



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

JANAINA MICHELE DAS MERCÊS ACIOLE

**ARTES, FILOSOFIA E GEOMETRIA: ESCHER EM LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA**

**CAMPINA GRANDE
2021**

JANAINA MICHELE DAS MERCÊS ACIOLE

**ARTES, FILOSOFIA E GEOMETRIA: ESCHER EM LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

**CAMPINA GRANDE
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A181a Aciole, Janaina Michele das Mercês.
Artes, Filosofia e Geometria [manuscrito] : Escher em livros didáticos de Matemática / Janaina Michele Das Mercês Aciole. - 2021.
65 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino de Geometria. 2. Artes. 3. Filosofia. 4. Livro didático. I. Título

21. ed. CDD 516

JANAINA MICHELE DAS MERCÊS ACIOLE

ARTES, FILOSOFIA E GEOMETRIA: ESCHER EM LIVROS DIDÁTICOS DE
MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Licenciatura em
Matemática da Universidade Estadual da
Paraíba, como requisito parcial à obtenção do
título de Licenciada em Matemática.

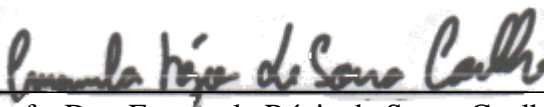
Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 09/12/2021.

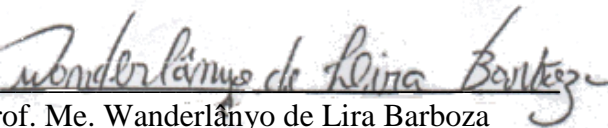
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. Wanderlânio de Lira Barboza
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A minha família pelo incentivo e amor,
DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Para elaboração desta pesquisa várias pessoas me ajudaram e me apoiaram de forma incondicional, e agradecer é o mínimo que eu poderia fazer para demonstrar minha gratidão.

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e proteção, e por permitir-me essa conquista pessoal, me concedendo paciência e sabedoria.

Aos meus pais, João Batista A. Pereira e Maria do Socorro M. Aciole, pelo amor, cuidado e exemplos de determinação, sem vocês eu não teria chegado até aqui.

A minha avó Nina, *in memoriam*, embora fisicamente ausente, você sempre foi um exemplo de força e coragem, quando em vida, seus ensinamentos me deram força para superar qualquer obstáculo, eu dedico esta conquista a senhora. Eternas saudades.

Às minhas irmãs Joyce Mikaella M. Aciole e Jayne Mirelly M. Aciole por todo o amor e carinho, você são tudo para mim.

Ao meu professor e orientador José Joelson Pimentel de Almeida, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação. Suas críticas e sugestões foram valiosas para a conclusão desse trabalho. O senhor sempre foi um exemplo de professor para mim.

Aos membros da banca examinadora, professora Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho e professor Me. Wanderlânio de Lira Barboza, pelos comentários e avaliações, e por ter cedido parte de seu precioso tempo com a presença nesta banca.

A todos os professores do Curso de Licenciatura da UEPB, que contribuíram ao longo do curso, por meio das disciplinas e conversas para o desenvolvimento desta pesquisa e para minha formação acadêmica.

Aos funcionários da UEPB, quando necessário, sempre foram prestativos.

Aos meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática, em especial a José Gabriel, você foi essencial nesta reta final.

Ao meu grande amigo da graduação Felipe Queiroga pelos momentos de amizade e apoio durante todo o curso, compartilhando comigo vários momentos de estudos, angústias e felicidades.

Às minhas amigas Anna Cecília R. Barbosa e Daniela S. Eneas, por todo o incentivo e apoio durante a caminhada, mostrando-me sempre que era possível prosseguir mesmo diante das dificuldades enfrentadas, vocês estiveram sempre presentes. Eu amo vocês.

À minha amiga Valescka Karen, por todo apoio de sempre, às vezes mesmo à distância, você sempre esteve presente.

A todos os autores, que contribuíram anonimamente para a realização dessa pesquisa.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”

(Paulo Freire)

RESUMO

Nessa pesquisa buscamos estabelecer uma relação entre arte, filosofia e geometria, a partir da obra de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), apresentando essa aproximação como uma possibilidade para o ensino de Matemática, mais especificamente do conteúdo de Geometria. Para atingir esse objetivo foi estudada a obra de Escher e como sua obra pode contribuir em processos de ensino de geometria. Fizemos isto a partir da análise de um livro didático de Matemática, o qual apresenta algumas atividades que incluem gravuras de Escher. Podemos afirmar que, do ponto de vista pedagógico, os conceitos matemáticos apresentados por meio de obras de artes possibilitam novos saberes, estimulando processos mais elaborados de reflexão e abstração, dando sustentação ao pensamento que de forma autônoma podem possibilitar uma produção de significados mais ampla, e, ainda mais, estabelecer uma visão integrada entre a matemática e outras áreas curriculares. Também vimos que atividades dessa natureza, composta com artes e matemática, podem contribuir para uma leitura mais ampla do mundo.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Artes. Filosofia. Livro Didático.

ABSTRACT

In this research, we seek to establish a relationship between art, philosophy and geometry, based on the work of Maurits Cornelis Escher (1898-1972), presenting this approach as a possibility for the teaching of Mathematics, more specifically for the content of Geometry. To achieve this goal, Escher's work was studied and how his work can contribute to geometry teaching processes. We did this from the analysis of a Mathematics textbook, which presents some activities that include Escher's engravings. We can say that, from a pedagogical point of view, the mathematical concepts presented through works of art enable new knowledge, stimulating more elaborate processes of reflection and abstraction, supporting the thought that autonomously can enable a broader production of meanings, and, even more, to establish an integrated vision between mathematics and other curricular areas. We also saw that activities of this nature, consisting of arts and mathematics, can contribute to a broader reading of the world.

Keywords: Teaching Geometry. Arts. Philosophy. Textbook.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Relatividade em Futurama	13
Figura 2 - Desenhando- Escher – 1948	14
Figura 3 - Encontro -1994	14
Figura 4 - Round 6 e a Relatividade	15
Figura 5 - Conquista de Constantinopla, marco que inicia a Idade Moderna	27
Figura 6 - Pai de Escher, linocut, 1916	34
Figura 7 - M. C. Escher	34
Figura 8 - Jetta Umiker e Escher	35
Figura 9 - Casa de Escher na Lange Voorhout, na Holanda.....	36
Figura 10 - Museu de Escher, Holanda	40
Figura 11 - San Gimignano, 1922, Xilogravura	40
Figura 12 - Serpentes, 1969.....	41
Figura 13 - Natureza morta com espelho, 1934.....	42
Figura 14 - Colunas Dóricas, 1944.....	43
Figura 15 - Fita de Moebius	43
Figura 16 - Limite circular	44
Figura 17 - Cascata.....	44
Figura 18 - Litografia Ordem e Caos	48
Figura 19 - Capa do livro Matemática - Geometria e Trigonometria.....	52
Figura 20 - Proporcionalidade e Semelhança	54
Figura 21 - Atividade em grupo sobre Escher.....	55
Figura 22 - Répteis	56
Figura 23 - Transformações Isométricas	57
Figura 24 - Atividade resolvida - Palácio de Alhambra	58
Figura 25 - Limite quadrado.....	59
Figura 26 - Um outro mundo.....	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FENAME	Fundação Nacional do Material Escolar
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
INL	Instituto Nacional do Livro
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PLIDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. A CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E A ARTE	18
2.1 Sobre Filosofia e Geometria	18
2.2 A Geometria e o mundo antigo	23
2.3 A Geometria e a Idade Média	24
2.4 A matemática no mundo moderno	27
2.5 A Idade Contemporânea, Matemática e Arte	30
3. ESCHER E SUA OBRA	33
3.1 Maurits Cornelis Escher	33
3.2 M. C. Escher e sua imaginação	38
3.3 Fases da obra de Escher	41
4. ESCHER NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UM LIVRO DIDÁTICO	46
4.1 Humanas e Exatas, existe essa aproximação nas obras de Escher?	46
4.2 O livro didático	49
4.3 Apresentação e análise do livro escolhido	51
4.3.1 Apresentação do livro.....	51
4.3.2 Organização praxeológica	54
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	64

1. INTRODUÇÃO

Escutamos sempre em sala de aula a seguinte pergunta: professora, para que serve isso que estamos estudando?

Na maioria das vezes, isso ocorre, pois, os conteúdos estudados são apresentados de forma descontextualizada, de forma que dificulta a aprendizagem do aluno, ou simplesmente porque a Matemática já se tornou uma ciência que as pessoas pensam que está distante do universo em que estamos inseridos.

Durante o estágio da disciplina de Estágio Supervisionado II, nas aulas de geometria, percebi muitas dificuldades de os alunos encontrarem os conceitos matemáticos na vida cotidiana, muitos objetos da geometria estavam presentes, até mesmo na sala de aula, porém a busca pela conexão da matemática abstrata e o ambiente em que estava habituado os impossibilitava de fazer essa relação.

A motivação do meu trabalho é esta: que tenhamos o compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada, de modo a contribuir para o desenvolvimento no estudante, causando uma atitude crítica em relação ao conteúdo, conforme norteia a BNCC. Os alunos que estudam matemática devem visualizar que podemos contextualizar alguns conceitos com a arte, e perceber que elas sempre caminharam lado a lado.

Durante a formação acadêmica, em particular nas aulas de práticas pedagógicas e de laboratório no ensino da matemática, surgiu o interesse em realizar essa pesquisa sobre Arte e Geometria. Sempre tive muita aproximação com a área de Educação Matemática e, durante as aulas, pude observar que muitos colegas não priorizam tanto a contextualização dos conteúdos matemáticos, o que me serviu ainda mais de motivação: mostrar que a matemática pode ser mais do que apenas uma disciplina a ser ensinada de forma tradicional¹; ela pode ser encontrada desde o nosso cotidiano até as mais belas obras de Arte. Tomaremos como base a interação da obra do artista Maurits Cornelis Escher e a sua apropriação no ambiente educacional.

A Arte e a Matemática sempre estiveram juntas, desde os primórdios, quando os humanos desenhavam nas paredes pinturas rupestres e conseguiam realizar contagens, sem saber que ali, estava presente a Matemática. O homem apresenta um senso geométrico inato, podemos chamar de geometria do subconsciente. Segundo Fetissov (1997) os primeiros conhecimentos

¹ No ensino tradicional, o aluno costuma ficar sentado na sala de aula em formato de fileira, enquanto ouve o professor lecionar, com um quadro branco e pincel.

geométricos foram adquiridos pelo método indutivo, a partir de um número grande de observações e experiências.

Zaleski (2009) cita Paul Karlson (1961), nos trazendo a seguinte reflexão,

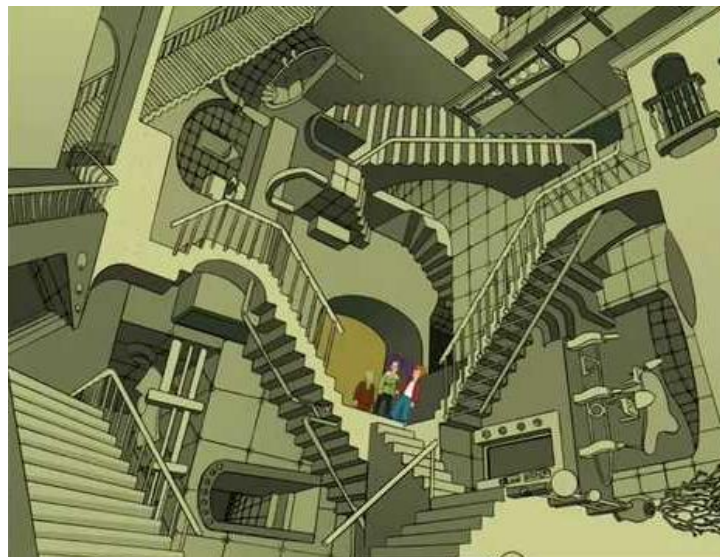
[...] Desde o seu aparecimento na terra, o homem tem recorrido à Matemática; calculava, contava e media, mesmo no período em que o seu espírito ainda não tinha consciência de si mesmo e quando ainda sobre tais assuntos não existiam conceitos ou convenções. Ele dividia em partes iguais com o que criou as frações; cortava a sua clava ou media um pedaço de pele – comparando comprimentos, admitindo, assim, as ideias contrárias de “maior” e “menor”. [...] (KARLSON, 1961, p.3 *apud* Zaleski 2009, p.11)

No desenvolvimento dessa pesquisa, trataremos a aproximação entre a Matemática e a Arte. O tema proposto é a análise das obras do artista Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972), sob uma perspectiva da inclusão das mesmas nas aulas de matemática e nosso objetivo geral é propor a utilização da arte, em especial das obras de Escher, para facilitar a compreensão da geometria em sala de aula.

Podemos encontrar vários trabalhos do artista fora dos livros ou Museus de Arte, eles estão presentes até mesmo nas mais diferentes mídias, como podemos presenciar em algumas de entretenimento pessoal, como seriados, desenhos, músicas, videogames. Berro (2008), em sua dissertação de mestrado cita alguns dos entretenimentos em que podemos encontrar as obras do Escher:

- Matt Groening, criador de *Os Simpsons*, numa paródia à obra *Relatividade*, usou em um episódio de *Futurama*.

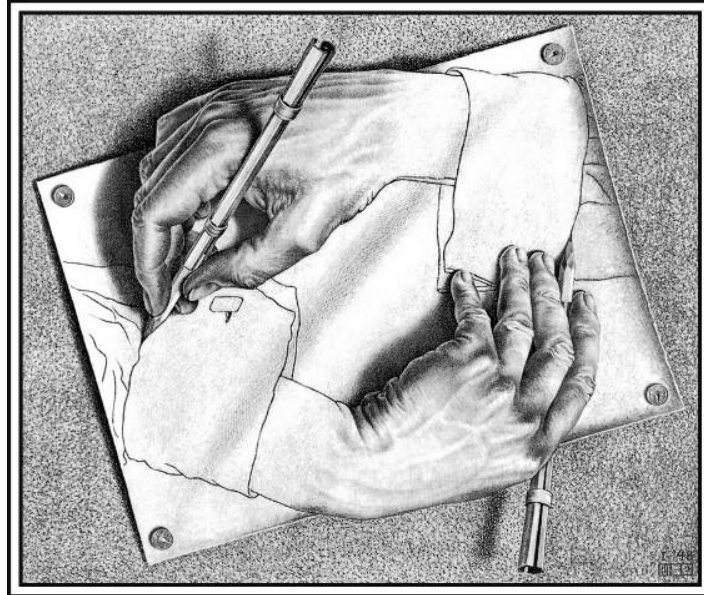
Figura 1 - Relatividade em Futurama



Fonte: <https://i.ytimg.com/vi/VyZf2OmK8jo/hqdefault.jpg>

- O videoclipe da música Drive (2001), do grupo Incubus, é baseado na obra “Desenhando-se”, começando com uma mão animada desenhando um pedaço de papel e uma segunda mão, para então formar a própria obra de Escher.

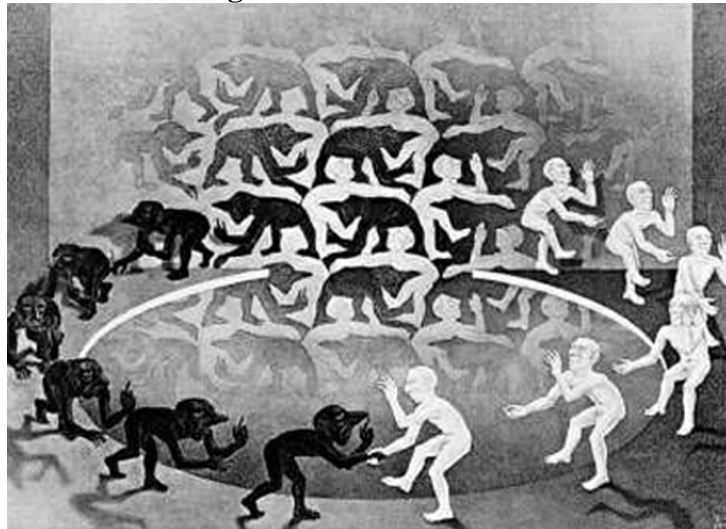
Figura 2 - Desenhando- Escher – 1948



Fonte: https://exame.com/wp-content/uploads/2016/09/size_960_16_9_escher-1.jpg?quality=70&strip=info&w=920

- O videoclipe da canção Around the World (1992), do grupo Daft Punk, dirigido por Michel Gondry, é baseado na obra Encontro.

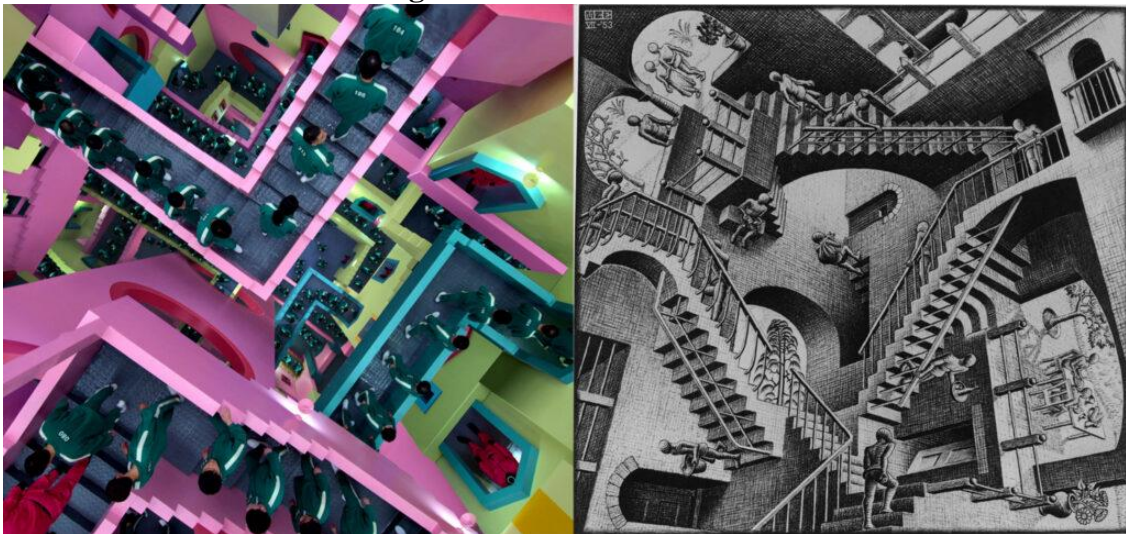
Figura 3 - Encontro -1994



Fonte: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro%20-%20Encontro%201.jpg>

Recentemente, encontramos o Escher também na série “Round 6” (ou squid game, no original), uma série coreana que conta a história de pessoas endividadas que participam de um jogo que sai milionário, ou morto... No episódio um, podemos ver o projeto de escada complexa nos corredores de Round 6. As escadas são coloridas e desorientadas, que impressiona e inquieta o espectador. O diretor da série revela que se inspirou na obra do Escher denominada “Relatividade”.

Figura 4 - Round 6 e a Relatividade



Fonte: <https://ovicio.com.br/wp-content/uploads/2021/09/20210929-escadas-round6-ovicio-1024x484.jpg>

Poderíamos analisar suas obras com diversos olhares e seguir por vários caminhos, porém, vamos nos deter ao campo da Geometria. O foco principal é refletir de forma mais ampla as obras de Escher no ambiente escolar, especificamente no campo da Educação Matemática, e como a inserção das obras de arte no livro didático pode facilitar o ensino da Geometria.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, podemos nos fundamentar sobre o quanto os conceitos artísticos e matemáticos colaboram ao desenvolvimento da percepção visual e espacial. Cabe aos educadores estarem abertos para que as relações entre as disciplinas aconteçam de forma natural, gerando mais liberdade e trazendo autonomia cognitiva, fazendo com que ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos em um contexto social, político, cultural e econômico. Sobre a Arte, na BNCC temos a seguinte concepção,

A Arte, enquanto área do conhecimento humano, contribui para o desenvolvimento da autonomia reflexiva, criativa e expressiva dos estudantes, por meio da conexão entre o pensamento, a sensibilidade, a intuição e a ludicidade. (BNCC, p.482)

Ainda de acordo com a BNCC, temos a responsabilidade de promover ações que ampliem o letramento matemático² iniciado no Ensino Fundamental,

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...] (BNCC, p.266)

O aluno deve ser desafiado a buscar respostas, e conseguir visualizar de forma diversificada e interdisciplinar no ambiente em que está inserido. Nesse sentido, para direcionar essa busca por soluções e a construção de novas relações, a arte é fundamental.

Todas as razões aqui apresentadas, justificam a escolha pelo tema desta pesquisa, conforme abaixo são planejados.

A pesquisa foi dividida em três capítulos: A Conexão entre Matemática e a Arte; Escher e sua Obra; Escher no ensino de Matemática: Análise de um livro didático.

No capítulo 1, iremos apresentar um breve percurso histórico, onde trataremos conceitos filosóficos e sua ligação com a matemática. Discorreremos também sobre filósofos que influenciaram positivamente a Educação Matemática na antiguidade. Em seguida trataremos a jornada matemática na Idade Média, e por fim, a Matemática no mundo moderno e sua ascensão na Educação até o mundo atual.

No capítulo 2, a temática principal será apresentar o artista Maurits Cornelis Escher, no que compete a sua trajetória pessoal bem como as influências que o levaram a produzir as obras, para que possamos entender as razões de um trabalho tão peculiar; obras que nos causam uma experiência absolutamente nova. Ernst (1978), sobre as obras de Escher, nos diz:

Tem-se a impressão de que, da primeira à última gravura, Escher se encontra numa viagem de descoberta e que cada uma das suas gravuras é um relatório sobre o que descobriu. (Ernst, 1978, p.20)

Através das obras analisadas nesta pesquisa, descobrimos ser possível criar diferentes combinações geométricas, razão pela qual, chegamos a pensar que de acordo com Barth (2009) Escher detinha pensamento ativo e, portanto, era conhecedor do que construía.

E por fim, no capítulo 3, iremos trazer reflexões e análises acerca das obras de Escher, trazendo também visões matemáticas e mostrando os elementos artísticos. Para Escher, a Arte é forma de conhecimento, de trabalho, de busca voltada às normas visuais passíveis de as

² Segundo a Matriz do Pisa 2012, o letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. [...] Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 12 nov. 21.

transmitir, o mais claramente possível, a linha de pensamento. (Barth, 2009, p.85). Iremos analisar as obras do artista M.C. Escher no contexto Educacional, realizando a análise do livro didático: *Matemática Ensino Médio – Geometria e Trigonometria*, buscando encontrar relações entre as Artes expostas na obra do artista e a Matemática, especificamente nos conteúdos de Proporcionalidade e Semelhança (Transformações Isométricas: Reflexão, Translação, Rotação; Transformações Homotéticas).

Assim, iniciaremos agora fazendo algumas considerações pelas Artes, Filosofia e Geometria.

2. A CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E A ARTE

Este capítulo está dividido em cinco seções. Na primeira seção, tratamos do surgimento da Filosofia e seu envolvimento com a matemática, falamos também sobre as influências de filósofos, como Platão, na Educação Matemática e as artes.

Na segunda seção, trazemos a Geometria no mundo antigo, realizamos um breve percurso histórico, e iremos buscar conceitos sobre as origens da Geometria. Aqui Platão já recomendava que as crianças gregas da aristocracia fossem submetidas ao aprendizado da Aritmética, da Geometria e da escrita.

Já na terceira seção “A Geometria e a Idade Média”, falamos como desde a antiguidade já lutávamos para que as ciências (incluindo a matemática) e as artes pudessem surgir no meio intelectual, que só veio a ser formalizada no fim do Império Romano. Aqui, a Geometria começa a ganhar um corpo teórico e começa a adquirir a importância e destaque na Arte renascentista.

Na quarta seção, apresentamos “A Matemática no Mundo Moderno” momento em que a cultura passou por mudanças significativas, começamos a ter as disciplinas restabelecidas e como consequência tivemos uma aproximação das Artes com a Matemática.

Em nossa última seção, “A Idade Contemporânea, Matemática e Arte”, trazemos como a Geometria teve avanços devido a Revolução Francesa. Hobsbawm (2008) cita como: O século dos matemáticos, pois é aqui onde tivemos progressão no conhecimento matemático, especificamente na Geometria.

2.1 Sobre Filosofia e Geometria

“A Arte é a transformação do ordinário em extraordinário e a Matemática é a maneira de fazer o ordinário chegar ao extraordinário.”

(Antônio Peticov)

De acordo com Chauí (2000), a definição de filosofia é dada da seguinte forma:

A palavra *filosofia* é grega. É composta por duas outras: *philo* e *sophia*. *Philo* deriva-se de *philia*, que significa amizade, amor fraterno, respeito entre os iguais. *Sophia* quer dizer sabedoria e dela vem a palavra *sophos*, sábio. *Filosofia* significa, portanto, amizade pela sabedoria, amor e respeito pelo saber. *Filósofo*: o que ama a sabedoria, tem amizade pelo saber, deseja saber. Assim, filosofia indica um estado de espírito, o da pessoa que ama, isto é, deseja o conhecimento, o estima, o procura e o respeita. (CHAUI, 2000, p.19)

Zaleski complementa citando Nunes (1993), que fala em seu livro *Aprendendo filosofia*, que a “Filosofia, desde a sua definição originária, se faz compreender como um saber sobre o homem, sobre o mundo, sobre a realidade”.

De acordo com Chauí (2000) o termo “Filosofia” aparece pela primeira vez nos escritos de Pitágoras, por volta de cinco séculos antes de Cristo. Ele afirmava que o filósofo é movido pelo desejo de saber. "A verdade não pertence a ninguém, ela é o que buscamos e que está diante de nós para ser contemplada e vista, se tivermos olhos do espírito para vê-las." (Pitágoras)

A filosofia foi instituída inicialmente pela sociedade Grega, e só após o período da colonização, expandiu para toda América e mundo. Ela surge com o intuito de descobrir a verdade do mundo e dos humanos, mesmo que não fosse algo secreto, ela deveria ser conhecida por todos, através da razão.

Os primeiros filósofos, segundo Nunes (1999), preocuparam-se em conhecer os elementos constitutivos das coisas. Eles investigaram a Natureza, à busca de um princípio estável, comum a todos os seres, que explicasse a sua origem e as suas transformações.

Nunes (1999) afirma que seria preciso esperar por Sócrates (470-399 a. C.), misto de pedagogo e de filósofo, que procurou definir os valores morais, as profissões, o governo e o comportamento social, para que esse ponto de vista se insinuasse também na apreciação das Artes.

Com a chegada dos sofistas, é introduzido o ponto de vista reflexivo e crítico na sociedade e na cultura em questão.

Platão (cujo nome ao nascer em 427 a.C. era Arístocles) foi discípulo de Sócrates durante cerca de oito anos, nesse período ele se preparou para continuar a atuação política de seu mestre em sua família. Com a morte de Sócrates, ele segue atuando de forma vigorosa na Filosofia. Segundo Nunes (1999):

Platão (427-347 a. C.), discípulo de Sócrates, fez, no seu diálogo *A República*, um confronto, que se tornou decisivo pelas implicações filosóficas que encerra, entre Arte e Realidade. Levando em conta o caráter representativo da Pintura e da Escultura, o filósofo concluía, nesse diálogo, não só que essas artes estão muito abaixo da verdadeira Beleza que a inteligência humana se destina a conhecer, como também que, em comparação com os objetivos da ciência, é supérflua a atividade daqueles que pintam e esculpem, pois o que produzem é inconsistente e ilusório. Por outro lado, Platão observa que a Poesia e a Música exercem influência muito grande sobre os nossos estados de ânimo, e que afetam, positiva ou negativamente, o comportamento moral dos homens. (NUNES, 1999, p.5)

Nunes (1999), sobre Platão, afirma que:

[...] Platão conseguiu problematizar, isto é, transformar em problema filosófico a existência e a finalidade das artes, assim como, um século antes, os filósofos

anteriores a Sócrates haviam problematizado a Natureza. Já não bastava mais a simples fruição da Pintura, da Escultura e da Poesia. Agora, elas também passam a constituir objeto de investigação teórica. É o pensamento racional que as interpela sobre o seu valor, sua razão de ser e o seu lugar na existência humana. (Nunes, 1999, p. 5)

Platão fundou em 487 a.C., a academia que foi mais influente escola da Antiguidade, onde ensinou até o fim da sua vida. (Zaleski, 2009).

A obrigação dos filósofos seria de levar todos os cidadãos (no sentido grego) até a desocultação das verdades, e a de cada cidadão é afastar-se ao máximo possível do mundo das cópias. (Cortella, 2008 p.72)

A partir disso, surge a seguinte reflexão: se todo o saber que hoje conhecemos foi descoberto através da observação do homem e da natureza, por que hoje assuntos ministrados em sala de aula parecem tão desconexos com o mundo em que estamos inseridos?

Em síntese, Platão escreve sobre a origem do mundo, retoma alguns mitos antigos e os reorganiza de um modo mais filosófico. Para ele, por exemplo, Deus nada criou, tomou a matéria bruta no momento indicado e deu ordem ao caos, com isso, tudo passou a existir.

Ele estabelece a teoria de dois mundos, existindo um lugar superior de onde foi tomado o modelo, habitado por deuses, e abaixo, o lugar dos mortais, onde a vida nada mais seria do que uma cópia do mundo superior.

Platão cria então o Mito da caverna, onde os humanos estariam aprisionados; as pernas e os pescoços amarrados de tal modo que não pudessem mudar de posição, e consigam apenas olhar para o fundo da caverna, lá no alto dessa caverna é possível ver que o sol ainda brilha. A única forma de se libertar das amarras, e se libertar dessa caverna, é se libertando do julgo da ignorância e dos grilhões que os prendiam. Nesse sentido, ele faz uma alusão a sabedoria e razão, que apenas através destes seria possível viver a realidade de forma livre.

O Mito da Caverna é uma alegoria para o pensamento, que continua a nos influenciar até os dias de hoje. Para Platão, temos acesso a uma pequena projeção da realidade. Ficamos limitados aos sentidos, causando distorção do que é realmente a realidade.

Nos currículos ocidentais, a matemática possui uma grande importância. A centralidade da disciplina pode ser constatada através da alta carga horária na educação básica; ela prepara o educando para o pensamento objetivo e lógico. Podemos ver no filósofo Platão essa herança, para ele, a matemática surge como o modelo de ciência que, por sua abstração e universalidade, é referência para toda a ciência. (Zatti, 2017)

Ainda segundo Zatti (2017), embora Platão não tenha sido um grande matemático, ele foi um entusiasta defensor da metodologia matemática e um importante precursor, incentivador e divulgador dela. A filosofia platônica é idealista:

“Nela, as ideias aparecem de imediato como a verdade das coisas, também ditas essências e formas” (Bicudo, 2013, p.4).

Ou seja, o autor, em sua Teoria das Ideias, desenvolve a tese de que o verdadeiro é o formal, o abstrato, o universal, enfim, o ideal.

As obras de Platão influenciaram significativamente o pensamento de matemáticos e de estudiosos da Educação e da Filosofia.

De acordo com Chauí (2000), existem quatro grandes períodos da Filosofia grega; iremos nos ater ao último, que foi o período helenístico ou greco-romano, que se estendeu do final do século III a.C. até o século VI depois de Cristo, nesse período, a filosofia se estende até Roma, e a Filosofia ocupa as questões de ética e do conhecimento humano, busca as relações entre o homem e a Natureza e destes com Deus.

Este último período da Filosofia coincide com a decadência do mundo grego, que segue até a Idade Média.

Um dos Filósofos que merece destaque neste período é Plotino (204-270 d. C.), sobre o qual Nunes (1999) afirma que:

Plotino (205-270 d.C.) retoma o pensamento de Platão e acrescenta-lhe uma estrutura mística, o conceito de NÓUS, uma inteligência organizadora, do mundo e a ideia de um emanacionismo divino da matéria. Suas teses serão aproveitadas pelo Cristianismo, sobretudo a ideia de um Deus providente. É o último dos grandes filósofos gregos. (Nunes 1993, p.37)

Sobre filosofia de Plotino, Nunes (1993) escreve que,

[...] prega a libertação do corpo, propõe o ideal do Bem Supremo com objeto de Amor e o Uno (Nous) como demiurgo do Universo. O objetivo da “alma humana” é fundir-se a este “deus filosófico” pela contemplação e êxtase. Para Plotino, que depois será assimilado por Santo Agostinho, a Filosofia já não mais pesquisa sobre o mundo (pré-socráticos) ou sobre o homem e a “polis” (Sócrates); [...], mas sim a aceitação de uma realidade divina e providente, da qual todos fomos gerados por emanção. (Nunes, 1993, p.40)

Plotino adota que a beleza é imutável e eterna, ele acaba sendo o último dos grandes filósofos gregos.

Nunes (1999) escreve:

Para Plotino, a alma, que se rejubila ao contemplá-las, assemelha-se à Beleza, e' a Beleza, manifestando o inteligível naquilo que é material e sensível, constitui a própria alma das coisas, como forma interior, como unidade indivisível, que nelas existe, e que as propriedades estéticas, simetria e regularidade, aspectos puramente exteriores, não podem explicar. Forma interior num sentido análogo àquele que encontramos em Aristóteles, a Beleza está presente em toda a Natureza, onde quer que a ordem e a determinação subjuguem a tendência da matéria para o informe e o caos. (Nunes, 1999, p. 16)

Indo mais longe que Platão, Plotino entende que a imitação dos objetos visíveis é um pretexto para a atividade artística, que tem por fim intuir as essências ou ideias. Mais do que atividade produtiva, a Arte é também um meio de conhecimento da Verdade.

Mais adiante, após a queda do Império Romano, segundo Zaleski (2009), São Tomás de Aquino, na Suma teológica, estuda o Belo na mesma parte em que trata de e (sobre) a natureza de Deus. Ele considera a beleza uma propriedade transcendental do ser, paralela à Verdade e ao Bem, e esses três aspectos de uma mesma realidade são inconfundíveis.

Nunes (1999) sobre a doutrina de Santo Tomás de Aquino,

O Belo está mais próximo da Verdade: a contemplação exercita o conhecimento, e o deleite, que dela é inseparável, decorre, sobretudo, da atividade dos sentidos intelectuais, a vista e o ouvido. A integridade (perfeição, plenitude), a proporção (acordo ou conveniência entre as partes), e a claridade ou esplendor (adequação à inteligência), são as três condições do Belo, a última das quais, correspondendo ao esplendor do Bem e da Verdade na filosofia platônica, significa, analogicamente, para Santo Tomás de Aquino, a inteligência divina manifestada como Verbo. (Nunes, 1999, p.17)

Tomás de Aquino separa o Belo da Arte, ele concorda que o Belo está mais próximo da Verdade:

A arte é operativa, a beleza contemplativa. As operações da primeira podem formar obras úteis que servem aos interesses humanos, e obras que se subordinam à Beleza para servir ao espírito. Os pensadores escolásticos não reconhecem, porém, que as belas obras, artificialmente produzidas, exerçam função privilegiada na vida do homem, toda orientada para o culto e a contemplação do ser divino. Esse juízo, reflexo dos padrões religiosos da cultura medieval, traduz bem a situação das belas-artes, que, nessa época, ainda não constituem espécies definidas. Elas aparecem associadas às artes servis (teatro e arquitetura, ao lado da agricultura, caça, navegação e medicina), e às artes liberais (música, ao lado da gramática, retórica, dialética, geometria, aritmética e astronomia). (Nunes, 1999, p.17)

Na citação anterior, fica claro que desde Platão até o fim da Idade Média, a Arte ocupa um lugar mínimo na história da cultura. Na citação podemos ver que os pensadores não reconheciam as belas artes como função privilegiada na vida do homem, elas eram equiparadas às artes servis³ e às artes liberais⁴. A Arte novamente é colocada em um patamar menor do que deveria, a “palavra” aqui, ainda continua sendo a mais valorizada.

Segundo Bicudo (2013), não há como negar a engenhosidade da teoria platônica a respeito da Matemática, mesmo Platão não sendo matemático. Tanto que encontramos, na Filosofia da Matemática, versões de platonistas, assim chamados por “compartilharem algumas, ainda que não todas, ideias originais de Platão. São platonistas em suma as filosofias

³ São artes servis todas as atividades técnicas: arquitetura, agricultura, alfaiataria, comercio, culinária, tecelagem, gastronomia, etc.

⁴ São artes liberais: gramática, retórica, lógica, aritmética, geometria, astronomia e música, compondo o currículo escolar dos homens livres.

realistas de algum modo, em ontologia ou epistemologia” (SILVA, 2007, p. 64 *apud* Bicudo, 2013, p.5)

Mongelli (1999) afirma que durante a Idade Média a educação estava, fundamentalmente, centrada no estudo das Artes Liberais, divididas em duas bases: o *Trivium*⁵ e o *Quadrivium*⁶. À medida que os conteúdos das diversas artes liberais foram se expandindo, os estudiosos alargaram os campos de pesquisa.

O distanciamento entre o currículo escolar e o cotidiano continua sendo constando durante toda a Idade Média.

Uma pergunta que nos vem à mente é: Platão trouxe contribuições para o estabelecimento da matemática grega? E para a geometria?

Bicudo (1998), cita Gow respondendo às perguntas,

Platão foi mais um forjador de matemáticos do que um matemático distinguido por descobertas originais e suas contribuições à geometria estão mais no melhoramento de seu método do que em adições a seu conteúdo. Foi ele que transformou a lógica intuitiva dos antigos geômetras em um método a ser usado conscientemente e sem receio. Com ele, aparentemente, começaram aquelas definições dos termos geométricos, aquele enunciado distinto de postulados e axiomas que Euclides adotou (Gow, 1968, p.175-6 *apud* Bicudo 1998, p.304)

Assim, apesar de não ter sido um matemático efetivo, Platão contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática grega, em especial a Geometria. Podemos encontrar esse fato, através de uma das maiores obras das antiguidades, os “*Elementos de Euclides*⁷”.

2.2 A Geometria e o mundo antigo

Quando os gregos foram “formalizar” a ciência que cuidaria da medição do espaço, utilizaram a Geometria como tema principal. Aqui ficou institucionalizada a ideia de medição de terra, assim como faziam os egípcios.

Ao escrever sobre a história do Egito, Heródoto cita em seu livro que as origens da geometria teriam se dado no Egito, como podemos observar em seu livro II (Pág. 181-182, parágrafo CIX), da seguinte forma:

Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada Egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava

⁵ O *Trivium* constituía-se na formação voltada para a construção dos argumentos e da conversação; dele faziam parte a Gramática, a Dialética e a Retórica.

⁶ O *Quadrivium* era composto pelas artes reais: a Aritmética, a Geometria, a Música e a Astronomia.

⁷ Em grego, o título original é “*Stoicheia*” - Στοιχεῖα. O texto foi elaborado por volta do ano 300 a.C, o livro até hoje é usado como texto fundamental para as aulas de geometria nas escolas, foi distribuído em treze volumes.

agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia. (Caraça, 1951, p. 32)

Neste momento, no Egito podemos alegar que surgia o pensamento geométrico.

Tatiana Roque, em seu livro *história da matemática*,

As fontes indicam que quando a matemática começou a ser praticada no antigo Egito, ela estava associada sobretudo a necessidades administrativas. A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração do Egito. Esses profissionais eram importantes para assegurar a coleta e a distribuição dos insumos, mas também para garantir a formação de novos escribas. Os papiros matemáticos se inserem nessa tradição pedagógica e contêm problemas e soluções preparados por eles para antecipar as situações que os mais jovens poderiam encontrar no futuro. (Roque, 2012, p.27)

Roque (2012) complementa em seu livro que temos notícia da matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, entre eles o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja dito que seu conteúdo foi copiado de um manuscrito mais antigo ainda.

Voltando a uma análise dos registros da Arte e Matemática, Boyer (1974) afirma:

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porem seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu o caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. (Boyer, 1974, p.4, *apud* Zaleski p.32)

Zaleski (2009) argumenta que os gregos formalizaram o que chamamos de Geometria Erudita. Partindo dos conceitos dessa Geometria, o pensamento grego chegou até a Geometria Dedutiva.

Para os egípcios a Geometria deduzida era um conhecimento importante na cultura da elite grega, assumindo assim a condição de arte liberal. Zaleski (2009) continua a discorrer que Platão recomendava que as crianças gregas da aristocracia fossem submetidas ao aprendizado da Aritmética, da Geometria e da escrita.

2.3 A Geometria e a Idade Média

A Geometria existe desde a antiguidade, porém, como conhecimento formal inexistiu desde o fim do Império Romano até os séculos XII e XIII, segundo Zaleski (2009).

A palavra Geometria é derivada do grego antigo que significa: *geos* (terra) e *metron* (medida).

Desde os tempos antigos o homem tinha necessidade de medir terrenos, coisas e etc. A geometria está presente na humanidade desde os primórdios, sendo desde sempre muito utilizada pelo homem.

As impressões da geometria que temos hoje, parecem ter se originado por meio de observações realizadas no tempo antigo, na necessidade de medir terrenos, delimitar campos. Essas medidas muitas vezes foram feitas em formatos de retângulos, quadrados e triângulos. Estas formas que hoje podemos descrever de forma clara e evidente por meio da geometria.

Segundo Eduardo Carreira, em *Limites e grandezas do pensamento geométrico na Idade Média*,

Se nos propusermos, como fazemos aqui, a nos perguntar sobre o estado da disciplina geométrica em suas relações com as artes liberais, isto é, com a cultura erudita, na Alta Idade Média, temos que nos conformar, desde o início, como rotundo vazio que percorre as fontes e os documentos. Desde os últimos séculos romanos, por um período que se prolongará lentamente até o advento do pró-humanismo dos séculos XII e XIII, a produção teórica acerca da Ciência geométrica foi praticamente inexistente. Em boa medida, é por essa razão que a historiografia clássica reserva ao assunto poucas páginas em seus longos e pormenorizados tratados de Histórias das Matemáticas. (Carreira, 1999, p.205 *apud* Zaleski, 2009, p.28)

Segundo Zaleski (2009), o autor afirma que, mesmo que queiramos promover uma revisão histórica sobre o juízo negativo que se tem da Idade Média em função das tendências contemporâneas que vêm lutando para resgatar o mundo medieval para além da cultura bárbara e obscurantista, nenhum especialista pode deixar de reconhecer que alguma coisa de especial aconteceu na Europa entre os séculos V e IX, e que isso significou um movimento de inflexão cultural que, em certo momento e lugar, viveu-se a “idade das trevas”, a “idade da ignorância” e do “caos”, em que as ciências e as artes por pouco não sucumbiram. Essa guerra perdurou por quase quinhentos anos, o que representou grande prejuízo para o meio intelectual.

Nos últimos anos o homem tem buscado cada vez mais incentivar formas educacionais que garantam uma melhor visualização na área da matemática. De acordo com Lieury (1997) (*Apud* Sampaio, 2012, p. 50), “a memória de imagens é extremamente poderosa e duradoura (...) mas a memória das imagens não é a memória “fotográfica” da concepção popular, mas sim a da síntese da imagem”. A geometria permite que o aluno possa ter essa interação entre a imagem e o conteúdo lecionado, permite visualizar a conexão entre matemática e arte.

Segundo Flores (1997), a geometria é considerada um instrumento para compreender, descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, mas cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que é hoje. Mas não é só isso que comporta a ela, para Weeler (1981):

[...] “melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do “espaço intelectual” já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido. ” (Weeler, 1981, p.352 *apud* Flores, 1997, p.7)

A Geometria, pouco a pouco foi desaparecendo dos textos, das disciplinas do “*quadrivium*”, apenas a Aritmética e a Música interessavam ao clero.

Segundo o neopitagórico Nicômaco de Gerasa (séc. I), a Aritmética seria,

[...] a ciência naturalmente prioritária, mais honrosa, mais venerável e mãe e enfermeira das demais. [...] tudo o que tem sido arranjado no universo por um método sistemático parece, tanto em suas partes como no todo, ter sido ordenado de acordo com o número, pelo pensamento e mente daquele que criou todas as coisas. (VI, 1)

Até o século IX, as artes liberais ainda não tinham saído do isolamento, embora tenham ocorrido tentativas para a construção de uma educação formalizada. Nas Artes liberais, a Geometria, em particular, era valorizada por seu valor culto e, por outro lado, frágil em sua concepção.

Boécio (480-524) nasceu em Roma, filho de uma nobre família romana, foi filósofo, poeta e homem do Estado. Boécio começou a estudar cedo, foi um dos que estudou sobre a matemática, Boehner e Gilson (1970) descrevem Boécio,

Boécio é chamado o último romano e o primeiro escolástico. Exprime-se assim, muito acertadamente, o seu papel intermediário. Ele próprio, aliás, esteve plenamente consciente dessa tarefa. Compenetrado de sua missão de transmissor de um patrimônio cultural fadado ao declínio quis servir de educador daqueles povos ainda jovens e robustos que, ignorantes do idioma grego, não tinham acesso para as obras de Aristóteles e os diálogos de Platão. Alentava, ademais, o generoso ideal de reunir numa síntese compreensiva as doutrinas de Aristóteles e Platão. Seu propósito era traduzir para o latim todas as obras deles e, na base de uma série de comentários, demonstrar o acordo substancial entre os dois filósofos. Basta relancear a obra de Boécio para darmos conta do quanto pôde realizar e de quão longe a realidade dista do seu grandioso ideal (Boehner e Gilson, 1970, p.210 *Apud* Valentim 2011, p.2).

A partir do século XI, a Geometria começa a recuperar o seu prestígio. Leonardo Fibonacci (1170-1250) escreve dois livros. Fibonacci dá a Geometria um novo tratamento e coloca a Europa na vanguarda do pensamento matemático, segundo Zaleski (2009).

Mesmo assim, a Geometria não tem aumento significativo na formação universitária. Ainda segundo Zaleski (2009), a consolidação da Geometria dar-se-á graças ao trabalho de artistas e engenheiros, e não em função dos professores, filósofos ou teólogos. A partir do século XII, a Geometria começa a ganhar um corpo teórico e encontra o caminho para readquirir a importância e destaque na Arte renascentista.

Apenas com o surgimento do Renascimento é que a Geometria passa a ser vista com outros olhos, até então ela estava de certa forma “esquecida”. Só aqui verdadeiramente ela

ganha uma importância. Ao longo dos séculos, a Geometria, mudou de significado, de paradigmas, de técnicas e objetivos.

2.4 A matemática no mundo moderno

Continuaremos ainda a falar sobre o surgimento da matemática, agora no mundo moderno.

Conforme Zaleski (2009), para fins didáticos, iremos considerar a divisão da História, a idade moderna se estendeu de 1453 a 1789, e alguns acontecimentos foram marcos que delimitaram esses períodos. Podemos citar dentre eles:

- A conquista da cidade de Constantinopla, acontece no ano de 1453;
- A tomada da Bastilha, acontece no ano de 1789 marcando o surgimento da Revolução Francesa.

Figura 5 - Conquista de Constantinopla, marco que inicia a Idade Moderna



Fonte: <https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/2020/10/constantinopla-me.jpg>

O período da Renascença marca essa transição entre a Idade Média e a Idade Moderna. Zaleski (2009) cita Gombrich, que escreve sobre o período da Renascença:

A palavra renascença significa nascer de novo ou ressurgir, e a ideia de tal renascimento ganhava terreno na Itália desde a época de Giotto. Quando as pessoas desse período queriam elogiar um poeta ou um artista, diziam que sua obra era tão boa quanto a dos antigos. Giotto fora assim exaltado como um mestre que liderara um verdadeiro ressurgimento da arte; as pessoas queriam significar com isso que a arte de Giotto era tão boa quanto a daqueles famosos mestres cujas obras eram louvadas pelos antigos da Grécia e de Roma. (Gombrich, 1995, p.223 *apud* Zaleski, 2009, p.36)

Giotto (1266-1337) foi um pintor e arquiteto italiano, precursor da pintura renascentista. Após a conquista de Constantinopla, a Renascença inicia um novo período na fase da história.

Segundo Mendes (1995), foi no Renascimento que foi aplicado o aperfeiçoamento das faculdades humanas o paradigma das letras e artes clássicas, com a finalidade de educar o gosto e a expressão e de promover uma aristocracia e um cultivo esmerado do espírito. Aqui, surge o Humanismo, que pregava que o homem era o centro de tudo.

Nesse período a cultura passou por mudanças significativas, temos as disciplinas restabelecidas e o ensino das línguas instauradas. As artes como pintura, arquitetura, escultura e literatura, sofreram muitas influências dos burgueses.

Zaleski (2009) completa que as cátedras universitárias são renovadas; eruditos civis substituem os clérigos. Começam a aparecer pessoas sábias, preceptores eruditos e grandes bibliotecas. Porém essa nova ordem faz com que as críticas aumentem. Lutero traduz o Evangelho para o Alemão. E em 1492, Colombo descobre a América.

Sobre a álgebra e aritmética do Renascimento, Zaleski cita René Taton que nos traz o seguinte comentário:

[...] a álgebra do Renascimento jamais nos proporciona fórmulas, porém nos fornece regras e nos dá exemplos. Exatamente como age a gramática que também nos subministra regras que devemos seguir e exemplos aos quais devemos conformar-nos declinando os substantivos e conjugando os verbos. Bem escolhidos, bem classificados, tais exemplos – em aritmética e álgebra tanto quanto em gramática – tornam-se paradigmas. Jamais, entretanto, se transformam em fórmulas. O pensamento do aritmético e do algebrista da Renascença permanece ao nível do pensamento do gramático: é semiconcreto; segue a regra geral, mas opera sobre os casos – palavras ou números – concretos. (Taton, 1960, p.58 *apud* Zaleski, 2009, p.37)

Sobre à Arte no período Renascentista, Nunes (1999) em seu livro *A história da filosofia*, escreve que

No Renascimento, os artistas procuram imitar o que a Natureza tem de essencial e perfeito. A concepção que prevalece a partir dessa época, e para cujo triunfo colaboraram, entre outros, um Leonardo da Vinci (1452-1519), um Giordano Bruno (1548-1600) e um Galileu (1564-1642), é que a Natureza é um todo vivo, animado, regido por leis intrínsecas, que governam o curso dos astros, a queda dos corpos, a circulação do sangue, a distribuição dos elementos, o ciclo das marés e o equilíbrio das massas. Galileu dizia que o livro da Natureza está escrito em linguagem matemática, e que as suas palavras são Círculos e outras figuras geométricas. Essas palavras também são leis, determinando as formas dos seres existentes por certas relações constantes, de ordem geométrica, essenciais à perfeição do todo, e que definem a beleza própria das coisas naturais que a arte tem por objeto representar. (Nunes, 1999, p. 19)

Eles iniciaram uma mudança no pensamento com relação as Artes, e como consequência trouxe uma aproximação das Artes com a Matemática. Visto que os

personagens da Renascença, começaram a utilizar a linguagem matemática em seus escritos, como podemos ver na citação anterior, Galileu, em seu livro da Natureza, que descreve os círculos como figuras geométricas.

Nunes (1999) completa ainda sobre o Renascimento:

Verifica-se, no Renascimento, importante mudança na atitude que vinha da Idade Média, em relação à Pintura, à Escultura e à Arquitetura, então consideradas artes mecânicas, servis. Artistas como Alberti (1404- 1472) e Leonardo da Vinci reivindicam para essas artes a condição de atividade intelectual, antes somente conferida à Poesia. Dá-se o reconhecimento das Belas-Artes como síntese das práxis com a imaginação, da atividade formadora com a inteligência, que se destina a patentear a beleza das formas naturais em obras que solicitem, ao mesmo tempo, a visão sensível e a contemplação intelectual. (Nunes, 1999, p. 19)

Para Leonardo da Vinci a pintura era uma das formas de analisar a natureza, produzindo uma visão de suas formas regulares que posteriormente poderíamos traduzir para a linguagem matemática. De acordo com Nunes (2006)⁸,

Essa análise que a visão do artista realiza e que sua atividade transforma em obra, completa-se na síntese do quadro, da tela pintada, que permite ver, em sua beleza intrínseca, graças a perspectiva geométrica, um pedaço da realidade natural. (Nunes, 1999, p. 42)

Nunes (1999) ainda completa sobre a Pintura que,

Somente a Pintura é capaz de oferecer aos sentidos uma tradução sensível, sem erros, da mesma realidade perfeita que o intelecto apreende por intermédio dos conceitos gerais e do raciocínio. A função da Pintura é paralela à da ciência e da filosofia. Dada a condição especulativa atribuída a essa arte, não deve causar surpresa que Leonardo da Vinci tenha dito que são inimigos da Natureza e da filosofia aqueles que desprezam a Pintura. Pode-se ver nesse pensamento uma réplica à desvalorização platônica das "composições imitativas". (Nunes, 1999, p. 19)

Leonardo da Vinci escreveu em seu Tratado de Pintura, “O pintor deve ser universal, amar a solidão, considerar aquilo que vê e, raciocinando por si mesmo, escolher as partes mais perfeitas das coisas que vê. Há de fazer como o espelho que reflete todas as cores que colocamos diante dele, parecendo converter-se numa segunda natureza.”

Chegado o período da Renascença, é ali que começamos a resgatar a importância das Artes e da Geometria no contexto cultural e social.

No século XVIII, Nunes (1999) descreve sobre o princípio fundamental para a estética neste século,

Na Ciência, a verdade é sempre geral: os seus conceitos reduzem a realidade a determinadas formas abstratas, nas quais se dissolvem os aspectos singulares dos fenômenos. Na Arte, há predominância tanto do individual como da sensível. É por isso que ela se assemelha à Verdade, traduzindo aquilo que é possível ou provável. Diante de uma representação artística, não nos interessa saber se o objeto

⁸ NUNES, Benedito. *Introdução à Filosofia da Arte*. São Paulo: Ática, 2006.

representado existe ou não, mas se o artista, respeitando as leis da natureza, o tornou possível. (Nunes, 1999, p. 21)

Completamos aqui, sobre os principais representantes da doutrina da imitação, manifestando pensamentos que ocorreram outrora por Sócrates,

Se o escultor e o pintor podem reconhecer as coisas que são belas, associando-as entre si num modelo ideal, é porque já têm na mente a ideia de Beleza como perfeição. Na verdade, eles não imitam, e sim idealizam o modelo: o escultor seleciona, de conformidade com essa ideia, as partes de cada coisa e de cada corpo humano que melhor representam a perfeição concebida. (Nunes, 1999, p. 17)

Já sobre Platão, o autor afirma,

A Pintura e a Escultura não imitam a ideia, a forma essencial, que é a verdadeira realidade, mas a aparência sensível, já ilusória, defectiva, que o conhecimento intelectual tem por fim ultrapassar. (Nunes, 1999, p. 18)

Passando agora para o século XVIII, Nunes (1999), discorre sobre o princípio fundamental deste século, ele faz um paralelo entre a Ciência e a Arte,

Na Ciência, a verdade é sempre geral: os seus conceitos reduzem a realidade a determinadas formas abstratas, nas quais se dissolvem os aspectos singulares dos fenômenos. Na Arte, há predominância tanto do individual como do sensível. É por isso que ela se assemelha à Verdade, traduzindo aquilo que é possível ou provável. Diante de uma representação artística, não nos interessa saber se o objeto representado existe ou não, mas se o artista, respeitando as leis da natureza, o tornou possível. (Nunes, 1999, p. 21)

Segundo Zaleski (2009) é de grande importância o alvorecer do Cálculo e da Geometria Analítica no século XVII, o que possibilitou, no século XIX, um maior rigor matemático e a possibilidade da Geometria Diferencial.

É na França que surge a grande contribuição Matemática do século XIX, segundo Boyer (1974),

Ficamos até tentados a acrescentar à já notável lista de revoluções da época mais duas: uma “revolução geométrica” e uma “revolução analítica”. [...] [...] Na Matemática, seis homens iriam indicar os novos caminhos – Monge, Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot e Condorcet – [...] (Boyer, 1974, p.344 *apud* Zaleski, 2009, p. 44)

Com a expansão do ensino no século XVIII, muitos manuais de estudo de Geometria foram publicados, o que nos trouxe grande avanço no ensino da matemática.

2.5 A Idade Contemporânea, Matemática e Arte

Iniciada com a Revolução Francesa, a Idade contemporânea é marcada como o período de expansão do capitalismo e para os artistas uma nova maneira de viver e trabalhar.

A Pintura e a Arquitetura foram menos afetadas na ruptura da tradição de estilo, mas os artistas nunca estiveram livres das dificuldades, incertezas e angústias, embora nessa época, houvesse constantemente encomendas de retratos de quadros para decoração. Zaleski (2009) completa ainda que o pintor ou escultor podiam trabalhar em todas as linhas atendendo a expectativa do cliente.

Boyer em seu livro *história da matemática* fala sobre a idade “heroica” da geometria,

Dentre todos os ramos da matemática, a geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Na Grécia clássica subiu ao zênite, para cair ao nadir ao tempo da queda de Roma. Tinha recuperado parte do terreno perdido na Arábia e na Europa da Renascença; no século dezessete, esteve no limiar de uma nova era, mas foi novamente esquecida, ao menos pelos pesquisadores em Matemática, por quase dois séculos, permanecendo à sombra dos ramos prolíficos da nova análise. (Boyer, 1974, p. 387)

A Geometria teve um impulso com a revolução francesa, como já citado anteriormente,

O matemático francês Gaspard Monge (1746 – 1818), criador da geometria descritiva – base matemática de desenho técnico e considerado o pai da geometria diferencial, serviu como ministro da Marinha durante a Revolução Francesa e envolveu-se na reforma do sistema educacional francês, ajudando a fundar a “École Polytechnique”. (Melo, 2015, p.14)

Melo (2015) ainda completa em seu artigo “*Compadres especiais*”, que

No século dezoito, o ano de 1789 foi decisivo para a França, pois ocorre o início dos dez anos da Revolução Francesa, que não se limitou apenas à política. Na época da Revolução Francesa, seis personalidades iriam indicar novos rumos na matemática. Monge, Carnot, Condorcet, Laplace, Lagrange e Legendre formavam o grupo conhecido como os matemáticos da Revolução Francesa. Todos tiveram papéis importantes, contribuindo significativamente, não só para a matemática, com a produção de numerosos trabalho científico nesse período. (Melo, 2015, p.14)

Em meados do século XIX, a progressão no conhecimento matemático, começou a causar conflitos, Melo (2015) continua,

O século XVIII apresentou um grande desafio pois, encontrava-se entre o século XVII, o século da invenção da geometria analítica de René Descarte (1596 – 1650), também conhecido por Renatus Cartesius, e do cálculo diferencial e integral, utilizado pelos matemáticos para analisar, qualitativamente ou quantitativamente, as taxas de variação de grandezas, auxiliando em vários conceitos e definições nas ciências, e o século XIX, onde houve o florescimento da geometria, e em particular das geometrias não euclidianas – geometrias que não satisfazem o postulado das paralelas de Euclides, e o surgimento do rigor matemático, alimentado pelo aparecimento de três correntes filosóficas na matemática: o logicismo de Russell, Frege e Leibniz, o intucionismo ou construtivismo de Brouwer e Kant e o formalismo de Hilbert. (Melo, 2015, p.14)

Zaleski (2009), cita Hobsbawm (2008) que finaliza sobre o século XXI,

Não sabemos para onde estamos indo. Só sabemos que a história nos trouxe até este ponto e por quê. Contudo, uma coisa é clara. Se a humanidade quer ter um futuro reconhecível, não pode ser pelo prolongamento do passado ou do presente. Se

tentarmos construir o terceiro milênio nessa base, vamos fracassar. E o preço do fracasso, ou seja, a alternativa para uma mudança da sociedade, é a escuridão. (Hobsbawm, 2008, p.504 *apud* Zaleski, 2009, p.52)

A resposta de Hobsbawm serve não apenas a Arte e Matemática do século XXI, mas a toda humanidade. Segundo ele, o século XXI seria o século dos teóricos dizendo aos práticos o que deviam buscar e encontrar em suas teorias, o que podemos chamar de: o século dos matemáticos.

3. ESCHER E SUA OBRA

Neste capítulo tratamos especificamente sobre a vida de Maurits Cornelis Escher, dividimos ele em três seções. Na primeira seção, apresentamos o artista no que concerne a trajetória pessoal, sobre os três temas de suas obras e sobre como surgiu o intenso interesse em estruturas matemáticas e formas geométricas.

Na segunda seção, tratamos sobre a imaginação e de onde surgia as inspirações para as obras do Artista, bem como as temáticas distintas ao longo de sua carreira.

E na terceira e última seção, discorremos sobre as fases em que foram divididas as suas obras, bem como as evidências do próprio artista que utilizava a arte como forma de conhecimento matemático. Podemos identificar em suas obras o alto índice de desenhos geométricos na composição e o apreço que o artista tinha por eles, conseguindo assim, extrair delas aspectos matemáticos.

3.1 Maurits Cornelis Escher

“Ter paz com essa vida peculiar; aceitar o que não entendemos; esperar calmamente pelo que nos espera, você tem que ser mais sábio do que eu.”

(M.C. Escher)

Segundo Barth (2009), Maurits Cornelis Escher nasceu em 17 de junho de 1898, na cidade de Leenwarden, na Holanda, e faleceu em 1972 no Hospital Hilversum antes de ter completado os 74 anos. Filho caçula de George Arnold Escher, engenheiro civil e chefe de um departamento de engenharia e de Sara Gleichman, Escher faz seu primeiro trabalho gráfico, uma linofratura de seu pai G.A. Escher. Maurits tem uma forte ligação com seu pai e também é muito parecido com ele.

Figura 6 - Pai de Escher, linocut, 1916



Fonte: <https://www.escherinhetpaleis.nl/over-escher/tijdlijn/>

De uma família da alta burguesia, Escher cursou a Escola de Arquitetura e Arte Decorativa, em Haarlem, Holanda. Foi um artista gráfico que ficou conhecido pelas suas xilogravuras, litografias e meios-tons. Sempre dedicado as Artes, com a entrada na Escola de Arquitetura, ele se aproximou das Artes Gráficas, que consiste na criação e reprodução de obras originais por meio da técnica da gravura. (Barth, 2009, p.74).

Escher se tornou conhecido por sua grande capacidade de gerar imagens com efeitos de ilusões de ótica.

Figura 7 - M. C. Escher



Fonte: <https://i2.wp.com/arteref.com/wp-content/uploads/2018/09/escher-retrato.jpg>

Em 1919, Escher ingressou na Belas Artes, em Haarlem, com o intuito de estudar Arquitetura, porém ele começa a desenvolver o interesse por desenho e gravura, então,

abandona a Arquitetura, e passa a estudar Artes Decorativas, incentivado pelo professor Samuel Jessurun de Mesquita.

Segundo Frazão (2020), por volta do ano 1921, Escher e sua família fazem uma viagem para a Itália, onde passa a se tornar um dos lugares preferidos do artista. No ano de 1923, ele volta a Itália e decide visitar diversas cidades, entre elas, podemos citar: Florença, Siena e Ravello, essas cidades trouxeram inspirações para o nosso artista e seus trabalhos.

Escher viajou pela Espanha, onde passou por Madri, Toledo e Granada, e ficou encantado com alguns mosaicos na decoração islâmica ali presente, que também serviu para inspiração para muitos de seus trabalhos.

Conforme Art.Ref (2020), retornando a Itália, Escher conhece Jetta Umiker, com quem se casou em 12 de junho de 1924. O casal mudou-se para Roma onde, em 1926, adquiriu uma casa e tiveram três filhos. Porém em 1935, durante o fascismo de Mussolini, Escher foi embora da Itália e mudou-se para a Suíça; em 1937 ele resolve mudar, e vai para a Bélgica.

Figura 8 - Jetta Umiker e Escher

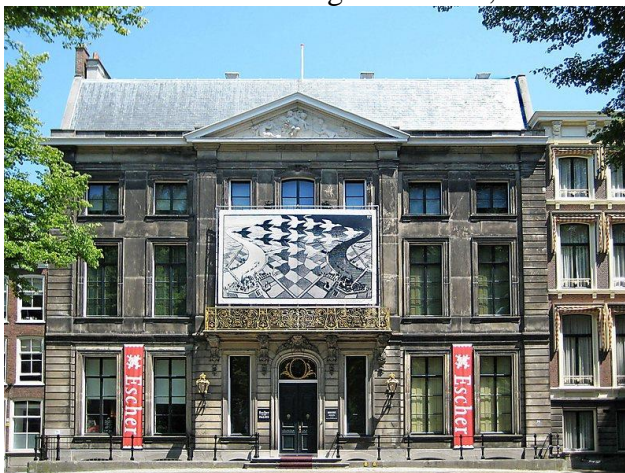


Fonte: [https://i2.wp.com/arteref.com/wp-](https://i2.wp.com/arteref.com/wp-content/uploads/2018/09/jetta.jpg?resize=586%2C1024&ssl=1)

[content/uploads/2018/09/jetta.jpg?resize=586%2C1024&ssl=1](https://i2.wp.com/arteref.com/wp-content/uploads/2018/09/jetta.jpg?resize=586%2C1024&ssl=1)

Em 1941, durante a Segunda Guerra Mundial, ele retorna a Holanda; em 1944, seu professor Samuel Mesquita morre. Escher organiza um memorial para seu amigo no Museu Stedelijk e protege seus trabalhos ali.

Figura 9 - Casa de Escher na Lange Voorhout, na Holanda



Fonte: <https://i1.wp.com/arteref.com/wp-content/uploads/2018/09/Escher-home-Lange-Voorhout.jpeg?w=800&ssl=1>

M. C. Escher, como ficou popularmente conhecido, permanece no anonimato até o ano de 1951, onde começou a vender as suas xilogravuras e litogravuras. O sucesso foi tanto que o artista chegou a reclamar por não sobrar tempo para produzir nada novo. No ano de 1954 ele começa a se destacar pela geometria presente em suas obras, característica da arte islâmica, adquirida pelas inspirações que ele teve em sua viagem à Espanha.

Escher tinha em seus padrões de artes, a necessidade de representar construções impossíveis, explorações do infinito, padrões geométricos que se completavam. Também podemos observar em suas obras isometrias geométricas. Apesar de não ter sido o melhor aluno na turma de matemática quando estudava, Escher demorou a convencer seus pais sobre ser Artista, mas no fim, recebeu ajuda.

Glauce Barth (2009), baseado em Ernst (1991), argumenta que durante o seu trabalho, Escher diferenciou em três temas as suas obras: estrutura do espaço; estrutura da superfície e representação pictórica da relação entre espaço e superfície plana. Na estrutura do espaço, apresenta-se em três categorias: composições paisagísticas, interpenetração de mundos diferentes e sólidos geométricos abstratos. Ao segundo tema, a estrutura da superfície, há a base para três grupos de gravuras: metamorfose, ciclos e aproximação ao infinito. Ao terceiro e último tema, representação pictórica da relação entre espaço e superfície plana, há, mais uma vez, três grupos de gravuras: a essência da representação (conflito espaço-superfície), perspectiva e figuras impossíveis.

Por volta do ano de 1937, surge o interesse intenso em estruturas matemáticas, uma outra dimensão, sobre uma superfície bidimensional e, às vezes, reprodução além do

tridimensional; antes disso ele apenas produzia obras paisagísticas, com características muito próximas da realidade.

Em “*o mundo mágico de Escher*”, catálogo publicado pelo Banco do Brasil, Pieter Tjabbes descreve sobre Escher,

Escher era um gênio da imaginação lúdica e um artesão habilidoso nas artes gráficas, mas a chave para muitos dos seus efeitos surpreendentes é a matemática. Não a matemática dos números e das fórmulas, mas a geometria em todos os seus aspectos. Escher podia imaginar os efeitos fantásticos, mas a geometria era uma ferramenta necessária para capturar esses efeitos. Também tratava da relatividade de forma agradável, obrigando-nos a perguntar: “O que eu percebo é realmente o que parece ser?” (Tjabbes, 2011, p.9)

Barth (2009) complementa ainda que Maurits Cornelis Escher não foi o único artista que se inspirou na matemática para exprimir o pensamento, tivemos outros artistas, poetas e escritores, dentre eles podemos citar: Oscar Niemeyer (arquiteto), Piet Mondrian (artista plástico), Rômulo de Carvalho (poeta), entre outros.

Entre tantos talentos, para este estudo, escolheu-se Escher, principalmente pelos conceitos matemáticos que podemos encontrar em suas obras, eles são inseridos por pura intuição.

Escher, embora utilizasse a geometria em suas obras, não detinha conhecimento matemático acadêmico, a arte islâmica foi quem lhe proporcionou conhecer as regras e conceitos matemáticos. Barth (2009) argumenta ainda que, ao dedicar-se aos estudos, ele conseguiu encaixar os desenhos geométricos sem deixar espaço entre as formas geométricas; isto é, foi capaz de elaborar figuras que se apresentavam como continuação uma das outras, na divisão regular da superfície.

Quando pensamos em espaço, logo nos veem a mente, estrelas, planetas, galáxias, infinito. Neste trabalho, destacaremos o espaço e a forma na matemática e na arte utilizados por M.C. Escher. Podemos representar a matemática no plano, no espaço de duas e três dimensões.

Segundo Barth (2009) em algumas obras de Escher após 1937, propõe-se uma interpretação da representação artística, a maneira de Einstein, onde o tempo é a quarta dimensão espacial. Além das medidas que já tínhamos, de altura, largura e profundidade, passamos a ter a quarta medida, o tempo.

As Artes de Escher revolucionaram a noção clássica de perspectiva, com efeitos longe da tipicidade, combinações impossíveis; ele não se preocupava em se deter apenas a realidade.

3.2 M. C. Escher e sua imaginação

“Escher não somente era um grande artista, com também, um gênio” (Ernst, 1991 apud Barth 2009, p.78). Entender que meios utilizava para compor suas obras, como conseguia e o que pensava durante a criação, é realmente um desafio. Glauce Barth baseado em Ernst (1991).

As obras de Escher podem nos trazer formas de conhecer os conceitos geométricos e representar o mundo. Elas poderiam ser utilizadas na escola, dando ao processo de ensino-aprendizagem uma contextualização entre Arte e Matemática, onde o aluno passa a desenvolver o senso crítico de observador, envolvendo a leitura de imagens de obras de artes e realizando argumentação de acordo com as imagens observadas. Skovmose (1994) diz que uma Educação Matemática crítica é caracterizada através de preocupações, e formular essas preocupações é importante para se estabelecer uma rede de conceitos. Ele completa ainda que, a aporia da pesquisa em Educação Matemática crítica refere-se a falta de condições adequadas para refletir sobre a matemática e o conhecimento em ação, e a necessidade de conduzir tais reflexões.

Segundo a BNCC (2018) é importante iniciar os alunos gradativamente na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. A Matemática com sua linguagem visual e formal se completa juntamente com a Arte, pois, como sabemos, o homem naturalmente procura no ambiente e espaço que está inserido constituir relações matemáticas sem perceber. Já nascemos e aprendemos os mistérios da vida e da matemática, sem notar que ao seu redor, existe essa contextualização.

Escher certamente observava atentamente tudo que estava ao seu redor, mostrando manifestar ideias matemáticas em sua arte. Transformava em gravuras o que observava e suas ideias relacionadas à geometria. Assim, podemos utilizar suas gravuras nas aulas de matemática.

Glauce Barth (2009), cita Souza (1964),

Preliminarmente, digamos que do ponto de vista científico, Arte é expressão legítima de um tipo de personalidade mental e isto porque qualquer definição envolve dois princípios artísticos fundamentais: o da forma – que se deriva de nossa opinião do mundo orgânico e do aspecto universal de todas as obras artísticas; e o princípio da criação, peculiar à mente humana e que a leva a criar e apreciar a criação de símbolos, fantasias, mitos, etc. A forma é uma função da percepção; a criação, da imaginação. Essas duas atividades mentais esgotam, em seu jogo dialético, todos os aspectos psíquicos da experiência estética (SOUSA, 1964, p.20 apud BARTH 2009, p. 80)

Ainda sobre Escher, Barth (2009) completa,

O artista se expõe com sua arte, e o espectador assim espera dele. A forma, a criação, a ausência ou presença de cor, por exemplo, servem de auto expressão para o artista. E, se quiser entender o processo imaginativo de Escher, convém buscar essa resposta à luz do movimento artístico surrealista. (Barth, 2009, p. 80)

Dito isso, iremos adentrar agora sobre o surgimento do Surrealismo e a relação do artista com esse movimento.

O surrealismo, surgiu em Paris, no ano de 1924, com a publicação do Manifesto Surrealista, escrito por André Breton (1896-1966). A arte aqui é surreal, está além do real, fugindo da nossa compreensão racional, relacionando-se com o imaginário e o absurdo.

Os estudos do surrealismo foram fundamentados em Freud, especificamente sobre a exploração do inconsciente. Segundo Barth (2009) a este grupo juntaram-se também alguns outros artistas tal como o pintor russo e designer Marc Chagall (1887- 1985) e também pintores e artistas gráficos espanhóis tais como Juan Miró (1893 - 1983) e Salvador Dalí (1904 – 1989).

Glauce Barth (2009), baseado em Ernst (1991) afirma que não se pode dizer que as obras de Escher são surrealistas ou inspiradas no surrealismo. O fato é que, à luz desse movimento, com representações de objetos impossíveis de existir no tridimensional, as obras de Escher, revelam uma libertação da realidade na qual se enraíza muito próxima do Surrealismo.

Para Escher, o surrealismo tinha obras passageiras que não se encaixavam no que se defendia, ele tinha uma forma peculiar de ver a arte: suas criações recorrem ao pensamento visual, pensamento matemático, a forma de pensar e perceber sobre o mundo. Em suas representações, a lógica foge da realidade propositalmente, são enigmáticas. Escher faz com que o observador se encante, e aguçe o pensamento imaginativo, busque nelas, o espaço, a forma, a estrutura envolvida.

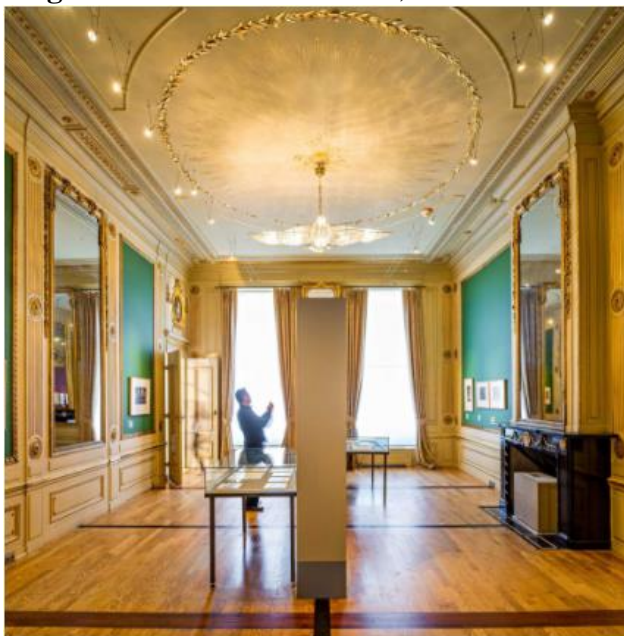
Ele era capaz de realizar a composição e decomposição dos elementos, de forma organizada e clara. Dessa forma, Escher, em suas obras, buscava alcançar o máximo de conhecimento possível que sua mente pudesse processar.

Nessa perspectiva, Escher escreve: “Nas minhas gravuras eu tento mostrar que vivemos em um mundo belo e ordenado, e não em um caos sem regras ... Eu não consigo deixar de brincar com as nossas certezas estabelecidas. Tenho grande prazer, por exemplo, em confundir deliberadamente a segunda e a terceira dimensões, plana e espacial, e ignorar a gravidade.” (M. C. Escher)

A arte de M. C. Escher, já vem por mais de meio século maravilhando milhões de pessoas, de todas as idades e pelo mundo todo. Há dezenove anos foi aberto o Museu do

Escher na cidade de Haia, em sua pátria, a Holanda. Quando olhamos as obras de Escher, muitas vezes, voltamos a um segundo olhar para imagem, para conferir aquilo que viu.

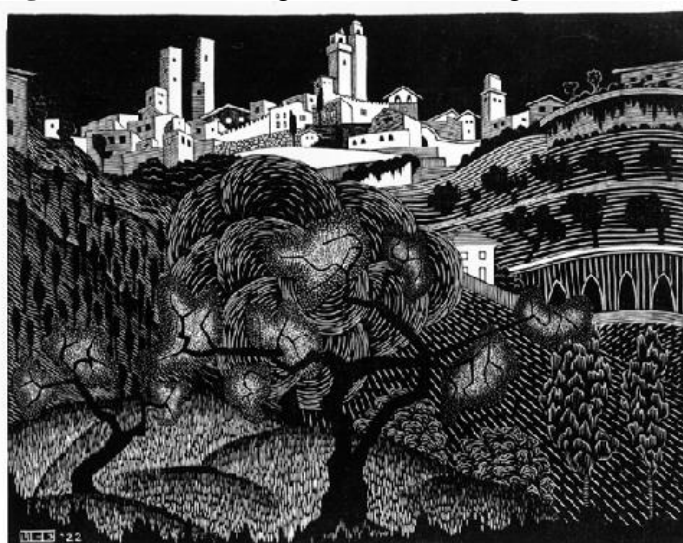
Figura 10 - Museu de Escher, Holanda



Fonte: <https://www.escherinhetpaleis.nl/tentoonstelling/escher-tentoonstelling/>

Em 1922, quando Escher vai para a Itália, ele descobre um país, uma paisagem pelos quais se apaixonou. Porém, as xilogravuras e litografias do período italiano inicial não exibem a realidade fotograficamente. Elas revelam a visão escheriana, o que ele sentia diante de determinada cena: a essência do local. (Tjabbes, 2011, p.21)

Figura 11 - San Gimignano, 1922, Xilogravura



Fonte: https://uploads0.wikiart.org/images/m-c-escher/not_detected_204659.jpg

Tjabbes (2011) completa que, em 1940, seu amigo holandês Hein 's Gravesande dizia que essas gravuras da Itália “fazem da realidade uma síntese, um todo ordenado”.

Ainda segundo Tjabbes (2011),

O verdadeiro Escher teria desabrochado apenas em 1937, dois anos após a saída da Itália: é quando surgem as ladrilhagens e as ilusões de ótica, ao passo que até então reinavam os temas tradicionais: paisagens, natureza, vistas urbanas. De acordo com essa opinião, portanto, há dois tipos de obras: o Escher um pouco antiquado que trabalhou até 1937, e o outro Escher, espantoso, que virou o mundo de cabeça para baixo com sua arte. (Tjabbes, 2011, p.23)

Segundo as críticas recentes, o realismo e a ilusão de ótica foram para Escher ferramentas gêmeas, ideais para expressar a combinação da eternidade (perspectiva e espaço) com a infinitude (ladrilhamento e tempo), afirma Tjabbes (2011).

Escher ao longo da vida sempre manteve grande curiosidade pela natureza. Sua última obra de arte é uma representação de três serpentes unidas em um complexo sistema de anéis entrelaçados, onde não conseguimos identificar o começo e o fim da imagem.

Figura 12 - Serpentes, 1969



Fonte: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro-Serpentes%202.jpg>

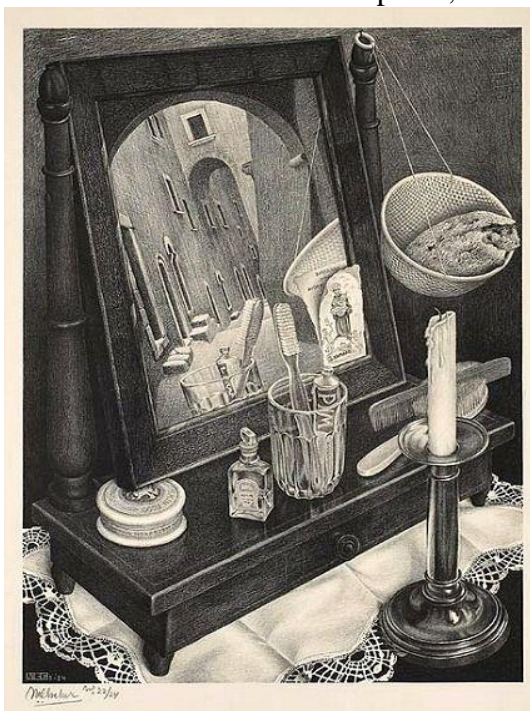
3.3 Fases da obra de Escher

Berro (2008), cita que no livro “O Espelho Mágico de M. C. Escher” o matemático Bruno Ernst identifica quatro fases no trabalho de Escher: A primeira fase vai de 1922 até 1937, onde a grande temática do seu trabalho foi a confecção de gravuras de paisagens e

pequenas cidades do sul da Itália. Como demonstração, podemos observar na litografia “Natureza Morta com Espelho”, de 1934.

Sobre a Natureza Morta com espelho, Tjabbes (2011), descreve ligeiramente, “o espelho está ligeiramente inclinado para cima, de forma que não se poderia ver nele a ruela. Mas a realidade escheriana tem aparência totalmente plausível. De forma sutil, o reflexo incorpora o espaço de fora para dentro.”

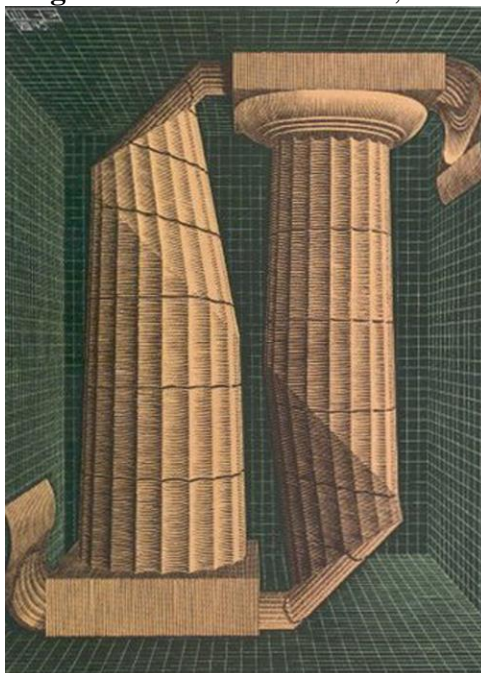
Figura 13 - Natureza morta com espelho, 1934



Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/fd/1d/7f/fd1d7f8392efb519efbd33deb68c0ea2.jpg>

Berro (2008) Segundo Ernst, afirma ainda que o próximo período da vida do artista vai de 1937 até 1945, caracterizado pelos desenhos de metamorfoses, nas quais se observam ciclos e a passagem de figuras bidimensionais em tridimensionais. Tjabbes (2011), completa que, estas obras não teriam sido possíveis sem um entendimento aprofundado dos ladrilhamentos do plano, que Escher inicialmente abordou de forma intuitiva. Porém quem primeiro o familiarizou com o aspecto matemático desse assunto foi seu irmão mais velho, Berend, professor de geologia na Universidade de Leiden, que em 1937 forneceu a Escher obras de cristalografia, ao perceber a estreita relação dessa ciência com o seu trabalho.

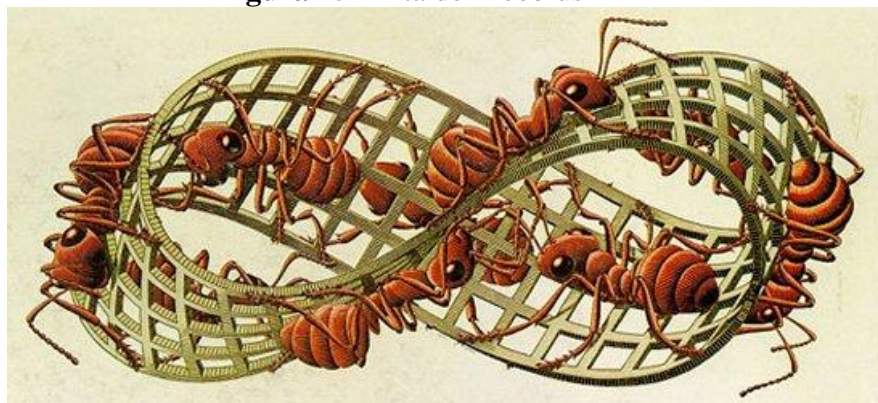
Figura 14 - Colunas Dóricas, 1944



Fonte: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro%20-%20colunasdoricas.jpg>

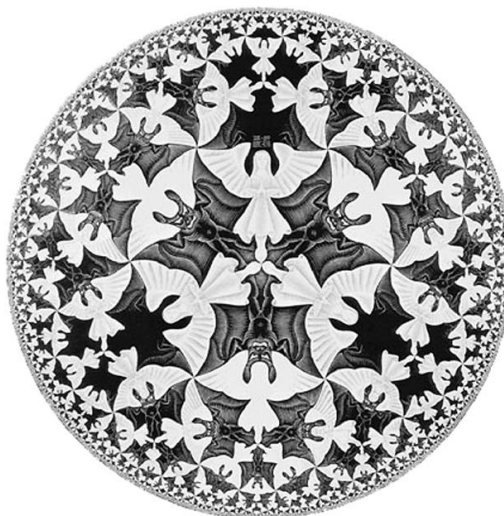
De 1946 até 1956, Escher brinca com a perspectiva: com essa ferramenta é possível manipular a atmosfera de uma paisagem. Muitas vezes Escher adota um ponto de vista anormalmente alto ou baixo com relação ao objeto. (Tjabbes, 2011, p.21). As gravuras de Moebius, pertencem a este grupo:

Figura 15 - Fita de Moebius

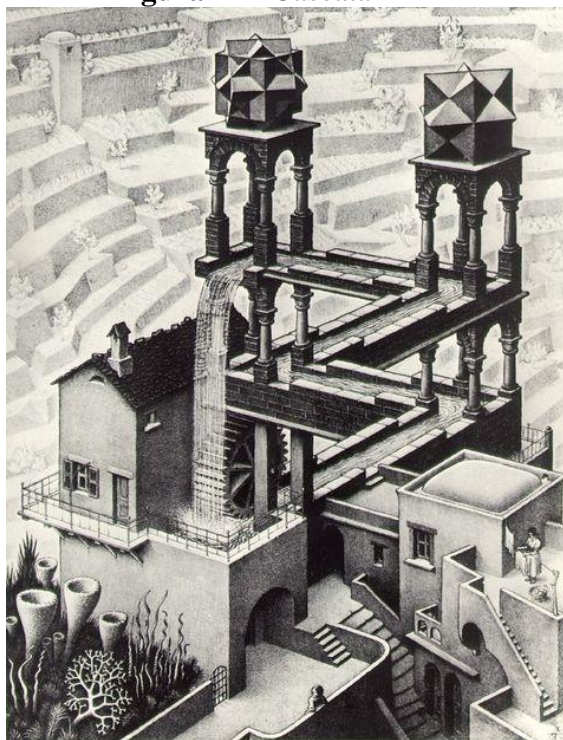


Fonte: <https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/imagens/010160150130-fita-mobius-escher.jpg>

E por fim, ainda tomando como base o que Berro (2008) cita, a quarta fase vai de 1956 até 1970 e é caracterizada pelo período da aproximação do infinito, na qual ele faz várias gravuras que têm como tema central o infinito.

Figura 16 - Limite circular

Fonte: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro%20-%20Limite%20circular%20IV%202.jpg>

Figura 17 - Cascata

Fonte: https://jovemnerd.com.br/wp-content/uploads/Escher_Waterfall.jpg

Nesta obra “Cascata” podemos notar pequenas ilusões de óticas. A água de uma cascata move a pedra de um moleiro, que corre em ziguezague por uma calha entre as torres até formar a cascata e cair novamente. Os traços do desenho se conectam de modo a reproduzir uma impossibilidade. Segundo Tjabbes (2011), se seguirmos com os olhos as linhas desta figura, de repente fazem-se necessárias mudanças súbitas na interpretação da

distância entre o objeto e o observador. Escher descreve sobre os objetos geométricos inseridos em sua obra: “Embora as torres sejam da mesma altura, a da esquerda tem um pavimento a mais. Os poliedros nos topos não têm nenhuma importância especial. Eu os desenhei ali simplesmente porque gosto muito deles; no da esquerda temos a interseção de três cubos e, no da direita, três octaedros. ”

Berro (2008) completa ainda sobre a última fase de Escher, que diante do foi exposto até então, não podemos estudar este artista sem termos o conhecimento da trajetória de vida e profissional que o caracteriza e o tornou mundialmente conhecido. Isto significa que elas são essenciais na elaboração do desafio que nos propusemos a analisar, ou seja, as relações de Escher com as matemáticas e das matemáticas com Escher.

Berro (2008) finaliza dizendo que, o que vimos até aqui, nos leva a pensar que a produção artística de Escher tinha para ele um determinado significado, é evidente que não é o mesmo que um leigo ou que um matemático tem para a sua obra, o seu trabalho deve ser analisado tendo como meta extrair aspectos matemáticos ou não. Nos fazendo refletir de maneiras diferentes de acordo com as nossas mentes.

4. ESCHER NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UM LIVRO DIDÁTICO

Este capítulo dedica-se a explanação acerca das obras do artista M.C. Escher e as suas visões. Traremos também uma análise do livro didático, que é atualmente um dos recursos mais utilizados na sala de aula. Veremos que é comum a inserção das obras de Escher em atividades de matemática e na exposição de conceitos nos livros didáticos. Iremos dividir o capítulo em 3 seções.

Na primeira seção, tratamos sobre o olhar de Escher e suas cosmovisões em suas obras, trazendo também visões matemáticas e os elementos artísticos presentes em suas obras.

Já na segunda seção, falaremos sobre o livro didático no auxílio do processo de ensino e aprendizagem, e a sua utilização como recurso alternativo em sala de aula.

Na terceira e última seção, traremos o livro didático analisado. Mostraremos primeiramente a apresentação de forma geral do livro e, em seguida a sua organização praxeológica.

4.1 Humanas e Exatas, existe essa aproximação nas obras de Escher?

“O que eu crio na luz do dia é apenas um por cento do que eu vi na escuridão.”

(M. C. Escher)

A curiosidade humana nos leva a buscar novos olhares, descobertas, tendências de toda e qualquer natureza.

Por meio de suas obras, Escher nos mostra novos olhares sobre as ciências exatas e humanas, traz uma forma de buscar por meio de imagens novas visões que podem ser trabalhadas nas escolas, como uma nova forma de descrever uma nova realidade.

Nas obras de Escher, podemos contemplar e analisar o que nos é perceptível, como por exemplo, o tema da obra, linhas e formas utilizadas, dimensões da obra, sensação e emoção que a obra nos quer transmitir, qual foi a técnica utilizada, tudo isso nos proporciona conhecimento e experiência, em cada obra analisada.

Para iniciarmos a discussão sobre as análises de obras de arte do Escher, iremos primeiramente definir e diferenciar sobre o “olhar e “ver” uma imagem. O olhar é uma

interiorização, pede compreensão para nós mesmos, é uma experiência única, individual. O ver é imediato, é frio, sem interesse, não aguça nossa vivência, não provoca atitudes.

A percepção visual é, de todos os modos de relação entre o homem e o mundo que o cerca, um dos mais bem conhecidos. Há um vasto corpus de observações empíricas, de experimentos, de teorias, que começou a constituir-se desde a Antiguidade. O pai da geometria, Euclides, foi também, em torno de 300 a.C, um dos fundadores da óptica (ciência da propagação dos raios luminosos) e um dos primeiros teóricos da visão. Na era moderna, artistas e teóricos (Alberti, Dürer, Leonardo da Vinci), filósofos (Descartes, Berkeley, Newton), e, é claro, físicos, empenharam-se nessa exploração (AUMONT, 2005, p.17 *apud* BARTH,2009, p. 86).

Segundo Barth (2009) apesar de terem sido realizados diversos estudos, esse fenômeno complexo ainda não está totalmente definido, não se sabe muito sobre ele, mas, assim mesmo, há a tentativa de expor tão clara, quanto possível, a perspectiva de abordagem desta questão.

De forma paradoxal, a imagem possui apenas duas dimensões, porém ao olhar e ver, podemos detectar objetos em três dimensões. Escher promoveu uma forma de ver a tetradimensão, esta vai além da imagem de objetos paradoxais, ela é, portanto, um estilo próprio, elaborado por ele no ano de 1937, segundo Barth (2009).

Barth (2009) segundo Arnheim (1989), fala que nos últimos anos, o pensamento visual surpreendentemente tem se propagado como uma forma de conhecimento.

Investigaremos, pois, as obras escherianas sob os aspectos estéticos, visto que Escher cria uma ilusão, ao interligar figuras, utilizando elementos da Matemática juntamente com os elementos da Arte.

Iniciaremos a explanação com a obra “Ordem e Caos”, onde podemos localizar um dodecaedro, que é um poliedro que possui 12 faces planas, Escher descreve sua obra,

No centro, colocou-se um dodecaedro em estrela, cercado por uma esfera transparente, como uma bola de sabão. Neste símbolo da ordem e da beleza, espelha-se o caos: uma aglomeração heterogênea de toda a espécie de coisas inúteis, estragadas e amarrotadas” (Escher, 2004, p. 14)

"Na física newtoniana, o problema de três corpos é difícil, mas o problema de dois corpos pode ser resolvido de forma exata; na relatividade geral, dois corpos são complicados, mas um corpo pode ser resolvido de forma exata; na gravitação quântica o vazio é intratável!"
(Frank Wilczek)

Figura 18 - Litografia Ordem e Caos



Fonte: <https://4.bp.blogspot.com/-46OvaEgT9oU/U2McgZahaKI/AAAAAAAAAio/8yeGnynIE3c/s1600/Order-and-Chaos.jpg>

Ainda sobre a obra, Escher completa a sua análise dizendo: “Esta gravura simboliza a Ordem e o Caos. A beleza perfeitamente ordenada de um dodecaedro estrelado acoplado a uma esfera translúcida, como uma bola de sabão, está rodeada de objetos amassados, descartados e inúteis. Tive de escolher com muito cuidado entre os muitos objetos heterogêneos de um depósito de lixo, pois cada peça deveria ser reconhecível.” (M.C. Escher)

Nessa pequena amostra é possível observar que Escher tentava transmitir uma ordem e beleza sobre o mundo, e ao redor podemos detectar figuras amarrotadas, estragadas, que alguém deixou, causando uma pequena desordem. Por conveniência, elas caminham juntas, assim como a nossa natureza, o Universo nem sempre é ordem.

Na obra “Ordem e Caos”, Escher procura mostrar padrões de perfeição, e ao mesmo tempo romper com eles. Barth (2009) completa sobre a obra: Escher estudava noções geométricas; brincava com elas; identificava semelhanças e diferenças; percebia regularidades; enfim, foi livre para exercer a criatividade, a iniciativa, a cosmovisão. Com autonomia intelectual construiu graficamente as próprias percepções.

Podemos minuciosamente analisar a obra e extrair dela tudo o que podemos ver e perceber. Construir uma visão coerente, e compreender que através dela podemos identificar

as ciências humanas e exatas, realizando uma análise crítica das imagens inseridas no ambiente.

4.2 O livro didático

Inicialmente podemos nos perguntar, a quem destina-se o Livro Didático? Quando ele surgiu? Para que serve?

Alguns autores sugerem que o livro didático surgiu no século XIX, onde ele surge como material adicional à Bíblia,

No século XIX, o livro didático surgiu como um adicional à Bíblia, até então, o único livro aceito pelas comunidades e usado nas escolas. Somente por volta de 1847, os livros didáticos passaram a assumir um papel de grande importância na aprendizagem e na política educacional. Os primeiros livros didáticos, escritos sobretudo para os alunos das escolas de elite, procuram complementar os ensinamentos não disponíveis nos Livros Sagrados. (Oliveira et al, 1997, p. 26)

Outros autores informam que os livros didáticos sempre estiveram presentes na escola, até mesmo antes da invenção da imprensa,

Sua origem está na cultura escolar, mesmo antes da invenção da imprensa no final do século XV. Na época em que os livros eram raros, os próprios estudantes universitários europeus produziam seus cadernos de textos. Com a imprensa, os livros tornaram-se os primeiros produtos feitos em série e, ao longo do tempo a concepção do livro como “fiel depositário das verdades científicas universais” foi se solidificando (Gatti Júnior, 2004, p.36).

Com a ampliação dos sistemas educacionais, surgiu o desafio de formar professores, neste momento ainda não existia cursos de formação universitária, com isso, o livro didático passa a ser instrumento fundamental para compensar a ausência de docentes com formação adequada.

De acordo com FNDE (s/d), no Brasil, as primeiras ideias sobre a criação do livro didático, surgiram em 1929, no governo de Getúlio Vargas, mas tudo isso ficou no papel por muito tempo. Em 1971, o Instituto Nacional do Livro (INL) passa a desenvolver o programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental. Em 1976, com a extinção do INL, a Fundação Nacional do Material Escolar (Fename) torna-se responsável pela execução do programa do livro didático. Estes recursos para execução do programa do livro provêm do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Em 1983, substituindo a Fename, é criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), incluindo aqui as demais séries do ensino fundamental. Apenas em 1985, com a reformulação do decreto, o Programa

do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef) dá lugar ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Este último nasce no ano de 1985, já no contexto de redemocratização. O PNLD, é marcado por uma progressiva descentralização nos processos decisórios e, ao mesmo tempo, criando um mercado editorial gigantesco nos últimos anos.

O livro didático, apresenta diferentes aspectos do conhecimento humano, ele deve ser usado como recurso alternativo na sala de aula, não apenas como instrumento predominante do ensino no Ensino de Matemática.

O professor não deve se limitar apenas ao uso do livro didático, ele deve utilizar de outros recursos educacionais para que torne o ambiente escolar contextualizado com as demais áreas. O livro didático deve servir como complemento educacional, sobre isso, Bezerra e Luca (2006), argumentam que,

Elemento importante na construção do saber escolar e do processo educacional espera-se que contribua para o aprimoramento da ética, imprescindível ao convívio social e à construção da cidadania. Nesse sentido, há que se verificar, nos textos e nas atividades, a existência de uma real preocupação em despertar no aluno a prática participativa, a sociabilidade, a consciência política, enfim, a cidadania, entendida em seu sentido mais amplo. (Bezerra e Luca, 2006, p. 37)

Mas afinal, o que é livro didático?

Segundo Santos (2019), procurando a definição na internet, veremos que *livro* é um conjunto de folhas, impressas ou não, que estão reunidas e unidas por cola ou costura etc., de forma que fiquem encadernadas. Já a palavra “*didático*”, significa que serve para ensinar ou aprender, é destinado a instruir, é relativo ao ensino.

Podemos entender com isso, que, livro didático é um conjunto de folhas, com o objetivo de transmitir a aprendizagem, guiar e instruir os alunos e professores. Existem dois tipos de livros didáticos, o livro do aluno e o livro do professor. No livro do professor, podemos identificar observações em “vermelho” nos exercícios propostos, com orientações que devem ser repassados aos alunos para um melhor direcionamento. Entretanto, o professor não precisa se prender apenas a essas observações, ele pode interagir de forma que ache mais cômoda e torne mais fácil a compreensão dos alunos.

Santos (2019), cita Silva (1996), que em sua visão fala que os livros didáticos, fazem os professores reféns da utilização ininterrupta deste recurso em sala de aula e faz com que percam autonomia, ele completa ainda que,

A intermediação desses livros, na forma de costume, dependência e/ou "vício", caracteriza-se como um fator mais importante do que o próprio diálogo pedagógico, que é ou deveria ser a base da existência da escola. Resulta desse lamentável fenômeno uma inversão ou confusão de papéis nos processos de ensino-aprendizagem, isto é, ao invés de interagir com o professor, tendo como horizonte a (re)produção do conhecimento, os alunos, por imposição de circunstâncias,

processam redundantemente as lições inscritas no livro didático adotado[...] (Silva, 1996, p.11 *apud* Santos, 2019, p.27)

De fato, devemos utilizar o livro didático como recurso didático, de forma que possa auxiliar no repasse dos conteúdos em sala de aula, ele não deve ser um obstáculo para o ensino. Santos (2019) cita Lajolo (1996), que fala sobre o poder que o professor tem de tornar o livro didático bom ou ruim,

O caso é que não há livro que seja à prova de professor: o pior livro pode ficar bom na sala de um bom professor e o melhor livro desanda na sala de um mau professor. Pois o melhor livro, repita-se mais uma vez, é apenas um livro, instrumento auxiliar da aprendizagem. (Lajolo, 1996, p. 8 *apud* Santos, 2019, p.27)

4.3 Apresentação e análise do livro escolhido

Esta seção foi subdividida em duas seções. Na primeira iremos apresentar o livro escolhido e na segunda realizaremos a análise propriamente dita do livro com situações em que podemos encontrar a inserção do artista M.C Escher nos conteúdos matemáticos.

4.3.1 Apresentação do livro

Nesta seção, iremos realizar a análise o livro didático utilizado para o ensino da matemática no novo ensino médio.

A pesquisa investiga a coleção da editora FTD: Matemática, geometria e trigonometria, buscando identificar como essa coleção aborda os conteúdos de geometria e como podemos encontrar as ligações com o artista estudado nesta pesquisa: M.C. Escher.

Atualmente o ensino da matemática está pautado pelas indicações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). As perspectivas são de atender os alunos do novo século XXI, reconhecendo “as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação. ” (BNCC, 2018, p.462)

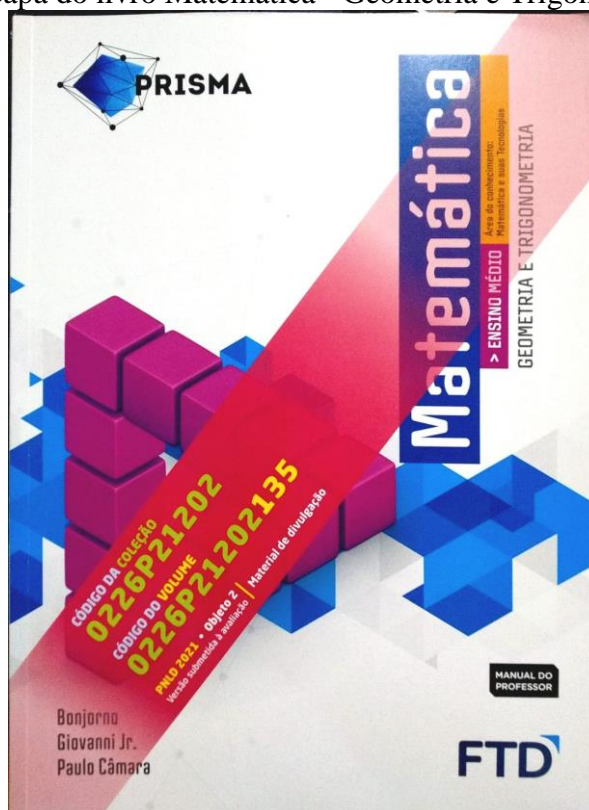
Diante desse cenário, ensinar matemática hoje em dia, significa, como já dito anteriormente, significa desenvolver nos alunos competências e habilidades críticas, apoiadas em noções e métodos matemáticos que possibilitem criar soluções por meio das observações feitas.

Com isso, é necessário que o professor tenha domínio dos conteúdos da área, consiga visualizar as dificuldades e conte com o apoio da Educação Matemática favorecendo a autonomia em sala de aula.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/lei nº9.394/1996) em seu artigo de número 35, já nos trazia indicações de como deveria haver “o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.” (LDB, 2020, p.26)

O livro que será analisado, como dito anteriormente, é: Matemática, geometria e trigonometria, é uma coleção da editora FTD, de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior e Paulo Roberto Câmara de Sousa. Foi publicado em 2020 e trata-se do exemplar do professor: composto por quatro capítulos voltados para Geometria e Trigonometria.

Figura 19 - Capa do livro Matemática - Geometria e Trigonometria



A coleção avaliada é formada por seis volumes, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento integrados dentro da própria matemática. Apresentando situações que permitam a contextualização, representando fatos e fenômenos de outras áreas, presentes em nosso cotidiano.

O livro analisado é formado por várias seções que compõem os capítulos, são elas: *Abertura*, sempre apresenta uma contextualização de aplicação do conteúdo que será abordado; *atividades resolvidas*, tem como intuito apresentar de forma organizada uma resolução utilizando a linguagem matemática; *atividades*, tem o princípio de buscar a familiarização dos conteúdos estudados; *conexões*, explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade; *História da matemática*, aborda fatos históricos ligados a Matemática; *explorando a tecnologia*, promover o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos por meio de softwares livres; *atividades complementares*, são questões com múltipla escolha, geralmente presentes no Enem; *para refletir*, estudantes são estimulados a refletir sobre o que foi estudado no capítulo; *fórum*, é apresentado um tema que possua alguma relação com o assunto estudado no capítulo, com o intuito de promover debates; *pense e responda*, boxe de perguntas curtas sobre o conteúdo; *saiba que...*, intuito de fornecer dicas interessantes; *para ler, para assistir, para acessar e para ouvir*, são fornecidas sugestões de livros, filmes, músicas, etc.

O ensino de geometria é uma área da matemática, que conforme já dito anteriormente, está muito presente na vida cotidiana. Olhando ao nosso redor, podemos perceber que estamos cercados de objetos que possuem relação com formas geométricas. A geometria tem importância fundamental no desenvolvimento dos alunos, é uma área que estimula a criatividade e contribui com habilidades de investigação, resolução de problemas, argumentação.

Mas como seria a reação dos alunos para aprenderem geometria através dessas figuras expostas no livro didático?

As possibilidades de se trabalhar as figuras apresentadas no livro didático transcendem as aplicações evidentes, é uma maneira de lecionar mais atraente do que a convencional. O professor pode fazer os alunos enxergarem o Universo com um olhar distinto, criando uma visão mais crítica do que se passa ao seu redor. Temos aqui uma oportunidade excepcional de apresentar um tema complexo utilizando figuras de rara beleza, do ponto de vista artístico, estético e matemático. (Berro, 2008)

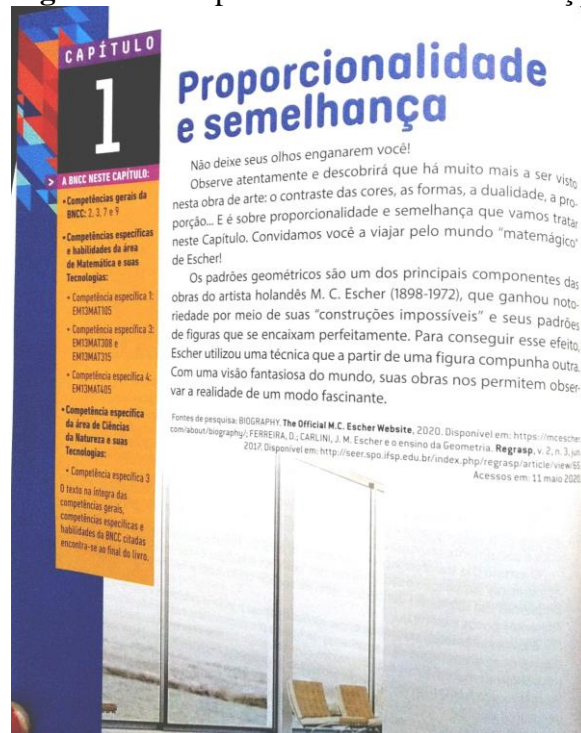
Berro (2008) completa ainda que, possibilidades como essa, é que fazem com que o professor possa reinventar a sua aula, que ouse sair do lugar comum e que ofereça ao aluno outras possibilidades de se apaixonar pela matemática e pela arte.

4.3.2 Organização praxeológica

Inicialmente apresentaremos de que forma está estruturado o capítulo que apresenta a noção de *Proporcionalidade e semelhança*. Seleccionamos algumas situações do livro para apresentarmos as tarefas e técnicas abordadas.

O título do primeiro capítulo proposto pelos autores do livro é *Proporcionalidade e Semelhança*, como já citado anteriormente. Os autores iniciam o capítulo realizando uma contextualização com a obra de Escher, convidando o aluno a observar atentamente a obra de arte e a viajar pelo mundo “matemático” de Escher.

Figura 20 - Proporcionalidade e Semelhança



A primeira menção sobre Escher no livro, é no terceiro parágrafo, onde os autores trazem uma breve introdução sobre o artista, falando sobre as suas construções impossíveis e seus padrões que acabam se encaixando perfeitamente. As obras do artista nos permitem observar a realidade de um modo fascinante.

Após a breve introdução sobre Escher, os autores colocam uma atividade em grupo sobre o artista. Onde o aluno é levado a refletir entre si, sobre as obras produzidas por Escher, se já o conheciam, o que mais chama a atenção, e o que os alunos conseguem identificar na

pintura. Ainda nessa atividade, podemos observar a técnica utilizada por Escher, onde a partir de uma figura era composta outra figura, e assim sucessivamente.

As perguntas motivadas na atividade, fazem com que os alunos possam criar um pensamento crítico e reflexivo e ao mesmo tempo, possam contextualizar as obras de Arte com o conteúdo matemático que será apresentado em seguida.

Figura 21 - Atividade em grupo sobre Escher

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item. Ver as Orientações para o professor

1. Vocês já conheciam alguma obra de Escher? Troquem informações. Se necessário, façam uma breve pesquisa sobre o artista e suas principais obras.
2. Observem a obra de Escher reproduzida e respondam às questões.
 - a) O que mais lhes chama a atenção? Por quê?
 - b) Como vocês descreveriam essa imagem para alguém que não pode vê-la?
 - c) Vocês conseguem identificar padrões nessa pintura? De que modo eles aparecem?
3. Grande parte dos trabalhos de Escher foi feita usando as técnicas de litografia e xilografia. Vocês sabem o que são essas técnicas? Pesquise a respeito.

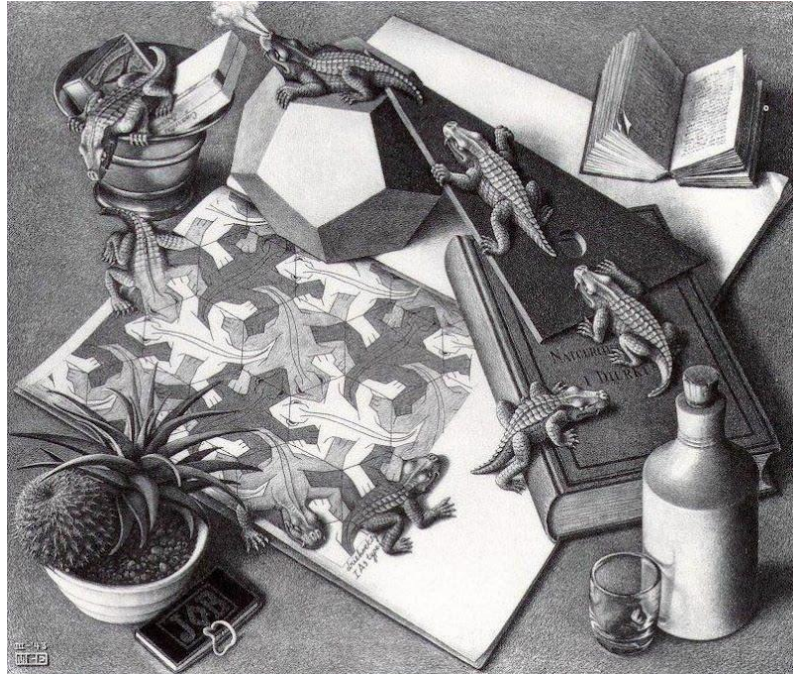
Obra *Regular division reptiles*, do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

Complementando essa análise, de acordo com o BNCC, “para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas.” (BNCC, 2018, p.463)

Analisando a obra em questão “*Regular division reptiles*”, ela segue no início e no final o mesmo padrão simétrico de linhas que formam lagartos por assim dizer, criando um ciclo. Santos (2009) complementa sobre a análise da imagem que o ciclo de vida do réptil representa o círculo fechado que fascina Escher, pois com ele algo de infinito pode ser capturado dentro do finito. Dizia Escher que “... sem os elementos cíclicos, seria ainda muito

difícil tornar compreensível a minha intenção a um observador ocasional. Também assim só raramente ele compreende alguma coisa dessa ideia.” (Ernest, 1998, p.34 *apud* Santos, 2009)

Figura 22 - Répteis



Fonte: http://lh5.ggpht.com/jj.amarante/SConOmH0mHI/AAAAAAACAY/OwUmrDQ_Yrw/s800/reptiles_v2.jpg

Já nesta obra “Répteis”, que surgiu após a inspiração na obra “*Regular division reptileis*”, podemos observar esboços de 3 tipos de mosaicos com a forma de lagartos em que um deles sai do desenho e sobe para o livro, e em seguida retorna para o quadro. Na verdade, podemos observar que existe um conjunto de lagartos, em fila, que se dirige para um dodecaedro pentagonal, em cima desse dodecaedro existe um lagarto soltando fogo pelas narinas, como se fosse um dragão. Todos esses lagartos em fila, retornam ao desenho do quadro, que foi de onde tinham saído anteriormente. Na cena também podemos observar figuras de triângulos, abaixo de um dos lagartos, nos parecer ser uma régua.

Escher, também faz a sua análise sobre a obra:

O padrão periódico de Répteis é apresentado na gravura como uma página de um caderno de desenho. Um animal, aparentemente na tentativa de ser mostrar como ser vivo, alcança com uma de suas garras a borda do caderno, liberta-se ainda mais e inicia seu ciclo de vida. Primeiro, ele se arrasta com dificuldade para dentro do caderno, sobe num livro, depois trepa na superfície escorregadia de um esquadro e chega ao topo de um dodecaedro. Após uma breve pausa para recuperar o fôlego, cansado, porém satisfeito, ele retoma seu caminho descendente até o plano de origem, a planície, onde retoma sua função de figura de simetria. Com esta gravura, nunca tive nenhuma intenção moralizante ou o objetivo de representar simbolismos. Alguns anos depois, entretanto, um de meus clientes eruditos disse que se trata de

uma ilustração extraordinária da doutrina da reencarnação. Pelo visto, podemos até criar simbolismos, desavisadamente. (Centro Cultural do Banco do Brasil, 2011, p.21).

Os autores do livro de Matemática, seguem com a inserção dos conteúdos conforme o programa. Agora, seguimos para a página 18, onde agora vamos tratar do assunto matemático “*Transformações Isométricas*”, onde mais uma vez, para a abertura do capítulo os autores retomam o trabalho do artista M.C. Escher, trazendo agora reflexões sobre as relações entre elementos da obra e o conteúdo matemático que será estudado em seguida.

Figura 23 - Transformações Isométricas




Nesta obra, notamos as transformações isométricas, também conhecidas como isometrias. Nesse trabalho ele usou ladrilhamentos com animais estilizados para a progressão do grande até o pequeno. Mais uma vez, aqui, a Matemática proporciona contextualização com as demais áreas, e novamente tornamos os nossos alunos seres pensantes, buscando encontrar na imagem relações e formatos.

Em seguida, na página 25, encontramos uma atividade resolvida, onde na imagem é solicitado que o aluno identifique as isometrias presentes. Aqui, temos o detalhe do interior do Palácio de Alhambra na Espanha, esse Palácio foi uma das inspirações de M.C. Escher para as suas obras.

Abaixo podemos ver a atividade e a resolução indicada pelos autores do livro de Matemática:


Figura 24 - Atividade resolvida - Palácio de Alhambra

4. Observe a imagem e identifique as isometrias presentes.



■ Detalhe do interior do Palácio de Alhambra (Espanha). Esse palácio foi uma das inspirações de M. C. Escher para suas obras. Fotografia de 2013.

Resolução
Podemos identificar pelo menos uma translação e uma rotação na imagem. Veja, a seguir, a translação indicada em azul e a rotação indicada em verde.



Continuando a percorrer os conteúdos existentes no livro, chegamos na página 30, onde novamente a obra “*Limite quadrado*” de Escher, é utilizada. Agora com o conteúdo “*Transformações homotéticas*”, também chamadas de homotetias, elas mantêm a proporcionalidade das medidas lineares. A ampliação e redução são exemplos de homotetias. Para ampliar ou reduzir um polígono fixa-se um ponto e, a partir desse ponto, são traçadas semirretas que passam pelos vértices do polígono. Este enunciado, encontramos no próprio livro de Matemática, na página 31.

Figura 25 - Limite quadrado

Fonte: [https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro%20-%20Limite%20Quadrado%20\(1964\).jpg](https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/escher/quadros/Quadro%20-%20Limite%20Quadrado%20(1964).jpg)

"Um padrão composto de elementos que, dirigindo-se de dentro para fora, são continuamente reduzidos à metade. O limite do formato infinitamente pequeno é alcançado nos lados retilíneos do quadrado." (Escher, 1994, p.10)

Observamos que para introduzir a noção Proporcionalidade e Semelhança, os autores abordam as relações interdisciplinares e contextualizadas, conforme proposto pelo BNCC, "contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas." (BNCC, 2018, p.16)

Percebemos aqui a preocupação dos autores em abordar os conceitos de Proporcionalidade e Semelhança de forma interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, em particular, o componente curricular de Arte, estimulando pesquisas sobre o artista, suas obras, suas técnicas, ampliando o repertório da multiculturalidade.

Após essas abordagens com o livro indicado, o aluno deve ser capaz de proporcionar oportunidades para desenvolver as habilidades de competências gerais da BNCC, bem como as competências específicas. No ensino de Matemática e Arte, de acordo com o livro didático em questão, no capítulo estudado, o aluno desenvolverá mais especificamente as competências gerais 2 e 3, encontradas no BNCC (2018),

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas
- Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

A partir da análise realizada, acreditamos que o livro didático em questão apresenta elementos que norteiam o docente frente aos conteúdos e atividades ao abordar o conteúdo “*Proporcionalidade e semelhança*”. De modo que, ao identificar as atividades e conteúdos com a contextualização com as Artes, o docente assume uma postura crítica, esses elementos promovem a reflexão, tanto no professor, quanto no aluno. Assim, podemos vislumbrar as potencialidades na construção dos significados e na apropriação dos conceitos que estão sendo trabalhados (Januário, 2010, p. 55)

Ainda segundo Januário (2010), a prática da identificação da organização praxeológica nas situações propostas pelos autores de livros didáticos possibilita ao docente também identificar a praxeologia presente nas resoluções dos alunos.

Desse modo, devemos pensar o que significa realmente aprender Matemática, é necessário engajar os alunos de forma que promova observação, análise, reflexão, conexão e relações, criando condições que irão possibilitar ao aluno desenvolver competências,

No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (BNCC, 2018, p.14)

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é tão antiga, que existe até mesmo antes da criação oficial dos números. Desde o aparecimento do homem na terra, ele sempre tem recorrido a matemática. Nos tempos antigos ele calculava, media e contava, mesmo antes dos conceitos matemáticos existirem. Com o advento da Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional, tivemos um grande avanço na Educação brasileira. É também com o surgimento do PCN para o ensino fundamental que podemos nos fundamentar de como a junção dos conceitos artísticos e matemáticos colaboram para o desenvolvimento da percepção visual e espacial.

A trajetória abordada no capítulo I é relacionada ao surgimento do Ensino Matemática desde o seu início na filosofia grega até ao avanço na idade contemporânea. Na história da civilização, a Arte quase sempre ocupou um menor destaque que a Matemática de modo geral. Na Idade Média, quase perdemos o conhecimento matemático no campo da geometria devido ao desaparecimento dos textos das disciplinas do *quadrivium*, apenas a partir do século XI é que a Geometria começa a recuperar o prestígio.

Com o surgimento da Revolução Francesa, na Idade Contemporânea, somos marcados com o início de expansão do capitalismo. Com isso, tivemos grandes avanços no que refere ao avanço da Geometria, foi um século decisivo. De acordo com Hobsbawm (2008) o século XXI foi “o século dos matemáticos”, onde tivemos o surgimento de grandes matemáticos, dentre eles citamos: Monge, Carnot, Condorcet, Laplace, Lagrange e Legendre.

Assim, com o desenrolar desta pesquisa, vimos que a arte como conhecimento propõe a educação como uma forma de conhecimento cultural, visual, aguça também o pensamento artístico e matemático, dentre outros. Se torna lamentável que muitas vezes, no ensino atual, ainda encontremos características conservadoras, desde o layout das salas de aula até os conteúdos na forma que são repassadas.

Aqui evidenciamos que o professor deve ser mais reflexivo, criador, interdisciplinar, e acima de tudo, procure mostrar “que a realidade se manifesta a partir do que somos capazes de ser, de interpretar, de construir e desconstruir” (Moraes, 2004, p.40 *apud* Barth, p.125).

Algo ainda que continua a nos preocupar, são as classificações obtidas por estudantes brasileiros no Exame Nacional o Ensino Médio (ENEM), muitas providências podem ser tomadas para melhoria, entre eles, melhor distribuição da renda, criação de políticas públicas e educacionais eficazes, melhoria na formação, condições de trabalho e salariais dos profissionais da educação. Também são necessárias sugestões no que tange ao processo

pedagógico, na melhoria do ensino-aprendizagem, uma delas, acreditamos que pode ser a aproximação da Arte com a Matemática. Com base no conhecimento artístico, podemos fazer com que o profissional da educação possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento. Descartes definia o homem como um ser pensante, baseado no pensamento: *cogito, ergo sum*; que traduzindo significa: penso, logo existo. Sem o pensar, as imagens vistas são inúteis, só através do pensar é que o homem tem noção de sua existência.

M. C. Escher, em suas obras, utilizava demasiadamente a sua criatividade. Descobrimos através desta pesquisa que podemos utilizar diferentes combinações geométricas na construção das obras de Artes do artista em questão. Indo além das informações que possuímos, conseguimos identificar além do que vimos, constituindo um processo de formação contínua, onde o aluno, consegue aprofundar mutuamente os conhecimentos de Artes e de Matemática interagindo com uma imagem exposta no livro didático.

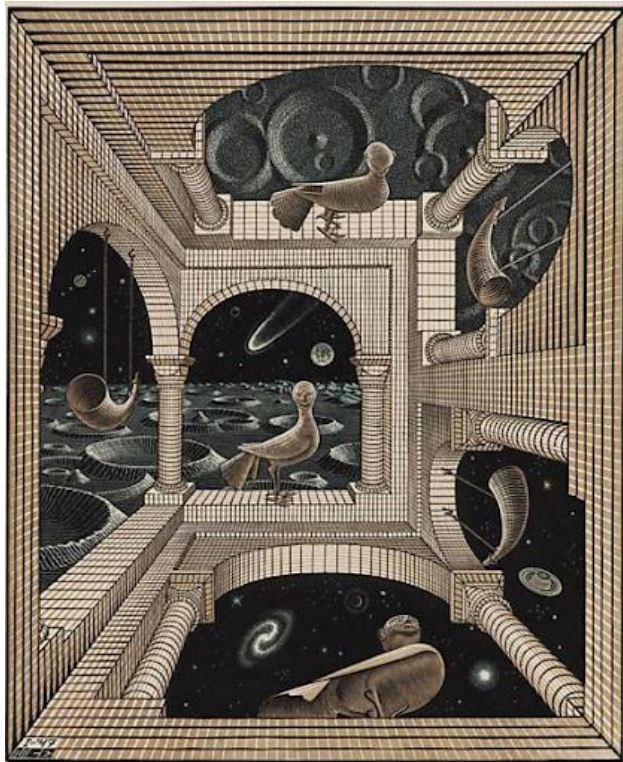
O estudo da obra de Escher nos permitiu compreender as diferentes possibilidades e familiaridades entre saberes produzidos nas práticas desse artista e nas práticas da matemática escolar. (Berro, 2008, p. 92)

Assim, o uso das obras de Escher no ensino matemática podem ou não fazer sentido na visão de cada educador matemático, tendo em vista que do ponto de vista da Etnomatemática são produzidas várias matemáticas em seus diferentes contextos culturais.

D'Ambrosio (2009, p. 88) também nos serve de inspiração e nos traz as diretrizes de como deve ser o educador de matemática, o seu currículo dinâmico é contextualizado no sentido amplo, foge do currículo cartesiano, tradicional, com definições obsoletas de uma sociedade conservadora. Um currículo dinâmico reflete o momento cultural e a prática educativa nele inserida, reconhece que nas sociedades modernas as classes são heterogêneas, reconhecendo entre os alunos interesses variados e enorme gama de conhecimentos prévios. Os alunos precisam ter naturalmente grande potencial criativo, orientado em direções imprevistas, com motivações variadas. Ele completa ainda que: alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo.

Como já exposto anteriormente, as obras de Escher nos oferecem recursos para que possamos transformar a sala de aula num ambiente onde o aluno possa ampliar não apenas o seu conhecimento e seu gosto pela Matemática, mas também pela Arte. Entendemos assim, que Escher pode ser inserido no contexto escolar pela matemática.

Figura 26 - Um outro mundo



Fonte: <http://www.amigodaalma.com.br/wp-content/uploads/Escher7-Outro-Mundo-xilogravura19472-300x300.jpg>

Tomemos como base essa figura de Escher, intitulada “Um outro mundo”, escolhida com base nas leituras da dissertação de Berro (2008). Traremos aqui mais uma análise que foge do apenas olhar. Nessa figura podemos discutir vários aspectos matemáticos. Apesar de não ser uma arte abstrata, a figura nos traz pistas para visualizar um novo mundo que foge da lógica que não podemos explicar, podemos encontrar ali as figuras geométricas, e identificar que é composto de um cubo, possui três pares de janelas semelhantes e que cobrem as cinco faces do cubo. Esta mesma imagem pode ser usada para abordar outros temas, como falar da existência de buracos negros, gravidade, noções de espaço, e etc.

Portanto, procurou-se nessa pesquisa aliar a percepção do pensamento visual das artes e da matemática, fazendo com que através disso possamos contribuir para o desenvolvimento sociocultural e intelectual dos nossos alunos. Espera-se que cada um de nós, possa ter através do artista estudado enxergar com outros olhos e tenhamos mentes diferenciadas. As obras de Escher possuem uma rara beleza que nos prendem e maravilham. Que neste século as Artes possam se unir não apenas a Matemática, mas a todas as outras ciências, para que conforme a BNCC possamos gerar curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências [...] com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BNCC, 2018, p.9)

REFERÊNCIAS

- ART.REF. **Market Place e Notícias em Arte Contemporânea**. Equipe Editorial. Escher. Conheça o seu mundo em uma rara entrevista. Equipe Editoria. Art Ref, 27 mai 2020. Disponível em <https://arteref.com/documentario/conheca-o-mundo-de-escher-em-uma-rara-entrevista/> Acesso em 20 set 2021
- BARTH, Glauce Maris Pereira. **Arte e Matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras De M. C. Escher**. Dissertação (Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação) - Universidade Federal do Paraná, 2006
- BERRO, Roberto Tadeu. **Relações entre Arte e Matemática: Um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2008
- BICUDO, Irineu. **Platão e a matemática**. Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP, Rio Claro. 1998. São Paulo.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **“Educação matemática: Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento”**. Universidade Estadual Paulista -UNESP. 2013. São Paulo.
- BOYER, Carlos B. **História da matemática**. Ed. Da Universidade de São Paulo. 1974.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB**. 9394/1996, 2020.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa. 1951
- CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia**. Ed. Ática, São Paulo, 2000.
- CORTELLA, Mario Sergio. **A Escola e o Conhecimento**. 12ª edição, Cortez Editora. São Paulo. 2008
- D’Ambrosio, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 17ª edição, Papirus. Campinas, SP. 2009.
- FLORES. Cláudia Regina. **Geometria e visualização: Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração**. Dissertação (Mestre em Educação – área Educação e Ciência) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 1997
- FLORES. Cláudia Regina. **Olhar, Saber, Representar: Ensaio sobre a representação em perspectiva**. Tese (Pós-graduação em Educação do Centro de Ciências da Educação, obtenção do título de Doutora). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- FNDE. **Histórico. Programa do Livro. Ministério da Educação/ Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Disponível em:

<http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/biblioteca-na-escola/historico> Acesso em 06 out 2021

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de M. C. Escher**. Ebiografia: s/l, 2020. Disponível em https://www.ebiografia.com/m_c_escher/ Acesso em 27 set 2021

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Editora Globo, Rio de Janeiro, Porto Alegre, São Paulo. 1961

MENDES, João Pedro. **Considerações sobre Humanismo**. Hvmnitas — Vol. XLVII. Brasília. 1995.

MELO, Helena Sousa. **Compadres especiais**. Correio dos Açores, p. 14, fev. 2015.

MONGELLI, Lênia Márcia. **Trivium e Quadrivium: As Artes Liberais na Idade Média**. Editora Ibis, São Paulo. 1999

NUNES, Benedito. **Aprendendo filosofia**. Editora Ática, São Paulo. 1993.

NUNES, Benedito. **A história da filosofia**. Editora Ática, São Paulo. 1999.

NUNES, Benedito. **Introdução a filosofia da arte**. Editora Ática, São Paulo. 2006.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**. Editora Zahar, Rio de Janeiro. 2012.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. A Matemática através da Arte de M. C. Escher. **Millenium**, 42 (janeiro/junho). Pp. 49-58, 2012

SANTOS, Andréa Oriques. **Educação Matemática E Arte: Mosaicos**. Dissertação (Pós-Graduação em Artes Visuais) - Faculdade Senac, Florianópolis. 2009

SANTOS, Isis De Lima Silva - **Uma análise sobre a inserção de pinturas artísticas em Livros Didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Obtenção do título de Licenciatura em Matemática) UEPB, Paraíba. 2019.

VALENTIM, Juliana Gregório. OLIVEIRA, Terezinha. **Boécio: Um olhar da História da Educação**. In. X Jornada de Estudos Antigos e Medievais. Anais. Universidade Estadual de Maringá. 2011, Paraná.

ZALESKI, Dirceu. **Arte e matemática em Mondriam**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação, Arte e História da Cultura) Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo. 2009

ZATTI, Vicente. **A Paideia Platônica e o Papel da Matemática na Constituição do Modelo Antropológico Apolíneo**. Edetania: Estudios y propuestas socio-educativas. 2017.