sim do ângulo.

Figura 19: Marcação dos ângulos com o transferidor

Fonte: A altura da árvore – Experimento.

Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ , acesso em 28/07/2019.

Figura 20: Medição dos catetos.



Fonte: A altura da árvore – Experimento.

Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ , acesso em 28/07/2019.

A seguir, apresentamos as etapas de realização do experimento. São elas: formalização do conceito, construção do medidor de ângulos e por fim, realização da medição do objeto.

ETAPA 1 – Formalização do Conceito

Nesta etapa, o professor fará uma abordagem do conceito de tangente, iniciando com o seguinte questionamento para os alunos: É possível obter a tangente de qualquer ângulo agudo de um triângulo retângulo? Se sim, como proceder?

Esta é a hora de formalizar o conceito da tangente e mostrar que fixado um ângulo, podemos defini-la como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo. Um processo viável é expor na lousa um ângulo, formando os triângulos semelhantes e discutindo que em razão desta semelhança, a razão é constante.

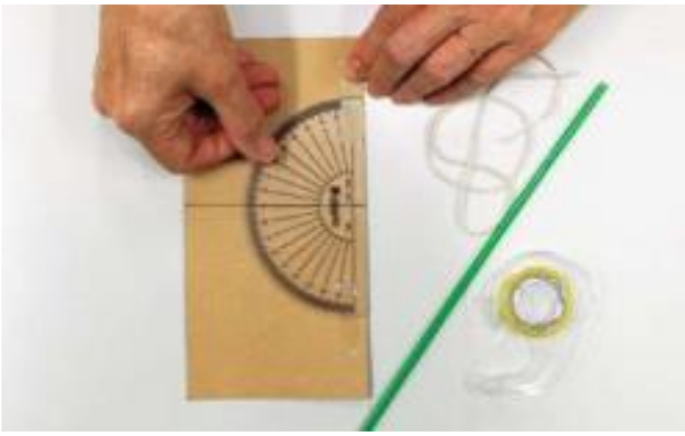
ETAPA 2 – Construção do Medidor de Ângulos

Agora, construímos o Medidor de Ângulos que será utilizado para nosso experimento. A construção é simples e rápida, mas os passos devem ser seguidos à risca, para evitar problemas nas medições que serão feitas posteriormente.

i) Primeiro, recorte um pedaço (20 cm x 10 cm) do papel cartão;

ii) Logo após, fixe o transferidor no papel, utilizando a fita transparente e destaque segmento de reta que passa pela marca do ângulo reto do transferidor (90°), conforme mostrado na figura;

Figura 21: Construção do medidor I.



Fonte: A altura da árvore – Experimento.

Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ , acesso em 28/07/2019.

iii) Prenda o barbante, com o peso e o canudo, como mostrado nas figuras a seguir. O canudo deve ser preso coincidindo com a linha-de-fé do transferidor;

Figura 22: Construção do medidor II.

Fonte: A altura da árvore – Experimento.
Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ , acesso em 28/07/2019.

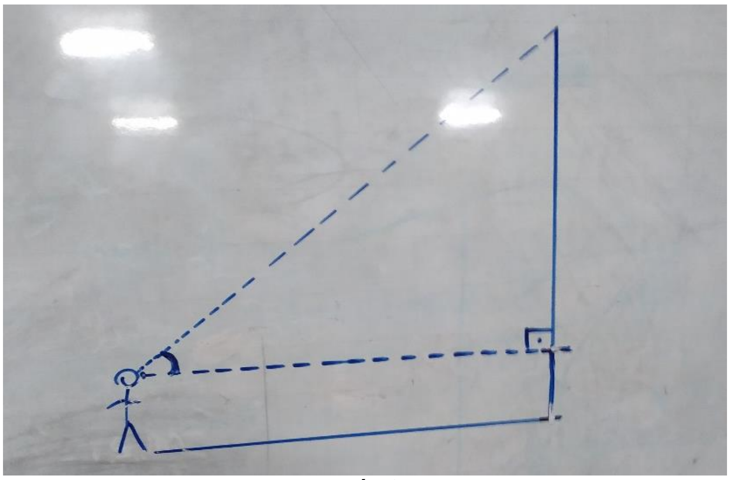
Figura 23: Medidor finalizado.

Fonte: A altura da árvore – Experimento.
Disponível em https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ , acesso em 28/07/2019.

Agora, estamos aptos a dar prosseguimento com o experimento. Nesta etapa final, a proposta é de que os alunos procurem algo com medida inacessível, para que tentem encontrar essas medidas com o auxílio do instrumento construído e fazendo alguns cálculos através da tangente do ângulo ao qual chamaremos de ângulo de visada.

De início, selecionamos junto com os alunos os objetos que iriam ser medidos e, por escolha dos próprios medimos primeiro alturas menores e por fim uma árvore de medida inacessível. Foi feita uma abordagem inicial, instigando os alunos a pensar como utilizariam os conceitos das razões trigonométricas para tentar determinar as alturas procuradas e, montamos o esquema para melhor visualização do problema, como mostra a figura abaixo.

Figura 24: Esquema para visualização do problema.



Fonte: Próprio autor.

Feito isso, foi indagado aos alunos quais seriam as medidas necessárias para o cálculo da altura que desejamos, ficando definidos os seguintes parâmetros:

- **Objeto** a ser medido;
- **Distância do objeto (d)** medida em metros (m), que indica a distância em que o observador estará do objeto que receberá a medição;
- **Altura do medidor (h)** medida em metros (m), que indica a altura que o medidor de ângulos estará do plano horizontal;
- **Ângulo de visada (θ)** medido em graus (°), que indica o ângulo em que o observador vê o topo do objeto em questão. Para determiná-lo, basta fazer a diferença entre o ângulo marcado no medidor e 90°.

Observação: O professor deve orientar os alunos para que todas as equipes meçam os mesmos objetos. Assim, podem-se comparar os resultados obtidos para um mesmo objeto.

Com isto, montamos a tabela para preenchimento, conforme modelo a seguir:

Tabela 1: Dados necessários para a medição.

Objeto	Distância do objeto	Altura do medidor	Ângulo de visada

Fonte: Próprio Autor.

Agora, nosso problema está modelado com todos os parâmetros a serem coletados com a trena e o medidor. As tarefas de medição e anotação dos dados foram divididas entre os membros da equipe.

No nosso experimento, foram medidos quatro objetos encontrados na própria sala de aula e nas redondezas do pátio da escola, conforme mostrado a seguir na tabela de dados coletados por uma das equipes que realizaram o experimento.

Tabela 2: Dados coletados no experimento.

Objeto	Distância do objeto	Altura do medidor	Ângulo de visada
PAREDE	3,06 m	1,40 m	22°
PORTA	3,0 m	1,50 m	15°
ARMÁRIO	2,04 m	1,54 m	20°
ÁRVORE	9,13 m	1,70 m	70°

Fonte: Próprio Autor.

Figura 25: Coleta de dados 1.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 26: Coleta de dados 2.

Fonte: Próprio Autor.

Figura 27: Coleta de dados 3.

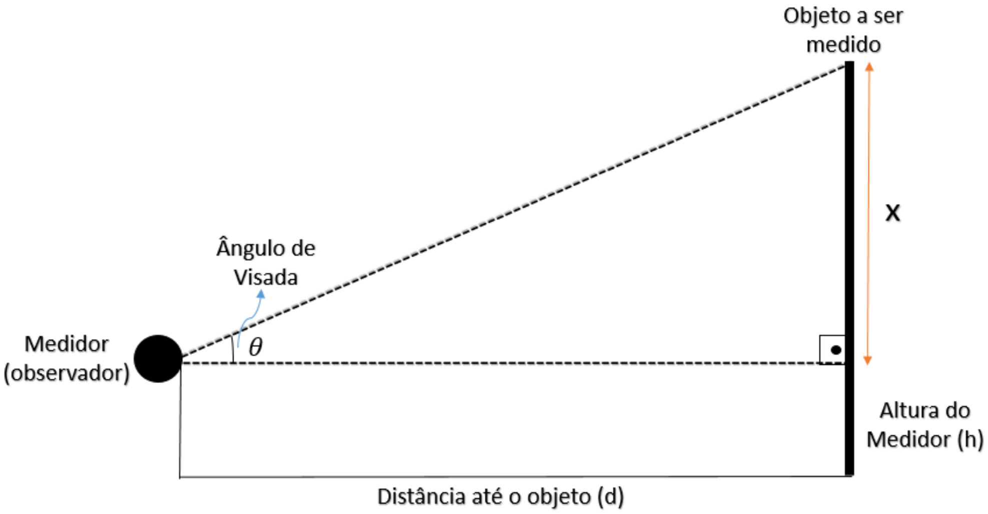
Fonte: Próprio Autor.

Figura 28: Árvore a ser medida.

Fonte: Próprio Autor.

Após a coleta dos dados, damos prosseguimento ao experimento iniciando os cálculos. Para melhor compreensão de como trabalhar os dados da maneira correta, é recomendado que montemos o esquema descrito na figura, facilitando a compreensão do procedimento por parte dos alunos.

Figura 29: Esquema com dados alocados.



Fonte: Próprio Autor.

A partir disto, os alunos introduziram os dados no esquema e visualizaram que precisamos determinar o valor da medida x para em seguida somar o valor com a altura em que se encontra o medidor (h), encontrando assim a altura procurada. Para determinar o valor de x, basta efetuar o cálculo da tangente do ângulo de visada θ, no triângulo retângulo obtido na situação.

Por exemplo, para calcular a altura do armário da sala de aula foram realizados os seguintes cálculos:

Observação: os valores das tangentes utilizadas nos cálculos do experimento foram obtidos com o auxílio da calculadora.

$$tg\theta = \frac{x}{d}$$

Substituindo os dados coletados, disponíveis na tabela 2, obtemos:

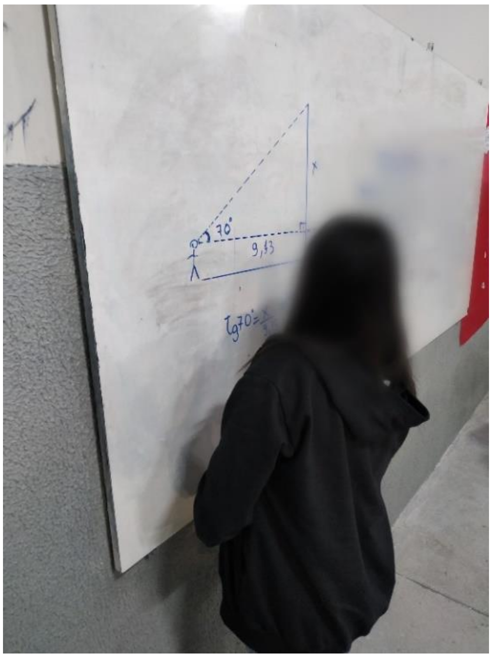
$$tg20° = \frac{x}{2,04} \Rightarrow tg20° \,.\, 2,04 = x \Rightarrow x \cong 0,74\, m$$

Assim, a altura do armário da sala de aula será,

$$Altura = x + h = 0,74 + 1,54 = 2,28\, metros$$

Após os cálculos, constatamos que a diferença entre a real altura do armário e a altura obtida experimentalmente é muito pequena, mas existe. Isto se dá ao fato de estarmos utilizando instrumentos construídos manualmente e que, consequentemente, possuem baixa precisão nas medições. Porém, com a aproximação do valor real, fica evidenciada a eficácia do processo experimental para a obtenção das alturas inacessíveis.

Figura 30: Calculando o x.



Fonte: Próprio Autor.

Para a altura da árvore realizamos os seguintes cálculos:

$$tg\theta = \frac{x}{d} \Rightarrow tg70° = \frac{x}{9{,}13} \Rightarrow tg70° \,.\, 9{,}13 = x \Rightarrow x \cong 25{,}08\, m$$

Assim, a altura da árvore será:

$$Altura = x + h = 25{,}08 + 1{,}70 = 26{,}78\, metros.$$

Foram calculadas todas as alturas dos objetos descritos na tabela 2 e, foram feitas suas respectivas “provas” utilizando a trena para a medição, com exceção apenas da árvore, que calculamos sua altura utilizando o processo descrito acima, mas, por se tratar de uma altura inacessível, não pudemos fazer a conferência e posterior comparação de valores.

Após o experimento realizado em sala, pôde-se constatar melhorias na compreensão dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para os alunos, foram feitas duas perguntas ao fim da aplicação da atividade experimental:

Primeira Pergunta: Para você, as aulas de Práticas experimentais ajudam na aprendizagem de matemática?

Por unanimidade a resposta foi sim e, foi possível verificar que a principal justificativa englobou justamente a ideia de que a teoria aliada à prática torna a matemática mais atrativa e de fácil compreensão.

Segunda Pergunta: Após a realização desta atividade, você compreendeu com clareza os conceitos de razões trigonométricas e como podemos utilizá-los?

Aproximadamente 80% do total de alunos da turma afirmou que sim pois, após entenderem a real aplicação dos conceitos, ficaram com as lacunas trazidas de séries anteriores preenchidas, tendo em vista que para eles “ é uma forma divertida de revisar”, “ é mais fácil de entender, Professor”.

Ao fim, obtivemos resultados satisfatórios. Ficou evidenciado nas respostas dos alunos que a teoria matemática aliada a prática facilita o processo de ensino e aprendizagem da disciplina e a torna mais atrativa. O dinamismo nas aulas e o uso de novas linguagens no ensino contribuem diretamente para um melhor desempenho de quem estuda esta brilhante ciência.

CONCLUSÃO

Com o dinamismo proposto nas aulas de práticas experimentais em matemática, nota-se que os alunos conseguiram assimilar o real sentido de aprender matemática de forma natural: utilizar a modelagem matemática para a resolução de problemas é algo fascinante e inspirador. Muitas vezes, nosso alunado possui dificuldades imensas em assimilar conteúdos e entender para que o servem. Matemática não é apenas fazer contas e colocar dados em equações e fórmulas. Deve-se entender a razão de estudar matemática e qual sua aplicabilidade perante ao que nos cerca, sanando assim aquela dúvida que sempre nos perguntam no exercício da docência: Professor, para que vou usar isto?

Dificilmente consegue-se atingir 100% de alunos com compreensão total pois, nota-se que alguns ainda têm dificuldades com a matemática básica (operações e conceitos básicos).

Ao fim da aplicação, notamos que as aulas experimentais na docência em matemática podem ser grandes aliadas na busca pela qualidade do ensino e a melhor aprendizagem por parte dos alunos. Com elas, temos alunos mais interessados em aprender matemática, em entender como esta ciência descreve o mundo e como podemos utilizá-la para resolver problemas. Costumo sempre dizer: A matemática serve para encantar pessoas, e não as assustar. Aplicada da maneira correta, a matemática é brilhante, fascinante.

Por fim, concluímos que o processo de ensino e a aprendizagem da matemática pode englobar diversos fatores e, entre eles, está a aprendizagem de novas linguagens. As práticas experimentais, as tecnologias e todos os recursos didáticos que possamos utilizar em benefício deste processo são de grande importância. Através das novas linguagens, o professor descobrirá novos horizontes, novas formas de avaliar o aluno e novas habilidades nos mesmos para que possam desenvolver além do pensamento crítico, habilidades fundamentais para o conhecimento e a sociedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: Bianchini. 9º ano**. 7. Ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. São Paulo: **Pró-posições**, v. 04, 1993, p.18-23.

Biografia e contribuições de Hipparco de Nicea. Disponível em < https://pt.thpanorama.com/blog/ciencia/hiparco-de-nicea-biografa-y-aportaciones.html >. Acesso em 28 de julho de 2019.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**: 2. Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

COSTA, Nielce M. Loboda. **A História da Trigonometria**. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf >. Acesso em 27 de julho de 2019.

EVES, Howard E. **Introdução à História da Matemática**: 5. Ed. Campinas: Unicamp, 2011.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. Vol. 3. 9. Ed. São Paulo: Atual, 2013.

NASSER, Lilian; TINOCO, Lucia A de. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ/projeto Fundão, 2003.

O' CONNOR, J.J. & ROBERTSON, E.F. **Biografia de Bhartolomeo Pitiscus**. Disponível em < http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pitiscus.html >. Acesso em 27 de julho de 2019.

O' CONNOR, J.J. & ROBERTSON, E.F. **Biografia de Leonhard Euler**. Disponível em < http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html >. Acesso em 27 de julho de 2019.

SOARES, et al. **A altura da árvore: O Experimento**. Disponível em < https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EHXJLwwNQ_MDA_9b6e6_ > . Acesso em 5 de agosto de 2019.

ANEXO A

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,01745	0,99985	0,01746	46	0,71934	0,69466	1,03553
2	0,03490	0,99939	0,03492	47	0,73135	0,68200	1,07237
3	0,05234	0,99863	0,05241	48	0,74314	0,66913	1,11061
4	0,06976	0,99756	0,06993	49	0,75471	0,65606	1,15037
5	0,08716	0,99619	0,08749	50	0,76604	0,64279	1,19175
6	0,10453	0,99452	0,10510				
7	0,12187	0,99255	0,12278	51	0,77715	0,62932	1,23499
8	0,13917	0,99027	0,14054	52	0,78801	0,61566	1,27994
9	0,15643	0,98769	0,15838	53	0,79864	0,60182	1,32704
10	0,17365	0,98481	0,17633	54	0,80903	0,58779	1,37638
				55	0,81915	0,57358	1,42815
11	0,19087	0,98163	0,19438	56	0,82904	0,55919	1,48256
12	0,20791	0,97815	0,21256	57	0,83867	0,54464	1,53986
13	0,22495	0,97437	0,23087	58	0,84805	0,52992	1,60033
14	0,24192	0,97030	0,24933	59	0,85717	0,51504	1,66428
15	0,25882	0,96593	0,26795	60	0,86603	0,50000	1,73205
16	0,27564	0,96126	0,28675				
17	0,29237	0,95630	0,30573	61	0,87462	0,48481	1,80405
18	0,30902	0,95106	0,32492	62	0,88295	0,46947	1,88073
19	0,32557	0,94552	0,34433	63	0,89101	0,45399	1,96261
20	0,34202	0,93969	0,36397	64	0,89879	0,43837	2,05030
				65	0,90631	0,42262	2,14451
21	0,35837	0,93358	0,38386	66	0,91355	0,40674	2,24604
22	0,37461	0,92718	0,40403	67	0,92050	0,39073	2,35585
23	0,39073	0,92050	0,42447	68	0,92718	0,37461	2,47509
24	0,40674	0,91355	0,44523	69	0,93358	0,35837	2,60509
25	0,42262	0,90631	0,46631	70	0,93969	0,34202	2,74748
26	0,43837	0,89879	0,48773				
27	0,45399	0,89101	0,50953	71	0,94552	0,32557	2,90421
28	0,46947	0,88295	0,53171	72	0,95106	0,30902	3,07768
29	0,48481	0,87462	0,55431	73	0,95630	0,29237	3,27085
30	0,50000	0,86603	0,57735	74	0,96126	0,27564	3,48741
				75	0,96593	0,25882	3,73205
31	0,51504	0,85717	0,60086	76	0,97030	0,24192	4,01078
32	0,52992	0,84805	0,62487	77	0,97437	0,22495	4,33148
33	0,54464	0,83867	0,64941	78	0,97815	0,20791	4,70463
34	0,55919	0,82904	0,67451	79	0,98163	0,19087	5,14455
35	0,57358	0,81915	0,70021	80	0,98481	0,17365	5,67128
36	0,58779	0,80903	0,72654				
37	0,60182	0,79864	0,75355	81	0,98769	0,15643	6,31375
38	0,61566	0,78801	0,78129	82	0,99027	0,13917	7,11537
39	0,62932	0,77715	0,80978	83	0,99255	0,12187	8,14435
40	0,64279	0,76604	0,83910	84	0,99452	0,10453	9,51436
				85	0,99619	0,08716	11,43010
41	0,65606	0,75471	0,86929	86	0,99756	0,06976	14,30070
42	0,66913	0,74314	0,90040	87	0,99863	0,05234	19,08110
43	0,68200	0,73135	0,93252	88	0,99939	0,03490	28,63630
44	0,69466	0,71934	0,96569	89	0,99985	0,01745	57,29000
45	0,70711	0,70711	1,00000				

Fonte: IEZZI,2013.

razão \ ângulo	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: IEZZI,2013.