UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EMMILY GOMES DE ALMEIDA

A EQUAÇÃO PITAGÓRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2022

EMMILY GOMES DE ALMEIDA

A EQUAÇÃO PITAGÓRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Teoria dos Números

Orientador: Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira

CAMPINA GRANDE - PB
2022

A447e Almeida, Emmily Gomes de.
A equação pitagórica e algumas aplicações [manuscrito] / Emmily Gomes de Almeida. - 2022.
39 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira , Departamento de Matemática - CCT."

1. Equação pitagórica. 2. Teoria dos números. 3. Equações diofantinas. 4. Teorema fundamental aritmética . I. Título

21. ed. CDD 512.72

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

EMMILY GOMES DE ALMEIDA

A EQUAÇÃO PITAGÓRICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Teoria dos Números

Aprovado em: 06/04/2022

BANCA EXAMINADORA

Vandenberg Lopes Vieira

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Vilmar Vaz da Silva

Prof. Dr. Vilmar Vaz da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Jose de Brito Silva

Prof. Me. Jose de Brito Silva
Universidade de Pernambuco (UPE)

Á minha família e amigos que contribuíram nessa jornada, sem vocês nada disso seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, sem ele nada seria possível em minha vida. A minha noiva que sempre me apoiou e me incentivou a buscar o melhor de mim, a minha família que sempre me deu exemplo de força e coragem para correr atras dos meus sonhos.

Agradeço ao meu professor e orientador, Dr. Vandenberg Lopes Vieira, por sempre estar presente na minha vida acadêmica, pela confiança, constante ajuda, paciência e excelente orientação.

Agradeço a todos os amigos que fiz durante minha graduação, foi uma jornada de muito ensinamento mútuo e constante alegria em tê-los, a todos os meus amigos da vida que sempre estiveram do meu lado e vibram a cada conquista.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Galileu Galilei (1564—1642).

RESUMO

Neste trabalho, consideramos a equação pitagórica, que é um tipo bastante especial de equação diofantina não linear. A solução da equação pitagórica é dada por parâmetros, e tal solução permite resolver outras equações diofantinas não lineares.
Será visto alguns temas principais da teoria dos números que dará base suficiente para entender os assuntos propostos, por fim solucionaremos por meio da equação pitagórica alguns exemplos.

Palavras-chave: Equação Pitagórica. Teoria dos Números. Equações Diofantinas.

ABSTRACT

In this work, we consider the Pythagorean equation, which is a very special type of nonlinear Diophantine equation. The solution of the Pythagorean equation is given by parameters, and such a solution allows solving other non-linear Diophantine equations. It will be seen some main themes of number theory that will give sufficient basis to understand the proposed subjects, finally we will solve some examples through the Pythagorean equation.

Keywords: Pythagorean Equation. Number Theory. Diophantine Equations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considerado por vários estudiosos um dos teoremas mais famosos da matemática, o Teorema de Pitágoras tem aplicações em vários ramos da matemática, como, por exemplo, na geometria, tanto espacial como plana. Ele é assim denominado em honra a Pitágoras de Samos (572 a.C.– 496 a.C.) que provavelmente foi o primeiro a apresentar uma demonstração formal desse teorema.

Pitágoras é certamente um dos matemáticos mais famosos, embora não se saiba muito sobre sua vida, conforme descreve (Eves 2011):

> Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se abalançado a viagens mais extensas. Ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Com o tempo, a influência e as tendências aristocráticas da irmandade tornaram-se tão grandes que forças democráticas do sul da Itália destruíram os prédios da escola fazendo com que a confraria se dispersasse. Segundo um relato, Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, talvez assassinado, com uma idade avançada entre 75 e 80 anos de idade. A irmandade, embora dispersa, continuou a existir por pelo menos mais dois séculos.

Mesmo sua descoberta sendo atribuída a Pitágoras, historicamente, os babilônios já tinham conhecimento a respeito desse tema mais de um milênio antes, em anuência com a tábula de Plimpton 322:

Figura 1.1 – *Tábula de Plimpton 322.*

Fonte: (Eves 2011).

Segundo Eves (2011, p.63), a tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945. Representada em número decimal, por conveniência, na Tabela 1.1:

Tabela 1.1 – *Representação da Plimpton 322 (Universidade Columbia).*

A	B	C	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
4	3	5	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Fonte: (Eves 2011).

As duas últimas colunas estão relacionadas aos parâmetros u e v que levam às ternas pitagóricas. Segundo Eves (2011, p.66), parece evidente que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos.

Formalmente, o Teorema de Pitágoras afirma que:

Teorema 1.1. (Teorema de Pitágoras) *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou equivalentemente, é possível separa um quadrado em dois. Em outras palavras, a equação*

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1.1}$$

tem solução em inteiros positivos, ou seja, existem inteiros positivos a, b e c para os quais

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Definição 1.1. Nas condições do teorema anterior, dizemos que (a, b, c) é um terno pitagórico.

A equação pitagórica em (1.1) deu origem ao Último Teorema de Fermat, que é um dos resultados mais famosos na história da Matemática. Fermat conjecturou que:

"Ao contrário, é impossível separar um cubo em dois cubos, uma potência quarta em duas potências quartas e, em geral, qualquer potência maior do que a segunda em duas potências do mesmo grau"

Em termos algébricos, ele afirmou que não existem inteiros positivos x, y e z tais que

$$x^n + y^n = z^n,$$

em que n é um número natural maior do que 2. A constatação desse resultado desafiou brilhantes matemáticos por mais de 350 anos, a exemplo de L. Euler (1707-1783), que foi responsável por demonstrar grande parte dos resultados anunciados por Fermat e dedicou parte de seus estudos a fim de provar o último teorema, mas não obteve sucesso. Tal problema só foi resolvido totalmente em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles, com auxílio do matemático Richard Taylor, também inglês.

Neste trabalho, serão considerados alguns resultados relacionados a equações diofantinas não linear; alguns deles são consequências da solução geral da Equação Pitagórica, que é um assunto bastante vasto, que será apresentado de modo simples. Enuciando sua definição, caracterizando todas as suas soluções, onde usaremos os principais conceitos da Teoria dos Números ao longo do texto.

O Trabalho está dividido como segue:

No Capítulo 2, consiste em alguns conteúdos preliminares que serão base para outros resultados ao logo do texto.

No Capitulo 3, foi caracterizado as soluções da equação pitagóricas, que são dadas por meio de parâmetros.

Por fim, no Capitulo 4, será apresentado algumas aplicações derivadas dos resultados do Capítulo 2.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, será apresentado resultados necessários para o desenvolvimento de todo o texto. Especialmente, destacando resultados relevantes sobre o conceito de divisibilidade e números primos. Para mais detalhes sobre os assuntos aqui considerados sugere-se as referências (Belizario 2018) e (Vieira 2015).

2.1 Princípio da Boa Ordenação

O Princípo da Boa Ordenação, resumidamente, PBO, é um dos principais resultados matemáticos. Ele é base para outros resultados não menos importantes como, por exemplo, o Princípio de Indução Finita, PIF. Aliás, estes dois princípios são equivalentes, ou seja, a partir do PBO é possível provar o PIF, e vice-versa. No texto, assumirá o PBO como axioma.

Axioma 2.1. (Princípio da boa ordem) *Todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente X de $\mathbb{Z}$ possui menor elemento.*

Conforme observado acima, será provado o PIF a partir do PBO. No que segue, $P(n)$ é uma sentença aberta que depende da variável n sobre um subconjunto infinito e limitado inferiormente X de $\mathbb{Z}$, ou seja, uma sentença que contém n, de maneira que, toda vez que se substitui n por $a \in X$, obtém-se uma sentença $P(a)$ que é, sem ambiguidade, verdadeira ou falsa.

Teorema 2.1. *Seja $P(n)$ uma sentença em $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$, em que $n_0 \in \mathbb{Z}$. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$, desde que $P(n)$ satisfaça as seguintes condições:*

(1) (Base da Indução) *$P(n_0)$ é verdadeira.*

(2) (Passo Indutivo) *Se $P(n)$ é verdadeira para $n \geq n_0$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.*

Agora veja um exemplo onde se destaca um resultado que tem em si um valor histórico, isto porque, segundo relatos históricos, um professor do notável matemático C. Gauss, para manter a ordem na sala, passou a seguinte questão: calcule a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Em pouco tempo, Gauss que tinham apenas 9 anos, entregou como resultado o número 5050. Impressionado com tamanha rapidez, o professor quis saber como chegou a tal resposta, dessa forma, Gauss explicou o seguinte método:

Se S_n é a soma dos n números naturais de 1 a n, então

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Agora, somando esta igualdade, membro a membro, com ela mesma, mas invertendo a ordem das parcelas do segundo membro, tem-se

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1).$$

Desse modo, $2S_n = n(n+1)$, ou seja,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Agora é só substituir $n = 100$, e teremos o valor que o professor pediu. Sem dúvidas Gauss tinham um grande raciocínio lógico-matemático.

Exemplo 2.1. Mostrar, usando indução finita, que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solução: Seja $P(n)$ a sentença sobre $\mathbb{N}$ dada por

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

É evidente que $P(n_0 = 1)$ é verdadeira (base da indução). Por hipótese de indução, suponha que $P(n)$ seja verdadeira, com $n \geq 1$, e provemos que $P(n+1)$ também o é. À luz da nossa hipótese,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somando $n+1$ a ambos os membros desta igualdade, obtêm-se

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

o que prova que $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$. □

2.2 Divisibilidade

O conceito de divisibilidade é central para todos os ramos da Teoria dos Números, sobretudo quando do estudo das propriedades dos números primos, estudo este que ocupa uma posição de destaque na Teoria Elementar e, principalmente, na Teoria Analítica, ambiente no qual se dedica ao desenvolvimento de resultados mais avançados sobre esses números. Por esta razão, será apresentado, sucintamente, algumas propriedades da divisibilidade que serão usadas ao longo do texto.

Definição 2.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, é dito que a **divide** b, ou que b é um **múltiplo** de a, e escrevesse $a|b$, se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$, caso contrário, $a \nmid b$.

Por exemplo, $5|20$, pois, $20 = 5 \cdot 4$, assim como $-3|27$, já que $27 = (-3) \cdot (-9)$. Por outro lado, $12 \nmid 10$, pois não existe inteiro k tal que $10 = 12 \cdot k$.

Exemplo 2.2. Determinar todos os números inteiros n para os quais $n+2$ divide n^3+1.

Solução: Notemos que $n^3 + 1 = (n+2)(n^2 - 2n + 4) - 7$. Assim,

$$\frac{n^3+1}{n+2} = n^2 - 2n + 4 - \frac{7}{n+2}, \quad \text{com} \quad n \neq -2.$$

Como $n^2 - 2n + 4 \in \mathbb{Z}$, então $n+2$ divide n^3+1 se, e somente se, $n+2$ divide 7. Visto que os divisores de 7 são ± 1 e ± 7, devemos ter

$$n + 2 = \pm 1, \quad n + 2 = \pm 7.$$

Portanto, $n = -1, n = -3, n = 5$ e $n = -9$. □

Lema 2.1. *Se $b|a$ e $a \neq 0$, então $|b| \leq |a|$.*

Demonstração: Se $b|a$, então, por definição, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c$. Logo,

$$|a| = |b \cdot c| = |b| \cdot |c|.$$

Como $c \neq 0$, temos $1 \leq |c|$. Assim, multiplicando os lados desta desigualdade por $|b|$, obtemos $|b| \leq |b| \cdot |c| = |a|$. □

Proposição 2.1. *Em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:*

(1) *Os únicos divisores de 1 são 1 e -1.*

(2) *Se $a|b$ e $b|a$, então $a = \pm b$.*

Demonstração: **(1)** Se b é um divisor de 1, então pelo Lema 2.1, $|b| \leq 1$. Assim, $0 < |b| \leq 1$. Logo $|b| = 1$, isto é, $b = \pm 1$.

(2) Por hipótese, $a = k_1 b$ e $b = k_2 a$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Desse modo,

$$a = (k_1 k_2) a,$$

ou seja, $k_1 k_2 = 1$ e, pelo item (1), $k_1 = \pm 1$. Isto implica $a = \pm b$. □

Teorema 2.2. *A divisibilidade tem as propriedades:*

(1) *Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

(2) *Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.*

(3) *Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(mb + nc)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: **(1)** Por hipótese, $b = ak_1$ e $c = bk_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Substituindo o valor de b em $c = bk_2$, obtemos $c = a(k_1k_2)$, ou seja, $a|c$.
(2) Como $b = ak_1$ e $d = ck_2$, temos $db = (ac)(k_1k_2)$, isto é, $ac|bd$.
(3) Por hipótese, $b = ak_1$ e $c = ak_2$. Logo, dados inteiros m e n, $mb = amk_1$ e $nc = ank_2$, de modo que $mb + nc = a(mk_1 + nk_2)$. Assim, $a|(mb + nc)$.

□

2.2.1 Algoritmo da Divisão

Um dos fundamentos de muitos resultados da Teoria dos Números é certamente o Algoritmo da Divisão ou Divisão Euclidiana, cujo resultado é bem conhecido. sabesse que nem sempre se pode dividir um inteiro por outro de modo a se obter um número inteiro, ou seja, essa divisão nem sempre é exata. De forma geral, o Algoritmo da Divisão assegura o seguinte:

Teorema 2.3. *Sejam a e b inteiros, com $b > 0$. Então, existem únicos inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b.$$

Demonstração: Considere o conjunto

$$L = \{a - bq : q \in \mathbb{Z} \text{ e } a - bq \geq 0\}.$$

A primeira coisa a ser verificada é que L é não vazio. De fato, desde que $b \geq 1$, então $|a| \cdot b \geq |a|$. Logo,

$$a - (-|a|) \cdot b = a + |a| \cdot b \geq a + |a| \geq 0.$$

Como $x = a - (-|a|) \cdot b$ é da forma $a - bq$, com $q = -|a|$, temos $x \in L$. Agora, será visto a existência e unicidade dos inteiros q e r.
(**Exitência**) Sendo L limitado inferiormente (por zero, por exemplo) e não vazio, então, pelo PBO, L possui menor elemento, digamos $r = \min L$. Como $r \in L$, tem-se $r \geq 0$ e

$$r = a - bq, \text{ com } q \in \mathbb{Z}.$$

Assegurar-se $r < b$. De fato, se isto não ocorrer, então $r - b \geq 0$ e

$$r - b = a - bq - b = a - b(q + 1).$$

Portanto, $r - b \in L$ e $r - b < r$, o que contraria a minimalidade de r. Por conseguinte, $a = qb + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < b$, o que prova a existência dos inteiros q e r.
(**Unicidade**) Consideremos $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Assim, $bq + r = bq_1 + r_1$, o que implica

$$r - r_1 = b(q_1 - q),$$

ou seja, $b|(r - r_1)$. Como $|r - r_1| < b$, segue que $r - r_1 = 0$, isto é, $r = r_1$. Por isso, $q_1 = q$ pois $b \neq 0$. $\square$

Definição 2.2. Um inteiro a é dito **par** quando a é um múltiplo de 2. Caso contrário, a é dito **ímpar**. Dizem que dois inteiros têm a **mesma paridade** quando ou ambos são pares ou ambos são ímpares. Decidir sobre a paridade de um inteiro é verificar se ele é par ou é ímpar. É claro que zero é um inteiro par. Os inteiros 4 e -14 também são, pois

$$4 = 2 \cdot 2 \quad \text{e} \quad -14 = 2 \cdot (-7).$$

Por outro lado, $a = 1$ é ímpar, bem como 9 e -25, já que

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \quad \text{e} \quad -25 = 2(-13) + 1.$$

Se P e I denotam os conjuntos dos números pares e ímpares, respectivamente, então

$$P = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad I = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

É imediato verificar que:

(1) $P \cap I = \varnothing$

(2) Se $x, y \in P$, então $x \pm y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

(3) Se $x, y \in I$, então $x \pm y \in P$ e $x \cdot y \in I$.

(4) Se $x \in P$ e $y \in I$, então $x \pm y \in I$ e $x \cdot y \in P$.

Exemplo 2.3. Mostrar que todo quadrado perfeito é da forma $4k$ ou $4k + 1$.

Seja x um quadrado perfeito. Assim, por definição, $x = a^2$. Analise a paridade de a. Se a for par, então $a = 2\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$x = a^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4k$$

para $k = \alpha^2$. Por outro lado, se a for ímpar, então $a = 2\alpha + 1$, de forma que,

$$x = a^2 = (2\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 4k + 1$$

para $k = \alpha^2 + \alpha$. Isto completa a prova. $\square$

2.3 Máximo Divisor Comum (MDC)

O conceito de máximo divisor comum entre dois inteiro nos é familiar desde o ensino básico. Ele é extremamente importante na Teoria dos Números porque por meio dele é possível estabelecer resultados substanciais, sobretudo aqueles sobre números primos. A ideia é a seguinte: dados a e b inteiros positivos, como determinar o maior divisor comum de a e b? Especificamente, tomem os conjuntos de divisores positivos dos números 8 e 12:

$$D(8) = \{1, 2, 4, 8\} \quad \text{e} \quad D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Assim, o maior número que é comum em $D(8)$ e $D(12)$ é 4. Por isso, pode se dizer que 4 é o máximo divisor comum de 8 e 12. Em símbolos,

$$mdc(8, 12) = 4.$$

Mais geralmente, tem-se a seguinte definição:

Definição 2.3. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Um inteiro d é o máximo divisor comum (mdc) de a e b quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $d|a$ e $d|b$;

(b) Se $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

O teorema a seguir é fundamental para solução de muitos problemas na Teoria dos Números, pois nos dá uma proveitosa identidade que relaciona os números a e b e seu mdc. Essa identidade é conhecida como identidade de **Bachet-Bézout**.

Teorema 2.4. (Bachet-Bézout) *Se $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros x' e y' tais que*

$$d = ax' + by'.$$

Demonstração: Considere o seguinte conjunto:

$$W = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad ax + by > 0\}.$$

É claro que W é não vazio, pois, para $x = y = 1$, tem-se:

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b > 0 \;\Rightarrow\; a + b \in W.$$

Logo, pelo PBO, W possui menor elemento, de forma que $\delta = minW$. Vamos mostrar que $\delta = mdc(a, b)$. Como $\delta \in W$, existem $x', y' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\delta = ax' + by'. \tag{2.1}$$

Pelo Algoritmo da Divisão,

$$a = \delta q + r, \;\; com \;\; 0 \leq r < \delta \tag{2.2}$$

Substituindo o valor de δ em (2.1) na igualdade (2.2), tem-se

$$r = a - \delta q = a - (ax' + by')q = a - aqx' - bqy'.$$

Assim,

$$r = a(1 - qx') + b(-qy')$$

Isso mostra que $r = au + bv$, com $u = 1 - qx'$ e $v = -qy'$. Daí, $r = 0$, pois caso contrário, $r > 0$, ou seja, $r \in W$, o que é uma contradição, pois δ é o menor elemento de W. Portanto, $a = \delta q$, isto é, $\delta | a$. Analogamente, prova-se que $\delta | b$.
Sendo $d = mdc(a, b)$, $a = d\delta_1$ e $b = d\delta_2$. Logo, por (2.1),

$$\delta = (d\delta_1)x' + (d\delta_2)y' = d(\delta_1 x' + \delta_2 y'),$$

ou seja, $d|\delta$, e como $\delta | d$, pois $d = mdc(a, b)$, segue que $d = \delta$. Por fim,

$$d = ax' + by'.$$

□

Corolário 2.1.1. *Os inteiros a e b são relativamente primos se, e somente se, existem $x,y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$.*

Corolário 2.1.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Demonstração: Suponhamos que $bc = ak$, com $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Corolário 2.1.1, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$. Logo, multiplicando ambos os lados da igualdade por c, tem-se:

$$c = cax + cby = cax + aky = a(cx + ky)$$

Dessa forma, $a|c$. □

2.4 Teorema Fundamental da Aritmética

Grande Parte dos resultados sofisticados da Teoria dos Números deve-se ao estudo sobre os números primos. Por isso, esses números ocupam grande destaque na Matemática. Tendo isso em mente, será falado um pouco sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, que vem a ser o principal resultado da Teoria dos Números. De forma resumida, o teorema assegura que todo inteiro $a \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ pode ser escrito como produto de primos.

Do ponto de vista da divisibilidade, os números primos são os mais simples, de acordo com a seguinte definição:

Definição 2.4. Um número $p > 0$ chama-se *primo* quando seus únicos divisores positivos são 1 e p. Caso contrario, p é um número *composto*.

O número 1 não é primo nem composto (isto se deve à sua condição especial de ser o elemento neutro da multiplicação), e que 2 e -2 são os únicos primos pares. Além disso, $a \in \mathbb{Z}$ é composto se, e somente se,

$$a = bc, \quad \text{com} \quad b, c \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 < |b|, |c| < |a|.$$

Nestas condições, b e c são chamados *divisores próprios* de a. Nota-se que, se p é primo, então para qualquer inteiro a,

$$mdc(a, p) = 1 \quad \text{ou} \quad mdc(a, p) = p.$$

Exemplo 2.4. Os números $3, 7$ e -13 são primos, enquanto $4 = 2 \cdot 2, 9 = 3 \cdot 3$ e $15 = 3 \cdot 5$ são compostos.

Exemplo 2.5. Mostrar que, se $m - 1$ e $m + 1$ são primos, com $m > 4$, então m é multiplo de 6.

Solução: Pelo Algoritmo da Divisão, temos $m = 6q + r$, com $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Assim,

$$m - 1 = 6q + r - 1 \quad \text{e} \quad m + 1 = 6q + r + 1.$$

Desde que $m - 1 > 3$ e $m + 1 > 5$ são ambos primos, então r só pode assumir o valor $r = 0$, ou seja, $m = 6q$. □

Se a é um número composto e a divide o produto bc, então, não necessariamente, $a|b$ ou $a|c$. Por exemplo, $6|3 \cdot 4$, mas $6 \nmid 3$ e $6 \nmid 4$. Isso não ocorre com os números primos. De fato, $p = 5$ divide 100, o qual pode ser escrito, por exemplo, como os seguintes produtos:

$$100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20.$$

Observe, $p = 5$ divide ao menos um dos fatores. Mais geralmente,

Proposição 2.2. *Sejam p um número primo e a_1 e $a_2 \in \mathbb{Z}$. Se $p|a_1 a_2$ então $p|a_1$ ou $p|a_2$.*

Demonstração: Como p é primo, temos $mdc(a_1, p) = 1$ ou $mdc(a_1, p) = p$. Se $p \neq a_1$, então $mdc(a_1, p) = 1$. Portanto de acordo com Corolário 2.1.2, $p|a_2$. □

Por meio de indução finita, o resultado anterior pode ser generalizado da seguinte forma:

Corolário 2.1.3. *Se p é primo e $p|a_1 a_2 \dots a_n$, então $p|a_i$ para algum $i = 1, ..., n$.*

Corolário 2.1.4. *Se $p, q_1, q_2, ..., q_r$ são números primos e $p|q_1 q_2 \dots q_r$, então $p = q_i$ para algum $i = 1, 2, ..., r$.*

Agora, será enunciado e provado o Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema 2.5. (Fundamental da Aritmética-TFA) *Todo número natural $a > 1$ pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de primos. Especificamente,*

$$a = p_1 p_2 \dots p_n,$$

em que $p_1, p_2, \dots, p_n$ são primos.

Demonstração: Há duas coisas a serem provadas: a primeira é a existência dos primos, e a segunda é a unicidade da fatoração.
(**Existência**) Tome o conjunto

$$M = \{a \in \mathbb{N} : a > 1 \quad \text{e} \quad a \neq p_1 p_2 \dots p_n\},$$

para primos $p_1 p_2 \dots p_n$. Provando que $M = \varnothing$, então a existência dos números primos estará provada. Por absurdo, suponha que $M \neq \varnothing$. Logo, pelo PBO, M possui um menor elemento m. É claro que m não pode ser primo e, por isso, é composto. Assim, pode escrevê-lo na forma

$$m = bc, \quad \text{com} \quad 1 < b, c < m.$$

Como $b < m$ e $c < m$, $b \notin M$ e $c \notin M$, pois $m = \min M$. Assim, sendo $b > 1$ e $c > 1$, estes números são primos ou são produtos de primos. Logo, $m = bc$ é um produto de primos, uma contradição. Desse modo, $M = \varnothing$.
(**Unicidade**) Suponha

$$a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m, \tag{2.3}$$

sendo $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$ todos primos. Daí,

$$p_1 | q_1 q_2 \dots q_m$$

e, pelo Corolário 2.1.4, $p_1 = q_j$ para algum $j = 1, \dots, m$. Sem perda de generalidade, assumindo $p_1 = q_1$. Pela lei do cancelamento, temos, de (2.3),

$$p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_m.$$

Da mesma forma, $p_2 = q_j$ para algum $j = 2, \dots, m$. Assumindo que $p_2 = q_2$, obtemos

$$p_3 \dots p_n = q_3 \dots q_m.$$

Continuando com este processo, e assumindo $n > m$,

$$1 = p_{m+1} \dots p_n,$$

uma impossibilidade. Similarmente, se $n < m$, então

$$1 = q_{n+1} \dots q_m,$$

o que também é uma impossibilidade. Portanto, $m = n$ e $q_i = p_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. $\square$

3 EQUAÇÃO PITAGÓRICA

Neste capítulo, será visto a caracterização da solução geral da equação pitagórica, e também sua definição. Para um estudo mais a fundo, indicamos as seguintes referências (Fernandes e Edmundo 2015), (Souza e Andrade), (Vieira 2015), (Wainer e Diofantinas).

O problema diofantino mais famoso e mais importante é aquele dado pelo *Último Teorema de Fermat*, que assegura que para todo inteiro $n > 2$, a equação diofantina

$$x^n + y^n = z^n,$$

não tem solução em inteiros positivos. Como já destacado, este problema foi resolvido totalmente em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles, com o auxílio do matemático Richard Taylor, também inglês. Esta equação generaliza a equação pitagórica

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

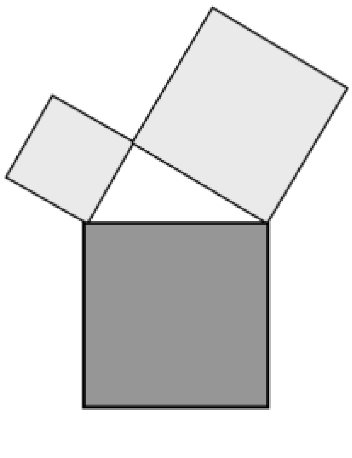
que será objeto de estudo desta seção, no sentido de caracterizar todas as suas soluções.

3.1 Teorema de Pitágoras

Euclides escreveu em seu livro, "Os Elementos", duas proposições referente ao Teorema de Pitágoras, as Proposições 47 e 48. Por meio da 48, será enunciado o Teorema da seguinte forma:

Proposição 3.1. *Se o quadrado feito sobre um lado de um triangulo for igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto.*

Figura 3.1 – *Representação do triângulo pitagórico.*



Fonte: O Autor (2022).

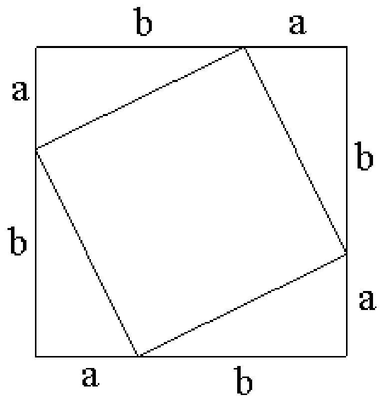
Algebricamente, o teorema de Pitágoras diz o seguinte:

"O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos"

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Demonstração: Tome 4 triângulos retângulos da forma:

Figura 3.2 – *Quadrado formado por triângulos retângulos.*



Fonte: O Autor (2022).

A partir dos triângulos dados na figura acima, tem-se um quadrado, cujo lado mede $l = a + b$. Existe duas expressões algébricas com as quais podem calcular a área deste quadrado. Com efeito, de um lado,

$$A_{qm} = (a + b)^2,$$

e de outro,

$$A_{qm} = \frac{4ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 = 2ab + c^2 \quad &\Longrightarrow \quad a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2 \\ &= \quad a^2 + b^2 = c^2.\end{aligned}$$

Isto prova o teorema. □

Sabesse da importância desse teorema, não apenas para a Matemática em si, como também para outras ciências, tais como Física e Astronomia. Na Geometria Plana, podem utilizar tal conhecimento para calcular a diagonal de um cubo; na Geometria Analitica usam para calcular a distância de dois pontos, e na trigonometria para definir os eixos do seno, cosseno e tangente. Por outro lado, na Física, podem aplicar no calculo para descobrir a força resultante entre vetores. Esses são apenas alguns exemplos das inumeras formas de utilizar o Teorema de Pitágoras, em ramos diferentes da matemática.

3.2 Ternas Pitagóricas

Veja, agora, a caracterização de todas as soluções da equação pitagórica.

Definição 3.1. Um terno de inteiros (a, b, c) satisfazendo

$$a^2 + b^2 = c^2$$

é chamado **terno pitagórico** ou **tripla pitagórica**. Se $mdc(a, b, c) = 1$, então (a, b, c) é chamado **terno pitagórico primitivo**.

Os ternos $(3, 4, 5)$ e $(8, 15, 17)$ são ambos primitivos, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $8^2 + 15^2 = 17^2$, e, além disso, $mdc(3, 4, 5) = 1$ e $mdc(8, 15, 17) = 1$.

Quando (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) também o é para todo $k \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2.$$

Por isso, a equação pitagórica tem infinitas soluções.

É importante ressaltar que, se (a, b, c) é um terno pitagorico e $d = mdc(a, b, c)$, então $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$ e $c_1 = \frac{c}{d}$ são inteiros e

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{d^2} = \frac{c^2}{d^2} = c_1^2,$$

ou seja (a_1, b_1, c_1) é também um terno pitagórico, e como $mdc(a_1, b_1, c_1) = 1$, este terno é primitivo. Com isto, para determinar todas as soluções de $x^2 + y^2 = z^2$, é suficiente descrever todos os ternos pitagóricos primitivos positivos, ou seja, quando a, b e c são todos positivos, pois por meio deles podem se obter qualquer outro através de uma multiplicação conveniente.

Veja agora três resultados que ajudará a caracterizar todos os ternos pitagóricos primitivos.

Proposição 3.2. *Seja (a, b, c) um terno pitagórico primitivo. Então, os inteiros a, b e c são primos aos pares, isto é, $mdc(a, b) = mdc(a, c,) = mdc(b, c) = 1$.*

Demonstração: Se $d = mdc(a, b)$, então $d|a$ e $d|b$. Desse modo, $d|c^2$, pois $a^2 + b^2 = c^2$. Uma vez que $mdc(a, b, c) = 1$, tem-se $mdc(c, d) = 1$. Logo, $d|c$, de maneira que $d = 1$. Analogamente, se tem $mdc(a, c) = mdc(b, c) = 1$. □

Lema 3.1. *Se (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo, então a e b são de paridades distintas. Em particular, c é ímpar.*

Demonstração: Suponham que a e b são pares. Logo, $2|(a^2 + b^2) = c^2$, ou seja, $2|c$. Assim, $mdc(a, b, c) \neq 1$. O que é uma contradição. Agora suponha que a e b são ímpares, temos:

$$a = 2x + 1 \qquad b = 2y + 1,$$

em que x e y são inteiros. Com isso,

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 &= (2x+1)^2 + (2y+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 \\ &= 4(x^2 + y^2 + x + y) + 2. \end{aligned}$$

Fazendo $z = x^2 + y^2 + x + y$, com $z \in \mathbb{Z}$, temos:

$$c^2 = 4z + 2.$$

Por isso, $4|c^2 - 2$, o que não é possível, uma vez que todo quadrado perfeito é da forma $4k$ ou $4k+1$. Daí, a e b têm paridades distintas e, em particular, c é ímpar, pois c^2 é ímpar. □

Lema 3.2. *Sejam m ou n inteiros tais que $mdc(m,n) = 1$. Se $mn = k^2$, então m e n são ambos quadrados perfeitos.*

Demonstração: Para $m = 1$ e $n = 1$, o resultado segue imediatamente. Por isso, suponha $m, n > 1$. Tomemos as fatorações canônicas de m e n dadas por:

$$m = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} \quad \text{e} \quad n = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_s^{\beta_s}.$$

Como $mdc(m,n) = 1$ tem-se $x_i \neq y_j$ para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, s$. Daí, a fatoração de mn é:

$$mn = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_s^{\beta_s}.$$

Agora, considere a fatoração canônica de k,

$$k = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \cdots z_i^{\gamma_i}.$$

Como $k^2 = mn$,

$$z_1^{2\gamma_1} z_2^{2\gamma_2} \cdots z_i^{2\gamma_i} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_s^{\beta_s}.$$

Pelo TFA, segue desta última igualdade que $z_1, z_2, \ldots, z_i$ são os primos $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s$ em alguma ordem. Por isso, $i = r+s$ com $s \geq r$ e $2\gamma_1, \ldots, 2\gamma_{r+s}$ são os inteiros $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$, também em alguma ordem. Pondo:

$$\begin{aligned} \alpha_i = 2\gamma_i, &\qquad i = 1, \ldots, r, \\ \beta_i = 2\gamma_{i+r}, &\qquad i = 1, \ldots, s, \end{aligned}$$

segue que,

$$m = (x_1^{\gamma_1} \cdots x_r^{\gamma_r})^2 \qquad \text{e} \qquad n = (y_1^{\gamma_{r+1}} \cdots y_r^{\gamma_{r+s}})^2.$$

$\square$

Teorema 3.1. (Soluções da Equação Pitagórica) *Uma terna pitagórica (a,b,c) é primitiva, se, e somente se, $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, são da forma :*

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2,$$

em que $mdc(m,n) = 1$, $m > n > 0$ e $m + n$ é ímpar.

Demonstração: Seja (a,b,c) um terno pitagórico primitivo. Assim, conforme o Lema 3.1, pode assumir a par e b ímpar e, por isso, c ímpar. Assim, $c - b$ e $c + b$ são ambos pares. Desse modo,

$$c - b = 2u \qquad \text{e} \qquad c + b = 2v,$$

em que u e v são primos entre si, pois se $mdc(u,v) = d$, então $d|(u+v)$ e $d|(v-u)$. Mas,

$$2u + 2v = c - b + c + b = 2c. \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$2v - 2u = c + b - (c - b) = 2b, \tag{3.2}$$

isto é, $d|c$ e $d|b$. Assim, da Proposição 3.2, $d = 1$. Notem agora que:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

Dividindo ambos os lados desta igualdade por 4,

$$\frac{a^2}{4} = \frac{(c-b)(c+b)}{4} = \frac{2u \cdot 2v}{4} = uv,$$

ou melhor,

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = uv. \tag{3.3}$$

Como $mdc(u,v) = 1$ e uv é um quadrado perfeito, então, pelo Lema 3.2, u e v também são, ou seja,

$$u = n^2 \quad \text{e} \quad v = m^2, \quad \text{com} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Substituindo estes valores em (3.1):

$$2c = 2u + 2v \Rightarrow c = u + v \Rightarrow c = n^2 + m^2.$$

Também, por (3.2):

$$2b = 2v - 2u => b = v - u => b = m^2 - n^2.$$

Logo, por (3.3):

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = uv \Rightarrow a^2 = 4uv \Rightarrow a^2 = (2nm)^2 \Rightarrow a = 2nm,$$

de maneira que,

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2. \tag{3.4}$$

Se $mdc(m,n) = d$, então $d|b$, $d|c$, e, com isso, $d = 1$. Além disso, se m e n tem a mesma paridade, então $c = m^2 + n^2$ e $b = m^2 - n^2$ são pares, uma contradição, pois $mdc(b,c) = 1$. Dessa forma, m e n são de paridades distintas, ou seja, $m + n$ é ímpar.

Reciprocamente, sejam m e n inteiros primos entre si satisfazendo as condições em (3.4). Como:

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

em que a e b são inteiros quaisquer, temos:

$$(a,b,c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2),$$

um terno pitagórico. Para mostrar que é primitivo, tome, $mdc(a,b,c) = d$, suponha $d > 1$. Logo, existe um primo x tal que $x|d$. Como $x|b$, então $x \neq 2$, pois b é ímpar. Também, $x|c$ e, assim, $x|(b+c)$ e $x|(c-b)$, isto é, $x|2m^2$ e $x|2n^2$. Logo, $x|m$ e $x|n$, uma contradição, pois $mdc(m,n) = 1$. Desse modo, $d = 1$ e, daí, (a,b,c) é um terno pitagórico primitivo. Isto finaliza a prova. □

Corolário 3.2.1. *Um terno (a,b,c) é pitagórico, se, somente se, existem inteiros positivos de mesma paridade u e v, tais que u e v são quadrados perfeitos e $u > v$. Por conseguinte,*

$$(a,b,c) = (\sqrt{uv}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}).$$

Demonstração: Seja (a,b,c) uma terno pitagórica e considere os inteiros

$$u = c + b, \quad v = c - b. \tag{3.5}$$

Dessa forma,

$$b > -b \Rightarrow b + c > c - b \Rightarrow u > v.$$

Uma vez que (a,b,c) é uma terna pitagórica,

$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = (c+b)(c-b) \Rightarrow a^2 = u \cdot v \Rightarrow a = \sqrt{uv}.$$

De (3.5), tem-se,

$$c = \frac{u+v}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{u-v}{2}.$$

Logo,

$$(a,b,c) = (\sqrt{uv}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}).$$

Agora, suponha que $u \cdot v$ é um quadrado perfeito, com $u \cdot v = x^2$ em que x é um inteiro positivo. Por isso,

$$a = \sqrt{u \cdot v} \Rightarrow a = \sqrt{x^2} \Rightarrow a = x.$$

Fazendo $u > v$, com $u = 2k + 2$ e $v = 2k$, em que $k \in \mathbb{N}$, temos

$$b = \frac{u-v}{2} = \frac{2k+2-2k}{2} = 1,$$
$$c = \frac{u+v}{2} = \frac{2k+2+2k}{2} = 2k+1.$$

Daí, b e c são inteiros positivos.
Agora,

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{u \cdot v})^2 + (\frac{u-v}{2})^2 = \frac{4uv + u^2 - 2uv + v^2}{4} = \frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} = (\frac{u+v}{2})^2 = c^2.$$

Desse modo, $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja, (a,b,c) é um terno pitagórico. □

4 APLICAÇÕES

Neste capitulo, será resolvido alguns problemas, em forma de exemplos, por meio da equação pitagórica. Eles foram selecionados das referências (Vieira 2015), (Souza 2017) e outros retirados do PROFMAT.

Exemplo 4.1. Mostrar que o raio de uma circunferência inscrita em um triângulo pitagórico é um número inteiro.

Solução: Sejam a,b e c os lados de um triângulo pitagórico, e r o raio da circunferência inscrita, conforme a Figura 4.1. A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos ABO,ACO e BCO. Respectivamente, suas áreas são:

$$\frac{ab}{2}, \ \frac{ra}{2}, \ \frac{rb}{2}, \ \frac{rc}{2}.$$

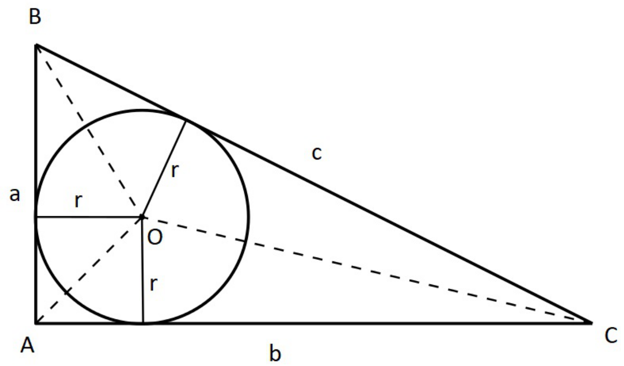
Assim:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2},$$

isto é,

$$ab = r(a + b + c) \tag{4.1}$$

Figura 4.1 – *Triângulo pitagorico ABC.*



Fonte: (Vieira 2015).

Como $a^2+b^2=c^2$, (a,b,c) é um terno pitagórico, existe um terno pitagórico primitivo (a_1,b_1,c_1) tal que

$$a = ka_1,\ b = kb_1,\ c = kc_1,$$

para algum inteiro positivo k. Além disso, pelo Teorema 3.1,

$$a_1 = 2mn,\ \ b_1 = m^2-n^2,\ \ c_1 = m^2+n^2,$$

com $mdc(m,n)=1$ e $m+n$ ímpar. Logo:

$$a = 2kmn,\ \ b = k(m^2-n^2),\ \ c = k(m^2+n^2).$$

Substituindo tudo em (4.1), obtém se,

$$\begin{aligned} r = \frac{ab}{a+b+c} &= \frac{2k^2mn(m^2-n^2)}{2km(m+n)} \\ &= \frac{kn(m^2-n^2)}{(m+n)} \\ &= \frac{kn(m-n)(m+n)}{(m+n)} \\ &= kn(m-n). \end{aligned}$$

Portanto, $r \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 4.2. Mostrar que a sequência de números inteiros $(n,n+3,n+5)$ não constitui uma tripla pitagorica para nenhum inteiro positivo n.

Solução: Nota-se que:

$$n^2+(n+3)^2=(n+5)^2 \Rightarrow n^2+n^2+6n+9=n^2+10n+25.$$

Desse modo,

$$2n^2-n^2+6n-10n+9-25=0 \Rightarrow n^2-4n-16=0.$$

As raízes desta equação em n são:

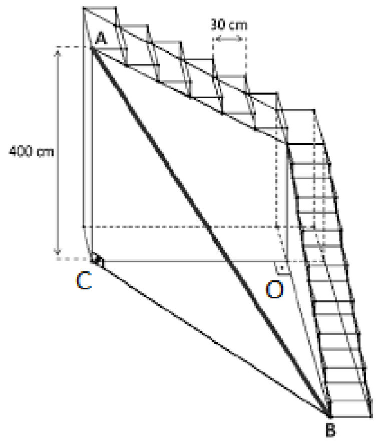
$$n' = \frac{4+4\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2(2+2\sqrt{5})}{2} \Rightarrow 2+2\sqrt{5}$$

$$n'' = \frac{4-4\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2(2-2\sqrt{5})}{2} \Rightarrow 2-2\sqrt{5}.$$

Como n' e n'' não são números naturais, conclüísse que $(n,n+3,n+5)$ não é um terno pitagórico qualquer que seja o inteiro positivo n. □

Exemplo 4.3. Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a 400cm de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance de escada, conforme mostra a Figura 4.2. Sabendo que cada degrau possui 30cm de profundidade, determine o comprimento da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma.

Figura 4.2 – *Escadaria.*



Fonte: (IFSC 2015).

Solução: Para determinar o valor do segmento AB, uma primeira coisa a ser feita é descobrir os valores dos segmentos CO e BO,

$$Med(CO) = 6 \cdot 30 = 180\text{cm}.$$

Da mesma forma,

$$Med(BO) = 8 \cdot 30 = 240\text{cm},$$

para descobrir o valor do segmento BC, basta aplicar o teorema de Pitágoras,

$$(Med(BO))^2 = 180^2 + 240^2 \Rightarrow (Med(BC))^2 = 32.400 + 57.600 \Rightarrow Med(BC) = \sqrt{90.000} \Rightarrow Med(BC) = 300,$$

agora, com todos os dados necessários, tem-se

$$(Med(AB))^2 = 400^2 + 300^2 \Rightarrow (Med(AB))^2 = 160.000 + 90.000 \Rightarrow Med(AB) = \sqrt{250.000} \Rightarrow Med(AB) = 500\text{cm}.$$

Logo, o comprimento da haste metálica é de 500cm. □

Exemplo 4.4. Determinar todas as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Solução: Na equação

$$x^2 + y^2 = 2z^2, \tag{4.2}$$

deve-se ter x e y com mesma paridade, pois $2z^2$ é par para todo inteiro z. Desse modo, existem inteiros $u = \frac{1}{2}(x+y)$ e $v = \frac{1}{2}(x-y)$ tais que $x = u+v$, $y = u-v$. Substituindo estas expressões em (4.2), obtemos

$$x^2 + y^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2 = 2z^2 \Rightarrow u^2 + v^2 = z^2,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = z^2. \tag{4.3}$$

Assim, tem-se a equação pitagórica em u, v e z. Logo, de acordo com Teorema 3.1,

$$(u, v, z) = (2mnk, (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k),$$

em que $m, n, k \in \mathbb{N}$, com $m > n \geq 1$, $mdc(m, n) = 1$ e $m - n$ ímpar.

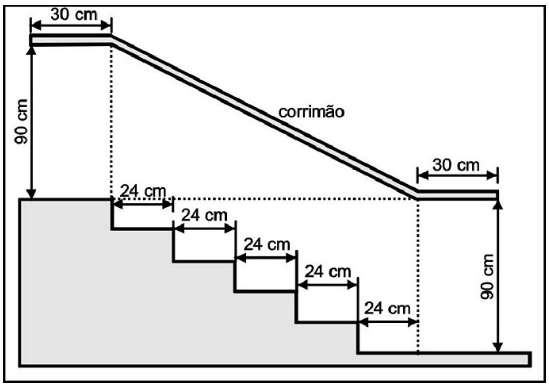
Por esta razão, determinam todas as soluções da equação dada em (4.3), que são dadas por

$$(x, y, z) = (2mnk + (m^2 - n^2)k, 2mnk - (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k),$$

em que m,n e k satisfazem as condições do Teorema 3.1. □

Exemplo 4.5. Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, determinar o comprimento total do corrimão.

Figura 4.3 – *Corrimão.*



Fonte: (ENEM 2006).

Solução: O comprimento total do corrimão será igual à soma dos dois trechos de comprimento igual a $30cm$ com o trecho que não se conhece a medida. Como pode-se ver que na figura o trecho desconhecido representa a hipotenusa de um triângulo retângulo, cuja medida de um dos catetos é igual a $90cm$. Para encontrar a medida do outro cateto, deve-se somar o comprimento dos 5 degraus. Sendo assim, temos $b = 5 \cdot 24 = 120cm$.

Para calcular a hipotenusa, basta aplicar o teorema de Pitágoras para esse triângulo:

$$a^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow a^2 = 8100 + 14400 \Rightarrow a^2 = 22500 \Rightarrow a = \sqrt{22500} = 150cm.$$

Desta forma, a medida total do corrimão será:

$$30 + 30 + 150 = 210cm = 2,1m,$$

que é o valor procurado.

□

Exemplo 4.6. A soma dos quadrados das medidas dos 3 lados de um triângulo retângulo é igual a 32. Quanto mede a hipotenusa?

Solução: Tome a = medida da hipotenusa, tem-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 32, \tag{4.4}$$

pelo Teorema de Pitágoras, sabesse que $a^2 = b^2 + c^2$.

Substituindo esta expressão em (4.4) tem-se que

$$a^2 + a^2 = 32 \Rightarrow 2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = \tfrac{32}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{16} \Rightarrow a = \pm 4.$$

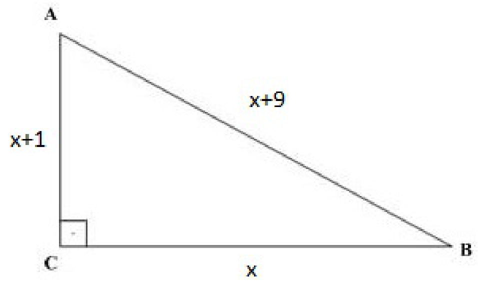
Como pedido a medida do lado de um triângulo, conclui-se que $a = 4$. □

Exemplo 4.7. Em um triângulo retângulo ABC, o lado AB excede em 8 unidades o lado AC, que por sua vez mede uma unidade a mais que o lado BC. Determinar o valor da hipotenusa desse triângulo.

Solução: Primeiramente, será identificado a hipotenusa do nosso triângulo. Como $AB > AC$ e $AC > BC$, segue que AB é a hipotenusa.

Fazendo $BC = x$, obtemos, pela hipótese do problema, que $AC = x + 1$ e $AB = x + 9$.

Figura 4.4 – *Triângulo pitagórico de lados x, $x+9$ e $x+1$.*



Fonte: O Autor (2022).

Por meio do Teorema de Pitágoras, obtemos a hipotenusa. Se não vejamos. Temos:

$$(x+9)^2 = (x+1)^2 + x^2,$$

ou seja, $-x^2 + 16x + 80 = 0$. As raízes desta equação são $x' = 20$ e $x'' = -4$.

Descartando o valor negativo, concluímos que $x = 20$. Com isto, $AB = x + 9 = 29$. $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, consideramos a equação pitagórica com sua solução geral, que é dada em forma de parâmetro. Por meio da solução geral, consideramos alguns problemas que foram modelados por meios de equações diofantinas não lineares, que foram solucionadas e resplvidas por meio da solução geral da equação pitagórica.

REFERÊNCIAS

[Belizario 2018]BELIZARIO, V. Um estudo sobre o teorema de pitágoras. *Mato Grosso do Sul: UFMS*, 2018.

[Eves 2011]EVES, H. Introduçaoa história da matemática, 5a. ediçao. *Editora da Unicamp, Campinas*, 2011.

[Fernandes e Edmundo 2015]FERNANDES, I.; EDMUNDO, J. As ternas pitagóricas e os números congruentes: uma breve história. *Matemática en las*, p. 65, 2015.

[Souza e Andrade]SOUZA, R. M. S.; ANDRADE, A. E. R. de. Ternas pitagóricas.

[Souza 2017]SOUZA, R. S. Equações diofantinas lineares, quadráticas e aplicações. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.

[Vieira 2015]VIEIRA, V. L. Um curso básico em teoria dos números. *Campina Grande: EDUEPB*, 2015.

[Wainer e Diofantinas]WAINER, S. A.; DIOFANTINAS, D. E. E. E. Ana rachel brito de paula maiara francine bollauf maria angélica araújo.