UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS - CCHE

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ROBÉRIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Teorema da Função Implícita.

Monteiro - PB

Março- 2014

ROBÉRIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Teorema da Função Implícita.

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Orientador: Me. Luciano dos Santos Ferreira.

Monteiro - PB

Março- 2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S237t Santos, Robério de Oliveira.
Teorema da Função Implícita [manuscrito] : / Robério de Oliveira Santos. - 2014.
45 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, Departamento de Matemática".

1.Topologia. 2.Derivadas. 3.Teorema da Função Implícita. I. Título.

21. ed. CDD 510

ROBÉRIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Teorema da Função Implícita.

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Aprovado pela banca examinadora em 11 de Março de 2014.

Banca Examinadora

Prof^{o} Me. Luciano dos Santos Ferreira
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB
Orientador

Prof^{o} Me. Luiz Lima de Oliveira Junior
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB

Prof^{o}. Me. Cládio Odair Pereira da Silva
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB

Dedico este trabalho a minha família que esteve ao meu lado em momentos bons e ruins, incentivando, apoiando e mim dando forças para prosseguir, a minha namorada Elaine por seu apoio e orações a meu favor, meus sinceros agradecimentos e Deus continue vos abençoando em todos os sentidos da vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, longanimidade, paz e saúde durante toda minha trajetória estudantil. Agradecido também a minha família por suas preocupações e incentivo a meu favor, especialmente a minha irmã Roseli, a minha namorada Elaine por sua companhia e compreensão, a meu professor orientador Luciano Santos, a Universidade Estadual da Paraíba por sua grande participação na minha formação e aos professores Ana Zulema Pinto Cabral e Rodrigo Fonseca por acreditarem em meu potencial, ao professor e diretor do campus - VI Joelson Pimentel e a todos aqueles que direto e indiretamente participaram do meu vinculo de amizade durante este período na cidade de Monteiro-PB.

No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus. Ele estava no princípio com Deus. Todas as coisas foram feitas por intermédio dele,e, nada do que foi feito se fez.
"João 1;1-4"

Resumo

O presente TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) aborda um trabalho de pesquisa bibliográfica, que tem como objetivo apresentar o teorema da função implícita. A pesquisa foi realizada em quatro etapas: Pré-Leitura, Leitura seletiva, Leitura analítica e Leitura interpretativa de material bibliográfico. O trabalho foi construído em várias etapas entre orientando e orientador, bem como: Aulas expositivas e dialogadas do material em estudo, digitalização e correção. Adotamos como principal referencial teórico o livro de Elon Lages Lima, curso de análise real vol.2. Não temos à pretensão de trazer algo novo da matemática como amostra, mas sim conceitos matemáticos que nos possibilite a entender o funcionamento desta disciplina, através de materiais já unificados, demonstrados por grandes matemáticos que ficaram na história e, que nos dará possibilidades de entendermos noções matemáticas, como topologia, derivadas e teorema da função implícita.

Palavras-Chave: Topologia; Derivadas; Teorema da Função Implícita; .

Abstract

This TCC (End of Course Work) discusses the work of literature, which aims to present the implicit function theorem. The research was accomplished in four steps: Pre-Reading, selective reading, analytical reading and interpretive reading bibliographic material. The work was built in several stages between guiding and advisor as well as expository and dialogued Lessons of the test material, and scanning correction. We adopted as the main theoretical framework of the book Elon Lages Lima, course real analysis vol.2. We do not have the intention of bringing something new mathematics as sample but mathematical concepts that enable us to understand the workings of this discipline, through materials already unified demonstrated by great mathematicians who were in history and that will give us opportunities to understand mathematical concepts, such as topology, derivatives and implicit function theorem.
Key words:Topology ; Derivatives , Implicit Function Theorem.

Lista de Figuras

1.1 Bola Aberta 14
1.2 Bola Aberta 14
1.3 Esfera no plano 14
1.4 Bola na norma do Máximo. 14
1.5 Bola na norma da soma 14
1.6 Intervalo com centro em x e raio ε contido em X-figura 3 19
1.7 Exemplo de um espaço conexo e outro desconexo- figura 3 22

2.1 vetor tangente $f'(a)$ figura 1 26
2.2 Gráfico das Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis- figura 2 27

3.1 Gráfico da Função Implícita 41

SUMÁRIO

Introdução 10
1 O Espaço Euclidiano **11**
1.1 Espaço Euclidiano 11
1.2 Produto Interno e Norma Euclidiana 12
1.3 Sequências 14
1.4 Pontos de Acumulação 16
1.5 Aplicações Contínuas 17
1.6 Conjuntos Abertos e Fechados 18
1.7 Conjuntos Compactos e Conexos 19
2 Tipos de Derivadas, Funções e Caminhos Diferenciáveis **23**
2.1 Derivadas Implícitas 23
2.2 Caminhos Diferenciáveis 24
2.3 Derivadas Parciais 26
2.4 Derivadas Direcionais 28
2.5 Funções Diferenciáveis 29
2.6 Funções de Classe C^1 e Gradiente 30
2.7 Matriz (Jacobiana, Hessiana) e Pontos Críticos 34
3 Teorema da Função Implícita **37**
3.1 Funções Implícitas 37
Considerações Finais **44**
Referências **45**

Introdução

Este trabalho consiste em apresentar o teorema da função implícita. Tem como requisito básico a construção e apresentação para cumprimento das exigências de titulação do curso de licenciatura plena em matemática. A licenciatura plena está voltada para a área da educação, no entanto este trabalho constitui de uma série de resultados da analise real, bem como: Topologia, conjuntos compactos, sequências e etc. Que são da área de pura. Utilizamos uma metodologia de pesquisa que tem como objetivo aproximar o leitor aos resultados obtidos através da teoria, obtido mediante pesquisas bibliográficas, cujo principal objetivo é se familiarizar com o teorema da função implícita. Utilizamos a linguagem gráfica em alguns tópicos para nos auxiliar a compreender certas afirmações e aproximar este trabalho a uma didática favorável ao leitor. Está dividido em três capítulos, sendo que no primeiro fazemos referencia a parte da topologia, no segundo a parte da derivadas e no terceiro o principal resultado deste trabalho, apresentação do teorema da função implícita.

1 O Espaço Euclidiano

Neste capítulo estudaremos o Espaço Euclidiano n-dimensional e Topologia do $\mathbb{R}^n$.

1.1 Espaço Euclidiano

O produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$ é o que chamamos do espaço euclidiano n-dimensional o denotaremos por $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Desta forma se $n = 1$, então $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (Reta), se $n = 2$, $\mathbb{R}^2 =$ (Plano Cartesiano) e se, $n = 3$ então $\mathbb{R}^3$ é o que chamamos de espaço Euclidiano tridimensional que na geometria analítica se destaca por ser possivel estudar as noções de comprimento, profundidade e altura em figuras geométricas.

O Espaço Euclidiano n-dimensional é um espaço vetorial real e de dimensão finita que por sua vez está munido de um produto interno.

Um espaço vetorial real é na verdade um conjunto V não podendo ser vazio, dotado de duas operações: a soma e a multiplicação por escalares, tal que, se tomarmos dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir uma soma e um produto por escalar como:

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \text{ e } \alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

onde estas operações assim definidas, faz do $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial. Como os elementos do $\mathbb{R}^n$ pode ser considerados como vetores, logo é normal falarmos da representação canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, onde a base canônica é representada como sendo: $e_1 = (1, 0, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0), e_n = (0, 0, 0, 0, ..., 1)$.

Um ponto no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ são n-uplas, cujas coordenadas (x_i) $i = 1, ..., n$ são números reais e têm como representação simbólica o ponto $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

1.2 Produto Interno e Norma Euclidiana

Um produto interno definido no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é uma função que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ um número real da forma $x.y = x_1.y_1 + \cdots + x_n.y_n$, isto é:

$$\begin{array}{cccc} \langle , \rangle & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \end{array} .$$

Esta aplicação é denominado produto interno canônico, é denotado por $\langle x,y \rangle$ de maneira que dado os vetores x, z e y $\in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ as propriedades abaixo sejam satisfeitam:

(i) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$;

(ii) $\langle x+z,y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle z,y \rangle$;

(iii) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha.\langle x,y \rangle = \langle x,\alpha y \rangle$;

(iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x,x \rangle > 0$;

O produto interno de x $y \in \mathbb{R}^n$ é o número real definido por

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Através do produto interno definimos a norma euclidiana $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} = [0,+\infty]$. Dado $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a norma euclidiana de x é o número real positivo, de forma que

$$||x|| = \sqrt{< x,x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 +, \cdots, +x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

o qual satisfaz as seguintes propriedades.

(i) $\| x \| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1 ***(Desigualdade de Cauchy - Schwarz)***. *$x,y \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \ \textit{onde}\ \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}\ \textit{e}\ \|y\| = \sqrt{\langle y,y \rangle}.$$

Demonstração: Suponhamos que $y \neq 0$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Como

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x,y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0 \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos que o discriminante

$$\triangle = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

ou seja, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Temos, ainda que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ se, e somente se, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+\lambda_0 y = 0$. Logo, $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ se, e somente se, x, y são LD (Linearmente dependentes) $\blacksquare$.

Dentre as muitas normas que existem, destacaremos ainda duas outras normas que são importantes e equivalentes a norma euclidiana:

NORMA DO MÁXIMO

$$\|x\|_m = max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}, \qquad \forall\, x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

NORMA DA SOMA

$$\|x\|_s = |x_1| + |x_2| +, \cdots, +|x_n|, \qquad \forall\, x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dada qualquer norma no $\mathbb{R}^n$ definimos a aplicação $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

A distância goza das seguintes propriedades:

(i) $d(x,y) = 0$ *se* $x = y$

(ii) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$.

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Com estas noções podemos definir conceitos de Bolas abertas e fechadas.

Definição 1.1 *Dada uma norma no* $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$ *definimos:*

- Bola aberta de centro a e raio r como $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| < r\}$
- Bola fechada de centro a e raio r como $B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| \leq r\}$
- Esfera de centro a e raio r como $S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| = r\}$.

As formas geométricas desses conjintos dependem das normas que se usam. Um exemplo disso, é quando n = 2 e, se considerarmos a métrica euclidiana, teremos:

(i) $B((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$;

(ii) $B((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$;

(iii) $B((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$.

As bolas no plano chamam-se de (abertos ou fechados) e as esferas reduzem-se a círculos, como exemplificam as figuras abaixo.

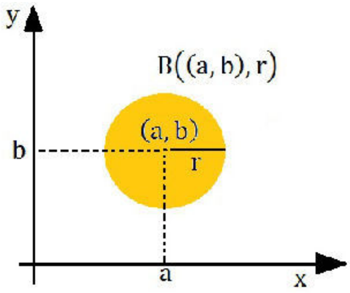

Figura 1.1: Bola Aberta

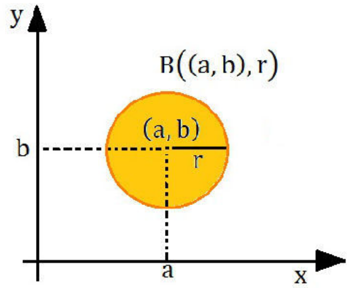

Figura 1.2: Bola Aberta

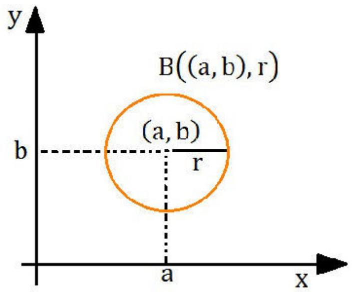

Figura 1.3: Esfera no plano

No caso em que $n = 3$ a norma euclidiana define no espaço bolas e esferas que correspondem às imagens que delas fazemos. Tomando a norma euclidiana, tomamos no plano $\mathbb{R}^2$, por exemplo, $|z|_M = max\{|x|,|y|\}$ como norma de $z = (x,y)$, a bola de centro $c = (a,b)$ e raio r será o quadrado de lados paralelos aos eixos de coordenadas, cada lado tendo comprimento $2r$ e cortando-se no ponto c. Agora, tomando a norma da soma $|z|_S = |x| + |y|$, a bola de centro c e raio r será o quadrado cuja diagonais são paralelos aos eixos coordenados, ambas com comprimento $2r$ encontrando-se ainda no ponto c.

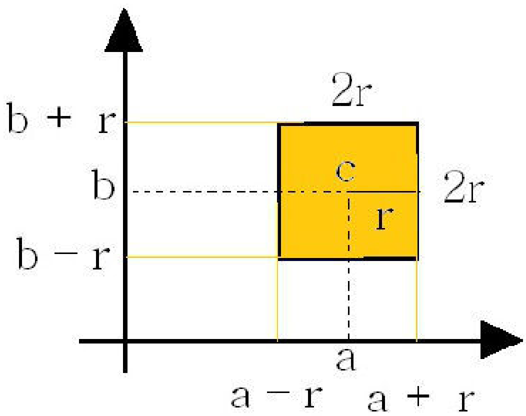

Figura 1.4: Bola na norma do Máximo.

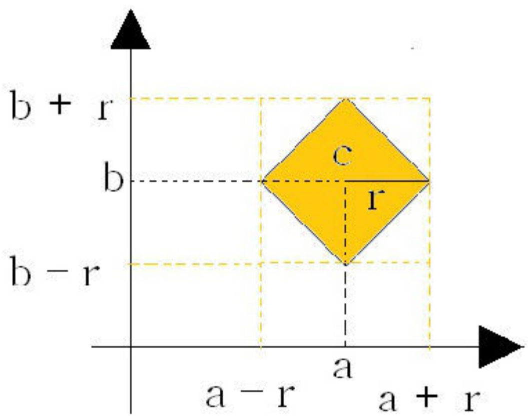

Figura 1.5: Bola na norma da soma

1.3 Sequências

Nesta seção estudaremos a parte de sequências, subsequências, pontos de acumução e aplicações contínuas que vai nos auxiliar um pouco mais adiante nos teoremas usados.

Definição 1.2 *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $k \mapsto f(k) = x_k$ definida no conjunto N dos números naturais. O valor $x(k)$ é indicado com x_k e chama-se o k-ésimo termo da sequência. Algumas das notações para representar uma sequência são (x_k), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$ para indicar a sequência cujo k-ésimo termo é $x_k \in \mathbb{R}^n$.*

Veja alguns exemplos de sequências.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$$

$$\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ...\right)$$

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (-1, 1, -1, ..., (-1)^n).$$

Definição 1.3 *Uma subsequência de uma sequência x_k é a restrinção do conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 <, \cdots < k_i < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. Uma subsequência é denotada por $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$, $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_i}, \cdots)$.*

$$((-1)^{2n}) = (1, 1, 1, ...) \text{ e } ((-1)^{2n-1}) = (-1, -1, -1, ...)$$

são subsequências de $((-1)^n)$.

Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitada, ou seja, quando existe $C > 0$ tal que $|x_k| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. As coordenadas de uma sequência (x_k) são sequências de números reais.

Exemplo 1.1 *A sequência $(x_k) = (1/k, -1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. De fato,*

$$|x_k| = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \sqrt{2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Longrightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Neste caso, diz-se também que (x_k) converge para a ou tende para a, escreve-se $\lim x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k = a$ ou simplesmente $x_k \longrightarrow a$. Quando o limite da sequência existe, dizemos que a mesma é convergente, caso contrário é divergente.

Tem-se $\lim x_k = a \Longleftrightarrow \lim |x_k - a| = 0$.

Em termos de bolas, tem-se $\lim x_k = a$ se, e somente se, qualquer bola aberta de centro a contém todos os termos x_k salvo, possivelmente para um número finito de índices k.

Teorema 1.2 *Uma sequência $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \cdots, a_n)$ se, e somente se, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$ para cada $i = 1, ..., n$.*

Teorema 1.3 ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$, possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$, uma sequência limitada. Então $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Por Bolzano-Weierstrass na reta, $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma sequência convergente. Isto significa que existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, bem como um número real a_1 que satisfaz $\lim\limits_{k\to\mathbb{N}_1} x_{k_1} = a_1$. Por sua vez, cada coordenada da sequência $x_k = (x_{k_1}, ..., x_{k_n})$ seguindo este mesmo processo, então temos infinitos conjuntos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2, ..., \supset \mathbb{N}_n$ e números reais $a_1, a_2, ..., a_n$, tais que $\lim\limits_{k\to\mathbb{N}_i} x_{k_i} = a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Então, pondo $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, obtém-se $\lim\limits_{k\to\mathbb{N}} x_k = a$, como queríamos mostrar.

■ ■

1.4 Pontos de Acumulação

Estudaremos nesta seção pontos de acumulação no espaço euclidiano n-dimensional, cuja importância é significativa para entendermos a noção de aproximação de um ponto de um conjunto por infinitos outros pontos do mesmo conjunto.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X, diferente do ponto a. Em outras palavras temos, para todo $\varepsilon > 0$, deve existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto X por X'.

Teorema 1.4 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) a é ponto de acumulação de X;

(ii) Existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

(iii) Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

Exemplo 1.2 *Tomando o conjunto $C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}\ ; n \in \mathbb{N}\right\}$. Temos que 0 é ponto de acumulação de C, já que existe uma sequência $x_k = \frac{1}{k} \in C$ com $\lim x_k = 0$ e $x_k \neq 0$.*

Exemplo 1.3 *Agora, tomemos $C = \{1\}$. Vemos que a única sequência de pontos desse conjunto, é a sequência $x_k = 1$, constante. Contudo, vemos que $\lim x_k = 1$, mas $x_k = 1$ não cumpre a condição (ii) do teorema acima. Logo, 1 não é ponto de acumulação do conjunto $C = \{1\}$.*

1.5 Aplicações Contínuas

Faremos menção nesta seção das aplicações contínuas, cujo entendimento é de suma importância para entendermos o comportamento e aproximações de pequenas variações nas imagens dessas aplicações.

Definição 1.4 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é contínua no ponto $a \in X$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $x \in X$ tal que:*

$$\| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \delta$$

.

Simbolicamente falando,temos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ou seja, para toda bola aberta $B(f(a);\varepsilon)$ no $\mathbb{R}^n$, existe uma bola aberta $B(a;\delta)$ tal que $f(X \cap B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$.

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em todos os pontos do conjunto X, dizemos que f é uma aplicação contínua. Caso contrário, dizemos que f é uma aplicação descontínua.

Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *Lipschitziana*, quando existe $K > 0$ tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq K \| x - y \|$$

quaisquer que seja $x, y \in X$.Toda aplicação *Lipschitziana* é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ e $a \in X$, existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$, tal que

$$x \in X \text{ e } \| x - a \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) - f(a) \| \leq K\delta = \varepsilon.$$

Teorema 1.5 *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, dados $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no ponto $a \in X$, com $f(X) \subset Y$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ contínua no ponto $b = f(a)$, então $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existe, em virtude da contínuidade de g, um número $\eta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - f(a)| < \eta \Longrightarrow |g(y) - gf(a)| < \varepsilon$. Por sua vez, a partir de η, a contínuidade de f nos fornece $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \eta$ segue -se que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, logo $g \circ f$ é contínua no ponto a.

■ ■

Teorema 1.6 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$ tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstração: Seja f contínua no ponto a e $\lim x_k = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Como $\lim x_k = a$, existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $k > k_0 \Longrightarrow |x_k - a| < \delta$. Segue-se que $k > k_0 \Longrightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$. Logo, $\lim f(x_k) = f(a)$. Reciprocamente, suponha que f não seja contínua no ponto a. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in X$ com $|x_k - a| < a/k$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$. Então $\lim x_k = a$ sem que seja $\lim f(x_k) = f(a)$.

■ ■

1.6 Conjuntos Abertos e Fechados

Definição 1.5 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $x \in X$. Dizemos que x é ponto interior de X quando existe um intervalo aberto (a,b) tal que $x \in (a,b) \subset X$. Assim, todos os pontos suficientemente próximos de x ainda pertencem ao conjunto X.*

Observação 1.1 *x é um ponto interior ao conjunto X se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.*

De fato, se $x \in (a,b) \subset X$, tome $\varepsilon = mim\{x - a, b - x\} > 0$. Então, $a \leq x - \varepsilon < x + \varepsilon < x \leq b$, ou seja, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a,b)$. Logo, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.

Observação 1.2 *O ponto x é interior a X se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in X$.*

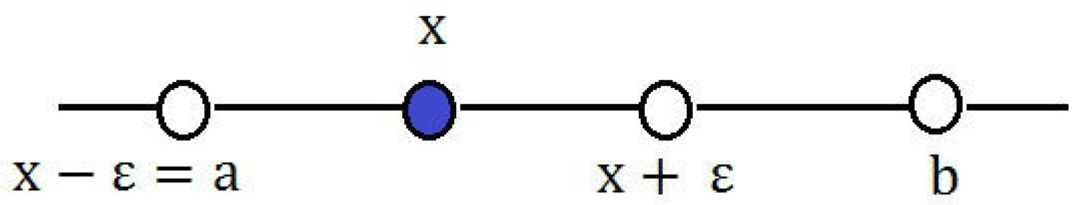

Figura 1.6: Intervalo com centro em x e raio ε contido em X

Demonstração:

$$|y-x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < y-x < \varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon < y < x+\varepsilon \Leftrightarrow y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

■

Definição 1.6 *Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ chama-se um ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X.*

Definição 1.7 *O interior do conjunto X, representado por intX, é o conjunto dos pontos $x \in X$ que são interiores a X. Quando $x \in intX$, dizemos que o conjunto X é uma vizinhança do ponto x.*

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \subset X$. Assim, X é aberto $\Leftrightarrow intX = X$.

Teorema 1.7 *Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, $intX$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Se $a \in intX$ então existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset X$. Se $x \in B(x;r)$ então pondo $\delta = r - \|x-a\|$, vemos que $B(x;\delta) \subset B(a;r)$, donde $B(x;\delta) \subset X$ e portanto $x \in intX$. Assim, todo ponto $a \in intX$ é centro de bola $B(a;r)$ contida em $intX$, o que prova que $intX$ é aberto. ■

1.7 Conjuntos Compactos e Conexos

Nesta seção introduziremos conceitos de coberturas e subcoberturas, para após definirmos conjuntos compactos, cisão e conjuntos conexos

Definição 1.8 *Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, com $L' \subset L$, tal que ainda se tenha $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Por exemplo, seja $X = \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$ e seja $L = \{L_1, L_2, L_3\}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$, onde

$$L_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right),\ L_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{ e } L_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right).$$

Então L é uma cobertura de X, pois $X \subset L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (0,1)$ e $L' = L_1 \cup L_2$ é uma subcobertura de L, pois $X \subset L_1 \cup L_2 = (0,1)$.

Dizemos que a subcobertura $X \subset \bigcup C_\lambda$ é aberta quando os C_λ forem todos abertos, e será finita se L é um conjunto finito.

Teorema 1.8 ***(Borel - Lebesgue)*** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e fechado. Então toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de K por meio de conjuntos abertos admite uma subcobertura finita.*

Demonstração: Provaremos para o caso $n = 1$. Sejam $A = \mathbb{R} - K$ e $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado tal que $K \subset [a,b]$. Logo, $[a,b] \subset \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup A$. Como A é aberto, temos, pelo teorema anterior, que existem $\lambda_1, \lambda_2, \ .\ ..\ , \lambda_n \in L$ tais que $[a,b] \subset A_{\lambda_1} \cup, ..., \cup A_{\lambda_n} \cup A$. Então,$K \subset A_{\lambda_1} \cup, \ldots, \cup A_{\lambda_n}$, pois $K \cap A = \phi$ ■

Definição 1.9 *Dizemos que o $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*

Observação 1.3 *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se for limitado e fechado.*

Teorema 1.9 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que K é compacto, se e somente se, toda sequência $x_k \subset K$ possui uma subsequência que converge para um ponto $a \in K$.*

Teorema 1.10 *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então sua imagem $f(K)$ é compacto. O mesmo vale se K for fechado.*

Toda aplicação $f : K \to \mathbb{R}^n$ definida no compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in K$.

Corolário 1.1 *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Toda aplicação contínua $f : K \to \mathbb{R}^n$ é fechada, isto é, $F \subset K$ fechado, implica $f(F)$ fechado. Com efeito, $F \subset K$ fechado $\Rightarrow$ F compacto $\Rightarrow$ $f(F)$ compacto $\Rightarrow$ $f(F)$ fechado em $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.11 *Toda aplicação contínua $f : K \to \mathbb{R}^n$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, é uniformemente contínua.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o teorema fosse falso. Então existiria $\varepsilon > 0$ e duas sequências de pontos $x_k \in X, y_k \in K$ tais que $|x_k - y_k| < \dfrac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim y_k = y \in K$, donde $\lim x_k = y$. Por f ser contínua, temos $\varepsilon \leq \lim |f(x_k) - f(y_k)| = |f(y) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ uma contradição. ■ ■

Teorema 1.12 *Seja $f : X \times K \to \mathbb{R}^n$ contínua, onde K é compacto. Tomemos $x_0 \in X$ fixo. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon$, seja qual for $\alpha \in K$.*

Demonstração: Se assim não fosse, existiriam $\varepsilon > 0$ e sequências de pontos $x_k \in X$, $\alpha_k \in K$ tais que $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| \geq \varepsilon$. Passando as subsequências se necessário, podemos admitir que $\lim \alpha_k = \alpha \in K$. Como, $\lim x_k = x_0$, a continuidade de f nos daria $\varepsilon \leq \lim |f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| = |f(x_0, \alpha) - f(x_0, \alpha)| = 0 < \varepsilon$, uma contradição. ■ ■

Definição 1.10 *Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ (Disjuntos) e abertos em X.*

Dizemos que X admite uma cisão trivial quando $X = X \cup \emptyset$. Nestas condições, dizemos que X é conexo se só admite a cisão trivial, caso contrário dizemos que X é desconexo.

Intuitivamente, dizemos que um espaço é conexo se pode passar de um ponto qualquer deste espaço para um outro ponto distinto em um movimento contínuo sem sair dele.

Proposição 1.1 *$X \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, X é um intervalo.*

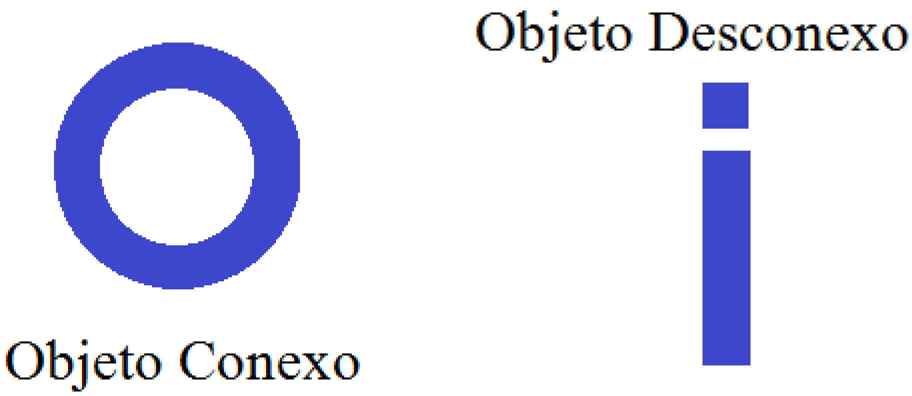

Figura 1.7: Exemplo de um espaço conexo e outro desconexo

Um intervalo $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto tal que

$$a, b \in X, e\ x \subset X \Rightarrow a < x < b \ \ ou \ \ x \subset (a, b).$$

Teorema 1.13 *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ conexo. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então $f(X)$ é conexo em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.11 *Um caminho num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $f : I \to X$, definida num intervalo I.*

Por exemplo, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o caminho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, definido por

$$f(t) = (1-t)x + ty,$$

chama-se caminho retilíneo que liga x a y. Ás vezes simbolizamos como caminho $[x, y]$.

Teorema 1.14 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua num conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.*

2 Tipos de Derivadas, Funções e Caminhos Diferenciáveis

Neste capítulo faremos uma breve introdução do que são caminhos no espaço $\mathbb{R}^n$.Introduziremos o conceito de derivadas em uma dimensão como casos particulares na progressão de conteúdos em analise real no $\mathbb{R}^n$, bem como as de Derivadas Implícitas que nos dará conceito de entendimento na definição da função implícita mais adiante, sequenciando derivadas parciais, direcionais e funções diferenciais.

2.1 Derivadas Implícitas

Consideremos a equação

$$F(x,y) = c$$

onde c é uma constante e F uma função. Dizemos que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação acima se qundo trocarmos y por $f(x)$ em $F(x,y) = c$ obtermos uma identidade, isto é, $F(x, f(x)) = c$, para todo x.

Exemplo 2.1 *A equação $x^2 + y^2 = 1$ define implicitamente as funções*

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ e } y = -\sqrt{1-x^2}.$$

De fato, considere $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $-f(x) = \sqrt{1-x^2}$ obtemos $x^2 + f(x)^2 = 1$. De mesma forma para $-f(x), \forall x \in [-1,1]$. Isto é, em ambos casos obtemos $F(x, f(x)) = 1$.

Para derivarmos funções definidas implicitamente, não precisa derivarmos equações para y em termos de x pois obtém-se sempre o mesmo resultado independente de quem se tome. Poderíamos fazer $x = \sqrt{1-y^2}$ e $x = -\sqrt{1-y^2}$ e em ambos os casos obtermos $F(f(y), y) = 1$.

Vamos considerar ainda a função $F(x,y) = x^2+y^2-1$, e admitir que a função $y = y(x)$ satisfaz a relação dada, isto é, que

$$x^2 + (y(x))^2 = 1.$$

Vamos derivar em relação a variável x. Temos que:

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Portanto, para $y \neq 0$ temos $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ e, chegaríamos ao mesmo resultado das funções definidas implicitamente $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$. ao derivarmos.

Considerando agora que a equação $F(x,y) = 0$ define $y = y(x)$, para x pertencente a algum intervalo aberto, em certas condições para F e para $y = y(x)$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$ em função de x e de $y(x)$. Realmente, usando a regra da cadeia para derivar $F(x,y(x))$, em relação a x, obtemos da equação $F(x,y(x)) = 0$ o seguinte:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Então, com a condição de que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) \neq 0$, escrevemos

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}.$$

A essa prática ou a essa construção, chamamos de derivação implícita, utilizado nos casos em que não seja possível conhecer $y = y(x)$.

2.2 Caminhos Diferenciáveis

Seja $f : I \mapsto \mathbb{R}$ definida em $I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é diferenciável em $x_0 \in I$ se existe um número real N onde dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - N \right| < \varepsilon$$

temos que $N = f'(x_0)$. Se f for diferenciável em x_0 então

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é diferenciável em todo ponto de I dizemos que f é diferenciável em I.

Teorema 2.1 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ com $I \subset \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in I$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração: Seja $N = f'(x_0)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow N - \varepsilon < \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < N + \varepsilon.$$

Seja $\delta = min\{\delta, \varepsilon/(N+\varepsilon)\}$. Então $\forall x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0| \leq (N + \varepsilon)\delta \leq \varepsilon.$$

Logo, f é contínua. ■

Por esse teorema, temos que diferenciabilidade implica em continuidade, entretanto a recíproca é falsa em geral. Basta tomarmos como exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x|$. Temos f é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em zero, pois para $x \neq 0$ temos

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|x|}{x} \Rightarrow 1 \; se \; x > 0 \text{ e } -1 \; se \; x < 0.$$

Logo, o limite não existe quando $x \to 0$.

Definição 2.1 *Um caminho em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $f : I \to \mathbb{R}^n$ definido num conjunto $I \subset \mathbb{R}$. Para cada $t \in I$, temos $f(t) = (f_1(t), \cdot \cdot \cdot, f_n(t))$ e as n funções $f_i : I \to \mathbb{R}$ assim definadas, são chamadas as funções coordenadas da função f.*

$f = (f_1, \cdot \cdot \cdot, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ é contínua em um ponto $a \in I \Leftrightarrow f_i : I \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.

O vetor velocidade do caminho $f : I \to \mathbb{R}^n$ no ponto $a \in X$ é, por definição, o limite

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

quando tal limite existe.

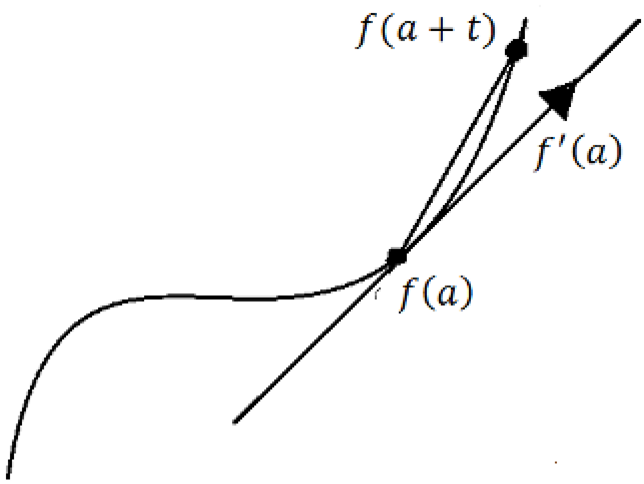

Figura 2.1: vetor tangente $f'(a)$

• Quando f posssui vetor velocidade no ponto $a \in I$, diz-se que f é diferenciável neste ponto. Se $f'(a)$ existe pata todo $a \in I$, diz-se que f é um caminho diferenciável.

• Quando $f'(a) \neq 0$, o vetor velocidade $f'(a)$ determina a reta $L = \{f(a) + tf'(a);\ t \in \mathbb{R}\}$.

Um caminho $f : I \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in I$ se, e somente se, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que, para $a+t \in I$,

$$f(a+t) = f(a) + tv + r(t), \quad \text{onde} \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Em caso afirmativo, tem-se $v = f'(a)$.

2.3 Derivadas Parciais

Definição 2.2 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função real, definida num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado o ponto $a \in U$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto a onde $(1 \leq i \leq n)$ é o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

quando tal limite existe.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$. Uma função $f: U \to \mathbb{R}$ é o que se chama função de duas variáveis. As derivadas parciais de f em relação a variável x num ponto $c = (a,b) \in U$ podem ser representadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

quando tal limite existe.

A derivada parcial de f em relação a variável y no mesmo ponto c acima é

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}.$$

Seja $f: U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dados o ponto $a \in U$ e o inteiro $i \in [1,n]$, a imagem do caminho $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda(t) = a + te_i$, é o que se chama a reta que passa por a e é paralela ao i-ésimo eixo. Tem-se assim $\lambda(0) = a$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|t| < \varepsilon \Rightarrow \lambda(t) = a + te_i \in U$.

Quando $n = 2$ o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

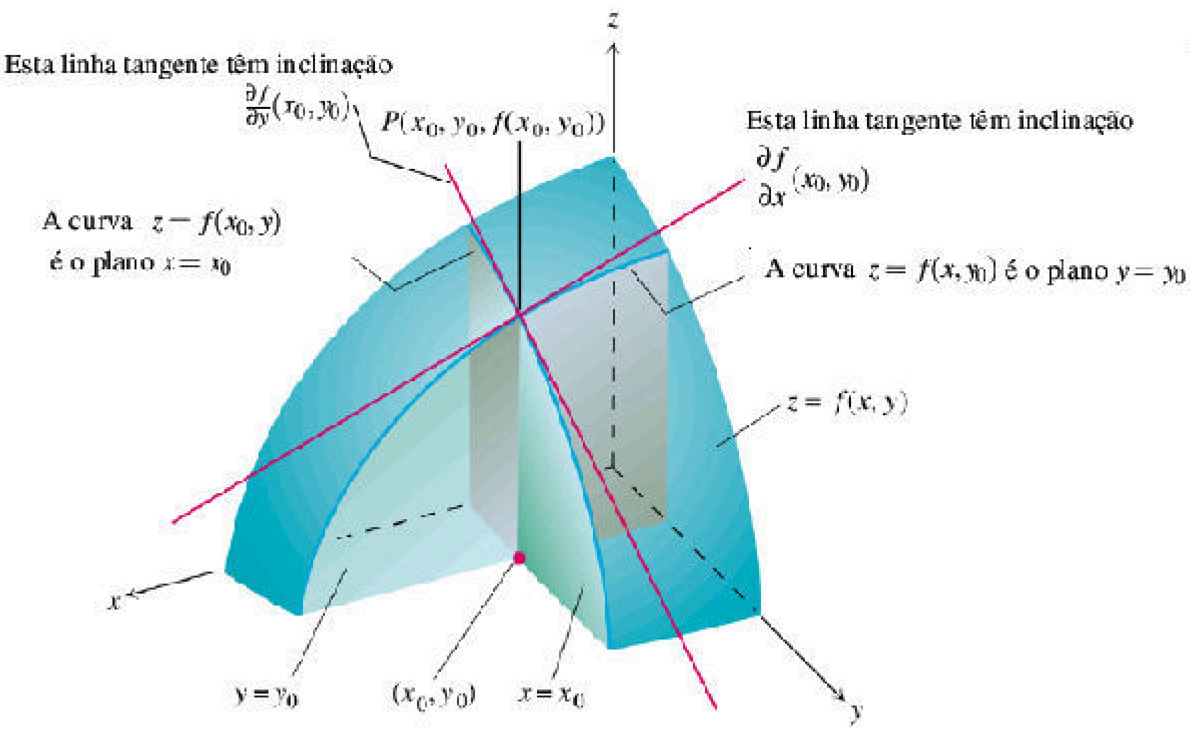

Figura 2.2: Gráfico das Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis

Para achar a derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de $z = f(x,y)$ olhe para y como como uma constante e diferencie $f(x,y)$ com relação a x.

Para achar a derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ olhe para x como como uma constante e diferencie $f(x,y)$ com relação a y. Em particular, o cálculo prático da i-ésima derivada parcial de uma função real $f(x_1,...,x_n)$ se faz considerando todas as variáveis como se fossem constantes, exceto a i-ésima, e aplicando as regras usuais de diferenciação relativamente a essa derivada.

Exemplo 2.2 *No caso em que $n = 2$, tal que considerando o caso em que $z = f(x,y) = x.y$, calcule suas derivadas parciais.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(x+t)y-xy}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ty}{t} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,t+y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x(t+y)-xy}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tx}{t} = x$$

2.4 Derivadas Direcionais

Definição 2.3 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f no ponto a segundo o vetor v, é por definição, o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

quando tal limite existe.

As derivadas parciais tornam-se casos particulares das derivadas direcionais:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a).$$

Teorema 2.2 ***(Teorema do Valor Médio)**. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.Suponhamos que o segmento e reta $[a,a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f|[a,a+v]$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a,a+v)$. Então existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)$*

Demonstração: Tomemos a função $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo $\xi(t) = f(a+tv)$. Pelas hipoteses feitas sobre f, ξ é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\xi(1) - \xi(0) = \xi'(\theta)$.

Ora, de $\xi(t) = f(a+tv))$, temos $\xi(1) = f(a+v)$, $\xi(0) = f(a)$ e

$$\xi'(\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(\theta+t)-\xi(\theta)}{t}$$

Temos que $\xi(\theta+t) = f(a+(\theta+t)v) = (a+\theta v)+tv$ e $\xi(\theta) = f(a+\theta)$. Fazendo as devidas substituições em $\xi'(\theta)$ temos:

$$\xi'(\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(\theta+t)-\xi(\theta)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+(\theta+t)v)-f(a+\theta v)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+\theta v)+tv)-f(a+\theta v)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)$$

O que demonstra o teorema. ■

Corolário 2.1 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivada direcionais em todo ponto $x \in U$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para qualquer vetor v, então f é constante.*

Demonstração: Tomemos $a \in U$ fixo. A existência de $\frac{\partial f}{\partial v}$ garante a continuidade da restrinção $f|[a,b]$ para todo segmento de reta $[a,b] \subset U$. Pelo teorema acima, $[a,b] \subset U$ implica $f(b) = f(a)$. Ora, qualquer ponto $x \in U$ (pode em virtude da conexidade do aberto U) ser ligado ao ponto a por uma poligonal contida em U, com vértices $a_0 = a, a_1, ..., a_k = x$. Temos sucessivamente $f(a) = f(a_1) =, ..., = f(x)$. Logo $f(x) = f(a)$ para todo $x \in U$, donde f é constante. ■

2.5 Funções Diferenciáveis

Definição 2.4 *Dada $f : U \to \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $a \in U$. Diremos que a função f é diferenciável no ponto a quando existirem constantes $A_1, \cdots, A_n$ tais que, para todo vetor $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a+v \in U$, se tenha*

$$f(a+v) = f(a) + A_1\cdot\alpha_1 + \cdots + A_n\cdot\alpha_n + r(v), \ \ onde \ \ \lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Quando f é diferenciável em todos os pontos de U, dizemos que f é diferenciável.

Dizemos que a função $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$ quando existirem as derivadas pariais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ e, além disso, para todo vetor $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tal que $a+v \in U$, tivermos

$$f(a+v) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot\alpha_n + r(v), \ \text{ onde } \ \lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Temos, assim que $r(v) = f(a+v) - f(a) - \sum(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a) \cdot \alpha_i$. Tomando $r(v)$ desta maneira, tem-se $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. Daí resulta que toda função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto. Com efeito, para $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, temos

$$\lim_{v \to 0} [f(a+v) - f(a)] = \lim_{v \to 0} \left[\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\alpha_i + r(v) \right] = 0.$$

Exemplo 2.3 *Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(x.y)$. então f é diferenciável, pois as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x.y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x.\cos(x.y)$ existem e são contínuas.*

2.6 Funções de Classe C^1 e Gradiente

Definição 2.5 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função que possui n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Ficam então definidas n funções*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R} \ onde\ \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Se estas funções forem contínuas em U, diremos que f é uma função de classe C^1 e escrevemos $f \in C^1$.

Em geral, uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se de classe C^1 quando cada uma de suas funções coordenadas $f_1, \cdots, f_n : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

Geralmente uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k quando ela possuir derivadas parciais em todos os pontos de U e as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R}$ forem de classe C^{k-1}.

Se $f \in C^1 \Rightarrow f$ diferenciável. Temos ainda que $f \in C^k \Rightarrow f$ é k vezes diferenciável.

Teorema 2.3 *Toda função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração: Suponha $U \subset \mathbb{R}^2$ por simplicidade. Tomemos $c = (a,b) \in U$ fixo e tomaremos $v = (h,k)$ tal que $c + v \in U$. Seja

$$r(v) = r(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k,$$

onde as derivadas são calculadas no ponto $c=(a,b)$. Podemos escrever

$$r(v)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k,$$

logo

$$\frac{r(v)}{|v|}=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Quando $v\to 0$ os termos de dentro dos colchetes acima tendem a zero, pela continuidade das derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Além disso, os termos fora dos colchetes têm valor absoluto que é ≤ 1. Portanto $\lim\limits_{v\to 0} r(v)/|v|=0$ e então f é diferenciável. ■

Corolário 2.2 *Toda função de classe C^1 é contínua.*

Teorema 2.4 *Sejam $U\subset\mathbb{R}^m, V\subset\mathbb{R}^n$ abertos, $f:U\to V$ uma aplicação cujas funções coordenadas $f_1,\cdots,f_n$ possuem derivadas parciais no ponto $a\in U$, e $g:V\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b=f(a)$. Então $g\circ f:U\to\mathbb{R}$ possui derivadas parciais no ponto a e vale*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\ i=1,\ldots,m$$

onde as derivadas relativas aos x_i são calculadas no ponto a e as relativas a y_k são calculadas no ponto $b=f(a)$. Alem disso, se f e g são ambos de classe C^1 então $g\circ f\in C^1$.

Exemplo 2.4 *Consideremos a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ com $(x,y)\mapsto f(x,y)=(x^2+y^2,x-y)$. Tomamos $f_1(x,y)=x^2+y^2$ e $f_2(x,y)=x-y$. Tem-se:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}=1\ e\frac{\partial f_2}{\partial y}=-1.$$

Como as derivadas parciais f_1 e f_2 existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$, segue-se que f é e classe C^1 sobre $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.6 *O gradiente de uma função diferenciável $f:U\to\mathbb{R}$ no ponto $a\in U\subset\mathbb{R}^n$ é o vetor*

$$grad\ f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Por exemplo, seja $n = 3$ e $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $a = (x, y, z)$. O gradiente de f é:

$$grad(f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\alpha_3\right).$$

Se v é qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, já vimos que a derivada direcional de f no ponto a na direção de v é por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Estas definições permitem enunciar os seguintes corolários da Regra da Cadeia.

Corolário 2.3 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$. Dado o vetor $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, se $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ tal que $\lambda(t) = a + tv$ é qualquer caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(t) = v$, tem-se*

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle grad\ f(a), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\alpha_i.$$

Basta aplicar diretamente a fórmula

$$(f \circ \lambda)' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{d\lambda_i}{dt},$$

de $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, tem-se $\alpha_i = \dfrac{d\lambda_i}{dt}(0)$ e $\dfrac{df}{dv}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$.

$\blacksquare$

Corolário 2.4 ***(Teorema do Valor Médio)*** *Dada $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, se o segmento de reta $[a, a+v] = \{a + t(a+v-a)\} = a + tv$; $0 \leq t \leq 1$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0,1)$, tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v) = \langle grad\ f(a+\theta v), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v)\alpha_i$$

onde $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

Demonstração: Com efeito, considerando o caminho retilineo $\lambda : [0,1] \to U$, dado por $\lambda(t) = a + tv$, vemos que $f(a+v) - f(a) = (f \circ \lambda)'(0)$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0) = (f \circ \lambda)'(\theta)$. Pela Regra da Cadeia

$$(f \circ \lambda)'(\theta) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v)\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v) = \langle grad\ f(a+\theta v), v\rangle.$$

■ ■

Dada $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, o conjunto $f^{-1}(c) = \{x \in U; f(x) = c\}$ é para todo $c \in \mathbb{R}$, chamado o conjunto de nível c da função f. Quando $U \subset \mathbb{R}^n$ e $n = 2$ e $n = 3$ esse conjunto é chamado curva de nível de c definida pela equação $f(x,y) = c$, respectivamente definido pela equação $f(x,y,z) = c$ chamado superficíe de nível c da função f.

Propriedades do Gradiente

1. O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função é crescente;
2. Dentre todas as direções ao longo das quais a função cresce, a direção ao gradiente é a de crescimento mais rápido;
3. O gradiente de f no ponto a é ortogonal as curvas de nível de f que passa por a.

Tomemos $w = grad\ f(a)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(a) = \langle grad\ f(a), w \rangle = |grad\ f(a)|^2 > 0.$$

Isto é, se $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é tal que $\lambda \in C^1$, $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = w = grad\ f(a)$ então a função $t \mapsto f(\lambda(t))$ tem derivada no ponto $t = 0$. Logo, $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ será uma função crescente. Isto significa que f cresce na direção do gradiente.

Dizer que o crescimento de f é mais rápido na direção do gradiente significa o seguinte: se $v \in \mathbb{R}^n$ é tal que $|v| = |grad\ f(a)|$ então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial (grad\ f(a))}(a).$$

Pela desigualdade de Cauchy- Schwarz:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle grad\ f(a), v \rangle \leq |grad\ f(a)||v|$$

$$= |grad\ f(a)|^2 = \frac{\partial f}{\partial (grad\ f(a))}(a)$$

Dizer que $w \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao conjunto de nível $f^{-1}(c)$ significa que, dado qualquer caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(c)$, diferenciável no ponto $t = 0$, com $\lambda(0) = a$, tem-se $\langle w, \lambda'(0) \rangle = 0$. Ora, $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$ significa que $f(\lambda(t)) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, portanto $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é constante, igual a c, logo $f \circ \lambda'(0) = 0$, ou seja, $\langle grad\ f(a), \lambda'(0) \rangle = 0$.

Chama-se ponto crítico de uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ num ponto $a \in U$ tal que $grad\ f(a) = 0$.

2.7 Matriz (Jacobiana, Hessiana) e Pontos Críticos

Dada a função $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o valor num vetor $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é dado por $\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_{ij}\alpha_i\alpha_j$, onde (h_{ij}) é uma matriz simétrica $n \times n$ chamada forma quadrática.

O valor da forma quadrática H no vetor v é dada por

$$H \cdot v^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

Definição 2.7 *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$, a representação matricial da derivada, que quando existe é denominada de matriz jacobiana é definido como sendo*

$$JF(x_1, ..., x_n) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Quando $m = n$ a matriz jacobiana é uma matriz quadrada e seu determinante

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_m)} = det[JF(x_1, ..., x_n)]$$

é denominada função Jacobiana. A jacobiana é a matriz das derivadas parciais, e o gradiente é a jacobiana de uma função real de n variáveis. Isto é, o gradiente é uma jacobiana que tem apenas uma linha.

Exemplo 2.5 *Obter a matriz jacobiana de $F(x,y) = (x^2y, \frac{x}{y}, x - y)$.*

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} x^2y \\ \dfrac{x}{y} \\ x - y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6 *Obter a função Jacobiana de $F(x,y) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$*

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ \dfrac{x}{y} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{-x}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Assim, a função jacobiana é $\dfrac{\partial(xy, \frac{x}{y})}{\partial(x,y)} = det[JF(x,y)] = \dfrac{-2x}{y}.$

Definição 2.8 *Dada a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a matriz jacobiana* $(derivada)$ *do gradiente, é denominado de matriz hessiana de* f. *Assim,*

$$Hesf(x_1,...,x_n) = J\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Temos que a matriz Hessiana é sempre uma forma quadrática.O determinante da função hessiana é chamado de função hessiana.

Exemplo 2.7 *Obter a matriz e a função hessiana da função* $f(x,y) = x^2y^3$.

$$grad\ f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2) = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{bmatrix}$$

e a matriz hessiana é

$$Hessf(x,y) = J\begin{bmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix}.$$

A função hessiana é $det[Hessf(x,y)] = det\begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix} = -24x^2y^4.$

Definição 2.9 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^∞, *isto é, uma função que possui derivada de todas as ordens e cada uma dessas derivadas é uma função contínua. Um ponto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *é chamado de ponto crítico da função* f *se as derivadas parciais de* f *se anulam no ponto* x_0, *isto é, se*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) =, ..., = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

onde $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$. *O valor de* $f(x_0)$ *é chamado de valor crítico da função* f. *Geometricamente falando, os pontos críticos ocorrem quando o gráfico de* f *possui uma tangente horizontal.*

Definição 2.10 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *um ponto crítico de* f. *Se a matriz Hessiana de* f *em* x_0 *possui determinate não nulo, então* x_0 *é um ponto crítico não degenerado de* f. *Caso* *contrário, x_0 é um ponto crítico degenerado de f.*

O ponto crítico $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se não degenerado quando a matriz Hessiana nesse ponto é invertível, isto é,

$$det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0.$$

Exemplo 2.8 *Consideremos a função $f(x,y) = x^2 + y^2$, então*

$$Hessf(x,y)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem determinante igual $4 \neq 0$ então a origem é um ponto crítico não degenerado da função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Por conseguinte, se considerarmos a função $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, teriarmos

$$Hessf(x,y)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é nulo e, assim sendo a origem é um ponto crítico degenerado da função.

3 Teorema da Função Implícita

O Teorema da Função Implícita afirma que, se em um ponto do conjunto solução da equação $F(x,y,z) = 0$ a derivada parcial em relação a z não se anula, esta equação define implicitamente a função f. Além disso, F é de classe C^1, o que significa que suas derivadas de primeira ordem são contínua. Permite concluir ainda que uma certa aplicação é diferenciável, sem que sua derivada seja conhecida. Temos ainda que, se as condições do Teorema da Função Implícita se verificarem, a existência local de uma função definida implicitamente é garantida, mas se não se verificarem, nada se pode concluir sobre a existência local de uma função definida implicitamente com base no Teorema da Função Implícita, podendo ocorrer ou não. Por isso, a verificação das condições do Teorema da Função Implícita é suficiente, mas não necessária, para a existência local de uma função definida implicitamente a partir de um sistema de equações.

3.1 Funções Implícitas

Definição 3.1 *Uma função é* ***extritamente crescente*** *num intervalo, se para quaisquer dois valores a e b deste intervalo se verificar que*

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Definição 3.2 *Uma função é* ***extritamente decrescente*** *num intervalo, se para quaisquer dois valores a e b deste intervalo se verificar que*

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b).$$

Definição 3.3 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Um número real c é valor regular da função f quando não existirem pontos críticos de f no nível c, ou seja,*

$$f(x) = c \Rightarrow grad\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \neq 0.$$

Quando c é um valor regular de f, diz-se também que o nível c é regular. Quando existem pontos críticos $x \in U$ tais que $f(x) = c$, dizemos que c é um nível crítico de f.

Exemplo 3.1 *Seja $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$. Qualquer número real, com exceção a 3, é valor regular de f, pois*

$$grad f(x,y) = \left(2x, -2y\right) \neq 0.$$

quando $(x,y) \neq (0,0)$. Por outro lado, $f(0,0) = 3$ não é valor regular de f pois $grad f(0,0) = (0,0)$.

Definição 3.4 *Diz-se que o conjunto $T \subset \mathbb{R}^n$ é uma* ***curva*** *se existir um caminho*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \rightarrow & f(t) \end{array}$$

onde I é um intervalo. O contradomínio de f diz-se ***traço*** *ou* ***trajetória*** *da curva.*

Definição 3.5 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para todo valor regular c da função f, o conjunto $f^{-1}(c)$ (se não for vazio) é uma curva de classe C^k, chamada a curva de nível e da função f.*

Vamos supor que a igualdade $F(x,y) = 0$. Então para cada valor de x deve existir ou não um ou mais valores de y que satisfaça a equação. Se $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ é um intervalo tal que para cada $x \in I$ existe exatamente um y satisfazendo a equação, então dizemos que $F(x,y) = 0$ define y como uma função de x implicitamente sobre I.

O teorema da função implícita nos dá condições para tirarmos conclusões sobre a equação $F(x,y) = 0$ se, ela define y como função de x ou x como função de y.

Vamos tentar compreender o teorema da função implícita no caso particular de duas equações e três incógnitas

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Mesmo sabendo a possibilidade de construirmos um sistema de n equações e $m+n$ incógnitas. Queremos compreender em quais condições estas equações acima define implicitamente y e z como função de x e, como calcular as derivadas $y = y(x)$ e $z = z(x)$. Supondo a existência destes valores e substituindo nas equações acima temos

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x)) = 0 \\ G(x,y(x),z(x)) = 0 \end{cases}$$

e se for possível usar a regra da cadeia teremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

Assim:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

onde $\frac{dz}{dx}$ é calculada em x e $\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial z}$ são calculadas em $(x,y(x),z(x))$. Diante disso enunciemos o teorema da função implícita, que dá condições precisas para este procedimento.

Lema 3.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^k$ compacto, $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ contínua e $c \in \mathbb{R}^p$. Se $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma aplicação $\xi : X \to K$, [isto é, para cada $x \in X$ existe um único $y = \xi(x) \in K$ com $f(x,\xi(x)) = c$] então ξ é contínua.*

Demonstração: Dado $x_0 \in X$, seja $y_0 = \xi(x_0)$. Tomamos uma sequência de pontos $x_n \in X$, com $\lim x_n = x_0$, e queremos provar que $\lim \xi(x_n) = y_0$. Como a sequência $(\xi(x_n))$ é limitada (pois $\xi(x_n) \in K$ para todo n,) basta provar que toda subsequência $\xi(n'_n)$, convergente em $\mathbb{R}^k$, tem limite y_0. Ora, se for $\lim \xi(x'_n) = y$, temos que $y \in K$ pois K é fechado. Como $f(x'_n, \xi(x'_n)) = c$ para todo n, temos $f(x_0,y) = \lim f(x'_n, \xi(x'_n)) = c$. Pela unicidade de y_0, isto obriga $y = y_0$ e conclui a demonstração. ■

Teorema 3.2 *(Teorema da Função Implícita) Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe $C^k (k \geq 0)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0,y_0) \in U$ tal que $f(x_0,y_0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.*

*Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0), tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ **é o gráfico** de uma função $\xi : I \to J$, de classe C^k. Tem-se*

$$\xi'(x) = \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

estas derivadas sendo calculadas no ponto $(x, \xi(x))$.

Como $(x_0, y_0) \in I \times J$, o intervalo aberto I contém x_0, enquanto J contém y_0. Dizer que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \to J$, significa que, para cada $x \in I$, existe um único $y \in J$ com $f(x,y) = c$. Colocando $y = \xi(x)$, a função $\xi : I \to J$, diz-se definida implicitamente no aberto $I \times J$, pela equação $f(x,y) = c$.

Demonstração: Para fixar as ideias, suponhamos $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que, pondo I= $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e J= $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, temos $I \times \overline{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ para todo ponto $(x,y) \in I \times \overline{J}$. Então, para todo $x \in I$, a função $y \mapsto f(x,y)$ é estritamente crescente no intervalo $\overline{J}$. Ou seja, como $f(x_0, y_0) = c$, temos $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > c$. Pela continuidade de f, podemos supor δ tão pequeno que, para todo $x \in I$, tenhamos $f(x, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x, y_0 + \varepsilon) > c$. Em virtude do teorema do valor intermerdiário existe, para cada $x \in I$, um único $y = \xi(x) \in \overline{J}$ tal que $f(x,y) = c$. Tem-se obrigatoriamente $y \in J$, portanto $f^{-1}(c) \cap (I \times \overline{J})$ = $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \longrightarrow J$. Vamos mostrar que ξ é de classe C^k, ou seja, que existe $\xi'(x)$ para todo $x \in I$ e que $\xi' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^{k-1}.

Ora, pondo $k = \xi(x+h) - \xi(x)$, temos $\xi(x+h) = \xi(x) + k$, logo

$$f(x+h, \xi(x) + k) = f(x, \xi(x) = c.$$

Da igualdade acima podemos obter o ponto

$$((x, \xi(x)), (x+h, \xi(x) + k)) = ((x, \xi(x)), (x, \xi(x)) + (h,k)).$$

Usando o teorema do valor médio, seja $a = (x, \xi(x))$ $a + v = (x, \xi(x)) + (h,k)$, com $v = (h,k)$ e teriamos $(a, a+v)$ e $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta v)\alpha_i$

Pelo Teorema do valor Médio, existe θ com $0 < \theta < 1$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 &= ((x, \xi(x)), (x, \xi(x) + (h,k))) = f(x+h, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}((x, \xi(x)) + \theta(h,k))h + \frac{\partial f}{\partial y}((x, \xi(x)) + \theta(h,k))k \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k)k.$$

Daí

$$\frac{\varepsilon(x+h)-\varepsilon(x)}{h} = \frac{k}{h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, \varepsilon(x)+\theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, \varepsilon(x)+\theta k)}.$$

Pelo Lema anterior, ε é contínua, então $\lim_{h\to 0} k = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f nos dá portanto

$$\varepsilon'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(x+h)-\varepsilon(x)}{h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varepsilon(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varepsilon(x))}.$$

Se $f \in C^1$, sendo $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e ε contínuas, esta fórmula mostra que ε' é contínua, logo $\varepsilon \in C^1$. Se $f \in C^2$, então $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e como acabamos de mostrar, ε são de classe C^1.

A fórmula que dá ε mostra então que ε' é também de classe C^1, isto é, $\varepsilon \in C^2$. E assim por diante: Se $f \in C^k$ então $\varepsilon \in C^k$. ■

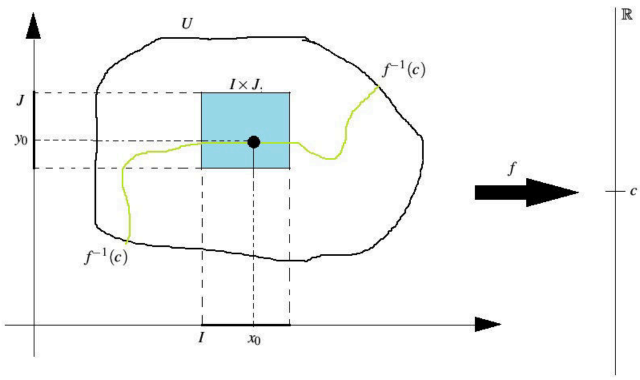

Figura 3.1: Gráfico da Função Implícita

Teorema 3.3 ***(Teorema da Função Implícita)***. *Seja $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^k (k \geq 1)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se um ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então existem uma bola $B = B(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\varepsilon : B \to J$, de classe C^k. Para todo $x \in B$, tem-se*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varepsilon(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varepsilon(x))} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A função $y = \varepsilon(x)$ diz-se "definida implicitamente"pela equação $f(x,y) = c$. Dizer que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função significa que, para cada $x \in B$ existe um único $y = \varepsilon(x) \in J$ tal que $f(x,y) = c$. Temos que $\varepsilon(x_0) = y_0$.

Demonstração: Suponha que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) > 0$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, existem $\delta > 0$ $\varepsilon > 0$ tais que pondo $B = B(x_0,\delta)$ e $J = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, temos $B \times \overline{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ para todo ponto $(x_0,y_0) \in B \times \overline{J}$. Então para todo ponto $x \in B$, a função $y \to f(x,y)$ é estritamente crescente no intervalo $\overline{J} = [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$. Como $f(x_0,y_0) = c$, segue-se que $f(x_0,y_0-\varepsilon) < 0$ e $f(x_0,y_0+\varepsilon) > 0$. Pela continuiadade de f, podemos supor δ tão pequeno que, para todo $x \in B$, tenhamos $f(x,y_0-\varepsilon) < 0$ e $f(x,y_0+\varepsilon) > 0$.

Pelo Teorema do Valor Intermerdiario existe, para cada $x \in B$, um único $y = \xi(x) \in \overline{J}$ tal que $f(x,y) = c$. Tem-se obrigatoriamente $y \in J$, logo $f^{-1}(c) \cap (B \times \overline{J}) = f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : B \to J$ a qual é contínua. Mostraremos que para todo $x \in B$, existem as derivadas parciais de ξ.

Tomemos $k = k(t) = \xi(x+te_i, \xi(x)+k) = f(x,\xi(x)) = c$ para todo $t \in (-\delta,\delta)$. Desta igualdade temos o ponto $(((x,\xi(x)),(x+te_i,\xi(x)+k))$ que podemos tomar $a = (x,\xi(x))$ e $a+v = ((x,\xi(x)),(te_i,k))$ com $v = (te_i,k)$ e pelo Teorema do Valor Médio, para todo $t \in (-\delta,\delta)$ existe $\theta = \theta(t) \in (0,1)$ de forma que $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta v)\alpha_i$. Assim,

$$0 = f(x+te_i,\xi(x)+k) - f(x,\xi(x)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta te_i,\xi(x)+\theta k)t + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta te_i,\xi(x)+\theta k)k.$$

Logo,

$$\frac{\xi(x+e_i)-\xi(x)}{t} = \frac{k}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta te_i,\xi(x)+\theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta te_i,\xi(x)+\theta k)}.$$

Pela continuidade de ξ, $\lim_{t\to 0} k(t) = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f nos dá então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(x+te_i)-\xi(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))}.$$

Sendo $f \in C^1$, resulta desta fórmula que as derivadas parciais de ξ são contínuas, logo $\xi \in C^1$. Se for $f \in C^2$, então suas derivadas parciais são de classe C^1. Como já temos $\xi \in C^1$, resulta ainda da fórmula acima que as derivadas parciais de ξ são de classe C^1, logo $\xi \in C^2$. E assim por diante: $f \in C^k$ implica $\xi \in C^k$. ■

Exemplo 3.2 *Tomemos* $F(x,y,z) = x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$. *Vamos determinar pontos* (x_0, y_0, z_0) *tais que* $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$. *Como*

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = z_0(16x_0 - 9y_0z_0) = 0,$$

se $z_0 = 0$ *ou* $16x_0 - 9y_0z_0 = 0$, *segue que fora destes pontos* $z = k(x,y)$ *é diferenciável e*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2+8z^2}{16xz-9yz} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{6y-3z^3}{16xz-9yz}.$$

Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho o teorema da função implícita. O mesmo proporcionou uma série de conhecimentos da matemática pura, que certamente não seria visto no curso normal de licenciatura plena, como espaços em dimensões maiores, como é o caso dos espaços topológicos, sequências, conjuntos compactos que fazem referencias a álgebra, a analise e geometria. Contribuiu diretamente nos meus conhecimentos e formação, ampliando meu vocabulário matemático, através de conceitos, teoremas e definições que compõe a matemática. A esta composição consegui abstrair níveis altos em relação à docência. O mesmo poderá servir de referencia a outros trabalhos de mesma linha. Utilizemos a linguagem gráfica como requesito básico para compreensão e interpretação dos enunciados propostos. Em fim, este trabalho (TCC) teve como objetivo a apresentação do teorema da função implícita, como quesito a obtenção de titulo do curso de licenciatura plena em matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), campus VI.

Referências

BOUCHARA, Jacques C. **Cálculo integral avançado**. Jacques C. Bouchara, Vera Lucia Carrara Zanetic, Ana Catarina Pontone Hellmeister. São Paulo: EDUSP, 1996.

Clark, Marcondes Rodrigues. **Cálculo de funções de uma variável** .Marcondes Rodrigues Clark, Osmundo Alves de Lima. - Teresina: EDUFPI, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.2**. Elon Lages Lima. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Analise real vol.1. Funções de uma variável** .Elon Lages Lima. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LOURÊDO, Aldo Trajano. **Cálculo avançado**. / Aldo Trajano Lourêdo, Alexandre Marinho Oliveira, Osmundo Alves Lima. Campina Grande. Eduepb, 2010.

LIMA, O. A. e MACIEL, A.B. **Introdução à Análise Real**. Campina Grande, Eduepb,2008.

Sites consultados

Autor. **Título**.Disponível em:http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos.pdf/inversa.pdf (Acessado em 11/02/2014 às 15h:16min).

Autor. **Título**.Disponível em:http://docentes.fe.unl.pt/pchaves/1302/ficheiros/Lista6.2-Teorema daFuncao Implicita.pdf
(Acessado em 11/02/2014 às 16h:02min).

Autor. **Título**.Disponível em:http://www.professores.uff.br/katia.frensel/
(Acessado em 13/02/2014 às 11h:11min).

Autor. **Título**.Disponível em:http://www.professores.uff.br/katia.frensel/
(Acessado em 14/02/2014 às 10h:13min).