UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RENATA GLEICY REIS DE OLIVEIRA

A NATUREZA SOB UM OLHAR DA REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE – PB
2022

RENATA GLEICY REIS DE OLIVEIRA

A NATUREZA SOB UM OLHAR DA REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Abigail Fregni Lins

CAMPINA GRANDE – PB
2022

O48n Oliveira, Renata Gleicy Reis de.
A natureza sob um olhar da representação matemática [manuscrito] / Renata Gleicy Reis de Oliveira. - 2022.
42 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Profa. Dra. Abigail Fregni Lins , Departamento de Matemática - CCT."

1. Educação Matemática. 2. Contextualização matemática. 3. Didática. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 BC/UEPB

RENATA GLEICY REIS DE OLIVEIRA

A NATUREZA SOB UM OLHAR DA REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 21/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Abigail Fregni Lins (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande - UEPB

____

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande - UEPB

____

Profa. Dra. Sonaly Duarte de Oliveira (membro externo)
EMEF Padre Antonino – Campina Grande - Paraíba

Dedico este trabalho a minha mãe, Luciana Oliveira, e ao meu pai, Edvanildo dos Reis, por todo amor, dedicação, esforço e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que habita em mim e em todas as coisas do Universo, por sempre me dar mais do que eu mereço, e pela oportunidade de viver.

Agradeço aos meus pais, Edvanildo e Luciana, por todo incentivo aos estudos, por toda educação que sempre me deram, e por serem meu exemplo de vida.

Agradeço ao meu irmão, Tiago, por ser meu companheiro e amigo em todos os momentos.

Agradeço ao meu namorado, João Victor, que sempre permaneceu ao meu lado, me apoiando e me incentivando.

Agradeço ao corpo docente da Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, que foram em parte os responsáveis pela minha formação profissional. Em especial à Profa. Dra. Abigail Fregni Lins, por toda dedicação e paciência, e por ser minha inspiração como futura profissional da educação.

Agradeço aos membros da banca de defesa de meu TCC, Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho e Profa. Dra. Sonaly Duarte de Oliveira, pelas valiosas contribuições.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei

RESUMO

OLIVEIRA, Renata Gleicy Reis. **A Natureza sob um olhar da representação matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 42f, 2022.

A Matemática não se caracteriza apenas por símbolos e números como muito se julga, ela está presente em tudo ao nosso redor. Assim sendo, valeria a pena procurar entender como ela se aplica no mundo que nos rodeia. Com isso, no presente trabalho foram destacados seis temas matemáticos com o propósito de identificar as relações que possuem com a natureza, sendo eles: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Números Primos, Formas Geométricas, Simetria e Fractais. Desenvolvido na modalidade de pesquisa bibliográfica, nosso trabalho buscou pesquisadores que investigam sobre como este estudo pode contribuir para uma nova visão do aluno a respeito da Matemática, já que é muito temida por grande parte deles, na tentativa de dar um contributo a melhorar os processos de ensino e aprendizagem. Ao final deste trabalho se faz disponível propostas didáticas associadas a cada tema matemático citado. Tal material destina-se a ser utilizado em sala de aula. Por fim, esperamos que nosso trabalho desperte o interesse sobre aplicações da Matemática na natureza, como também possa auxiliar professores de Matemática e alunos de forma a resultar em uma aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Natureza. Matemática. Contextualização. Educação Matemática.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Renata Gleicy Reis. **Nature under a mathematical representation view.** Completion of course work (Degree in Mathematics) – State University of Paraíba – UEPB, Campina Grande, 42p, 2022.

Mathematics is not characterized only by symbols and numbers as it is often believed, it is present in everything around us. Therefore, it would be worth seeking to understand how it applies to the world around us. Thus, in the present work six mathematical themes were highlighted in order to identify the relationships they have with nature, namely: Fibonacci Sequence, Golden Number, Prime Numbers, Polygonal Shapes, Symmetry and Fractals. Developed in the form of bibliographic research, our work sought researchers who investigate how this study can contribute to a new vision of the student regarding Mathematics, since it is much feared by most of them, in an attempt to make a contribution to improve the processes of teaching and learning. At the end of this work, didactical proposals associated with each mathematical theme mentioned are made available. Such material is intended to be used in the classroom. Finally, we hope that our work will arouse interest in applications of Mathematics in nature, as well as help Mathematics teachers and students in order to result in meaningful learning.

Keywords: Nature. Mathematics. Contextualization. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS, TABELAS E QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

A Matemática é vista pelos alunos como uma disciplina difícil, e que exige uma vocação especial para a compreensão de suas ideias. Além disso, carrega em si uma visão preconceituosa de que os alunos que conseguem absorver o conteúdo com mais facilidade, são mais inteligentes. E eu, como uma aluna muito curiosa, sempre me questionei sobre o que se escondia por trás dos cálculos. Era uma disciplina que me desafiava a encontrar uma solução para determinado problema, e meu desejo por ensinar começou justamente nesse caminho, eu queria sempre mostrar para meus colegas de sala de aula que a Matemática pode e deve ser bem compreendida por todos.

No decorrer do Ensino Fundamental e Ensino Médio tive professores de Matemática que estimularam bastante meu desejo de um dia entrar em um curso de graduação em Matemática. Eram professores que conheciam e tinham um grande domínio nos conteúdos ensinados. Porém, eu sentia falta de algo, a Matemática não é apenas sobre símbolos e cálculos, por trás dela há todo um contexto histórico, está presente em absolutamente tudo ao nosso redor, e isso não é mostrado nas aulas de Matemática do ensino básico.

No ano de 2017 ingressei no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Lá tive professores excelentes, que sempre me desafiaram a enxergar a Matemática de uma forma diferente. Além das disciplinas de Matemática Pura, tínhamos as disciplinas de Educação Matemática. No 3º período, em uma das disciplinas de Educação Matemática, o professor dividiu a turma em grupos para que apresentássemos temas diferentes sobre a relação da Matemática com a natureza.

A partir dessa experiência, em cada conteúdo de Matemática que fui aprendendo no decorrer do curso era levada a refletir sobre como ele se relacionava com a natureza, ou até mesmo com o próprio universo. Assim, resolvi me debruçar nessa temática para meu TCC.

Logo, pretendemos responder a seguinte questão norteadora: *De que maneira um estudo sobre a relação entre a Matemática e a natureza pode contribuir para uma nova visão do aluno a respeito dessa disciplina?*

Nosso TCC ancora-se em uma breve pesquisa bibliográfica, entendida como “aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses, etc. Utiliza-se de dados já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados” (SEVERINO, 2007).

Nesse contexto, pretendemos identificar relações entre a Matemática e a natureza e propor atividades na tentativa de contribuir na melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nosso trabalho está organizado em cinco capítulos, incluindo o introdutório. No Capítulo 2 discorremos sobre a relação entre os números e a natureza. Já no Capítulo 3 explanamos sobre a relação entre a Geometria e a natureza. No Capítulo 4 sugerimos algumas propostas didáticas sobre os conteúdos abordados nos capítulos anteriores, atividades contextualizadas nas quais apresentamos uma metodologia para que possa ser implementada em sala de aula. Por fim, no Capítulo 5 dissertamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 2
OS NÚMEROS E A NATUREZA

A Matemática traz cada vez mais surpresas na compreensão do Universo. É possível perceber objetos matemáticos nas plantas, no ser humano, nos animais, enfim, na criação divina. Desde a antiguidade até os dias atuais, estudiosos têm destacado a presença da Matemática na natureza. Galileu Galilei (1564-1642) afirmou:

> A filosofia está escrita nesse grandioso livro, o Universo, que permanece constantemente aberto para nossa leitura. Mas o livro não pode ser entendido da forma correta se não aprendermos primeiro a compreender a linguagem e a ler as letras em que foi redigido. Ele foi escrito em linguagem matemática e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem os quais é humanamente impossível entender uma única palavra; sem eles, nos perdemos no labirinto escuro (CREASE, 2011, p. 56).

Galileu Galilei acreditava que a natureza tinha uma estrutura Matemática e só através dela podia ser compreendida. Albert Einstein (1879-1955), durante uma palestra proferida em 1921 na Academia Prussiana de Ciências também questionou “[...] como é possível que a matemática, um produto do pensamento humano que é independente da experiência, ajuste-se tão perfeitamente a objetos da realidade física?” (EINSTEIN, 1921).

Percebe-se através dessas citações que desde a antiguidade até os dias atuais o homem tem percebido a presença da Matemática na natureza. Sendo assim, neste capítulo, de três seções, dissertamos como os números e a natureza estão intimamente ligados. Apresentamos três temas matemáticos de total relação com a natureza, sendo eles Sequência de Fibonacci, Número de Ouro e Números Primos.

2.1 Sequência de Fibonacci

Sobre a sequência de Fibonacci trazemos sua a biografia de Fibonacci, a origem da sequência e a relação com a natureza.

2.1.1 Biografia de Fibonacci

Segundo Boyer (1974), Leonardo de Pisa, mais conhecido com Fibonacci ou “filho de Bonaccio”, nasceu na cidade de Pisa, na Itália, em 1180. Foi considerado o mais talentoso matemático europeu na época da Idade Média.

O pai de Fibonacci, Guiliermo Bonnacci, era ligado a negócios mercantis e foi convidado a trabalhar em Benjaia, na África, numa função alfandegária. Isto fez com que

Fibonacci se interessasse pela Aritmética. Após isso, Fibonacci fez várias viagens pelo Egito, Síria e Grécia, o que permitiu que ele conhecesse a fundo o sistema hindu-arábico.

Após regressar de suas viagens, escreveu sua primeira obra referente aos seus estudos em 1202: *Liber Abbaci* (Livro do Ábaco). Nessa obra, ele traz um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado, o que faz lembrar a Álgebra de al-Khwarizmi[1].

Na obra *Liber abacci* também estão presentes vários problemas estimulantes que alguns deles foram usados por outros autores posteriormente. Entre esses, destaca-se o problema de reprodução de coelhos, que originou a famosa sequência de Fibonacci, que será definida e discutida ainda nesse capítulo.

Ainda se destacam como obras de Fibonacci os livros *Practica Geometriae* (1220), *Liber Quadratorum* (1225) e *Flos* (1225). No livro *Practica Geometriae* (Geometria prática), Fibonacci apresentou um amplo estudo sobre a Geometria e a Trigonometria conhecidas na época. No *Liber Quadratorum* (O Livro dos Quadrados), Fibonacci examina vários tópicos da Teoria dos Números. No livro *Flos* há problemas indeterminados que lembram Diofante, e problemas indeterminados que lembram Euclides, os árabes e os chineses.

Fibonacci faleceu no ano de 1250, em sua cidade natal, Pisa, Itália.

2.1.2 A origem da sequência de Fibonacci

Segundo Boyer (1974), no livro *Liber Abacci*, no capítulo 12, destaca-se o seguinte problema, que motivou a criação da sequência de Fibonacci:

> *O problema da reprodução de coelhos:* "Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?" (BOYER, 1974, p. 185).

Esse problema, apesar de parecer aparentemente de fácil resolução, está relacionado a uma das mais importantes descobertas da Matemática. Considerando as condições do problema, o processo de reprodução em cada mês, ocorre da seguinte forma:

- No primeiro mês, teríamos um par de coelhos, ainda filhotes;

[1] Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi foi um grande matemático e astrônomo. Considerado o pai da Álgebra, foi graças a Al-Khwarizmi que os intelectuais europeus souberam da existência dos numerais indo-arábicos. Os historiadores acreditam que ele tenha vindo de Khwarezm, uma região da Ásia central. Seu trabalho tem tanta relevância para a matemática ocidental, que até mesmo seu nome deu origem à palavra "algarismo". Em seu livro "Al-Jabr w'al-Muqabala", é a primeira vez que a palavra "álgebra" aparece. Seu trabalho foi propagado graças a Leonardo Fibonacci, no livro *Liber Abacci.* (https://impa.br/noticias/al-khwarizmi-o-homem-que-simplificou-a-multiplicacao/)

- No segundo mês, ainda temos o mesmo par de coelhos, mas já adulto, e, portanto, fértil;
- No terceiro mês, temos o par inicial e mais um casal de filhotes, que é gerado por eles. Portanto, temos 2 casais de coelhos;
- No quarto mês, o par inicial dá à luz ao seu segundo par de filhotes, e o casal jovem do mês anterior já se torna fértil. Temos então, três casais de coelhos;
- No quinto mês, temos o casal inicial de coelhos, que produz um novo casal de filhotes, o segundo casal de adultos, que produz outro casal de filhotes e o casal de filhotes produzidos no mês anterior, que se torna fértil. Portanto, temos cinco casais de coelhos, três casais adultos e dois casais filhotes;
- No sexto mês, temos três casais de adultos do mês anterior que produzirão mais três casais de filhotes, e dois casais de filhotes que se tornarão fértil. Portanto, temos oito casais de coelhos, cinco adultos e três filhotes;
- No sétimo mês, teremos treze casais de coelhos, oito adultos e 5 filhotes;
- E assim por diante.

Agora, representaremos o processo de reprodução de coelhos, durante os 12 meses, pela seguinte tabela:

Tabela 1 - Processo de reprodução de coelhos

Mês	Casais de Adultos	Casais de Filhotes	Total de Casais
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Fonte: autoria própria

A solução do problema nos dá a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144). Podemos observar nesta solução que, a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos é exatamente igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores.

Isso motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência, a qual ficou conhecida como Sequência de Fibonacci, e seus elementos de números de Fibonacci:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)

Chamando f_n o número de Fibonacci encontrado na posição n da sequência acima, obtemos a fórmula do problema:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

2.1.3 A sequência de Fibonacci na natureza

A sequência de Fibonacci não está presente apenas no problema de reprodução de coelhos, mas vários elementos da natureza são associados aos números de Fibonacci. A sucessão desses números é tão frequente na natureza que é difícil acreditar que é acidental. Pitágoras afirmava que “todas as coisas se conciliam em número” (LIVIO, 2009, p. 35).

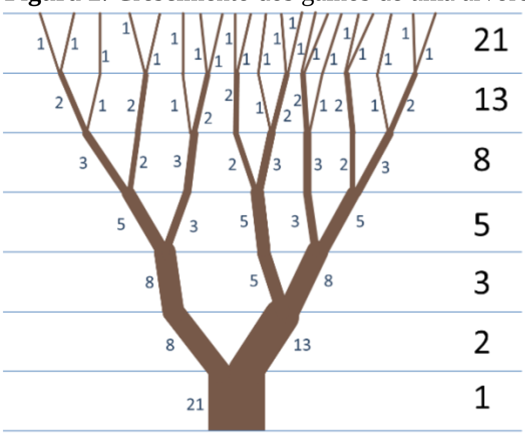
Em diversas plantas, por trás de toda sua beleza, possuem a quantidade de pétalas correspondente aos números de Fibonacci. As margaridas, por exemplo, geralmente possuem 13, 21 ou 34 pétalas. Abaixo podemos observar outros tipos de flores com a mesma característica.

Figura 1 - Número de Fibonacci nas Pétalas das Flores

Fonte: imagens retiradas da internet

As ramificações de algumas árvores também apresentam a sequência de Fibonacci. Primeiramente cresce um galho, que se ramifica em dois, e depois em três, e assim sucessivamente. A Figura 2 esquematiza como ocorre esse processo:

Figura 2: Crescimento dos galhos de uma árvore

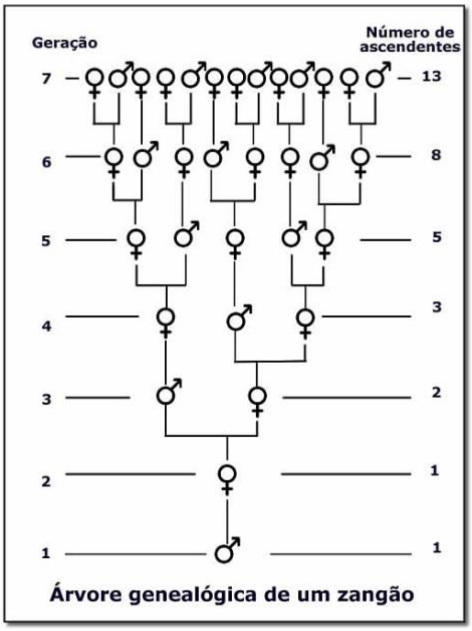


Fonte: https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci/

Os botânicos acreditam que essa forma de dispor os galhos se torna mais eficiente quanto à passagem da umidade e luz solar.

Outro exemplo da sequência de Fibonacci encontrada em elementos naturais dá-se na árvore genealógica do zangão, o macho da família de abelhas. Na reprodução das abelhas, quando um óvulo de uma abelha operária não é fertilizado, ele gera um zangão. Quando ocorre a fertilização gera uma abelha fêmea. Em função disso, um zangão sempre terá uma mãe, mas não terá um pai. Já a abelha fêmea terá um casal de abelhas como pais. Logo, se analisarmos a árvore genealógica de um zangão, um zangão terá uma mãe, dois avós, três bisavós, cinco trisavós, oito tetravós e assim por diante. Isso resulta na Figura 3:

Figura 3 - Árvore genealógica de um zangão



Fonte: https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm

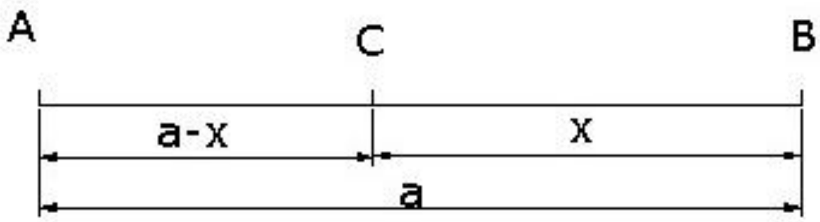
Como podemos observar, o número de ascendentes do zangão obedece a sequência de Fibonacci.

2.2 O número de ouro ou razão áurea

O número de ouro, também chamado de razão áurea ou divina proporção, assim chamado pois muitas construções gregas e obras artísticas apresentam este número como base, é uma constante irracional representada pela letra φ (Phi) do alfabeto grego, em homenagem ao escultor Phídias (490-431 a.C.), que utilizava essa constante em suas obras, dentre elas o templo da capital de Atenas, o Partenon.

O primeiro registro do número de ouro aparece no Livro VI de *Os Elementos*, obra de Euclides de Alexandria, o qual chamou esse número de média e extrema razão. De acordo com Euclides, se a linha AB for dividida por um ponto C (Figura 4) de tal forma que a razão dos comprimentos dos dois segmentos (BC/AC) seja igual à linha dividida pelo segmento mais longo (AB/BC), então dizemos que a linha foi dividida em *razão extrema e média* (LIVIO, 2009):

Figura 4: Representação da linha da média e extrema razão



Fonte: http://www.mat.uel.br/geometrica/php/dg/dg_4t.php

Em outras palavras, temos a seguinte definição: dizemos que um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ na razão áurea se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

De acordo com a definição, se tomarmos o comprimento $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$, temos que $\overline{AC} = a - x$ (como mostra a Figura 4). Assim, chegamos à equação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

o que implica em uma equação quadrática:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

cuja raiz positiva é:

$$x = a\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Assim, obtemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

A este número dá-se o nome de número de ouro, que produz a razão áurea. Com isso, escrevemos:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887498948482045 \ldots$$

"Os pitagóricos utilizaram a razão áurea, embora não conhecessem o número de ouro, na construção e na idealização de sua estrela pitagórica" (ZAHN, 2011, p. 24).

Segundo Livio (2009):

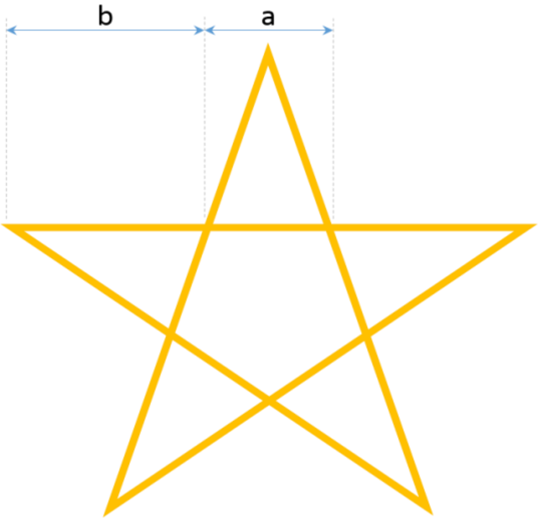
> Os pitagóricos eram obcecados pelos números, e tinham uma afinidade especial pelo número 5, esse número retratava amor e casamento e eles usaram o pentagrama[2] como o símbolo de sua fraternidade, é onde a razão

---

[2] O termo Pentagrama serve para identificar uma estrela desenhada com cinco retas contendo cinco pontas. (https://www.infoescola.com/curiosidades/pentagrama/)

> áurea faz sua primeira aparição. Se tomarmos um pentagrama regular, a razão do lado de qualquer um dos triângulos com a base implícita (b/a na Figura 5) é exatamente igual a razão áurea (LIVIO, 2009, p. 271).

Figura 5 - Estrela Pitagórica



Fonte: https://knoow.net/cienciasexactas/matematica/proporcao-aurea/

2.2.1 O número de ouro e a sequência de Fibonacci

É fascinante a forma como a razão áurea se encontra ligada à sequência de Fibonacci. Vimos que a partir do problema dos coelhos, Fibonacci foi motivado a definir a Sequência de Fibonacci:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)

Na qual percebeu que a partir do terceiro termo, cada termo da sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Fibonacci também constatou que dividindo dois números de Fibonacci consecutivos, em longo prazo, aproxima-se do número de ouro: $\frac{5}{2} = 1{,}666\ldots$

Tabela 2: Razão áurea e a sequência de Fibonacci

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{5}{3} = 1{,}66\ldots$	$\frac{8}{5} = 1{,}6$	$\frac{13}{8} = 1{,}625$	...

Fonte: autoria própria

Podemos perceber que à medida que os termos aumentam, a razão se aproxima do número de ouro. Além disso, as potências de φ também possuem uma ligação com a sucessão de Fibonacci:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi$$

$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$
$\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (1 + 2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1 + \varphi) = \varphi + 2 + 2\varphi = 2 + 3\varphi$
$\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1 + \varphi) = 3 + 5\varphi$
...

Ao analisarmos os resultados obtidos das potências de φ, na ordem que aparecem encontramos os termos da sequência de Fibonacci, nas parcelas que não multiplicam φ.

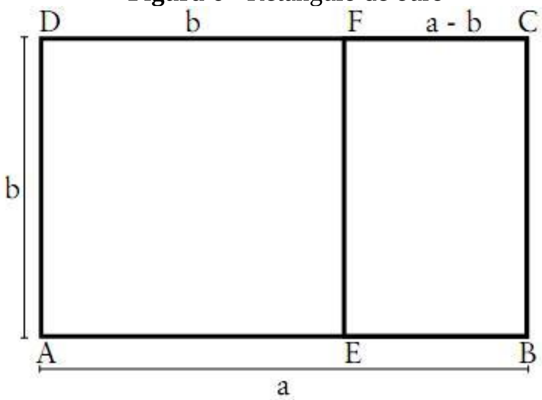
2.2.2 O retângulo de ouro e a espiral áurea

Durante milênios, a arquitetura clássica grega prevaleceu utilizando o retângulo de ouro, criado pelos gregos pois acreditavam que o φ era a proporção ideal, então construíam tudo através dessa proporção. Segundo Zahn (2011, p. 31), a definição se dá como:

Chama-se retângulo áureo o retângulo no qual a razão de suas medidas obedece a razão áurea.

Seja ABCD um retângulo áureo, ao retirar um quadrado ADFE desse retângulo, o retângulo restante BCFE será semelhante ao retângulo original:

Figura 6 - Retângulo de ouro



Fonte: http://aespeculadora.blogspot.com/2011/03/retangulo-aureo-de-ouro-matematica.html

Temos, de acordo com a definição:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$$

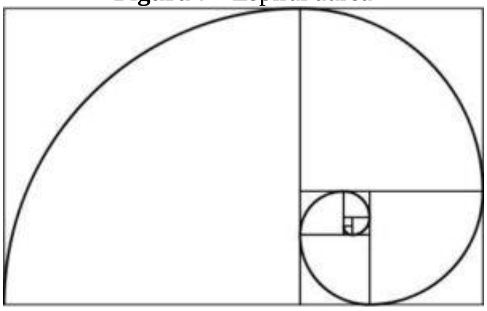
Como b é positivo, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \varphi$$

Então, o novo retângulo BCFE, interior ao primeiro, também é áureo. Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo inteiro ao primeiro obteremos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas. Este processo é infinito, sempre guardando essa proporção de ouro.

Com um compasso, traçando um quarto de circunferência contido em cada retângulo, podemos desenhar uma espiral. Basta tomar o encontro das diagonais:

Figura 7 - Espiral áurea

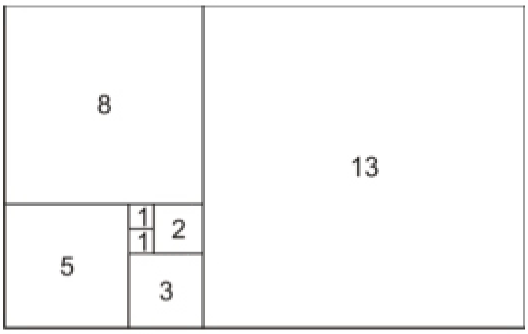


Fonte: https://www.coladaweb.com/artes/proporcao-aurea

Disso, temos que a espiral construída preserva a razão áurea. Tal espiral é conhecida como espiral de ouro. A espiral áurea também pode ser obtida por meio da construção de quadrados, cujas medidas dos lados obedecem aos números da sequência de Fibonacci. Vejamos como ocorre esse processo:

- Se junta dois quadrados de lados = 1, obtém-se então um retângulo 2x1.
- Anexa-se agora, outro quadrado de lado = 2, que é o maior lado do retângulo anterior (2x1), tem-se um retângulo de 3x2.
- Continuando o processo, anexa-se outro quadrado de lado = 3, que é o maior lado do retângulo anterior (3x2), e obtêm-se um retângulo 5x3.
- Seguindo com esse processo, de anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior. A sequência dos lados dos próximos quadrados será a sequência de Fibonacci:

Figura 8 - Retângulo de ouro



Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Fabiana_M1_FM_2013.pdf

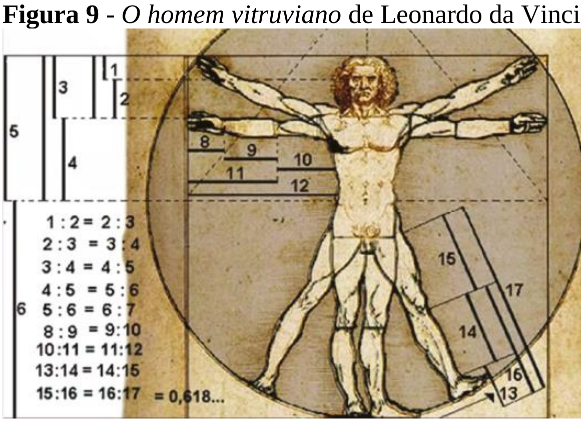
2.2.3 A razão áurea e suas apreciações na natureza

A Matemática é uma ciência com uma imensidão de números e alguns desses números nos surpreendem, surgindo em uma infinidade de elementos da natureza em forma de razão, como é o caso da razão áurea.

A razão áurea foi muito utilizada pelo homem em grandiosas obras para dá-las harmonia e perfeição, como, por exemplo, a obra *A Monalisa* de Leonardo da Vinci[3], as Pirâmides de Gizé, no Egito. A Catedral de Notre Dame, na França, também foi construída usando proporções áureas.

Todavia, o mais interessante é que a própria natureza utiliza dessa razão em seus elementos, como é o caso de algumas medidas do corpo humano, cuja razão é áurea. Leonardo da Vinci percebeu isto e registrou em sua obra, *o homem vitruviano*, que mostra as proporções áureas do corpo humano:

Figura 9 - *O homem vitruviano* de Leonardo da Vinci



Fonte: http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/

A espiral áurea também é encontrada em vários elementos da natureza. Os caracóis e as conchas, por exemplo, são boas representações de como a espiral áurea é uma forma universal da proporcionalidade:

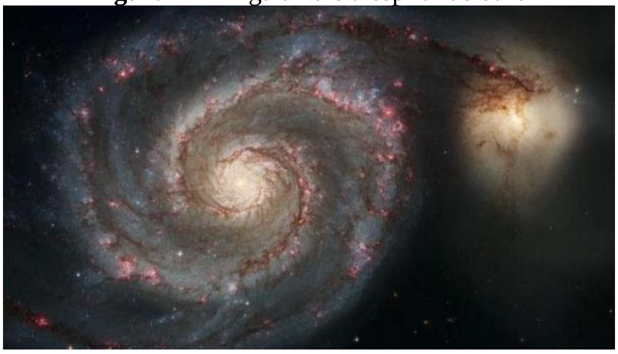
Figura 10 - A Espiral áurea no caracol

Fonte: Grupo Enfoque Geométrico

[3] Leonardo di Ser Piero da Vinci, ou simplesmente Leonardo da Vinci, foi um polímata nascido na atual Itália, uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento, que se destacou como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico. (https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci)

Além disso, uma das ocorrências mais fascinantes da espiral de ouro é encontrada em registros feitos da galáxia:

Figura 11 - A galáxia e a espiral de ouro



Fonte: https://canaltech.com.br/espaco/espirais-elipticas-e-lenticulares-por-que-as-galaxias-sao-tao-diferentes-173489/

Nas galáxias, as estrelas se distribuem em torno de um astro principal numa espiral, obedecendo à proporção de 1,618. É por isso que o número *Phi* ficou conhecido como a divina proporção.

2.3 Números Primos

Entramos em contato com os números primos desde muito cedo. Segundo Rizel (2014, p. 08), a definição se dá como: *Um número inteiro n (n > 1) é dito um número primo, se possuir exatamente dois divisores, a saber, 1 e n.*

Esses números vêm sendo estudados pelos matemáticos desde aproximadamente 500 anos a.C., e apesar da simplicidade de sua definição e facilidade de compreensão, jamais poderíamos imaginar a complexa relação que esses números possuem com a natureza. Os números primos estão intimamente ligados à sobrevivência das cigarras, como veremos a seguir.

2.3.1 Os números primos e o ciclo de vida das cigarras periódicas

De acordo com um documentário da BBC (*The Code*), as cigarras periódicas são um tipo de cigarras que vivem escondidas no subsolo em grande número durante 12 anos. Então ao 13º ano, precisamente ao mesmo tempo, elas saem da terra para se reproduzir. Ao final desse processo há milhões desses insetos por hectare. A defesa dessas cigarras é por estar em grande número, o que diminui os riscos de serem devoradas pelos predadores. Então, esse ciclo de vida longo, de algum modo, ajuda a manter as grandes populações.

Ao surgirem a cada 13 anos, minimiza-se as chances de encontrarem outros tipos de cigarras com ciclo de vida distinto, pois se elas se cruzassem as consequências seriam desastrosas. Os descendentes teriam ciclo de vida incomum, então iriam surgir em pequenos números e consequentemente seriam devoradas pelos predadores. Sendo assim, a sobrevivência das cigarras depende de evitarem as gerações de ciclo incomum.

Por exemplo, supondo que exista uma geração de cigarras que cresce a cada 6 anos e outra geração a cada 9 anos, elas só coincidirão a cada 18 anos. Mas, curiosamente, um número menor, o 7 funciona ainda melhor, elas somente se coincidiriam a cada 42 anos. Ou seja, apenas 2 vezes a cada século.

As cigarras de ciclo de vida de 13 anos têm algo em comum com as de ciclo de vida de 7 anos, pois ambos os ciclos pertencem a uma série especial de números: os números primos. Os números separados por números primos têm menor propensão de coincidir com múltiplos de outros números.

Existem também gerações de cigarras periódicas que surgem a cada 17 anos. Por 13 e 17 serem números primos, as duas gerações só se coincidem uma vez a cada 221 anos.

Assim, enquanto alguns insetos utilizam-se de seu veneno para se proteger, a cigarra usa seu ciclo reprodutivo. Difícil acreditar que esses números foram escolhidos de forma aleatória pela natureza. Isso nos leva a mais uma confirmação de que “a Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo” (Galileu Galilei, 1564-1642).

CAPÍTULO 3
A GEOMETRIA E A NATUREZA

Neste capítulo, de três seções, dissertamos como a Geometria se relaciona com a natureza. Apresentamos três temas do ramo da Geometria de total relação com a natureza, sendo eles: formas geométricas, simetria e fractais.

3.1 Formas Geométricas na natureza

A natureza nos mostra formas a todo o momento, em alguns casos encontramos formas comuns a nossos olhos, já em outros essas formas são únicas, a ponto de não ter uma nomenclatura específica. De acordo com Blatner (2001), o círculo é a forma mais simples do universo. Por exemplo, uma gota de chuva ao cair em um lago provoca ondas em círculos. A vitória régia, uma planta aquática típica da região amazônica, chega a medir 2 metros de diâmetro, possui uma forma circular:

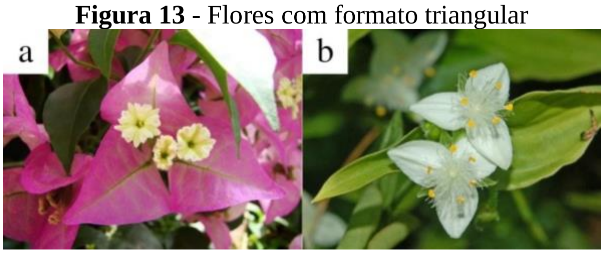
Figura 12 - Vitória Régia

Fonte: https://www.greenmebrasil.com/alimentarse/alimentacao/7466-vitoria-regia-como-usar-alimentacao/

Segundo Mendes (2007, p. 81), “até os planetas e as estrelas tentam formar círculos no espaço, apesar da gravidade e das forças de rotação empurrar e puxar as suas curvas puramente matemáticas para as formas complexas que se observam na natureza”.

Além do círculo, destacamos a forma triangular, que se evidencia em flores, como a primavera (*a*) e a erva-da-fortuna (*b*):

Figura 13 - Flores com formato triangular



Fonte: imagens retiradas da internet

Nas estrelas do mar e na fruta carambola podemos apontar a presença da forma pentagonal. Já as formas hexagonais são encontradas, por exemplo, nos favos de mel das abelhas, que tratamos na seção seguinte.

3.1.1 A Matemática na vida das abelhas

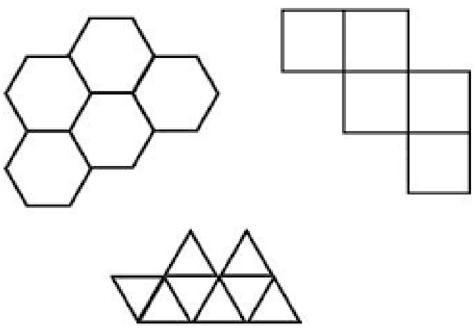
Já citamos no decorrer do TCC sobre a árvore genealógica do zangão, que pode ser explicada com a Matemática. Porém, ainda há algo fascinante a ser dissertado sobre a vida das abelhas, que possui total relação com a Matemática: os favos de mel das colmeias:

Figura 14 - Favo de mel das abelhas

Fonte: http://www.criacionismo.com.br/2015/09/segredo-das-formas-do-favo-de-mel-e.html

O favo de mel é uma incrível obra de arte, mas a pergunta que se formula é: o que levou as abelhas a construir os alvéolos dos favos de mel na forma hexagonal? Para responder essa questão alguns matemáticos demonstraram que os três únicos polígonos regulares que se encaixam perfeitamente no preenchimento de um espaço plano são os hexágonos regulares, os triângulos equiláteros e os quadrados:

Figura 15 - Polígonos regulares



Fonte: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_Amaral_Camila.pdf

Suponhamos um perímetro fixo p para as figuras acima. Dessa forma, podemos obter a medida dos lados e a área de cada polígono:

Lado do quadrado: $\frac{p}{4}$

Lado do triângulo: $\frac{p}{3}$

Lado do hexágono: $\frac{p}{6}$

Área do quadrado: $lado \times lado = \frac{p}{4} \times \frac{p}{4} = \frac{p^2}{16}$

Área do triângulo: $\frac{base \times altura}{2} = \frac{p}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{p}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{36}$

Área do hexágono: $\frac{3 \times lado^2 \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times \frac{p^2}{6} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{24}$

As abelhas tentam armazenar a maior quantidade de mel possível, usando a menor quantidade de cera. Como é possível verificar, com o mesmo perímetro *p*, o prisma hexagonal é o que possui maior área. Assim, para conseguir um aproveitamento matemático perfeito, as abelhas constroem células hexagonais para servir de favo de mel. Pappas (1998) citou sobre a sagacidade das abelhas:

> As abelhas conhecem unicamente o que lhes é útil, isto é, que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e que com uma mesma quantidade de matéria utilizada para a construção de cada figura, o hexágono poderá conter mais mel. Porém, em relação a nós, que pretendemos possuir uma maior parcela de sabedoria do que as abelhas possuem, note-se, que de todas as figuras planas equiláteras e equiângulas com idêntico perímetro, a que tem um maior número de ângulos é sempre maior, e a maior de todas é o círculo que tem o seu próprio perímetro (PAPPAS, 1998, p. 98).

Segundo Contador (2011), não seria demais afirmar que as abelhas são os animais mais matemáticos da natureza.

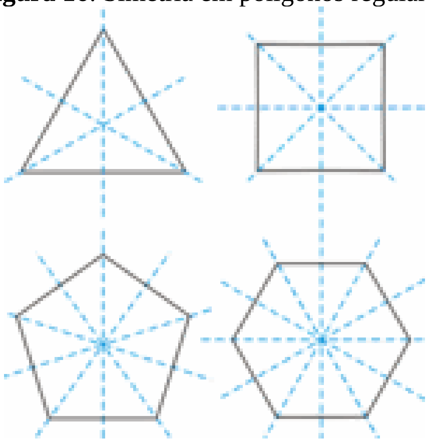
3.2 Simetria

Ferreira (2008, p. 739) define a simetria “como uma correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio”.

A simetria pode ser classificada como bilateral, radial, reflexiva ou rotacional. Quando um polígono regular puder ser dividido por uma reta, de forma que as partes obtidas possam se sobrepor por dobragem, dizemos que é uma simetria bilateral. As retas que levam a esse tipo de divisão chamam-se eixos de simetria.

Em polígonos regulares, o número de eixos de simetria é o mesmo do número de lados do polígono. Ou seja, um triângulo tem três eixos de simetria, um quadrado tem quatro, um pentágono tem cinco, um hexágono tem seis e assim sucessivamente (CONTADOR, 2011):

Figura 16: Simetria em polígonos regulares



Fonte: http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Pol%C3%ADgonos_regulares_%281%C2%BA_ESO%29

A simetria radial ocorre quando eixos que passam pelo centro da figura resultam em partes simétricas em relação a esses eixos (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, s.d.). Já simetria reflexiva, como o próprio nome diz, ao traçar um eixo na figura ou objeto as duas partes serão reflexo uma da outra, ou seja, as duas partes ficam exatamente iguais.

A simetria rotacional, também chamada de central, acontece se ao girar uma figura ou objeto em torno de um ponto fixo, a imagem resultante através da rotação será igual a figura original.

Na sessão seguinte, abordamos como a simetria é bela e perceptível em elementos da natureza. Podemos apreciar a presença da simetria em flocos de neve, ou até mesmo em um rosto bonito quando as suas características são simetricamente acordadas. Mendes (2007) destaca que:

> Gostamos de olhar para os objetos simétricos da natureza, por exemplo, as esferas perfeitamente simétricas dos planetas e do Sol, ou cristais simétricos de flocos de neve, ou flores aproximadamente simétricas. A simetria tem qualquer coisa de fascinante para o espírito humano (MENDES, 2007, p. 83).

3.2.1 Relação entre simetria e elementos da natureza

Podemos encontrar simetria sob as mais diversas formas em elementos da natureza. A simetria bilateral é imediatamente detectada quando se olha de frente para uma coruja, traçando um eixo imaginário vertical passando pelo bico da ave obtém-se duas metades simétricas:

Figura 17 - Simetria na coruja

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/362469470008789431/

A simetria bilateral também é perceptível no corpo humano e nos insetos de modo geral, como a borboleta.

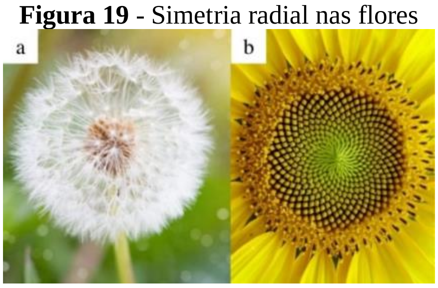
Sobre a simetria radial, ela é comumente utilizada na área da biologia para classificar os seres vivos. A estrela-do-mar, além de ser um exemplo de simetria radial, é também classificada como simetria rotacional, pois ao rotacionar em até 360º sob um ponto fixo permanecerá da mesma forma:

Figura 18 - Simetria na estrela-do-mar

Fonte: https://www.biologianet.com/anatomia-fisiologia-animal/simetria-corporal-dos-animais.htm

Além disso, a simetria radial é bastante comum nas flores, como por exemplo, a dente-de-leão *(a)* e o girassol *(b)*:

Figura 19 - Simetria radial nas flores



Fonte: imagens retiradas da internet

A simetria é visivelmente presente na natureza, ao nosso redor, e podemos apreciá-la nos mais simples elementos.

A simetria reflexiva aparece na natureza ao observarmos o reflexo de animais ou elementos sobre a água. Essa simetria é conhecida pela sua perfeita harmonia:

Figura 20 - Simetria reflexiva

Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/simetria/

Esses exemplos são apenas mais uma confirmação de que a simetria não é só parte do mundo matemático, mas também do mundo que nos rodeia.

3.3 Fractais

No final do século XX se deram estudos sobre objetos geométricos que não podiam ser definidos com elementos da Geometria Euclidiana. Tais objetos foram chamados de fractais pelo seu iniciador Benoit Mandelbrot (1924-2010), que as denominou "baseando-se no latim do verbo *frangere* que significa criar fragmentos irregulares, fragmentar, quebrar" (BARBOSA, 2005, p. 9).

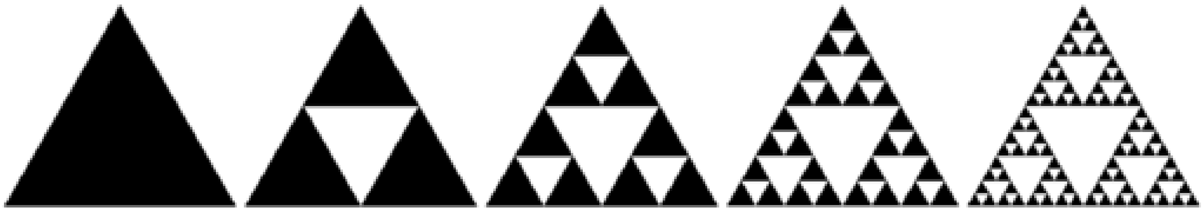
Mandelbrot foi um matemático de origem polonesa. Passou a maior parte de sua carreira tanto nos Estados Unidos como na França, tendo as duas cidadanias. Entre 1947 e 1949 Mandelbrot obteve o grau de mestre em Aeronáutica pelo Instituto de Tecnologia da Califórnia, Estados Unidos. Em seguida, obteve o doutorado em Ciências Matemáticas na Universidade de Paris em 1952.

Em 1958 começou uma carreira de 35 anos na IBM – Centro de Pesquisas Thomas Watson. Lá, Mandelbrot começou a usar computação gráfica para criar e exibir imagens geométricas fractais.

De acordo com Barbosa (2005), "a geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação" (BARBOSA, 2005, p. 12).

Feder (1988) definiu fractal como sendo "uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos" (FEDER, 1988 *apud* BARBOSA, 2005, p. 18). Esse conceito é chamado de autossimilaridade. Um exemplo de imagem fractal que a autossimilaridade fica evidente no triângulo de Sierpinski:

Figura 21 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski

Esse triângulo foi inicialmente descrito em 1915 por Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), matemático polonês, obtido da seguinte forma:

- Dado um triângulo equilátero qualquer marcam-se os pontos médios dos seus lados;
- Após isso, para obter o primeiro triângulo, ligam-se esses três pontos;
- Em seguida, marcam-se os pontos médios de cada um dos lados dos três triângulos resultantes;
- Para obter a segunda imagem, ligam-se os pontos médios de cada um dos triângulos do passo anterior;
- Repetir esse processo sucessivamente.

Segundo Mendes (2007, p. 116), "existem duas categorias de fractais: os fractais geométricos, que repetem continuamente um padrão idêntico, e os fractais aleatórios".

Os fractais deram origem a um novo ramo da Matemática, a Geometria Fractal, conhecida como Geometria da Natureza, pelo fato de estar presente em quase tudo ao nosso redor, como trataremos a seguir.

3.3.1 Fractais presentes na natureza

Na natureza existem formas que nem sempre podem ser descritas com elementos da Geometria Euclidiana, como pontos, retas, círculos, quadrados, circunferências.

De fato, "as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta" (MANDELBROT, 1983 *apud* GONÇALVES, 2007, p. 40). Essas formas caracterizam os fractais.

Os ramos das árvores aparentemente parecem desordenados, mas se enxergarmos com um olhar matemático pode-se notar que há uma espécie de estrutura matemática que alicerça tudo. Há um padrão que surge constantemente em escalas cada vez menores nos galhos que saem dos ramos, pois eles possuem a mesma forma:

Figura 22 - Fractais nas árvores

Fonte: Adaptado da internet https://escolaeducacao.com.br/fractais/

As nuvens são fractais, pois ostentam a mesma qualidade: as nuvens menores são uma versão idêntica das maiores. Além desses exemplos, podemos destacar outros elementos da natureza que se assemelham a estruturas fractais, como couve-flor (a), folhas de samambaia (b) e brócolis (c):

Figura 23 - Fractais na natureza

Fonte: Imagens retiradas da internet

Podemos concluir que a Geometria está presente em absolutamente tudo ao nosso redor, até naqueles elementos que não conseguimos denominar a forma que possui.

CAPÍTULO 4
PROPOSTAS DIDÁTICAS

Neste capítulo, de seis seções, apresentamos algumas propostas didáticas sobre cada conteúdo matemático apresentado no decorrer de nosso TCC, sendo duas delas direcionadas para o Ensino Médio e quatro para o Ensino Fundamental II. Usaremos o seguinte modelo para apresentarmos as propostas didáticas:

Quadro 1 - Modelo das propostas didáticas

Título da atividade
Público alvo:
Objetivo:
Material:
Metodologia:
Avaliação:

Fonte: autoria própria

4.1 Sequência de Fibonacci

A proposta didática, de nossa autoria, busca provocar criatividade nos alunos quanto à elaboração de um pôster sobre o trabalho proposto, no sentido de buscas sobre a vida de Fibonacci e fotos a despertar o senso crítico do aluno ao perceber a Matemática na natureza:

Quadro 2 - Atividade Sequência de Fibonacci

Atividade: Sequência de Fibonacci
Público alvo: Alunos do 1º ano e 2º ano do Ensino Médio **Objetivo:** Despertar o senso crítico do aluno ao perceber a Matemática na natureza. **Material:** Cartolinas, imagens impressas, cola, tesoura, lápis. **Metodologia:** A sequência de Fibonacci está presente em vários elementos da natureza, que por vezes nem imaginamos. Para que possamos adquirir ainda mais conhecimento sobre essa sequência, realizaremos um trabalho em equipe. Dependendo da quantidade de alunos, a turma poderá ser dividida em grupos com três integrantes, ou em duplas. Nessa atividade o grupo deve elaborar um pôster, de forma criativa e original, sobre a sequência de Fibonacci. Nele deve conter: **a)** Sua história de vida; **b)** Quais os números da sequência de Fibonacci; e,

c) Fotografias tiradas pelos integrantes do grupo de elementos da natureza que possuam os números da sequência de Fibonacci.

Avaliação:

Os alunos farão uma auto avaliação do trabalho desenvolvido. Dessa forma, propomos seguir as seguintes questões:

a) Conseguiu despertar sua criatividade? (ruim, bom, muito bom, ótimo);

b) Se comprometeu a trabalhar com o grupo? (ruim, bom, muito bom, ótimo);

c) Aprendeu sobre o assunto? (ruim, bom, muito bom, ótimo).

Fonte: autoria própria

4.2 O Número de Ouro

A proposta didática a seguir foi uma adaptação de uma tese de doutorado de Mendes. (MENDES, 2007), na qual se tem por objetivo levar os alunos a criarem o retângulo de ouro, utilizando o aplicativo *GeoGebra*.

Quadro 3 - Atividade retângulo de ouro

Atividade: Construção do retângulo de ouro

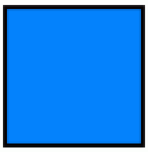
Público alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio

Objetivo: Construir um retângulo cujos lados medem 1 e 1,618034..., o retângulo de ouro.

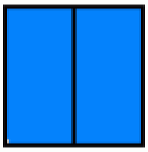
Material: Laboratório de Matemática com computadores.

Metodologia: Nessa atividade os alunos serão levados para o laboratório, onde já terá o aplicativo *GeoGebra* instalado nos computadores. Para isso, os alunos já precisam ter conhecimento sobre a utilização do aplicativo. Será passada a seguinte atividade aos alunos: Construir um retângulo cujos lados medem 1 e 1,618034... seguindo os passos:

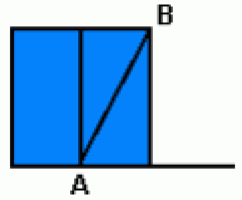
1. Construir um quadrado de lado unitário:



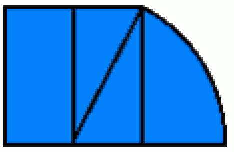
2. Dividir um dos lados do quadrado ao meio;



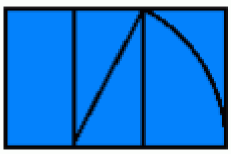
3. Traçar uma diagonal do vértice A do último retângulo ao vértice oposto B e estender a base do quadrado;



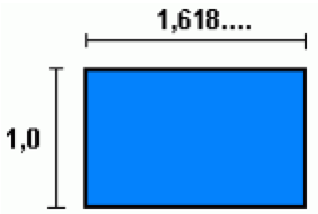
4. Usando a diagonal como raio, traçar um arco do vértice direito superior do retângulo à base que foi estendida;



5. Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traçar um segmento perpendicular à base. Estender o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento para formar o retângulo;



6. Este será o resultado encontrado: o retângulo de ouro!



Avaliação: Os alunos serão avaliados de acordo com a participação e empenho para construção do retângulo de ouro.

Fonte: adaptado de Mendes (2007)

4.3 Números Primos

A proposta didática abaixo foi uma adaptação de uma proposta de atividade para o estudo de números primos desenvolvida em um projeto relacionado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à docência - PIBID por Vieira, Silva e Silva (https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/43%20CO.pdf), na qual se tem por objetivo incentivar os alunos para o aspecto lúdico da Matemática:

Quadro 4 - Atividade Números primos

Atividade: Números primos

Público alvo: Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II

Objetivo: Incentivar os alunos para o aspecto lúdico da Matemática.

Material: Cartolina, lápis, dois dados, marcadores coloridos.

Metodologia: Apesar da simplicidade da definição dos números primos e facilidade de compreensão, esse conteúdo matemático é base para o estudo de vários outros conteúdos. Para poder colocar em prática tudo que já foi estudado sobre esses números, propomos o jogo *Trilha dos Primos* para ser aplicado em sala de aula:

Inicialmente os alunos precisam criar uma trilha contendo 100 casas numeradas de 1 à 100, usando a criatividade. Cada participante receberá uma cor e um marcador de sua cor para marcar sua posição na trilha. O jogador irá lançar dois dados e a soma das faces dirá o quanto ele deve avançar na trilha. Para avançar as casas o jogador deve primeiro responder se a casa em que seu marcador parou corresponde a um número primo ou composto, justificando.

O jogador irá retirar uma cartinha e seguir as instruções, como no exemplo:

Escolha um jogador para responder: O número 37 é um número primo ou composto? (3 casas)	Escolha um jogador para responder: O número 67 é um número primo ou composto? (2 casas)
Encontre o número primo mais próximo e pule para a casa que este pertence.	Qual é o menor número primo? (1 ponto)
Quantos números primos há na decomposição do número 51? (3 pontos)	O número 51 é um número primo ou composto? (2 pontos)
Fique uma rodada sem jogar.	O número 171 é um número primo ou composto? (3 pontos)
Fique sossegado. Você ganhou 1 ponto.	Diga um número primo que esteja entre 50 e 70. (2 pontos)
Retorne para a casa do último número primo.	Vá para a casa do próximo número primo.

A cartinha que pede para escolher um jogador funciona da seguinte maneira: o jogador que retirou a carta escolhe outro jogador para responder à pergunta, caso o jogador erre os pontos, são retirados dos dois participantes. Caso acerte, os pontos são creditados para os dois. O jogo termina quando um jogador chegar ao final da trilha. Vence o jogador que obtiver o maior número de pontos ao final da trilha.

Avaliação: Os alunos serão avaliados de acordo com a participação durante o jogo.

Fonte: adaptado de Vieira, Silva e Silva (2019)

4.4 Formas Geométricas

A proposta didática abaixo, de nossa autoria, busca agregar uma parcela de conhecimentos geométricos aos alunos, tendo em vista que a observação de formas e proporções na natureza facilita ainda mais o aprendizado. De acordo com as Diretrizes Curriculares Educacionais (DCE), as ideias geométricas abstraídas das formas da natureza, que aparecem tanto na vida inanimada como na vida orgânica e nos objetos produzidos pelas diversas culturas, influenciaram muito o desenvolvimento humano:

Quadro 5 - Atividade formas geométricas

Atividade: Formas geométricas

Público alvo: Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II

Objetivo: Despertar nos alunos a importância de enxergar a Matemática na natureza e desenvolver a prática do trabalho em equipe.

Material: Os grupos são livres quanto ao material a ser utilizado nas apresentações dos seminários.

Metodologia: A natureza está repleta de elementos que possuem formas geométricas de fácil visualização. Para que possamos adquirir ainda mais conhecimento sobre esse conteúdo, realizaremos um seminário em equipe. A turma será dividida em grupos, dependendo da quantidade de alunos e elementos da natureza que são descritos nessa atividade.

Nesse seminário, cada grupo irá escolher um dos elementos descritos abaixo para fazer uma pesquisa sobre a relação com a Geometria:

a) Os favos de mel das abelhas;

b) Calçada dos gigantes;

c) Planetas;

d) Frutas;

e) Flores.

Fica como sugestão para os grupos a elaboração de cartazes ou slides para a apresentação dos seminários.

Avaliação:

Os alunos serão avaliados de acordo com cada item descrito a seguir com notas de 0 a 10:

a) Participação (0 a 10);

b) Comprometimento com o grupo (0 a 10);

c) Domínio do assunto (0 a 10);

d) Criatividade com os materiais utilizados (0 a 10).

Fonte: autoria própria

4.5 Simetria

A proposta didática abaixo foi uma adaptação de um curso sobre simetria disponível no *site Mathgon* (https://pt.mathigon.org/course/transformations/symmetry), na qual se tem por objetivo chamar a atenção dos alunos a identificar simetria em elementos da natureza:

Quadro 6: Atividade Simetria

Atividade: Simetria

Público alvo: Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II

Objetivo: Identificar simetria em figuras geométricas e aplicar no dia a dia.

Material: Para essa atividade os alunos utilizarão de materiais próprios.

Metodologia: A simetria está por toda parte. Quase todas as plantas, animais e até nós humanos somos simétricos. Com o tempo imitamos a simetria da natureza em arte, arquitetura, tecnologia e design. Sabendo disso, realize uma pesquisa em livros, sites ou revistas sobre a presença da simetria no mundo, seguindo as instruções:

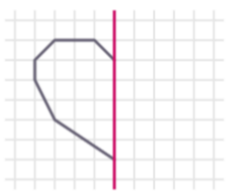
a) Estrutura da pesquisa: capa, introdução, desenvolvimento, referencial teórico, conclusão e referências bibliográficas.

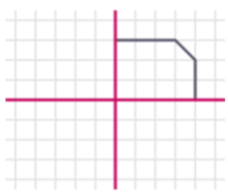
b) Utilização de imagens e exemplos.

Após a pesquisa será feita a seguinte atividade:

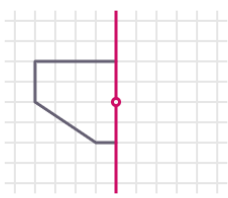
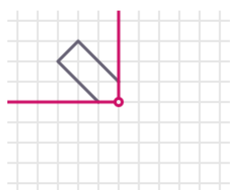
1) Quais são os tipos de simetria? Defina cada uma delas.

2) Uma forma tem simetria reflexiva se parecer igual após ser refletida. Aqui estão algumas formas. Complete-os para que tenham simetria reflexiva:





3) Uma forma tem simetria de rotação se tiver a mesma aparência depois de ser girada (menos de 360 °). Sabendo disso, complete estas formas, para que tenham simetria rotacional:

4) Se uma forma tiver simetria rotacional, a *ordem de simetria* é o número de orientações nas quais a forma tem a mesma aparência, ou seja, é o número de vezes que você pode girar a forma antes de voltarmos ao início. O ângulo de cada rotação

é $\frac{360^0}{ordem}$. Diante dessa informação encontre a ordem e o ângulo de rotação para cada uma destas formas:

Avaliação: A nota final será dada através da média das notas atribuídas referente a pesquisa e a atividade. No qual a nota da atividade será de 0 a 10, onde cada questão vale 2,5 pontos. A pesquisa também terá nota de 0 a 10, contudo, seguirá os requisitos:

a) Organização e escrita (2,5 pontos);

b) Utilização de exemplos e figuras (2,5 pontos);

c) Referencial teórico (2,5 pontos);

d) Estrutura (2,5 pontos).

Fonte: Adaptado do *site Mathgon*

4.6 Fractais

A proposta didática a seguir foi adaptada da dissertação de mestrado de Oliveira (2019), na qual se tem por objetivo propor algo que possa servir como apoio a professores o ensino da Geometria Fractal de maneira diferente dos moldes tradicionais (quadro e giz), tendo em vista que é um assunto um tanto quanto novo para muitos:

Quadro 7: Atividade Fractais

Atividade: Fractais

Público alvo: Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II

Objetivo: Identificar a Geometria Fractal em elementos da natureza

Material: Data show

Metodologia: Inicialmente, é essencial que haja uma discussão sobre o assunto de maneira que estimule os alunos a estudarem sobre a Geometria Fractal. Portanto, segue questionamentos propostos para o primeiro momento da aula:

a) Para você o que é Geometria? O que ela estuda?

b) A Geometria está presente em nossas vidas? Onde podemos encontrá-la?

c) E na natureza, existe alguma Geometria?

Após escutar os alunos, fazer uma exposição do assunto com o auxílio do data show e apresentar um vídeo sobre o assunto (sugestão de vídeo: Divertindo-se com fractais – disponível no YouTube).

Quando os alunos já entenderam a definição de fractais, eles farão uma pesquisa que deverá ser entregue ao professor. Cada aluno irá escolher um elemento da natureza que consegue observar a presença de fractais, como, por exemplo, couve-flor, galhos de uma árvore, flocos de neve, entre outros. Escolhido o elemento da natureza, os alunos o descreverão. Sugere-se que colem imagens que identifiquem a Geometria Fractal nesse elemento. Na aula seguinte cada aluno apresentará o elemento escolhido e o professor fará uma discussão com toda a sala. Com isso, pretende-se que os alunos tentem identificar a Geometria Fractal presente nos elementos escolhidos pelos colegas de classe. **Avaliação:** Os alunos serão avaliados de acordo com cada item descrito a seguir: a) Participação (0 a 5 pontos); b) Elaboração da pesquisa e criatividade (0 a 5 pontos);

Fonte: Adaptado de Oliveira (2019)

Entendemos que as propostas didáticas sugeridas podem vir a servir de apoio aos professores e alunos de forma a contribuir a visão dos mesmos a respeito da disciplina de Matemática.

Finalizamos nosso trabalho com nossas últimas considerações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A natureza possui perfeição em cada detalhe de seus elementos e a Matemática parece permear tudo, seja em um movimento dos planetas ao redor do Sol, nas ondas do mar ou em uma gota de chuva que cai em um lago, em cada folha na floresta, ou nos galhos de uma árvore, em cada elemento na galáxia, na terra, e no céu.

Como analisado ao longo de nosso TCC, a Matemática está presente em absolutamente tudo ao nosso redor.

Vários conteúdos matemáticos podem ser contextualizados com elementos da natureza, no nosso trabalho demos ênfase à Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Números Primos, Formas Geométricas, Simetria e Fractais.

Com relação à pergunta norteadora que levantamos no início de nosso trabalho, pudemos comprovar que esse estudo pode contribuir para uma nova visão dos alunos a respeito da disciplina de Matemática, por se tratar de um tema que despertará a curiosidade deles. Além disso, abraçar esta abordagem torna as aulas mais dinâmicas e atraentes, o que permite mostrar aos alunos a relevância de alguns conteúdos matemáticos no contexto real.

Sendo assim, as propostas didáticas que trouxemos sobre os seis temas apresentados foi na intenção de auxiliar professores na tarefa de tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, além de incentivar os alunos a estudarem as relações entre a Matemática e a natureza, na certeza de que é um conhecimento bastante válido.

É sabido que muitos dos pensadores, desde os mais antigos, deixaram diversas contribuições sobre a relação entre a Matemática e a natureza, como destacamos ao longo de nosso trabalho. Dessa mesma forma, esperamos contribuir com futuros estudiosos sobre esse tema, certo de que este jamais será esgotado.

Ainda, esperamos que nosso trabalho desperte no leitor o interesse de aprofundamento desse tema, como também esperamos que essa área de conhecimento seja mais aplicada em sala de aula, para assim melhorarmos o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Por fim, podemos destacar o quão gratificante foi conhecer um pouco mais sobre essa grandiosa obra: a natureza e a presença da Matemática nela.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

BLATNER, David. – **O encanto do π**. Lisboa: Editora Replicação, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1906.

CATTAI, Adriano Pereira. **Termo geral da Sequência de Fibonacci**, 2002.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A Matemática na arte e na vida**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

CREASE, Robert. **As grandes equações**: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. Trad. Alexandre Cherman. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

EINSTEIN, Albert. Geometria e Experiência. **Scientiae Studia**, São Paulo, v.3, n.4, out./dez, 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662005000400009.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio**: o minidicionário de língua portuguesa. 7 ed. Curitiba: Editora Positivo, 2008.

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. **Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 170 f, 2007.

LAURO, Maira Mendias. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, 2005.

LIVIO, Mario. **Deus é matemático?** 5ªed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2009.

MENDES, Fernanda Manuela Pinheiro. **A Matemática na natureza**. Dissertação (Mestrado em Matemática e Ciências da Natureza). 2007. 218 f. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007.

OLIVEIRA, Lucas Maximiano. **Uma proposta de geometria de fractais para sala de aula**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 41 f., 2019.

PAPPAS, Theoni. **Fascínios da Matemática.** Lisboa. Editora Replicação, 1998.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica de Matemática**. Curitiba/PR, 2008.

RIZEL, Ary Camargo. **Números Primos.** Monografia de Especialização Latu Senso. Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 60 f., 2014.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Simetrias**. s.d. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html

VIEIRA, Tamires Bom; SILVA, Eron Magno Aguiar; SILVA, Fabiana Gerusa Leindeker. Números primos: uma proposta de ensino através de teatro. In: **ANAIS II Conferência Nacional de Educação Matemática I Encontro Nacional Pibid/ Residência Pedagógica /**

Matemática - FACCAT VII Jornada Pedagógica de Matemática do Vale do Paranhana (JOPEMAT) XXV Encontro Regional de Estudantes de Matemática. Taquara, RS: FACCAT, 2019.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.