UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

MATRIZES: UM PASSEIO PELA HISTÓRIA E A CONTEMPLAÇÃO DE ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2022

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

MATRIZES: UM PASSEIO PELA HISTÓRIA E A CONTEMPLAÇÃO DE ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE

2022

C377m Cavalcanti, Maria da Guia Sarinho.
Matrizes [manuscrito] : um passeio pela história e a contemplação de algumas aplicações / Maria da Guia Sarinho Cavalcanti. - 2022.
43 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Aprendizagem. 2. Noções de matrizes . 3. Aplicações de matrizes. 4. Geometria . I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

MARIA DA GUIA SARINHO CAVALCANTI

MATRIZES: UM PASSEIO PELA HISTÓRIA E A CONTEMPLAÇÃO DE ALGUMAS APLICACÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 18 / 04 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Hélio Henrique de Lacerda

Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Aos meus pais, José Benivaldo e Rosa Maria, por todo amor, apoio e incentivo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder graça de realizar este sonho, por me dar forças em todas as vezes que pensei em desistir e me proteger durante todos os quilômetros que percorri para chegar à Universidade.

A minha família, em especial aos meus pais, José Benivaldo e Rosa Maria, por me apoiarem e se esforçarem para que nada me falte.

Ao meu grande amigo Luandro Cordeiro, pelo companheirismo desde o início do curso, que com muita paciência se dispôs a me ajudar na formatação deste trabalho. Só Deus pode retribuir tudo que ele fez por mim ao longo desses 5 anos. Estendo este agradecimento à sua esposa, Keldyma Brandão, pessoa pela qual tenho grande admiração.

As boas amizades que a UEPB me proporcionou, em especial a Lili Trajano, Fernanda Lima e Caio Vinícius que sempre me ajudaram e tornaram esta caminhada mais leve. Levarei todos vocês em meu coração.

A todos os professores que passaram pela minha vida, em especial a todo o corpo docente da UEPB por contribuir com a minha formação, e de forma carinhosa, quero agradecer aos meus professores de Matemática da Educação Básica, que com grande maestria despertaram em mim o amor pela Matemática e são grandes exemplos de profissionais: Geovani Mendes, Maria Lima, Alexandre, Maria José Herculano, Marcos Alexandre e Petrônio Lima.

A minha orientadora, professora Kátia Suzana, por toda paciência, disponibilidade e empenho para que este trabalho fosse concluído.

Aos professores da banca examinadora, Luciana Roze e Hélio Henrique meu muito obrigada por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições.

A todos que fazem parte UEPB, instituição que terei a honra em me formar.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação e que torcem por mim, meu muito obrigada!

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."
(Nicolai Lobachevsky)

RESUMO

O estudo de matrizes geralmente é apresentado no segundo ano do Ensino Médio, e quase sempre descontextualizado, focado apenas nas suas operações. Essa prática acaba limitando o aluno de perceber a aplicabilidade deste conteúdo em uma situação cotidiana. O presente trabalho tem como objetivo apresentar aplicações de matrizes em diferentes contextos e de fácil compreensão. É apresentado também um pouco da história das matrizes bem como parte da sua teoria. Espera-se que o mesmo sirva de apoio para professores de Matemática, e ajude-os a estimular o interesse dos alunos, assim como obter uma melhor aprendizagem sobre o conteúdo de matrizes.

Palavras-chave: Aprendizagem. Noções de matrizes. Aplicações de matrizes. Geometria.

ABSTRACT

The study of matrices is usually presented in the second year of high school, and almost always decontextualized, focused only on their operations. This practice ends up limiting the student from perceiving the applicability of this content in an everyday situation. The present work aims to present applications of matrices in different contexts and of easy understanding. A bit of the history of matrices is also presented, as well as part of their theory. It is expected to serve as a support for Mathematics teachers, and help them to stimulate students' interest, as well as to obtain a better learning about the matrix content.

Keywords: Learning. Notions of matrices. Matrix applications. Geometry.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência muito antiga e desde o princípio se faz presente no nosso cotidiano. Em diversas situações durante a vida escolar, ela nos é apresentada de forma mecânica e descontextualizada, apenas através de fórmulas, sem aplicabilidade no dia a dia. Isso faz com que muitos alunos questionem o porquê de estudar determinado conteúdo, como também a enxerguem como uma disciplina de difícil compreensão.

Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica cujo interesse em se aprofundar no tema surgiu a partir da disciplina intitulada Matemática III, da grade curricular do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, da UEPB, Campus I, por não conhecer até então as aplicações de matrizes e não conseguir associar tal conteúdo a uma situação cotidiana.

Diante disto, temos como objetivo apresentar o estudo das matrizes e algumas de suas aplicações, servindo de suporte para professores de Matemática, pois acreditamos que tal conteúdo sendo apresentado desta forma despertará interesse nos educandos e consequentemente um melhor domínio do mesmo.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. No capítulo seguinte apresentamos um breve relato sobre a história das matrizes, seguido da biografia do inglês Arthur Cayley, considerado o "Pai das matrizes".

No terceiro capítulo é apresentada a definição de matrizes, as formas de como representa-las, seus tipos e operações, bem como teoremas, demonstrações e exemplos.

Já no quarto capítulo, procuramos apresentar algumas aplicações de matrizes em situações cotidianas e de fácil compreensão, que são elas: na geometria, na computação gráfica, na criptografia, no controle de tráfego e na atividade física.

Inicialmente, temos uma aplicação na geometria em que os vértices de uma figura são descritos em pares ordenados, formando colunas de uma matriz. Logo em seguida temos aplicações na computação gráfica, em que através de operações com matrizes um programa altera os *pixels* de uma imagem, fazendo-a mudar de posição ou tamanho.

Temos também uma aplicação na criptografia, método que utiliza a inversa e multiplicação de matrizes para codificar e decodificar mensagens. No controle de tráfego, em que é possível evitar engarrafamentos em determinados cruzamentos de ruas, alterando o tempo de abertura dos semáforos. E por fim na atividade física, na qual através da multiplicação de matrizes é possível determinar o gasto calórico de cada dia da semana de acordo com os exercícios realizados.

No quinto e último capítulo, temos as considerações finais do nosso trabalho.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS MATRIZES

Uma das primeiras noções de matriz surgiu no período da dinastia Han (206 a.C. até 220 d.C.) no livro chinês *K'ui-Ch'ang Suan-Shu* (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), tal livro é considerado um dos mais influentes da matemática chinesa, contendo 246 problemas que envolvem mensuração de terras, agricultura, impostos etc.

Os chineses gostavam de diagramas e isso fez com que o autor de *K'ui-Ch'ang Suan-Shu* apresentasse no livro um problema com sistema de equações lineares, como aponta Eves (2011):

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes da boa, três de regular e uma de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (Eves, 2011 p.268).

Para resolver esse tipo de problema eram efetuadas operações em uma tabela, assim como acontece com as matrizes, a diferença é que os chineses não utilizavam a representação por linhas, e sim por colunas, conforme mostra a tabela abaixo:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Após as operações, a tabela acima era reduzida à:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

O método que os chineses utilizavam para resolver este tipo de problema se assemelha ao escalonamento de Gauss (1777 – 1855), sendo possível determinar a quantidade de três feixes, posteriormente a de dois feixes e, por fim, um feixe.

O surgimento do determinante na Europa aconteceu em 1683, através de uma carta escrita por Leibniz (1649 - 1716) para L'Hospital (1661 - 1704). Posteriormente, matemáticos como Cauchy (1789 – 1857), Laplace (1749 – 1827), Cramer (1704 – 1752), Jacobi (1804 – 1851) apresentaram importantes contribuições para o estudo dos determinantes.

Cramer desenvolveu uma regra para a resolução de sistemas lineares por meio de determinantes que até hoje leva seu nome. Já Laplace apresentou um teorema em que é possível calcular o determinante de matrizes de ordem n, tal resultado é normalmente utilizado para $n \geq 4$.

Em 1841, o matemático Jacobi publicou três tratados sobre determinantes, e pela primeira vez a definição de determinantes poderia ser feita de forma algorítmica. No mesmo ano o inglês Arthur Cayley divulgou seu primeiro estudo sobre a teoria dos determinantes e utilizou duas barras verticais para representá-lo, tal feito tornou-se padrão. Por muito tempo as matrizes foram associadas aos determinantes, como se pode observar em Eves (2011):

> As contribuições de Cauchy à teoria dos determinantes, começando em 1812 com uma extensa memória de 84 páginas, colocam-no como o matemático que mais contribuiu para o assunto. Foi num artigo de Cauchy que apareceu a primeira demonstração e útil teorema que garante que se A e B são matrizes n x n, então $|AB| = |A||B|$. Incidentalmente foi Cauchy quem, em 1840, introduziu a palavra 'característica', na teoria das matrizes, chamando a equação $|A-\lambda I| = 0$. (Eves, 2011, p.532).

No ano de 1850, James Joseph Sylvester usou pela primeira vez o termo matriz, fazendo relação com seu significado: lugar onde algo é gerado e/ou criado. Ele as via como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..."(artigo publicado na Philosophical Magazine [1] de 1850, pág. 363-370).

A teoria das matrizes teve início em 1855 com um artigo de Arthur Cayley. Cayley enfatizou que embora a ideia de matriz antecede a de determinantes, historicamente aconteceu o contrário, pois os determinantes já haviam sendo utilizados de forma implícita através da resolução de sistema de equações lineares.

Em 1857, Cayley descobriu a álgebra das matrizes, para ele as matrizes surgiram a partir de transformações lineares. Diante disso, foi possível representar a transformação

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevendo } (x', y') = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x, y)$$

Partindo da observação de duas transformações sucessivas, Cayley definiu o produto de matrizes como também a adição de matrizes e a multiplicação de matrizes por escalares, destacando as propriedades algébricas dessas operações. Além disso, exibiu a matriz identidade como elemento neutro do produto de matrizes e a matriz nula como elemento neutro da adição de matrizes.

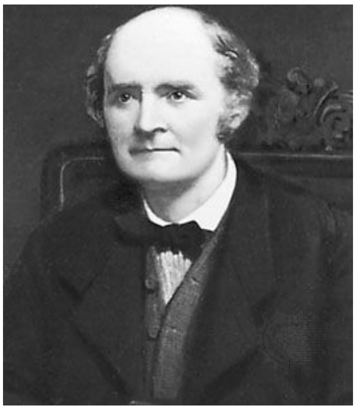
[1] A Philosophical Magazine é uma das mais antigas revistas científicas publicadas em inglês, fundada por Alexander Tilloch (1759-1825), apareceu pela primeira vez em junho de 1798 em Londres.

Cayley é considerado o "Pai das matrizes"devido ao seu pioneirismo e grandes contribuições ao estudo das matrizes. No seção a seguir, apresentaremos um pouco da sua biografia.

2.1 Biografia de Arthur Cayley

Arthur Cayley nasceu no dia 16 de agosto de 1821 em Richmond, Inglaterra. Desde muito jovem demonstrava grandes habilidades à Matemática. Seu pai era comerciante e tinha o desejo de vê-lo dando continuidade aos negócios da família, mas seguindo orientações de alguns professores seu pai mudou de ideia. Em 1838, Cayley ingressou no Trinity College, em Cambridge, para estudar Matemática, graduando-se em 1842 e logo depois torna-se professor do Trinity.

Figura 1 – Arthur Cayley.



Fonte: Google Imagens.

Após alguns anos, Cayley decidiu estudar Direito, mas essa prática não o impediu de continuar seus estudos com a Matemática, uma prova disso é que durante esse período ele chegou a publicar entre 200 e 300 artigos na área de Matemática. Em 1863, Cayley abandona a carreira jurídica, e volta a lecionar em Cambridge, dedicando-se exclusivamente à Matemática, área que era sua verdadeira paixão, embora ganhasse bem menos como professor.

Cayley deu grandes contribuições em praticamente todas a áreas da matemática pura, e por esse motivo ele está entre os três matemáticos mais prolíferos desta ciência, ao lado de Euler e Cauchy. *Collected Mathematical Papers* de Cayley possui 966 artigos, num total de 13 volumes em torno de 600 páginas cada um. Seu trabalho de maior relevância é a Teoria dos Invariantes, porém essa teoria já havia sido estudada por outros matemáticos, como Lagrange, Gauss e Boole.

Os artigos de Cayley eram diretos, claros e metódicos, refletindo na sua formação jurídica. Além de ter uma ótima memória, Cayley era dotado de um temperamento equilibrado e gentil. Nas horas vagas costumava ler romances, e não apenas em inglês, mas também em francês, grego, alemão e italiano. Também se interessava por pintura, botânica e alpinismo.

Cayley foi um dos matemáticos mais brilhantes e notáveis do século XIX, morrendo em 26 de janeiro de 1895 de causas naturais.

Neste breve relato histórico, apresentamos o surgimento das matrizes e a biografia de um dos seus precursores, Arthur Cayley. Agora, no capítulo seguinte detalharemos o estudo sobre matrizes.

3 MATRIZES

Neste capítulo abordamos as definições, teoremas acompanhados das demonstrações, como também exemplos a respeito do estudo das matrizes, tendo como base a obra Fundamentos de matemática elementar 4 [2].

3.1 Noção de matriz

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se m x n) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Exemplo 1: $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ é um matriz 2 x 3.

Em uma matriz M, cada elemento de M é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz m x n é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Uma matriz M do tipo m x n também pode ser indicada por $M = (a_{ij}); i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m \times n}$.

3.2 Matrizes especiais

Há matrizes que, por apresentarem uma utilidade maior nesta teoria, recebem nomes especiais.

Definição 3.1. Matriz linha é toda matriz do tipo 1 x n, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo 2: $M = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha do tipo 1 x 4.

[2]IEZZI, Gelson.; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. São Paulo: Nobel, 8. ed, 2013.

Definição 3.2. Matriz coluna é toda matriz do tipo m x 1, isto é, uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo 3: $M = \begin{bmatrix} 13 \\ 81 \\ 25 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 3 x 1.

Definição 3.3. Matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 4: $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 2 x 3.

Definição 3.4. Matriz quadrada de ordem n é toda matriz do tipo n x n, isto é, é uma matriz que tem igual o número de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}.$$

Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm a soma dos índices igual a $n + 1$, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\} = \left\{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}\right\}.$$

Exemplo 5: $M = \begin{bmatrix} 31 & 0 & -9 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ -7 & 0 & 6 & 2 \\ 25 & 3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 4.

Sua diagonal principal é {31, 1, 6, -4} e sua diagonal secundária é {25, 0, 6, 5}.

Definição 3.5. Matriz diagonal é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 6: $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 2.

Definição 3.6. Matriz unidade de ordem n (matriz identidade) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 (indica-se I_n).

Exemplo 7: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

3.3 Igualdade

Definição 3.7. Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i ($i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$) e todo j ($j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$). Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

Exemplo 8: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

3.4 Adição

Definição 3.8. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j. Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo m x n é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 9: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -11 & 15 \\ 27 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & -9 \\ -2 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+22 & 0-9 \\ -11-2 & 15+1 \\ 27+3 & 8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -13 & 16 \\ 30 & 16 \end{bmatrix}$

Teorema 3.1. *A adição de matrizes do tipo $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:*

1) Associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$.

   Demostração:

   Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos:

   Para todo i e todo j,

$$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}.$$

2) Comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$.

   Demonstração:

   Fazendo $A + B = X$ e $B + A = Y$, temos:

$$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij}.$$

3) Elemento neutro: existe uma matriz M tal que $A + M = A$ qualquer que seja o A do tipo $m \times n$.

   Demonstração:

   Suponhamos, por um momento que exista tal matriz. Impondo $A + M = A$, resulta:

$$a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0.$$

   Isto é, o elemento neutro é a matriz nula do tipo $m \times n$.

4) Elemento simétrico: para todo A do tipo $m \times n$ existe uma matriz A' tal que $A + A' = M$.

   Demonstração:

   Suponhamos, por um momento, que exista tal matriz. Impondo $A + A' = M = 0$, resulta:

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}, \forall i, \forall j.$$

   Isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A.

Definição 3.9. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se oposta de A (indica-se $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplo 10: $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ -16 & 41 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -5 \\ 16 & -41 \end{bmatrix}$

Definição 3.10. Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo 11: $\begin{bmatrix} 15 & 11 & 0 & -8 \\ -4 & 9 & 1 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -7 & 8 & -2 \\ -12 & 3 & 1 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 11 & 0 & -8 \\ -4 & 9 & 1 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & -8 & 2 \\ 12 & -3 & -1 & -30 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 18 & -8 & -6 \\ 8 & 6 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

3.5 Produto de número por uma matriz

Definição 3.11. Dados um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$ para todo i e todo j. Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo 12: $2\cdot\begin{bmatrix} 16 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 10 \\ -\dfrac{1}{2} & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & -6 \\ 10 & 14 & 20 \\ -1 & 16 & 2 \end{bmatrix}$

Teorema 3.2. *O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:*

1) $a\cdot(b\cdot A) = (a\cdot b)\cdot A$

   Demonstração: Seja a_{ij} a coordenada da matriz A, temos que

$$a\cdot(b\cdot a_{ij}) = (a\cdot b)\cdot a_{ij}, \forall i, \forall j.$$

2) $a\cdot(A+B) = a\cdot A + a\cdot B$

   Demonstração: Sejam a_{ij} e b_{ij} as coordenadas da matrizes A e B, respectivamente, temos que

$$a\cdot(a_{ij}+b_{ij}) = a\cdot a_{ij} + a\cdot b_{ij}, \forall i, \forall j.$$

3) $(a+b)\cdot A = a\cdot A + b\cdot A$

   Demonstração: Seja a_{ij} a coordenada da matriz A, temos que

$$(a+b)\cdot a_{ij} = a\cdot a_{ij} + b\cdot a_{ij}, \forall i, \forall j.$$

4) $1\cdot A = A$

   Demonstração: Seja a_{ij} a coordenada da matriz A, temos que

$$1\cdot a_{ij} = a_{ij}, \forall i, \forall j\ .$$

3.6 Produto de matrizes

Definição 3.12. Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

para todo $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ e todo $k \in \{1,2,\ldots,p\}$.

Observação 3.1.

1ª) A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m\times n$ e B é do tipo $n\times p$.

2ª) A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m\times p$.

3ª) Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

(I) toma-se a linha i da matriz A:

$$a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots\ a_{in}\ (n \text{ elementos}).$$

(II) toma-se a coluna k da matriz B:

$$\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}\quad (n \text{ elementos}).$$

(III) coloca-se a linha i de A na "vertical" ao lado da coluna k de B (conforme esquema):

$$\begin{matrix} a_{i1} & b_{1k} \\ a_{i2} & b_{2k} \\ a_{i3} & b_{3k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{in} & b_{nk} \end{matrix}$$

(IV) calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado (conforme esquema):

$$a_{i1} \cdot b_{1k}$$
$$a_{i2} \cdot b_{2k}$$
$$a_{i3} \cdot b_{3k}$$
$$\vdots$$
$$a_{in} \cdot b_{nk}$$

(V) somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

Exemplo 13: Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$, calcular AB.

Sendo A do tipo 2×3 e B do tipo 3×1, decorre que existe AB e é do tipo 2×1. Fazendo $AB = C$, devemos calcular c_{11} e c_{21}:

$$\begin{aligned} C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B) \\ (2^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9) \\ (4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (7 + 16 + 27) \\ (28 + 40 + 54) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 3.3. *Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $AI_n = A$ e $I_m A = A$.*

Demonstração:

I) Sendo $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ e $B = AI_n = (b_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \cdots + a_{ii}\delta_{ii} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} = \\ &= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \cdots + a_{ii} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ii} \end{aligned}$$

para todos i e j. Então $A \cdot I_n = A$.

II) Analogamente

Teorema 3.4. *A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:*

1) Associativa: $(AB)C = A(BC)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$.

   Demonstração:

   Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m\times p}, E = (AB)C = (e_{il})_{m\times r}$ e $F = BC = (f_{jl})_{n\times r}$, temos:

$$
\begin{aligned}
e_{il} &= \sum_{k=1}^{p} d_{ik}\cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\cdot c_{kl} = \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}\cdot c_{kl}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot f_{jl}.
\end{aligned}
$$

   Então, $(AB)C = A(BC)$.

2) Distributiva à direita em relação à adição: $(A+B)C = AC+BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$.

   Demonstração:

   Fazendo $D = (A+B)C = (d_{ik})_{m\times p}$, temos:

$$
\begin{aligned}
d_{ik} &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot c_{jk}+b_{ij}\cdot c_{jk}) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\cdot c_{jk}.
\end{aligned}
$$

   Então, $(A+B)C = AC+BC$.

3) Distributiva à esquerda: $C(A+B) = CA+CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$.

   Demonstração:

   Análoga a (2).

4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$.

   Demonstração:

   Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m\times n}, D = kB = (d_{jk})_{n\times p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m\times p}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Então, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Observação 3.2.

1ª) É muito importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B é falso que $AB = BA$ necessariamente.

a) Há casos em que existe AB e não existe BA. Isso ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times p$ e $m \neq p$.

Exemplo 14:

$A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow \exists AB$.

$B = (b_{ij})_{2\times 3}$ e $A = (a_{ij})_{2\times 2} \Rightarrow \nexists BA$, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

b) Há casos em que existem AB e BA, porém são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$. Isso ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times m$ e $m \neq n$.

Exemplo 15:

$A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 2} \Rightarrow \exists AB = C = (c_{ij})_{2\times 2}$.

$B = (b_{ij})_{3\times 2}$ e $A = (a_{ij})_{2\times 3} \Rightarrow \exists BA = D = (d_{ij})_{3\times 3}$.

c) Mesmo nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos quase sempre $AB \neq BA$.

Exemplo 16: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ e $\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

2ª) Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

Exemplo 17:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3ª) É importante observar também que a implicação $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ não é válida para matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Exemplo 18: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.7 Matriz transposta

Definição 3.13. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isso significa que, por exemplo, $a'_{11}, a'_{21}, a'_{31}, \cdots, a'_{n1}$ são respectivamente iguais a $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$; vale dizer que a 1ª coluna de A^t é igual à 1ª linha de A. Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo 19: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

Teorema 3.5. *A matriz transposta apresenta as seguintes propriedades:*

1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $(a_{ij})_{m\times n}$.

   Demonstração:

   Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ij})_{m\times n}$, resulta:

$$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij} \text{ para todos } i, j.$$

2) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$.

   Demonstração:

   Fazendo $A + B = C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $(A+B)^t = C^t = (c'_{ji})_{n\times m}$, temos:

$$c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

3) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$.

Demonstração:

Fazendo $(kA)^t = (a''_{ji})_{n\times m}$, resulta:

$$a''_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

4) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times p}$, então $(AB)^t = B^tA^t$.

Demonstração:

Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m\times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p\times m}$, resulta:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}a'_{ji}.$$

Definição 3.14. Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica, temos: $a_{ij} = a_{ji}; \forall i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo 20: São simétricas as matrizes: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$

Definição 3.15. Chama-se matriz antissimétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = -A$.

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz antissimétrica, temos: $a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo 21: São antissimétricas as matrizes: $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \\ -5 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -a & b & -c \\ a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$

3.8 Matrizes inversíveis

Definição 3.16. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema 3.6. *Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.*

Demonstração:
Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Temos:

$$C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Definição 3.17. Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.

Exemplo 22: A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ pois:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

E assim encerramos o terceiro capítulo, apresentando as definições, operações entre matrizes e teoremas. Utilizaremos tais resultados no capítulo seguinte, onde mostraremos algumas aplicações de matrizes.

4 ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES

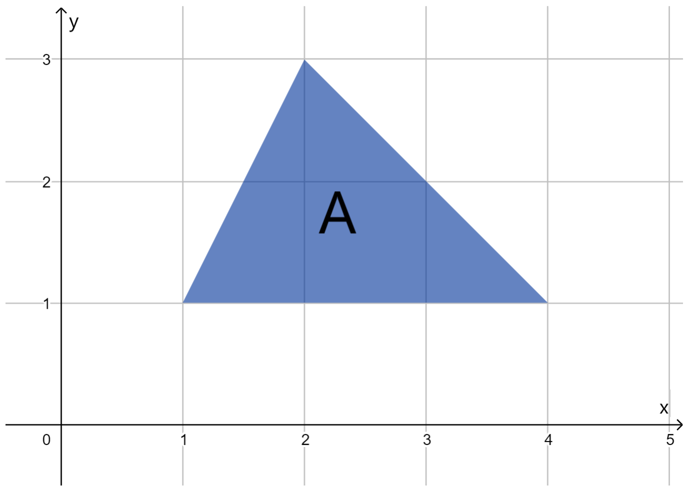
Neste capítulo abordaremos algumas aplicações de matrizes em situações recorrentes do nosso cotidiano e de fácil compreensão.

4.1 Geometria e coordenadas

Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 23:

Figura 2 – Triângulo A de vértices (1,1), (2,3) e (4,1).



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

O triângulo formado no plano cartesiano acima, tem como vértices os pares ordenados: (1,1), (2,3) e (4,1).

Note que é possível escrever os pares ordenados por meio de colunas, formando uma matriz, onde (1,1) será a primeira coluna, (2,3) a segunda coluna, e (4,1) a terceira coluna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Transformações geométricas

As imagens formadas nas telas de aparelhos como computadores e celulares são formadas por pequenos pontos luminosos que recebem o nome de *pixels*, que na prática são elementos de uma matriz. Ou seja, uma imagem com resolução de 800×600 tem $800 \cdot 600 = 480000$ *pixels*, que são distribuídos em 800 colunas e 600 linhas.

Ao alterar a posição ou escala de uma determinada imagem, um programa gráfico utiliza operações com matrizes para realizar tal feito, o qual recebe o nome de transformações geométricas. As transformações geométricas no plano são: translação, reflexão, rotação e escala.

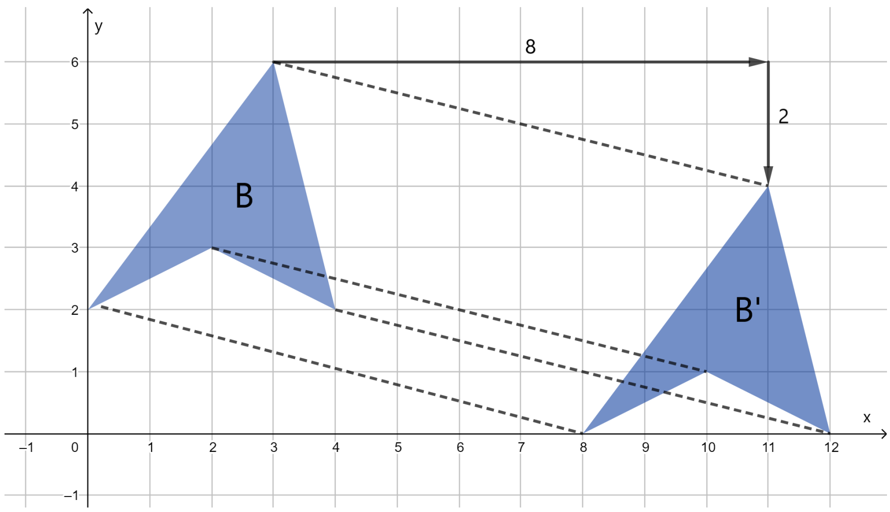
4.2.1 Translação

Para transladar um ponto $P(x, y)$ de a unidades na coordenada x e b unidades na coordenada y, realizamos uma adição de matrizes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

Exemplo 24:

Figura 3 – Translação de B em 8 unidades para direita e 2 unidades para baixo.



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

As matrizes associadas às figuras B e B' são respectivamente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B' = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Note que a figura B foi transladada em 8 unidades à direita no eixo x e 2 unidades para baixo no eixo y, originando a figura B'. Podemos descrever essa translação através da matriz coluna $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Perceba que:

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

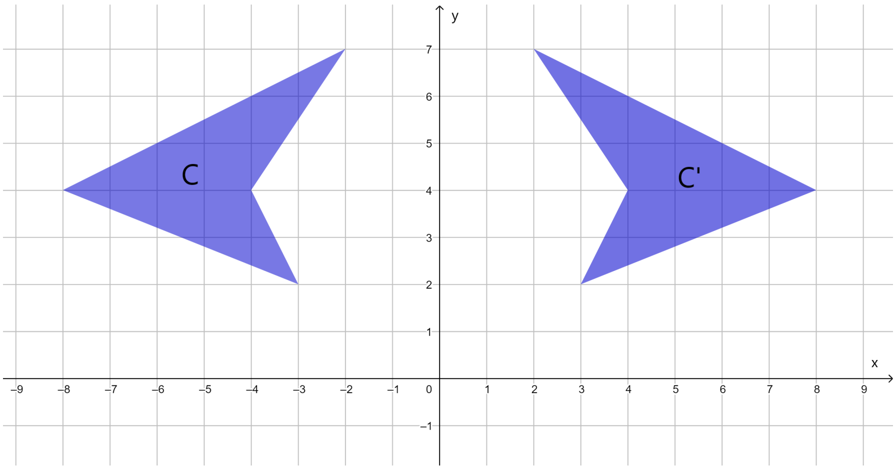
4.2.2 Reflexão

Para obter uma reflexão em relação ao eixo y de uma figura qualquer cuja matriz relacionada, é dada, por exemplo, por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deve-se efetuar a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exemplo 25:

Figura 4 – Reflexão de C em torno do eixo y.



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Note que os vértices da figura C são os pares ordenados: (-3, 2), (-4, 4), (-2, 7) e (-8,4). Analogamente, os vértices da figura C' são: (3, 2), (4, 4), (2, 7) e (8, 4). Portanto, as matrizes relacionadas a cada figura são:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } C' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Assim, a reflexão que leva C em C' é determinada por:

$$C \longrightarrow C', \text{ ou seja } C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

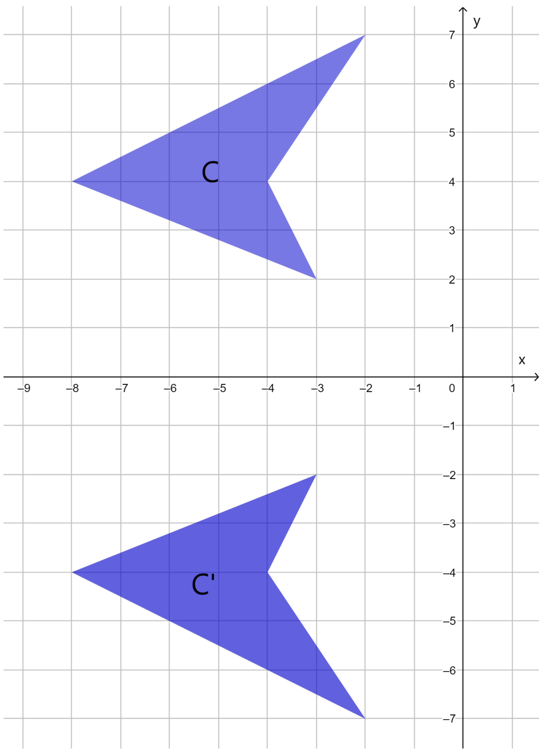
Perceba que é possível obter C', através da multiplicação de C, pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, isto é:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3+0 & 4+0 & 2+0 & 8+0 \\ 0+2 & 0+4 & 0+7 & 0+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\ &= C'. \end{aligned}$$

Agora, observe o exemplo a seguir, cuja reflexão da figura C se dá em torno do eixo x:

Exemplo 26:

Figura 5 – Reflexão de C em torno do eixo x.



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

As matrizes associadas as figuras C e C' são:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } C' = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

Analogamente ao que ocorre no eixo y, a reflexão de C em C' é dada por:

$$C \longrightarrow C', \text{ ou seja } C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow C' = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

Neste caso, deve-se realizar uma multiplicação entre a matriz C e a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ para obter C'. Veja:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3+0 & -4+0 & -2+0 & -8+0 \\ 0-2 & 0-4 & 0-7 & 0-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix} \\ &= C'. \end{aligned}$$

Portanto, a reflexão em torno do eixo x de uma figura qualquer, cuja matriz associada é dada, por exemplo por, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se da a partir da seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

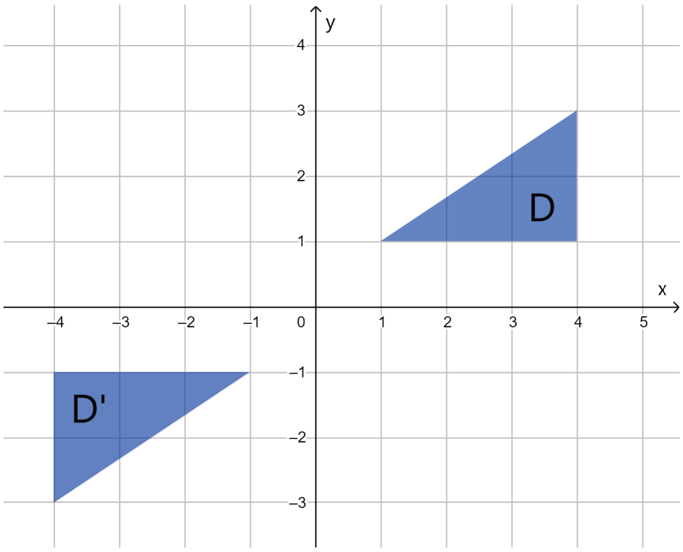
4.2.3 Rotação

Para obter uma rotação de α graus no sentido anti-horário em torno da origem (0,0) de uma figura qualquer, que possui como matriz associada, por exemplo, a matriz $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, deve-se efetuar a seguinte multiplicação:

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

Exemplo 27:

Figura 6 – Rotação de D, em 180° no sentido anti-horário em torno da origem.



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Note que a figura D sofreu uma rotação de 180° no sentido anti-horário em torno da origem, originando D'.

A matriz associada a figura D é:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim,

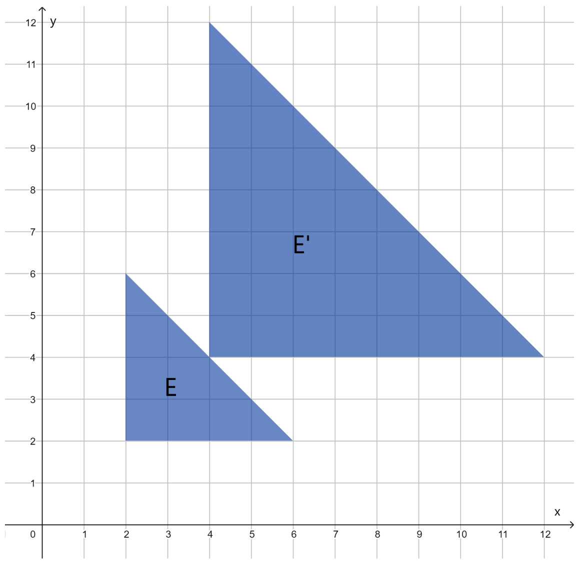
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} cos 180° & -sen 180° \\ sen 180° & cos 180° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+0 & -4+0 & -4+0 \\ 0-1 & 0-1 & 0-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= D'. \end{aligned}$$

4.2.4 Escala

Uma mudança de escala de um ponto $P(x,y)$ em relação à origem, usando um fator multiplicativo S_x para a coordenada x e um fator multiplicativo para S_y ocorre através multiplicação entre as matrizes $E = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que $P' = EP$.

Exemplo 28:

Figura 7 – Mudança da escala de E em 100%.



Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Perceba que ocorreu um aumento de 100% em todos os pontos da figura E, que possui matriz associada $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Aumentar em 100% é multiplicar por 2, então $S_x = 2$ e $S_y = 2$. Logo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 4+0 & 12+0 \\ 0+4 & 0+12 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix} = E'.$$

4.3 Criptografia

A palavra criptografia vem do grego *kryptós* (segredo) e *graphéin* (escrever) e significa um conjunto de métodos para codificar e decodificar mensagens.

O primeiro passo para codificar uma mensagem é convertê-la da forma algébrica para numérica. Utilizaremos a tabela abaixo para isso:

Tabela 1 – Relação entre letras e números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**.**	**#**
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Usaremos o símbolo # para representar o espaço entre as palavras, quando necessário, e não levaremos em conta a acentuação gráfica. A correlação entre letras e números mostrados na Tabela 1 pode ser alterada, desde que o remetente e o destinatário tenham conhecimento da mesma.

O segundo passo é escolher um par de matrizes quadradas, A e A^{-1}, de elementos inteiros e inversas uma da outra, ou seja, $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$. A matriz A será usada pelo remetente para codificar a mensagem enviada, já a matriz A^{-1} será usada pelo destinatário para decodificar a mensagem.

Exemplo 29: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a mensagem "PROFESSORA DE MATEMÁTICA".

Após a conversão das letras em números obtemos:

16 18 15 6 5 19 19 15 18 1 28 4 5 28 13 1 20 5 13 1 2 9 3 1

Chamaremos de M a matriz utilizada pelo remetente. Neste caso, M terá seus elementos distribuídos em 3 linhas, pois A e A^{-1} são de ordem 3.

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 5 & 19 & 19 & 15 \\ 18 & 1 & 28 & 4 & 5 & 28 & 13 & 1 \\ 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para codificar a mensagem, faremos a multiplicação da matriz M pela matriz A. Chamaremos esse produto de N:

$$AM = N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 5 & 19 & 19 & 15 \\ 18 & 1 & 28 & 4 & 5 & 28 & 13 & 1 \\ 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 56 & 28 & 41 & 8 & 45 & 37 & 25 & 17 \\ -18 & -1 & -28 & -4 & -5 & -28 & -13 & -1 \\ 94 & 34 & 82 & 13 & 70 & 74 & 41 & 19 \end{bmatrix}$$

Assim que o destinatário recebe a mensagem, o mesmo irá decodifica-lá calculando o produto entre as matrizes A^{-1} e N:

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 56 & 28 & 41 & 8 & 45 & 37 & 25 & 17 \\ -18 & -1 & -28 & -4 & -5 & -28 & -13 & -1 \\ 94 & 34 & 82 & 13 & 70 & 74 & 41 & 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 5 & 19 & 19 & 15 \\ 18 & 1 & 28 & 4 & 5 & 28 & 13 & 1 \\ 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= M.$$

Perceba que de fato, $A^{-1}N = M$, sendo assim, basta utilizar a Tabela 1 para descobrir qual mensagem está sendo transmitida:

Tabela 2 – Mensagem decodificada.

16	18	15	6	5	19	19	15	18	1	28	4	5	28	13	1	20	5	13	1	20	9	3	1
P	**R**	**O**	**F**	**E**	**S**	**S**	**O**	**R**	**A**	#	**D**	**E**	#	**M**	**A**	**T**	**E**	**M**	**A**	**T**	**I**	**C**	**A**

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Logo, voltamos a mensagem inicial: “PROFESSORA DE MATEMÁTICA”.

Vejamos outro exemplo desta aplicação.

Exemplo 30: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a frase “DEUS É FIEL.”

Fazendo a conversão de acordo com a Tabela 1 obtemos:

$$4 \quad 5 \quad 21 \quad 19 \quad 28 \quad 5 \quad 28 \quad 6 \quad 9 \quad 5 \quad 12 \quad 27$$

Como a matriz codificadora e a matriz decodificadora são de ordem 2, M terá seus elementos distribuídos em 2 linhas. Veja:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 21 & 19 & 28 & 5 \\ 28 & 6 & 9 & 5 & 12 & 27 \end{bmatrix}$$

Codificaremos a frase através a multiplicação AM, que chamaremos de N :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 21 & 19 & 28 & 5 \\ 28 & 6 & 9 & 5 & 12 & 27 \end{bmatrix}$$
$$N = \begin{bmatrix} 60 & 17 & 39 & 29 & 52 & 59 \\ 92 & 28 & 69 & 53 & 92 & 91 \end{bmatrix}$$

Para decodifica-lá, realizaremos a multiplicação entre A^{-1} e N.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 17 & 39 & 29 & 52 & 59 \\ 92 & 28 & 69 & 53 & 92 & 91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 21 & 19 & 28 & 5 \\ 28 & 6 & 9 & 5 & 12 & 27 \end{bmatrix} = M.$$

Por fim, obtemos:

Tabela 3 – Frase decodificada.

4	5	21	19	28	5	28	6	9	5	12	27
D	**E**	**U**	**S**	#	**E**	#	**F**	**I**	**E**	**L**	.

Fonte: Elaborada pela autora, 2022.

Com isso, retornamos a frase inicial: "DEUS É FIEL."

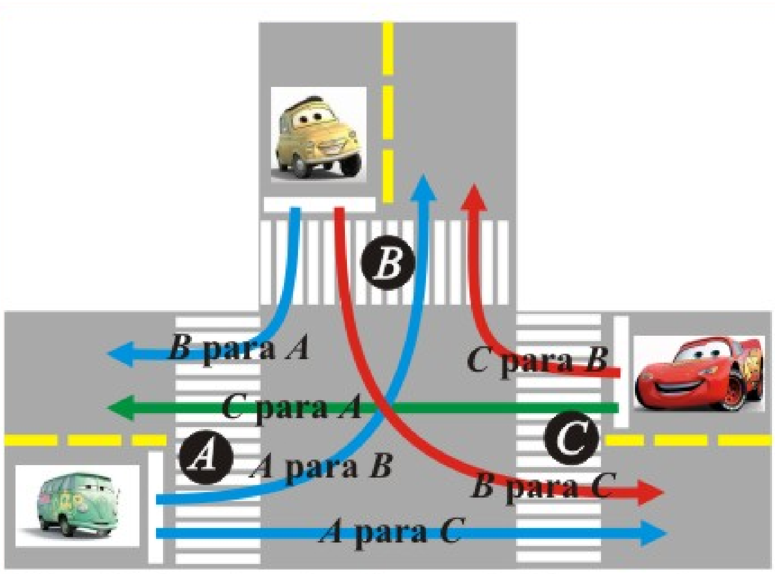
Esta aplicação pode ser realizada manualmente como mostramos, como também, de forma mais rápida pelo computador. Para um bom êxito é necessário que aja o sigilo sobre as matrizes codificadora e decodificadora, entre o remetente e o destinatário.

4.4 Controle de tráfego

Nesta seção, apresentamos mais uma aplicação de matrizes, desta vez no controle de tráfego, onde é possível evitar engarrafamentos em um determinado cruzamento de ruas. O exemplo a seguir tem fundamentação em Kilhian (2011).

Exemplo 31:

Figura 8 – Cruzamento de ruas.



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com

A Figura 8 representa um cruzamento de duas ruas de mão dupla, onde três conjuntos de semáforos controlam o fluxo dos veículos nos pontos A, B e C.

As matrizes M_1, M_2 e M_3 indicam o tempo, em minutos, que os semáforos ficam abertos ao mesmo tempo, de acordo com a sequência dada. De início ficam abertos, durante um minuto, os semáforos de A para B, de A para C e de B para A.

$$\begin{array}{c} \text{De} \\ M_1 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } A \quad B \quad C \end{array}$$

Posteriormente, durante meio minuto, ficam abertos os semáforos de B para A, de B para C e de C para B.

$$\begin{array}{c} \text{De} \\ M_2 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } A \quad B \quad C \end{array}$$

Por fim, durante meio minuto, ficam abertos os semáforos de C para A, de C para B e de A para C.

$$\begin{array}{c} \text{De} \\ M_3 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } A \quad B \quad C \end{array}$$

Ao somarmos as matrizes M_1, M_2 e M_3, iremos obter uma matriz M que indica o tempo que cada semáforo permanecerá aberto, em cada sentido, no período de 2 minutos.

$$\begin{array}{c} \text{De} \\ M = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } A \quad B \quad C \end{array}$$

Note que o semáforo de B para A fica aberto durante 1 minuto e meio, a cada período de 2 minutos, já o semáforo de C para B durante 1 minuto. Diante disto, é possível obter por quanto tempo cada semáforo permanece aberto, por exemplo, no período de 1 hora. Neste caso, basta multiplicarmos todos os elementos de M por 30, pois $30 \cdot 2$ minutos $=$ 60 minutos.

$$N = 30 \cdot M$$
$$N = 30 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$N = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 45 \\ 45 & 0 & 15 \\ 15 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que nestas ruas, passam até 15 veículos cada vez que os semáforos estão abertos, podemos determinar a quantidade de veículos que podem passar pelo cruzamento, no período de 1 hora.

$$P = 15 \cdot N$$
$$P = 15 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 30 & 45 \\ 45 & 0 & 15 \\ 15 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 450 & 675 \\ 675 & 0 & 225 \\ 225 & 450 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, caso haja um número maior de veículos que a quantidade máxima permitida, determinada pela matriz P, acontecerá um engarrafamento. Porém, essa eventualidade pode ser resolvida, alterando o tempo de abertura dos semáforos, ou seja, modificando os valores das matrizes M_1, M_2 e M_3.

4.5 Atividade física

Nesta aplicação, veremos como as matrizes podem contribuir na escolha do melhor exercício físico. Esta aplicação tem fundamentação em Campos (2008).

Exemplo 32:

Uma endocrinologista montou uma tabela com os gastos calóricos aproximado de uma pessoa de 60 kg em relação a algumas atividades físicas realizadas durante 1 hora.

Tabela 4 – Exercício × Perda de peso.

Peso	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12 km/h	Hidroginástica
60 kg	252 calorias	552 calorias	890 calorias	300 calorias

Fonte: Campos, 2008.

Suponhamos que uma pessoa com este peso será acompanhada ao longo de uma semana, conforme a tabela abaixo:

Tabela 5 – Horas por dia para cada atividade.

Dia da semana	**Andar de bicicleta**	**Caminhar acelerado**	**Correr a 12 km/h**	**Hidroginástica**
Segunda-feira	1	0	0	1
Terça-feira	0	0	1	0
Quarta-feira	0,5	0,5	0	0
Quinta-feira	0	0	0,5	1,5
Sexta-feira	0,5	1	0	0

Fonte: Campos, 2008.

Com as informações da Tabela 5 e Tabela 4, podemos construir matrizes do tipo 5×4 e 4×1, respectivamente. Assim, através do produto entre essas matrizes, é possível saber quantas calorias está pessoa queimará em cada dia de atividade física.

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 252 \\ 552 \\ 890 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \cdot 252 + 0,0 \cdot 552 + 0,0 \cdot 890 + 1,0 \cdot 300 \\ 0,0 \cdot 252 + 0,0 \cdot 552 + 1,0 \cdot 890 + 0,0 \cdot 300 \\ 0,5 \cdot 252 + 0,5 \cdot 552 + 0,0 \cdot 890 + 0,0 \cdot 300 \\ 0,0 \cdot 252 + 0,0 \cdot 552 + 0,5 \cdot 890 + 1,5 \cdot 300 \\ 0,5 \cdot 252 + 1,0 \cdot 552 + 0,0 \cdot 890 + 0,0 \cdot 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 552 \\ 890 \\ 1016 \\ 895 \\ 678 \end{bmatrix}$$

Diante disto, a pessoa que utilizamos como exemplo realizando corretamente todos os exercícios físicos, queimará 552 calorias da segunda-feria, 890 calorias na terça-feira, 1016 calorias na quarta-feira, 895 calorias na quinta-feira e 678 calorias na sexta-feira.

Estas são algumas, de tantas outras, aplicações das matrizes no nosso dia a dia, que devido ao seu ensino descontextualizado muitas vezes acabam passando despercebidas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, foi possível compreender que embora a ideia de matriz anteceda a de determinantes, historicamente as matrizes surgiram depois, assim como afirma o inglês Arthur Cayley.

Foi apresentado um breve contexto histórico sobre o surgimento das matrizes, seguido de uma pequena abordagem da sua teoria e finalizando com algumas aplicações, sendo assim possível atingir nosso objetivo, exibindo a aplicabilidade das matrizes em diferentes contextos. Esperamos que o mesmo possa servir de suporte para aqueles que têm interesse pelo tema.

Uma possível continuidade para a este trabalho pode se dá através de um estudo sobre como as aplicações influenciam na compreensão da teoria matricial.

Podemos concluir que é importante que os professores de Matemática busquem pelo ensino contextualizado nas suas aulas, uma vez que a Matemática está presente constantemente em nossas vidas.

REFERÊNCIAS

CAMPOS, Cristiane dos Santos. T**ratamento de diabetes: Uma aplicação de matrizes.** Jandaia do Sul, 2008. 23 p. Artigo. Universidade Estadual de Londrina.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingue. 5 ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Nobel, 8. ed, 2013.

KILHIAN, Kleber. **Matrizes e o Controle de Tráfego.** Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/matrizes-e-o-controle-de-trafego.html. Acesso em 24 de fev. de 2022.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOYER, Carl Bejamin. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. Ed. 3. São Paulo: Ática, 2016.

SITES CONSULTADOS

CAYLEY E A TEORIA DAS MATRIZES.
https://www.obaricentrodamente.com/. Acesso em 16 de ago. de 2021.

MATRIZES E CRIPTOGRAFIA.
https://apps.univesp.br/matrizes-e-criptografia/. Acesso em 24 de fev. de 2022.

SURGIMENTO DA TEORIA DAS METRIZES.
http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html. Acesso em 16 de ago. de 2021.

TRABALHOS CONSULTADOS

LIMA, Luana Gonçalves. **Matrizes e algumas de suas aplicações**. Orientadora: Kátia Suzana Medeiros Graciano. 2011. 37p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em:
http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/475. Acesso em 16 de ago. 2021.

SILVA, Gregório Pires da. **Matrizes: da história às aplicações**. Orientadora: Kátia Suzana Medeiros Graciano. 2018. 36p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018. Disponível em:
http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/18032 . Acesso em 16 de ago. 2021.

SILVA, José Valber Silvinio da. **Aplicações de matrizes no ensino médio.** Orientadora: Kátia Suzana Medeiros Graciano. 2014. 48p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014. Disponível em:
http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/9493. Acesso em 16 de ago. 2021.