UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

BEATRIZ RODRIGUES DE ALMEIDA

ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

MONTEIRO – PB
2022

BEATRIZ RODRIGUES DE ALMEIDA

ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Trabalho Acadêmico de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas, da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO – PB
2022

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A447e Almeida, Beatriz Rodrigues de.

Ensino-aprendizagem da função exponencial e logarítmica através da resolução de problemas [manuscrito] : uma experiência na Residência Pedagógica / Beatriz Rodrigues de Almeida. - 2022.

101 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Ensino da matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Função logarítmica. 4. Função exponencial. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Suzana Q. da Costa - CRB - 15/660 BSC6/UEPB

BEATRIZ RODRIGUES DE ALMEIDA

ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Trabalho Acadêmico de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas, da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovado em: 30/03/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (CCHE/UEPB)

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Examinador Interno)
Universidade Estadual da Paraíba (CCT/UEPB)

Prof. Dr. Márcio Pironel (Examinador Externo)
Instituto Federal de São Paulo – Campus Salto/SP (IFSP)

Dedico este trabalho a Deus, por sempre estar ao meu lado e guiar meus passos. Aos meus pais Ted (*in memorian)* e Ana Paula que sempre estiveram comigo e nunca mediram esforços para me amar e proporcionar uma educação de qualidade. A minha irmã Maisa, por ser minha companheira e sempre me inspirar a ser uma pessoa melhor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por sempre me abençoar e proteger, por planejar meus sonhos e me mostrar que caminhos seguir. Agradeço também por sempre estar comigo nos momentos mais difíceis e sempre me amparar e fortalecer.

Agradeço incondicionalmente aos meus pais, Ted (*in memorian)* e Ana Paula, por todo o amor, dedicação e cuidado, principalmente à minha mãe, por todo esforço financeiro para me manter no campus Monteiro da UEPB, e compreensão nos momentos de ausência no cotidiano familiar.

Ao meu orientador, professor e amigo Roger Huanca por ser uma das minhas maiores fontes de inspiração. Obrigada por seu apoio e incentivo nos momentos difíceis da realização desta pesquisa. Acima de tudo, pela sua dedicação e empenho com este trabalho e principalmente por fazer de nós profissionais, professores de Matemática e pesquisadores. Sem dúvida, durante suas orientações e na nossa convivência acadêmica, pude desenvolver criticidade nos trabalhos científicos e aprender a fazer pesquisa de ponta.

Agradeço aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Márcio Pironel e Dr. Silvanio de Andrade por aceitarem o convite em participar da banca do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Com certeza, aproveitei as valiosas sugestões e contribuições para o aperfeiçoamento desta pesquisa.

Agradeço a todos os professores do curso de Matemática da UEPB, campus Monteiro, que me proporcionaram reflexões e interlocuções ao longo das disciplinas. Agradeço também aos funcionários do campus Monteiro por sempre me acolherem tão bem.

Aos colegas que fiz na Graduação, agradeço pelo companheirismo, pelo apoio, e por sempre me ajudarem quando as dúvidas surgiram. Muitos de vocês serviram de inspiração para mim.

Aos amigos do Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática (GPRPEM), que ao longo de cinco anos têm me ensinado a ser competente através de leituras críticas, conversas, debates e, acima de tudo, o que há por trás de cada problema.

Agradeço ao Programa de Residência Pedagógica, pela oportunidade de ter uma experiência profissional na minha formação inicial, no período de 2020-2022. Através desse Programa, pude conhecer a Professora Vanda, e os alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola ECIT José Leite de Souza, que gentilmente colaboraram na realização e coleta de dados desta pesquisa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo construir conceitos e gráficos de Função Exponencial e Logarítmica, no 1º ano do Ensino Médio, fazendo uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, o aluno participa da construção do conhecimento com a orientação e supervisão do professor, que, somente no final desse processo de construção, formaliza os conceitos matemáticos. Para isso, apoiamo-nos nos trabalhos de Onuchic e Allevato e propomos 9 problemas. A pesquisa foi desenvolvida durante o Programa de Residência Pedagógica, na escola-campo ECIT José Leite de Souza, localizada na cidade de Monteiro/PB, em que a professora/residente era a pesquisadora deste trabalho. A pesquisa de campo foi de cunho qualitativo, onde os instrumentos utilizados consistiram de material escrito (via WhatsApp) pelos alunos-participantes, gravações pelo Google Meet, questionário avaliativo e caderno de bordo, além dos problemas propostos na intervenção das aulas. Os dados da pesquisa foram coletados a partir de oito encontros realizados virtualmente pelo Google Meet. Os resultados indicaram que a metodologia de Resolução de Problemas proporcionou aos alunos-participantes experienciar um novo caminho para aprender Função Exponencial e Logarítmica e re(construir) conceitos de Potenciação e Radiciação. Constatei que, ao trabalhar com esta metodologia, em aulas remotas, houve um aumento na motivação, tanto da pesquisadora em ensinar, quando dos alunos em aprender. Consideramos então que, quando os alunos aprendem Matemática através da Resolução de Problemas demonstram um maior estímulo e confiança para aprender/fazer Matemática. Esperamos ter contribuído de maneira significativa na aprendizagem dos alunos-participantes da pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Resolução de Problemas. Função Exponencial e Logarítmica. Educação Matemática.

ABSTRACT

This study aimed to construct concepts and graphs of Exponential and Logarithmic Function, in the 1st year of high school, making use of the methodology of Teaching-Learning Mathematics through Problem Solving. In this methodology, the student participates in the construction of knowledge with the guidance and supervision of the teacher, who, only at the end of this construction process, formalizes the mathematical concepts. For this, we rely on the work of Onuchic and Allevato and propose 9 problems. The research was developed during the Pedagogical Residency Program, at the ECIT José Leite de Souza field school, located in the city of Monteiro/PB, where the teacher/resident was the researcher of this work. The field research was qualitative in nature, where the instruments used consisted of written material (via Whatsapp) by student-participants, recordings by Google Meet, evaluative questionnaire and logbook, as well as the problems proposed in the intervention of the classes. The survey data was collected from eight meetings held virtually by Google Meet. The results indicated that the methodology of Problem Solving provided the students-participants to experience a new way to learn Exponential and Logarithmic Function and re(build) concepts of Potentiation and Radiciation. It was found that, when working with this methodology in remote classes, there was an increase in motivation, both of the researcher in teaching, and of the students in learning. It is considered that when students learn Mathematics through Problem Solving they demonstrate a greater incentive and confidence to learn/do Mathematics. It is expected to have contributed significantly to the learning of the students-participants of the research.

Keywords: Mathematics Teaching. Problem Solving. Exponential and Logarithmic Function. Mathematics Education.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A maioria das pessoas acreditam que a matemática é inteiramente uma questão de números, e que ela é um privilégio para poucos. Essas pessoas ainda imaginam os matemáticos como pessoas que passam os dias analisando os números com nomes exóticos. Na verdade, a matemática é para todos, ou deveria ser. Ela está presente nos mínimos detalhes, no nosso dia a dia, na natureza, ou seja, em tudo que fazemos. “A matemática é uma atividade humana, um fenômeno social, um conjunto de métodos usados para ajudar a elucidar o mundo, e ela faz parte de nossa cultura” (BOALER, 2019, p. 11).

Frenkel (2014) diz que como humanos, temos fome de descobrir algo novo, alcançar um novo significado, compreender melhor o universo e o nosso lugar nele. Sendo assim, a matemática direciona o fluxo do universo, espreita atrás de suas formas e curvas, e mantém as rédeas de tudo, desde minúsculos átomos até as maiores estrelas.

Na matemática há muitas aplicações, mas os alunos ainda sentem dificuldades de relacioná-la com o cotidiano. Isto deve-se ao fato de que pouco se tem trabalhado em sala de aula com aplicações reais da matemática, por exemplo, as Funções e suas relações com o cotidiano, visto que alguns professores ainda estão presos ao uso de técnicas operatórias. Contudo, segundo Micotti (1999), a educação passa por um momento crucial. Para essa autora, até pouco tempo, ensinar era sinônimo de transmitir informações, mas as ideias pedagógicas mudaram. Nesse sentido, Vale (2017) defende que todos os alunos devem ter acesso a uma educação que valorize a criatividade, a inovação e a resolução de problemas.

Com o término do Ensino Médio vieram minhas primeiras angústias com relação ao conteúdo de Função Exponencial e Logarítmica, pensei que no curso de Licenciatura em Matemática poderia sanar essas lacunas que tive, mas, infelizmente, em algumas disciplinas, o ensino desses conteúdos era voltado ao uso de técnicas operatórias e uso de propriedades. Ensinar Matemática parecia ser um desafio muito grande frente aos conhecimentos que vinha adquirindo durante a graduação. Possuía algumas dúvidas sobre a importância das Funções e me questionava, a todo momento, sobre o que diria para meus alunos sobre esse conteúdo. Queria encontrar justificativas para seu ensino com compreensão, descobrir sua utilização, sua importância no cotidiano.

Já no final do curso, tive a oportunidade de participar como residente no Programa de Residência Pedagógica (PRP) que possibilitou vivenciar experiências únicas dentro do contexto escolar, principalmente neste momento de pandemia. Nesse Programa também pude pesquisar sobre algo que pouco conhecia e assim, tentar dar significado e compreensão a Função

Exponencial e Logarítmica não só para mim, mas, principalmente, para os alunos da escola-campo vinculada ao PRP. Durante as aulas, percebemos que era necessário se preocupar com o ensino e a aprendizagem da Função Exponencial e Logarítmica e fazer com que os alunos entendessem esse conteúdo de forma mais atrativa em sala de aula, com situações reais para dar sentido ao seu estudo.

Segundo Jo Boaler (2019, p. 7) “a matemática do mundo é tão diferente da matemática ensinada na maioria das salas de aula que os jovens muitas vezes saem da escola mal preparados para as exigências do trabalho e da vida”.

O ensino e a aprendizagem da matemática, hoje, não podem mais ser um mero treino de habilidades e mecanismos de repetição com a resolução de vários exercícios iguais. Assim, os pesquisadores têm desenvolvido metodologias para substituir o ensino tradicional da matemática, em particular, para o aluno compreender melhor os conceitos matemáticos na prática do dia a dia, ou seja, ver a beleza da matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que o ensino e a aprendizagem da matemática é um tipo de trabalho que “o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução” (BRASIL, 1997, p. 29).

Então, os documentos oficiais indicam a Resolução de Problemas como uma das alternativas metodológicas para ensinar Matemática em sala de aula. Nessa metodologia, o problema é ponto de partida das atividades matemáticas e o aluno o construtor do seu conhecimento, pois têm a oportunidade de fazer suas próprias perguntas e ampliar os problemas em novas direções.

De acordo com Smole e Diniz (2016), a matemática e a Resolução de Problemas estão sempre atreladas uma à outra. Não se imagina aprender matemática se não for para resolver problemas. Por outro lado, resolver problemas necessariamente inclui uma forma de pensar matemática.

Desse modo, optamos por ensinar a Função Exponencial e Logarítmica através da Resolução de Problemas e despertar nos alunos-participantes a importância e aplicações dessas funções no cotidiano.

A seguir, apresentamos o objetivo, a pergunta norteadora e a estrutura desta pesquisa, evidenciando todo o embasamento teórico.

OBJETIVO GERAL

Construir conceitos e gráficos de Função Exponencial e Logarítmica, no 1º ano do Ensino Médio, fazendo uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Selecionar alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública;
- Ensinar Função Exponencial e Logarítmica através da Resolução de Problemas;
- Investigar, a partir das resoluções dos problemas, se os alunos-participantes compreenderam o conceito de Função Exponencial e Logarítmica.

A pergunta norteadora desta pesquisa que resume nosso propósito, é apresentada da seguinte forma: **Quais as contribuições da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, durante o ensino da Função Exponencial e Logarítmica, para um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio?**

ESTRUTURA DO TEXTO

O TCC está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1 – Introdução – Fazemos uma breve discussão sobre a importância da Matemática e suas aplicações no cotidiano. Em seguida, justifica-se a escolha da Função Exponencial e Logarítmica para ensinar através da Resolução de Problemas. Concluindo-se com a apresentação dos objetivos do trabalho e a pergunta da pesquisa.

Capítulo 2 – Resolução de Problemas - Iniciamos fazendo uma apresentação sobre a parte histórica, destacando as reformas no ensino da Matemática ao longo do tempo. Posteriormente, discutimos sobre a Resolução de Problemas como metodologia, enfatizando o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Também apresentamos considerações acerca da Formação de Professores e Tecnologias Digitais no contexto da Resolução de Problemas.

Capítulo 3 – Função Exponencial e Logarítmica - Inicialmente apresentamos alguns aspectos históricos da Função Exponencial e Logarítmica, trazendo também algumas aplicações dessas funções. Após isso, apresentamos as definições, propriedades e gráficos. Por fim, trazemos uma análise crítica de alguns livros-textos do Ensino Básico que contém esses conteúdos.

Capítulo 4 – Metodologia da pesquisa – Iniciamos falando sobre os aspectos metodológicos da pesquisa e a sua caracterização. Em seguida, descreveremos os alunos-participantes da pesquisa de campo, além dos instrumentos utilizados na pesquisa. Por fim, apresentamos os problemas geradores da pesquisa de campo.

Capítulo 5 – Encontros Remotos: Aplicação dos problemas – Nesse capítulo é discutido como ocorreu o desenvolvimento das atividades da pesquisa de campo e a interação entre os alunos-participantes envolvidos. Também destacamos as modificações de algumas etapas do roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) devido os encontros serem realizados virtualmente.

Capítulo 6 - Análise dos resultados - Este capítulo é destinado aos resultados produzidos na pesquisa e a análise destes.

Por fim, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Durante este capítulo discutiremos sobre a metodologia de Resolução de Problemas, resgatando a parte histórica, em especial as reformas no ensino de Matemática ao longo do tempo. Falaremos sobre a utilização da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula, buscando um ensino com significado. Também argumentaremos sobre a Resolução de Problemas no desenvolvimento profissional e atrelada ao uso das Tecnologias Digitais.

2.1 REFLEXÕES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DO TEMPO

Onuchic (1999) relata sobre diversas reformas no ensino de Matemática no século XX. Segundo essa autora, passamos de uma sociedade rural onde poucos precisavam conhecer matemática, para uma sociedade industrial onde mais gente precisava aprender matemática em razão do surgimento de máquinas advindas da Revolução Industrial. Daí, segundo essa autora, passamos para uma sociedade de informação onde a maioria das pessoas precisavam saber matemática para poder mexer nos computadores, em seguida, caminhando, segundo ela, para uma sociedade do conhecimento que exige de todos saber muita matemática para aplicá-la no cotidiano.

Atualmente, entramos na sociedade das Tecnologias Digitais, onde o homem tem grande interesse em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende matemática, utilizando ferramentas tecnológicas. Mas, segundo Onuchic (1999) devemos refletir sobre as mudanças no ensino de Matemática, que ocorreram desde o início do século XX.

O ensino de Matemática, no início do século XX, era apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas), era considerado muito importante. Contudo, isso nos faz refletir sobre as salas de aulas do século XXI. Apesar de grandes avanços tecnológicos ao longo dos anos, alguns professores ainda consideram muito importante a memorização de tabuadas e fórmulas (ONUCHIC, 1999).

Onuchic (1999) diz que depois de alguns anos, ainda no século XX, os alunos deveriam aprender matemática com compreensão, ou seja, os alunos deveriam entender o que faziam. Mas, o professor ainda possuía grande influência sobre o aluno. Sendo assim, os alunos escutavam e repetiam aquilo que o professor falava. Essa autora também destaca uma outra reforma, que é o Movimento da Matemática Moderna (MMM). O MMM teve início, na década de 70 do século passado, onde o aluno deveria conhecer a matemática das estruturas algébricas e da teoria dos conjuntos, com ênfase na linguagem própria da matemática. Era um ensino que focava muito na formalização, sendo que professores e alunos não conseguiam perceber a importância dessa matemática no cotidiano. Segundo Onuchic (1999, p. 203) “Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas”. Nesse movimento surgiram os livros didáticos que até hoje o professor se apoia para ministrar aulas.

Onuchic (1999) adverte que somente nas últimas décadas os educadores matemáticos passaram a dar importância à Resolução de Problemas, ou seja, aceitaram a ideia do desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas. Apesar de se considerar muito importante a Resolução de Problemas, houveram muitas contestações naquela época, visto que muitos dos professores tentavam utilizá-la em sala de aula e acabavam recaindo no ensino tradicional.

Na década de 80 do século passado, passamos então para o ensino utilizando a resolução de problemas. Esta proposta foi apoiada e difundida pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) através do documento An Agenda for Action (NCTM, 1980). Esse documento enfatiza que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para a década de 1980. Também, o principal objetivo desse documento era buscar uma melhor Educação Matemática para todos e que, a Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam fronteiras as próprias ciências matemáticas.

Durante a década de 80, a resolução de problemas, como foco da matemática, foi utilizada de diferentes formas pelos professores, porém esse trabalho não obteve bons resultados devido à falta de concordância entre eles nas diferentes concepções de como deveria ser trabalhada a resolução de problemas sendo ela, o foco da matemática escolar (ONUCHIC, 1999).

Assim,

> Mudar nosso sistema de Educação Matemática radicalmente, tendo como primeiro objetivo atingir a vasta maioria dos estudantes, é criar uma consciência do quê, do como e do porquê da Matemática. Tal consciência nos faz chegar a duas importantes razões para mudar: para que os cidadãos de amanhã apreciem o papel penetrante da Matemática na cultura onde vivem e para que os indivíduos que têm interesse em Matemática e talento para ela sejam expostos à sua verdadeira natureza e extensão (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 214).

A década de 80 foi uma década de muitas mudanças e investimentos intelectuais para a Resolução de Problemas. Assim, Schroeder & Lester (1989) apresentam três abordagens diferentes da Resolução de Problemas que são: Ensinar sobre Resolução de Problemas, Ensinar para resolver problemas e Ensinar através da Resolução de Problemas.

Ensinar sobre Resolução de Problemas – Schroeder & Lester (1989) apontam que nessa primeira abordagem o professor busca ressaltar o modelo de Resolução de Problemas proposto por Polya ou alguma variação dele. Polya (1945) descreve um modelo com quatro fases interdependentes: (1) Compreender o problema, (2) Elaborar um plano, (3) Executar esse plano e (4) Rever o problema original a fim de validar a solução encontrada. Ou seja, ensinar sobre Resolução de Problemas é teorizar sobre o assunto.

Ensinar a resolver problemas – Nessa segunda abordagem, Schroeder & Lester (1989) dizem que ao ensinar a resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros, ou seja, é quando utilizamos as propriedades, definições, e fórmulas para resolver exercícios fixadores. Nessa abordagem é importante saber usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

Ensinar através da Resolução de Problemas – Ao ensinar matemática através da Resolução de Problemas, Schroeder & Lester (1989) enfatizam que os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso, ou seja, o problema deve ser considerado como ponto de partida para se ensinar e aprender matemática.

Onuchic (1999, p. 208) adverte que,

> É importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da Resolução de Problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Desse modo, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas leva o aluno a utilizar sua criatividade e ir além do que o professor e o livro didático propõem. Através dessa metodologia os alunos aprendem matemática com eficácia e começam a relacioná-la com a matemática do dia a dia. Para Onuchic (1999) na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas.

Apesar de considerar a Resolução de Problemas como uma metodologia eficaz para ensinar e aprender Matemática, essas iniciativas de documentos como NCTM, PCNs, BNCC, dentre outros, não conseguem atingir o conjunto de professores, tanto na formação inicial quanto continuada. Com isso, alguns professores, se apoiam quase que exclusivamente nos livros didáticos, muitas das vezes, um dos motivos é não ter condições para aprimorar sua formação ou por acomodação.

Onuchic considera que,

> o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outro problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (ONUCHIC, 1999, p. 215).

2.2 ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação, foi criada para expressar a ideia de que ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente e a avaliação deve estar integrada ao ensino para promover a aprendizagem. Diversos autores trabalharam com a distinção dessas palavras, isoladamente ou em composição. Huanca (2006, p. 44) apresentou um quadro:

Quadro 1 - Distinções entre os termos: ensino, aprendizagem, avaliação, ensino-aprendizagem e ensino-aprendizagem-avaliação

Três processos distintos, individuais	**Ensino** A responsabilidade do ensino é do professor que visa à aprendizagem do aluno.	**Aprendizagem** Se o professor tivesse o domínio do conhecimento então, o aluno aprenderia. Os alunos deveriam aprender a partir do que o professor ensinava, mas a responsabilidade da aprendizagem seria do aluno. Como? Sabendo relacionar suas ideias com o que o professor ensinava e isso nem sempre ocorria.	**Avaliação** A avaliação era feita através de provas. Mudanças ao longo do tempo promoveram discussões sobre diferentes formas de como se poderia avaliar.

Um processo duplo ligando o ensino à aprendizagem	**Ensino-Aprendizagem** Este é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Deve acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Os professores são guias e os alunos aprendem sabendo relacionar suas ideias com o conhecimento que ambos querem construir.
Um processo único de ensinar, aprender e avaliar	**Ensino-Aprendizagem-Avaliação** Este é um ser ainda maior. É maior do que ensino, do que aprendizagem e do que avaliação. A avaliação constitui-se, então, como parte integrante do processo ensino-aprendizagem, que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. Nesse processo não só o aluno é avaliado, mas também, o professor.

Fonte: Huanca (2006)

Onuchic e Allevato (2004) enfatizam que a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas se constitui em um bom caminho para se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Essas autoras ainda dizem que

> Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, busca-se usar tudo que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem Matemática da teoria dos conjuntos, Resolução de Problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004. p. 220-221).

Assim, acreditamos que ao ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, estamos fazendo com que os nossos alunos gostem da disciplina Matemática e principalmente que a vejam em tudo forem fazer, desde as tarefas mais simples até as mais complexas.

Onuchic e Allevato consideram que,

> Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Essas autoras afirmam que foi, a partir dos Standards 2000, que os educadores matemáticos passaram a pensar na metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, o problema é o ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, os alunos são co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, são os responsáveis por conduzir esse processo.

Serrazina (2017) considera a Resolução de Problemas, como sendo a atividade principal da matemática. Segundo essa autora, é através da resolução do problema que os alunos têm oportunidade de construírem aprendizagens efetivas e significativas.

Ou seja, quando ensinamos Matemática através da Resolução de Problemas

> [...] o aluno verifica a validade dos conceitos matemáticos, realiza conjecturas, relaciona os conceitos, generaliza, utiliza os procedimentos num contexto significativo, tem uma atitude reflexiva e desenvolve a capacidade de raciocínio e o pensamento matemático (SERRAZINA, 2017, p. 56).

Segundo Serrazina (2017), o problema está associado a tarefas para as quais aquele que as procura resolver não conhece à partida uma forma de obter a solução. Já Lester (1980) diz que que uma situação é ou não problema consoante a reação do indivíduo a quem é proposta e, para que uma situação seja um problema para um determinado indivíduo, é necessário que este lhe desperte a necessidade e interesse em resolvê-lo e que, consequentemente, este faça uma tentativa deliberada no sentido de o resolver.

Para o NCTM (1991),

> Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para construir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p. 11).

Então, o que é um problema? Para Onuchic e Allevato (2004, p. 221), o problema é “tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”. Já para Van de Valle (2001) um problema pode ser definido como uma tarefa ou atividade para a qual os alunos não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, e também não sabem um método específico para chegar à solução correta.

Nesse sentido, quando os professores estiverem selecionando os problemas para o ensino de um determinado conteúdo, é importante considerar o que os alunos já sabem, ou seja, qual o conhecimento prévio desses alunos, visto que um problema quando muito fácil, os alunos irão responder rapidamente, mas quando muito difícil os alunos se sentem desmotivados e acreditam que não são capazes de entender e fazer matemática.

Sabendo disso, Serrazina (2017, p. 60) enfatiza que um bom problema deve:

> (i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptados e aplicados para completar tarefas; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível.

Vale a pena destacar o Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática (GPRPEM) no sentido que vem trabalhando desde 2008 com a metodologia de Resolução de Problemas. O GPRPEM é coordenado pelo Prof. Dr. Roger Ruben Huaman

Huanca e suas atividades de estudo e pesquisa acontecem na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) nos campi Monteiro/PB e Campina Grande/PB.

Para implementar a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula é muito importante que haja uma mudança por parte dos alunos e do professor. Essas mudanças se referem à seleção de problemas apropriados, não sendo muito difíceis a ponto de os alunos desistirem e nem tão fáceis a ponto de os alunos responderem rapidamente; mudança na postura do professor em sala de aula, onde este deixa de ser o detentor do conhecimento e passa a ser um mediador da aprendizagem; e mudança na postura dos alunos, onde esses precisam possuir responsabilidade, pois eles serão os principais agentes da construção de sua aprendizagem.

Onuchic (1999), pela primeira vez, apoiada nos documentos do NCTM, do PCNs e da sua experiência como professora, apresenta um primeiro roteiro para se trabalhar Matemática com a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas que está composto das seguintes etapas: (1) Formar grupos e entregar uma atividade; (2) O papel do professor; (3) Resultados na lousa; (4) Plenária; (5) Análise dos resultados; (6) Consenso; e (7) Formalização.

Através dos estudos teóricos sobre essa metodologia e das nossas experiências em sala de aula consideramos que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não é tarefa fácil, mas que quando aplicada de maneira correta em sala de aula, nós professores podemos ver resultados muito significativos. Além disso, os alunos se sentem participantes ativos na construção do seu conhecimento, tornando-se cada vezes autoconfiantes. Mas adiante estarei relatando o que aconteceu na pesquisa de campo.

Em 2011, Onuchic e Allevato apresentam um segundo roteiro como dinâmica para trabalhar a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula. Essas autoras dizem que, não há formas rígidas de se trabalhar matemática através da Resolução de Problemas. A seguir compilamos integralmente esse segundo roteiro:

(1) Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

(2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

(3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

(4) Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

(5) Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

(6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

(7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

(8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

(9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Vale ressaltar que utilizamos este roteiro na pesquisa de campo e após as experiências, consideramos que não é tão fácil trabalhar com essa metodologia, pois alguns professores ainda estão acostumados a passar todos os métodos e procedimentos aos alunos. Além disso, acreditamos que mais um motivo pelo qual os professores ainda se sintam inseguros em implantar essa metodologia em sala de aula, é devido que, na grande maioria das vezes, a escola impõe um cronograma de conteúdos a serem ministrados durante o ano letivo, e o professor necessita cumprir com esse cronograma. Mas, quando colocamos o foco da atenção na aprendizagem dos alunos e não no ensino, temos resultados significantes na compreensão de Matemática.

Sendo assim, Onuchic e Allevato (2011, p. 90) dizem que,

> A Resolução de Problemas representa, da forma como trabalhamos, um contexto bastante propício à construção de conhecimento matemático a partir da observação e percepção de padrões, especialmente se considerada como metodologia de ensino, ou seja, se o problema for proposto como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos.

Considerando a Resolução de Problemas como uma estratégia para a aprendizagem de Matemática, Onuchic e Allevato (2021) dizem que essa metodologia serve não só para aplicar conteúdos matemáticos supostamente aprendidos previamente, mas também se configura como abordagem atual de trabalho em sala de aula de Matemática. Essas autoras ainda dizem que, quando trabalhamos com essa metodologia colocamos o aluno como "protagonista de seu processo de construção de conhecimento" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2021, p. 45).

Em 2014, Allevato e Onuchic acrescentam mais uma etapa ao segundo roteiro que apresentamos acima, dessa forma ficou organizado em dez etapas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas.

Após a nona etapa – Formalização do Conteúdo – novos problemas relacionados ao problema gerador que foi apresentado incialmente são propostos aos alunos. Segundo Allevato e Onuchic (2014), esses novos problemas possibilitam analisar se foram compreendidos os conceitos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um ciclo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas. Para essas autoras, essa etapa teria forte viés do ensino para resolução de problemas, ou seja, aquilo que conhecemos tradicionalmente como lista de exercícios para fixar o conteúdo.

Contudo, como já foi ressaltado anteriormente, utilizamos o segundo roteiro que foi proposto em 2011, ou seja, não utilizamos a última etapa do terceiro roteiro atualizado, a "proposição e resolução de novos problemas". Isso se deve ao fato de que, no início da pesquisa de campo, quando eram propostos novos problemas para que os alunos resolvessem e trouxessem para discussão no encontro seguinte, eles, na grande maior parte das vezes, não respondiam. Atestavam que estavam com muitas atividades da escola, visto que, as atividades escolares estavam acontecendo remotamente devido a pandemia da Covid-19. Portanto, preferimos não utilizar este terceiro roteiro atualizado e sim o segundo roteiro.

2.3 FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Van de Walle (2001) diz que, para os professores de Matemática serem realmente eficientes, devem envolver quatro componentes básicos em suas atividades: (1) gostar da disciplina Matemática, ou seja, deve fazer Matemática com prazer; (2) compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; (3) ter habilidade em planejar e selecionar tarefas adequadas e, dessa forma, fazer com que os alunos aprendam Matemática através da Resolução de Problemas e; (4) possuir habilidade em integrar diariamente a avaliação contínua com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem.

Esse autor ainda diz que, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa que o professor deve apresentar um problema, sentar-se e esperar que os alunos aprendam matemática magicamente. Na verdade, o professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em uma sala de aula.

Para que isso aconteça, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Na primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber o problema e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Após isso, na fase "durante", os alunos devem trabalhar no problema e o professor deverá observar e avaliar esse trabalho, ou seja, ele será um incentivador nesse processo. Na terceira e última fase, "depois", o professor deverá aceitar a solução dos alunos sem avaliá-los e conduzir a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Após isso, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos, ou seja, irá mostrar as definições, teoremas, fórmulas, dentre outros (VAN DE VALLE, 2001).

Nesse viés,

> Encorajar os futuros professores a criar, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas e do seu conhecimento matemático. Ao colocarem problemas, os futuros professores apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso. É isto que se espera que venham a proporcionar aos seus alunos (SERRAZINA, 2017, p.73).

Nessa pandemia, os professores e os alunos tinham que se adaptar ao processo de ensino e aprendizagem de maneira remota, a humanidade estava caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos – saber muita matemática – ou seja, é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende matemática. Isto é, infelizmente, nas décadas passadas, não se deu muito valor para o uso das tecnologias. Devido a Covid-19, os professores precisavam de meios alternativos para ensinar, onde exigia a utilização das ferramentas e plataformas tecnológicas. Também, consideramos que quando os alunos estão inseridos em uma sala aula, onde o professor se dispõe a usar apenas a lousa e o pincel, os alunos não se sentem atraídos, e passam a não entender e não gostar das Ciências, em especial da Matemática.

Onuchic e Huanca (2013) dizem que o mundo está em constante mudança, e que as Tecnologias Digitais está cada dia mais inserida dentro da sociedade, assim faz-se necessário que a Educação Matemática, com sua percepção da sociedade e do apoio a ela, mude para ir ao encontro das necessidades do século XXI. Eles ainda afirmam que "o propósito da educação matemática é o de preparar os estudantes a não só fazer dela um meio de vida para sua subsistência, mas também poder de fato construir e saber viver uma vida" (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p. 317).

Tendo em vista as inúmeras preocupações dos professores relacionadas ao ensino de Matemática de qualidade, os autores defendem o uso de tecnologias e da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,

> Não há dúvidas de que ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando-se a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos nas ideias e no dar sentido a elas (ONUCHIC; HUANCA, 2013, p. 330).

Com o intuito de incentivar a formação de docentes em nível superior para a Educação Básica e fortalecer o papel das redes de ensino na formação de futuros professores, a

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) lançou em 2020, o edital do PRP. Esse programa é composto por Coordenadores Institucionais, docentes da Instituição de Ensino Superior (IES) responsáveis pela organização, acompanhamento e execução do projeto; Docentes Orientadores, professores da IES responsáveis por planejar e orientar as atividades dos residentes de seu núcleo de Residência Pedagógica, estabelecendo a relação entre teoria e prática; Preceptores, professores da escola de Educação Básica responsáveis por planejar, acompanhar e orientar os residentes nas atividades desenvolvidas na escola-campo; e Residentes, discentes com matrícula ativa em curso de Licenciatura que tenha cursado no mínimo 50% do curso ou que estejam cursando a partir do 5º período.

Como a pesquisadora estava nos últimos períodos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, sentiu a necessidade de ir em busca de aperfeiçoamento e experienciar na prática o que é ser uma professora de Matemática. Sendo assim, submeteu-se a seleção do PRP e após uma entrevista com o Docente Orientador, foi selecionada para participar como residente bolsista desse programa.

O PRP tem como objetivo principal contribuir para o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, ou seja, esse programa promove a imersão do licenciando na escola de Educação Básica, a partir da segunda metade de seu curso. Sendo assim, o Subprojeto Matemática do Núcleo Matemática/Monteiro deste programa possui como área de atuação o Ensino e a Aprendizagem de Matemática, utilizando diversas metodologias como a Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Tecnologias Digitais, para que os alunos do Ensino Básico entendam Matemática de maneira dinâmica e eficaz.

Como a CAPES sugere que o desenvolvimento das atividades do Programa esteja vinculado a pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), aproveitamos para realizar a pesquisa de campo com um grupo alunos do 1º ano do Ensino Médio da escola pública, vinculada ao PRP, localizada na cidade de Monteiro/PB. Mais adiante descreveremos como aconteceram os encontros da pesquisa e quais os resultados obtidos após ensinar Função Exponencial e Logarítmica através da Resolução de Problemas.

Vale ressaltar que, quando trabalhamos com a Resolução de Problemas, os professores não devem estar focados se os alunos irão responder corretamente o problema gerador. Essa não é a prioridade.

> [...] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma

> parte regular e consistente de sua prática de sala de aula (CAI; LESTER, 2012 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2021, p. 46).

Após nossas experiências como residente do PRP, foi possível perceber que os alunos ainda sentem muito medo de errar quando estão tentando resolver problemas de matemática. Isso se deve ao fato de que muitos professores ainda se preocupam apenas com o resultado, e não com o processo. Nesse sentido, utilizamos em nossa pesquisa a Resolução de Problemas como uma forma de fazer com que a resolução de problemas matemáticos se torne uma prática regular em sala de aula e que os alunos sejam bons resolvedores de problemas.

2.4 AS CONTRIBUIÇÕES DO NCTM, PCNS, ORIENTAÇÕES CURRICULARES E BNCC

Acreditamos que quando os alunos resolvem problemas de Matemática, eles se tornam cada vez mais criativos, curiosos e confiantes com a Matemática. Além disso, conseguem ver a aplicação da matemática fora da sala de aula. De acordo com a publicação do NCTM[1] (2000):

> Aprendendo resolução de problemas em matemática, os alunos adquirem modos de pensar, hábitos de persistência e de curiosidade, e confiança em situações que não lhes são familiares e que lhes servirão fora da aula de Matemática. Ser um bom resolvedor de problemas pode acarretar-lhes grandes vantagens que na vida de todos os dias quer no trabalho (NCTM, 2000, p. 52).

Assim, neste trabalho iremos trazer algumas contribuições do NCTM ao longo do tempo. Em 1989, o NCTM publicou Padrões Curriculares e de Avaliação em Matemática Escolar, e deu início ao movimento dos Padrões.

Em 1991, o NCTM publicou Padrões Profissionais para o Ensino de Matemática. Esse documento apresentou uma visão do ensino da Matemática e propuseram cinco mudanças no ambiente da sala de aula:

- Para salas de aula como comunidades matemáticas, afastar-se de salas de aula como simplesmente uma coleção de indivíduos;
- Para evidência lógica e matemática como modo de verificação, afastar-se de ver o professor como a autoridade única para respostas corretas;
- Para o raciocínio matemático, afastar-se da memorização de procedimentos;
- Para conjecturar, inventar e resolver problemas, afastar-se de uma ênfase na descoberta mecânica de respostas;
- Para conectar matemática, suas ideias e suas aplicações, afastar-se de tratar a Matemática como um corpo de conceitos e procedimentos isolados (NCTM, 1991, p. 3).

[1] National Council of Teachers of Mathematics.

O NCTM, em 1995 publicou Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar, integrando a avaliação ao ensino e destacando sua importância para a implantação das mudanças.

Em 2000, o NCTM após novas discussões com base nos documentos referidos anteriormente publicou "Os Princípios e Padrões para a Matemática Escolar". Esse documento buscou fornecer orientações e direções para a Educação Básica onde estabeleceu seis Princípios Fundamentais: (1) Equidade; (2) Currículo; (3) Ensino; (4) Aprendizagem; (5) Avaliação; e (6) Tecnologia. Onde esses princípios devem estar "profundamente entrelaçados aos programas curriculares de Matemática" (NCTM, 2000, p. 12).

Esse documento, em relação aos padrões ou blocos de conteúdo matemáticos, apresenta cinco padrões de conteúdo: (1) Números e Operações; (2) Álgebra; (3) Geometria; (4) Medida; e (5) Análise de Dados e Probabilidade. Cada um dos padrões de conteúdo é acompanhado por padrões de processos, que se referem aos processos matemáticos pelos quais os estudantes devem desenvolver e utilizar conhecimento matemático. Os cinco padrões de processos ou de procedimento são: (1) Resolução de Problemas; (2) Raciocínio e Prova; (3) Comunicação; (4) Conexões; e (5) Representação.

Em relação à Resolução de Problemas, esse documento diz que:

> Resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazer. A Resolução de Problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte do programa de Matemática. A Resolução de Problemas em Matemática deve envolver todas as cinco áreas de conteúdo descritas nos Padrões do NCTM. Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a Matemática significativa com compreensão (NCTM, 2000, p.52).

Nesse documento, o NCTM apresenta a valorização de um ensino de Matemática com compreensão. "Aprender Matemática com compreensão é essencial" (NCTM, 2000, p. 21). Além disso, o documento afirma que "A Matemática pode e deve ser aprendida por todos os estudantes" (NCTM, 2000, p. 13).

O NCTM dos EUA[2] é responsável por uma série de publicações como, por exemplo, "Os Pontos Focais Curriculares", que trazem orientações para o professor, apoiando os padrões. Em 2009, alguns estados através de organizações representativas lideraram o desenvolvimento e a implantação dos Padrões de Núcleo Comum na Educação Básica dos Estados Unidos. Esse documento traz indicações sobre as habilidades e conhecimentos necessários para que os alunos tenham sucesso.

---

[2] Estados Unidos da América.

Em relação à Matemática, o Núcleo Comum dos Pontos Focais Curriculares solicita que os professores deixem de cobrir muitos tópicos com pouca profundidade, mas que trabalhem os conteúdos matemáticos de forma significativa e profunda. A seguir estão essas recomendações:

- Conceitos, habilidades e resolução de problemas relacionados com as operações básicas da matemática;
- Conceitos, habilidades e resolução de problemas relacionados com números inteiros e frações;
- Razões e relações proporcionais e expressões algébricas e equações iniciais;
- Razões e relações proporcionais e aritmética dos números racionais;
- Álgebra linear e função linear.

Com base nos padrões de procedimento do NCTM, o Núcleo Comum propõe oito práticas matemáticas que os professores devem desenvolver em seus alunos:

- Fazer sentido da Resolução de Problemas e perseverar em resolvê-los;
- Raciocinar abstrata e quantitativamente;
- Construir argumentos viáveis e analisar criticamente o raciocínio dos outros;
- Modelar com a Matemática;
- Usar ferramentas apropriadas de forma estratégica;
- Cuidar da precisão;
- Procurar e fazer uso da estrutura;
- Procurar expressar regularidade em raciocínio repetitivo.

Nesse viés, com as recomendações que o NCTM apresenta, aprofundamos nosso trabalho nos estudos em Resolução de Problemas, visto que resolver problemas é importante para aprender nova matemática. Os Padrões que o NCTM apresenta como a principal estratégia de ensino é “A maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Após consultar e apresentar alguns documentos publicados pelo NCTM, foram analisados os documentos nacionais como: os Parâmetros, as Orientações Curriculares e a Base Nacional Comum Curricular. Nesses documentos nacionais procuramos sobre o que trazem em relação à Resolução de Problemas e como os professores de Matemática podem trabalhar com essa metodologia em suas salas de aula.

Os PCNs (1998) indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula. Esse documento ainda enfatiza o fato de que, apesar de muito se falar sobre essa metodologia, muitos professores e pesquisadores possuem interpretações equivocadas, e entendem como sendo a aplicação de uma atividade ao final do estudo de um conteúdo matemático.

Nesse sentido, os PCN+ (2003) afirmam que,

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2003, p. 112).

Segundo os PCNs (1998) quando trabalhamos com a Resolução de Problemas estamos dando a oportunidade de os alunos ampliarem seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Ou seja, quando ensinamos Matemática através da Resolução de Problemas estamos fazendo com que os alunos sejam capazes de pensar por conta própria, autônomos, e que construam diferentes estratégias de solução para um determinado problema.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, trabalhar com a Resolução de Problemas

> significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático [...]. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p. 70).

Além disso, quando trabalhamos com essa metodologia os alunos se tornam capazes de se comunicar melhor e resolver problemas do cotidiano com mais facilidade. Brasil (2017, p. 538) diz que quando os alunos conseguem compreender e utilizar os conceitos matemáticos, estes "passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar [...], ampliam sua capacidade de pensar matematicamente".

Tendo em vista que as Tecnologias Digitais fazem parte do cotidiano dos alunos, a BNCC (2017) destaca que quando aliada a Resolução de Problemas, os alunos se tornam capazes de reforçar o raciocínio lógico, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

Assim, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas é uma abordagem indicada em documentos oficiais, como o NCTM, PCNs, PCN+, Orientações Curriculares e pela BNCC. Portanto, acreditamos que o ensino de Matemática deve ser realizado através da Resolução de Problemas, e que quando aplicada de maneira correta em sala de aula, trará bons resultados.

2.5 TECNOLOGIAS DIGITAIS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Costa (2020), é notório ver que o digital foi, gradativamente, ganhando mais espaço nas políticas de currículo, isso se deve ao fato de que vem acontecendo pressões sociais internas e externas que regem a educação no Brasil dos últimos anos.

> Não resta dúvida de que a tecnologia é um poderoso agente de transformação: basta ver como a rede de computadores conhecida como internet promoveu alterações radicais na forma como consumimos produtos e conteúdos, fazemos negócios e sobretudo, nos comunicamos. A internet está provocando uma mudança de paradigma na forma como as pessoas aprendem, e é natural, portanto, que haja uma grande mudança também na maneira como os materiais educacionais são projetados, desenvolvidos e entregues àqueles que desejam aprender (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p. 7).

Vale (2017) afirma que o mundo está em constante evolução e isso exige que todos os alunos saibam ser criativos, inovar e resolver problemas. Sendo assim, essa autora considera que a escola do século XXI deve ter o papel de preparar os alunos para uma sociedade global que se rege por comunicações de alta velocidade com grande impacto visual e por mudanças complexas, diversificadas e rápidas a todos os níveis.

De acordo com a quinta competência da BNCC, os alunos devem:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p. 9).

Consideramos então que, com a grande inserção das Tecnologias Digitais no século XXI, é necessário que os alunos sejam capacitados, ou seja, capazes de utilizar ferramentas tecnológicas para auxiliar na resolução de problemas, sejam eles rotineiros ou não.

De acordo com Fernández e Cuéllar (2021), o uso de diferentes Tecnologias Digitais está presente em muitas das atividades do cotidiano; na Educação Matemática, se reconhece que essas tecnologias possuem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Vale (2017) diz que, hoje não é suficiente ser proficiente em computação, em memorização de fatos, na fluência de procedimentos ou na resolução de problemas de rotina. É necessário que os alunos saibam resolver problemas não rotineiros, gerar múltiplas resoluções, ou caminhos, buscando pela mais elegante, simples e eficiente, justificar conclusões e comunicar resultados. Isso pode ser desenvolvido quando os professores proporcionam oportunidades de aprendizagem apropriadas para desvendar o potencial criativo, inovador e crítico de todos os alunos (VALE, 2017).

Jo Boaler (2019, p. 6) citando Conrad Wolfram diz que os professores, na maioria das vezes, “gastam 80% do tempo ensinando aos alunos a etapa de cálculo, quando deveriam estar usando computadores para essa parte e gastando mais tempo ajudando-os a fazer perguntas e a montar e a interpretar modelos”. Logo, acreditamos que para que os alunos aprendam matemática, não precisam decorar padrões, nem métodos, mas sim, raciocinar, pensar e resolver problemas. O mundo está cada vez mais se transformando, então a sala de aula também precisa acompanhar essa evolução para dar conta das demandas, ou seja, os professores necessitam preparar seus alunos para a vida.

Vale (2017) ainda diz que, é necessário pensarmos fora da caixa e resolver situações a partir de diferentes ângulos, e assim estaremos aptos a construir e a defender um novo modo de pensar. Para ela, isso significa

> envolver os alunos na resolução de problemas, considerando diferentes pontos de vista para os explorar de vários modos e recorrer a múltiplas estratégias. Assim somos conduzidos à necessidade de práticas de sala de aula onde se desenvolvam capacidades criativas dos alunos, permitindo que todos participem ativamente na sua aprendizagem, onde possam fazer as suas pesquisas e compartilhar as suas descobertas (VALE, 2017, p. 131).

Fernández e Cuéllar (2021) citando Hegedus e Moreno-Armella dizem que, a introdução de tecnologias nas atividades escolares requer que os professores adquiram e desenvolvam novas habilidades para transformar gradualmente as maneiras de resolver problemas. Esses autores afirmam que um desafio específico para os professores é integrar a tecnologia em suas práticas de ensino, como uma maneira de fazer com que os alunos explorem ideias e desenvolvam conjecturas.

Então, consideramos importante o uso de ferramentas tecnológicas para o desenvolvimento do pensamento matemático. Tendo em vista isso, o Desmos se configura como uma plataforma que ajuda na aprendizagem de conceitos, produzindo novas formas e procedimentos na construção de representações de problemas. Essa plataforma também aproxima os alunos de seus professores, principalmente nesse período de pandemia, pois os professores podem acompanhar seus alunos, e o desenvolvimento das atividades, identificando quais alunos possuem mais dificuldade, ou seja, os professores têm um feedback imediato de toda a turma. O Desmos também introduz um aspecto dinâmico, dando aos alunos e professores estratégias diferentes das utilizadas com lápis e papel, para visualizar e explorar os problemas.

Além disso, o Desmos possui duas funcionalidades, uma é a Calculadora Gráfica e a outra são as Atividades para Sala de Aula. Com a Calculadora Gráfica os alunos poderão traçar gráficos de funções, plotar tabelas de dados, resolver equações, explorar transformações, etc. Já as Atividades para Sala de Aula é um ambiente virtual de aprendizagem que contém diversas atividades digitais desenvolvidas por uma equipe de professores da Educação Básica e que podem ser usadas de forma gratuita. Além das atividades disponibilizadas na plataforma, os professores também poderão criar suas próprias atividades.

Nesse sentido, para que aconteça uma aprendizagem efetiva de conteúdos matemáticos e promova mudanças, é importante que os professores trabalhem em salas de aula com a Resolução de Problemas e façam uso das Tecnologias Digitais, para que seus alunos entendam a matemática com mais dinamicidade e facilidade.

2.6 O NOSSO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO NO CONTEXTO DAS PESQUISAS JÁ REALIZADAS

Sabemos que resolver problemas não é uma ação criada recentemente. Desde o surgimento da humanidade, resolver problemas faz parte do cotidiano.

> Resolver problemas faz parte da natureza humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir os elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática (HUANCA, 2006, p.20).

Segundo Huanca e Almeida (2018) muitos esforços estão sendo aplicados para tornar o ensino e a aprendizagem de Matemática mais eficiente. Ensinar bem matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único para se ensinar e aprender Matemática.

Assim, acreditamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas possa colaborar decisivamente para formar cidadãos conscientes do papel social que desempenharão no futuro.

Considerando o cenário das pesquisas já realizadas em todos esses anos, presumimos que a Resolução de Problemas é capaz de mudar consideravelmente a ideia de que Função Exponencial e Logarítmica deve ser ensinado de maneira mecânica. Contudo, essa mudança dependerá também de como o professor irá mudar sua postura perante o ensino desses conteúdos.

Com relação ao ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, Huanca (2014, p. 92-93) diz que,

> Embora pouco se conheça sobre os mecanismos atuais que os estudantes usam para aprender e dar sentido à matemática através da Resolução de Problemas, os pesquisadores concordam que no ensinar através da Resolução de Problemas

> permanece a promessa de aprendizagem nos estudantes. Muitas das ideias tipicamente associadas a essa abordagem - mudança nos papéis do professor, projetar e selecionar problemas para o ensino, aprendizagem colaborativa, e problematizar o currículo - têm sido extensivamente estudadas, resultando em respostas baseadas em pesquisa para as várias questões frequentemente levantadas sobre a aprendizagem com resolução de problemas.

Nesse sentido, Huanca, Silva e Souza (2021) enfatizam que para que haja ensino e aprendizagem, é importante "saber fazer Matemática", pois esta, mais do que qualquer outra disciplina, tem o poder de minar a confiança dos estudantes.

Esses autores ainda dizem que quando uma pessoa se depara com uma situação que para ela é um problema, precisará buscar um caminho que a ajude a encontrar uma resposta. Mas, a busca desse caminho vai depender de todo um processo de Resolução de Problemas, envolvendo etapas organizadas de forma sequencial, porém não linear. Esses autores, citando Proença, dizem que esse processo é baseado nas seguintes etapas: representação, planejamento, execução e monitoramento.

> - Representação – corresponde à compreensão do problema, ou seja, à compreensão que o estudante realiza do problema com base em seus conhecimentos da língua portuguesa e seus conhecimentos sobre os termos matemáticos que aparecem no enunciado, gerando uma representação mental e simbólica. No entanto, essa compreensão não é absoluta, pois pode ser prejudicada pela má formação de conceitos e procedimentos trazidos pelo estudante no sentido de dificultar seu entendimento de termos matemáticos e até mesmo de perceber informações incompletas e supérfluas;
> - Planejamento – corresponde ao uso de uma estratégia de resolução, ou seja, um caminho a ser seguido que deriva das preferências do estudante, podendo optar por meios algébricos, aritméticos, geométricos ou outras formas de representação e organização dos dados;
> - Execução – trata-se de executar a estratégia, ou seja, realizar os cálculos devidos, bem como desenhar as figuras, construir gráficos ou outras formas de representação viso-pictórico;
> - Monitoramento – corresponde à verificação da resposta. Se está de acordo com a pergunta do problema e, se é condizente ao contexto. Também implica em rever o processo seguido, o que permite que o estudante possa reestruturar ou modificar a estratégia seguida (PROENÇA, 2018 apud HUANCA; SILVA; SOUZA, 2021, p. 25-16).

Consideramos então que, para ensinar matemática através da Resolução de Problemas é necessária uma mudança de postura por parte dos alunos, que serão os agentes transformadores de sua própria aprendizagem; e também por parte dos professores, que deixam ser os transmissores dos conhecimentos e passam a ser mediadores da aprendizagem.

Sabemos que não é tarefa fácil ensinar matemática através da Resolução de Problemas, e às vezes, os professores consideram até como algo impossível de realizar. Mas, durante o desenvolvimento do curso de Função Exponencial e Logarítmica através da Resolução de Problemas, pudemos observar que os alunos se sentiram mais motivados e confiantes. Através dessa metodologia os alunos tiveram um contato mais direto com a matemática e puderam possuir um olhar mais afetivo com essa disciplina. Os alunos também viram as diversas aplicações existentes de Função Exponencial e Logarítmica e puderam entender e fazer matemática.

Nesse sentido, consideramos que os resultados desta pesquisa representarão uma possibilidade de planejar alternativas metodológicas e pedagógicas para que haja uma maior participação dos alunos nas salas de aula, com abordagens trabalhando com problemas, que não precisam ser restritas à memorização.

3 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Nesse capítulo iremos apresentar a formalização de Potenciação, Radiciação e Função Exponencial e Logarítmica. Em seguida, trazemos também os aspetos históricos dessas funções e suas aplicações no cotidiano. Por fim, apresentamos um olhar crítico de cinco livros didáticos que falam sobre Função Exponencial e Logarítmica para verificar como esses conteúdos estão sendo apresentados.

3.1 POTENCIAÇÃO

É uma operação onde devemos elevar um número ou expressão a uma dada potência. As potências são úteis para representar números muito grandes, como a distância da Terra à Lua, ou números muito pequenos, como a massa do átomo de alguma substância.

3.1.1 Potência de expoente natural

Definição: Seja a um número real positivo e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Para n natural define-se:

$$a^n = \begin{cases} a, & n = 1 \\ a^{n-1} \cdot a, & n \geq 2 \end{cases}$$

Princípio da Indução Finita: Uma proposição $P(n)$ é verdadeira para todo n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ quando satisfaz:

1. $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e
2. Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Propriedades:

1. Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (a \neq 0 \ e \ m > n)$$

3. Potência de um produto

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

4. Potência de um quociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \ (b \neq 0)$$

5. Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Prova:

1) Provemos a propriedade 1 por indução sobre n. Consideremos m fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para $n = 1$, pois sendo $m + 1 \geq 2$, pela definição,

$$a^{m+1} = a^m \cdot a$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$, e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$. De fato:

$$a^m \cdot a^{k+1} =\cdot\, a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}$$

A propriedade 1 continua sendo válida para n-fatores. Para $m_1, m_2, \dots, m_n$ quaisquer pertencentes a $\mathbb{N}$, temos:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_n} = a^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Se todos os expoentes forem iguais ($m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$) temos a propriedade 5:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

A demais propriedades também podem ser provadas por indução.

3.1.2 Potência de expoente inteiro negativo

Definição: Dados um número real a, diferente de zero, e um número inteiro n, vamos definir a^{-n} de maneira que a primeira propriedade ainda vale se m e n são números inteiros. Em particular, para $a \neq 0$, devemos ter:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

Portanto, $a^n \cdot a^{-n} = 1$ implica definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3.1.3 Potência de expoente racional e irracional

Definição Potência de expoente racional: Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), define-se potência de base a e expoente $\frac{m}{n}$ por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Considerando válido que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}, r, s \in \mathbb{Q}$ com a positivo, observamos que:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}} = a^{n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)} = a^m$$

Ou seja, $a^{\frac{m}{n}}$ é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m.

Definição Potência de expoente irracional: Seja $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e α um número irracional; consideremos os conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} | r > \alpha\} \; e \; A_1 = \{s \in \mathbb{Q} | s > \alpha\}$$

Notemos que todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2.

Existem dois racionais $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $r < a < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, considerando os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r | r \in A_1\} \; e \; B_2 = \{a^s | s \in A_2\}$$

Se $a > 1$, todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2.

Existem dois números $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$ tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α.

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

3.2 RADICIAÇÃO

3.2.1 História da radiciação

A preocupação com a obtenção do valor da raiz quadrada já existia há 4 mil anos na Babilônia, no Egito, na Índia, e em outras regiões. Os árabes foram os responsáveis por levar o conceito de raiz quadrada para o Ocidente. Para eles, a partir de um número (raiz) crescia um quadrado (árvore) e disso surgiu a nomenclatura raiz.

Embora o cálculo do valor de raízes quadradas já ocorresse há alguns milênios, o símbolo √ (sem a linha superior) foi utilizado pela primeira vez em 1525, pelo matemático alemão Christoff Rudolff. Esse símbolo lembra a forma da letra r, primeira letra da palavra Latina radix, que significa "raiz".

Definição Raiz enésima da aritmética: Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, chama-se raiz enésima aritmética de a o número real e não negativo b, tal que $b_n = a$. Em símbolos,

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

3.2.2 Propriedades da Radiciação

1. Multiplicação de raízes quadradas

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

2. Multiplicação de raízes de mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

3. Divisão de raízes de mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \; com\, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \; e \; n \geq 2$$

4. Potência de uma raiz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^m} \; com\, m \in \mathbb{Z}$$

5. Alteração do índice de uma raiz

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}} \; com\, m \in \mathbb{Z} \text{ e p} \in \mathbb{N}^*$$

6. Raiz de raiz

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p \cdot n]{a^m} \; com\, m \in \mathbb{Z}, \text{ p} \in \mathbb{N} \; e \; p \geq 1$$

3.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

3.3.1 História da Função Exponencial

Conta a história que havia uma pequena cidade chamada Taligana, e o único filho do poderoso rajá foi morto em uma sangrenta batalha. O rajá entrou em depressão e nunca havia conseguido superar a perda do filho. Então, vendo a queda do reino, um brâmane chamado Lahur Sessa, certo dia foi até o rei e lhe apresentou um tabuleiro contendo 64 quadrados, brancos e pretos, além de diversas peças. Essas peças representavam fielmente as tropas do exército, a infantaria, a cavalaria, os carros de combate, os condutores de elefantes, o principal vizir e o próprio rajá.

Como recompensa, o Lahur Sessa foi agraciado com a oportunidade de pedir o que quisesse. Logo de primeira, ele recusou tal oferta, pois achava que não fosse merecedor de tal proposta, mas mediante insistência do rajá, ele fez um simples pedido. Pediu, simplesmente, um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, dois para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta e assim sucessivamente até a última casa. O rajá, inicialmente, achou graça e genuíno o pedido. Entretanto, o pedido do brâmane não era tão humilde assim. Após fazerem vários cálculos de quanto trigo eles teriam que dar para ele, descobriram que seria necessária toda a safra do reino por incríveis dois mil anos para atender ao pedido de Lahur Sessa. Impressionado com a inteligência do brâmane, o rajá o convidou para ser o principal vizir, ou seja, um ministro, conselheiro do rajá. Além disso, Lahur Sessa perdoou a grande dívida de trigo.

3.3.2 Aplicações da Função Exponencial

A Função Exponencial possui diversas aplicações no cotidiano, como por exemplo, cálculos financeiros, datação de artefatos arqueológicos e fósseis por meio de técnicas que utilizam a radioatividade, estudo do crescimento e decrescimento de uma população, crescimento e decrescimento dos casos da Covid-19, etc.

Assim, essa função possui muitas aplicações em outras áreas do conhecimento, como: na Matemática Financeira é utilizada nos Juros Compostos; na Geografia está relacionada com os crescimentos populacionais; na Química é utilizada em situações envolvendo decaimento radioativo; na Biologia está ligada ao desenvolvimento de bactérias em culturas e crescimentos de determinadas plantas; e na Psicologia expressa as curvas de aprendizagem.

3.3.3 A história do número e

Os números irracionais sempre foram muito intrigantes na história da matemática. Eles aparecem com frequência na Geometria como razão entre a diagonal e o lado de um quadrado $(\sqrt{2})$, a razão do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro (π), a razão áurea presente na natureza $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, entre muitos outros.

Vamos apresentar, nesta subseção, um número irracional muito importante, mas pouco conhecido pelos alunos do Ensino Médio, o número irracional $e = 2{,}71828$ ...

O homem, desde os seus primórdios, teve como preocupação com o acúmulo de riquezas.

Um dos conceitos fundamentais quando se trata de dinheiro é a noção de juros.

Nesse sentido, juros seriam os ganhos obtidos por quem empresta o dinheiro. Essa prática é muito antiga. Encontra-se no Museu do Louvre, em Paris, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que propõe o seguinte problema: Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos anualmente?

Vamos retomar a fórmula dos juros compostos da atualidade:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i\%)^n$$

Com noção de juros, as interpretações e especulações a esse respeito foram evoluindo com o tempo. Observe a situação a seguir.

Considere um empréstimo de R$100,00 com uma taxa de juros de 100% ao ano. No final de um ano, as dívidas seria de $100 \cdot (1 + 100\%)^1 = 200\ reais$.

Mas, um ano possui dois semestres, e podemos cobrar 50% por semestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1 + 50\%)^2 = 225\ reais$.

Prosseguindo esse raciocínio, temos quatro trimestres, com 25% por trimestre; assim, no final de um ano, a dívida seria de $100 \cdot (1 + 25\%)^4 = 244{,}14\ reais$.

Esses resultados devem assustar qualquer pessoa que queira fazer um empréstimo. A dúvida que resta é se esse valor aumenta de forma indeterminada.

A comunidade bancária explora esse conceito de cálculo de juros ao extremo. Vamos analisar os cálculos: $C_n = 100 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{n}\right)^n$ é o valor da dívida de 100 reais, se aplicarmos juros compostos divididos igualmente em n períodos. Assim, $C_n = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

O mistério do problema resume-se em entender o número $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Observe a tabela,

N	$\boldsymbol{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828
10000000	2,71828

Podemos observar o comportamento peculiar do número $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. À medida que **n** vai aumentando, vamos "estacionando" no número 2,71828.

É claro que precisamos de mais fatos teóricos para concluir que o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é o número 2,71828..., batizado de número e.

Simbolicamente, temos: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Por causa da crescente importância do comércio internacional, as transações financeiras também se intensificaram. É possível que o número e tenha sido reconhecido nesse contexto.

3.3.4 Definição de Função Exponencial

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é chamada de Função Exponencial se existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÕES:

- Se $a = 1$, temos $a^x = 1$
- Se $a = 0\ e\ x < 0$, temos a^x não está definida nos reais
- Se $a = 0\ e\ x > 0$, temos $a^x = 0$ para qualquer valor de x
- Se $a < 0$, temos que $f(x) = a^x$ não está definida para números racionais cujo denominador da representação fracionária é par.

É válida algumas propriedades para a Função Exponencial

- $f(1) = a^1 = a$
- $f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
- Para $n \in \mathbb{N}, f(nx) = a^{nx} = (a^x)^n = \left(f(x)\right)^n$, ou seja, $f(nx) = \left(f(x)\right)^n$

3.3.5 Gráfico da Função Exponencial no Desmos

O gráfico de uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ e\ y = f(x)$. Esse gráfico pode ser representado no plano cartesiano e isso pode ser feito em diversas ferramentas digitais, como o Desmos. Vale ressaltar que aqui teceremos breves considerações sobre a plataforma Desmos e nos atentaremos em mostrar como construir os gráficos da Função Exponencial e Logarítmica, tendo em vista que já falamos sobre seus benefícios e funcionalidades na subseção Tecnologias Digitais e Resolução de Problemas.

O Desmos é uma plataforma rica em termos de possibilidades de articulação e manipulação. Essa plataforma proporciona uma matemática dinâmica de forma gratuita para todos os níveis de ensino, e combina Geometria, Álgebra, tabelas e gráficos. O principal intuito dessa plataforma é construir um mundo em que todos os alunos gostem de Matemática.

Para se construir o gráfico de uma Função Exponencial na plataforma Desmos é necessário seguir alguns passos a passos.

1º passo: Abrir a calculadora gráfica

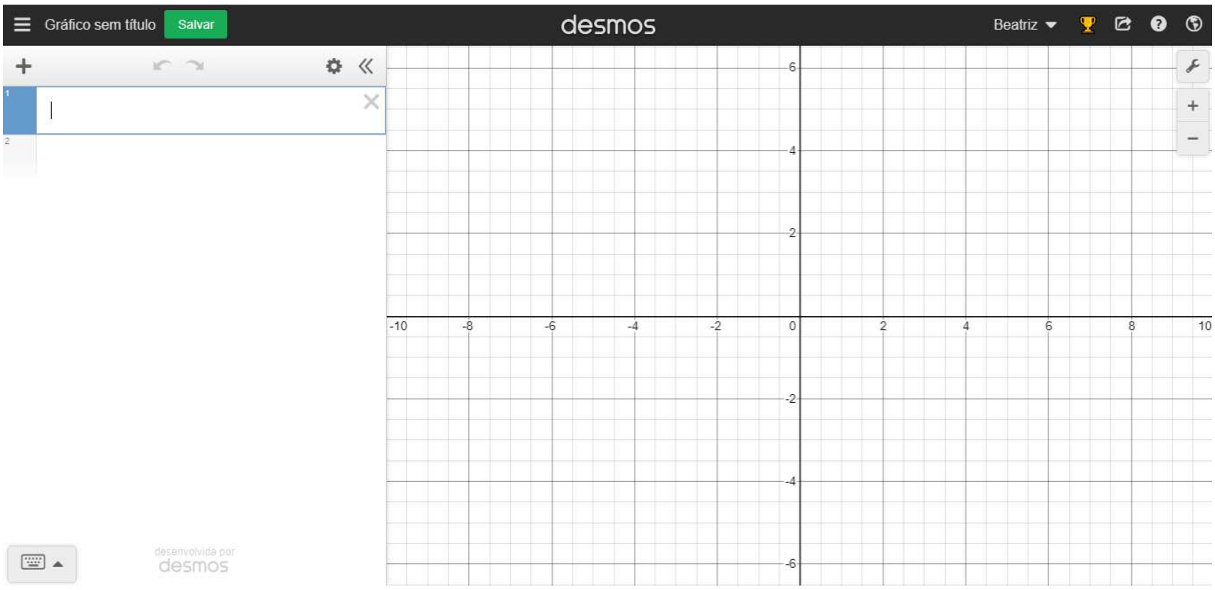
Link: https://www.desmos.com/?lang=pt-BR

Figura 1 – Página Inicial da Calculadora Gráfica

Fonte: www.desmos.com

2º passo: Clicar em calculadora gráfica

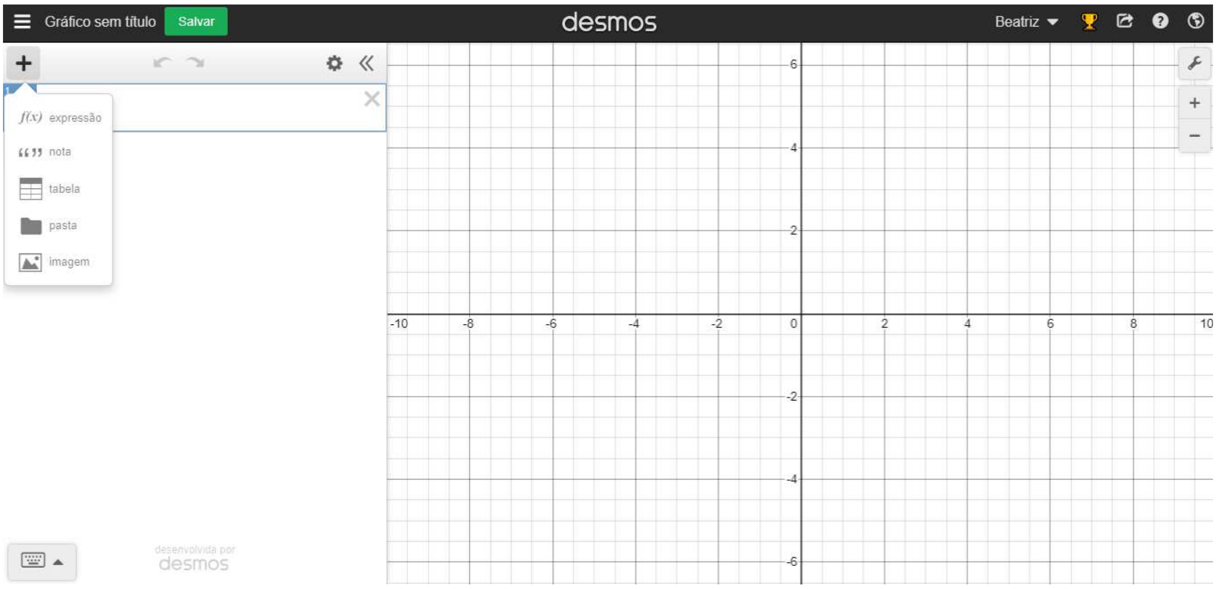
Figura 2 – Interface do Desmos



Fonte: www.desmos.com

3º passo: Ir em mais opções e selecionar "expressão"

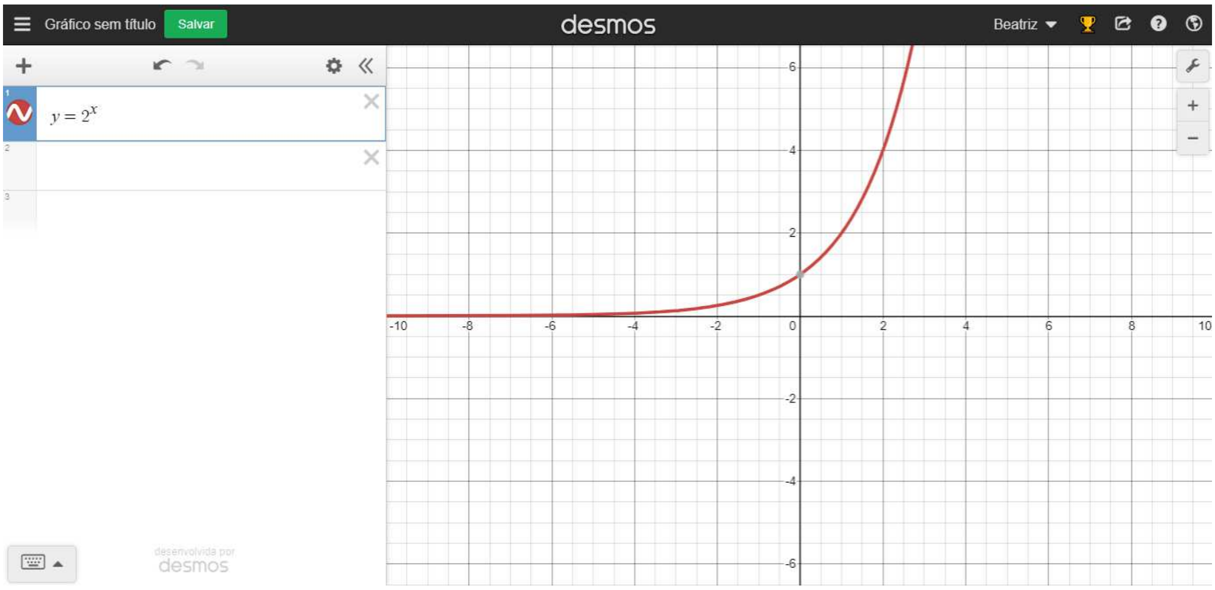
Figura 3 – Inserir funções



Fonte: www.desmos.com

4º passo: Digitar a lei da função

Figura 4 – Inserção da Função $y = 2^x$



Fonte: www.desmos.com

Algumas características da Função Exponencial

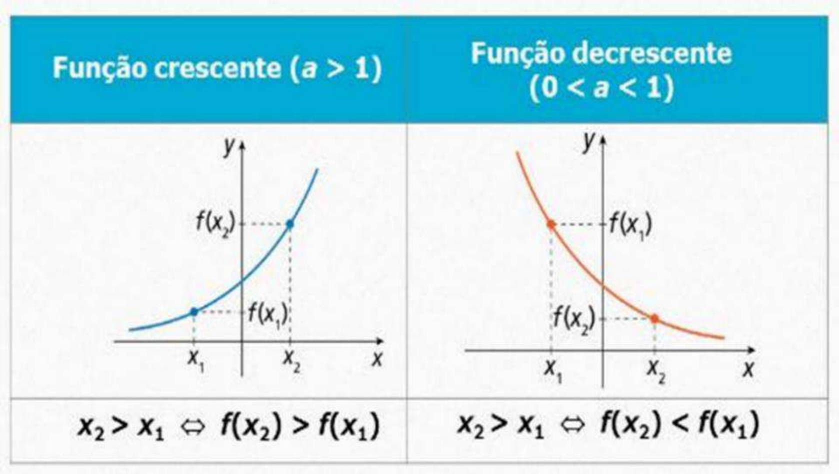
(1) O gráfico de uma Função Exponencial em um plano cartesiano não toca o eixo das abscissas, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor 0 e não tem zeros (não existe x real tal que $f(x) = 0$.

(2) O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$.

(3) O gráfico não tem pontos nos quadrantes III e IV do plano cartesiano.

(4) A Função Exponencial pode ser crescente (se $a > 1$) ou decrescente (se $0 < a < 1$).

Figura 5 – Gráfico da Função Exponencial crescente e decrescente



Fonte: https://geniodamatematica.com.br/como-construir-um-grafico-da-funcao-exponencial-video/

(5) Quando $a > 1$, os valores $f(x) = a^x$ da função apresentam inicialmente um crescimento lento, e conforme aumentamos o valor de x, o crescimento dos valores $f(x) = a^x$ da função se torna cada vez mais acentuado, o que é possível observar na curva exponencial.

3.4 LOGARITMOS

3.4.1 Introdução Histórica

Conta-se a história que a tábua de logaritmo foi saudada com o mesmo entusiasmo com que, nesse século, foi recebida a máquina de calcular.

Os logaritmos surgiram quando aconteciam as grandes navegações europeias. Existiam muitos riscos para os financiadores, visto que poderiam ter naufrágios, piratas e o longo tempo entre a partida e a volta. Sendo assim, para animar investidores, a capitalização composta, ou seja, receber sobre os juros, foi socialmente aceita e promovida. Anteriormente era considerada crime de agiotagem.

Mas, os cálculos de Juros Compostos não eram muito simples. Se quisessem resolver a seguinte situação: A quantia de R\$ 100,00, depositada a juros compostos durante 3 anos, à taxa de 12% ao ano, produz um montante $\boldsymbol{M = 100\,(1 + 0,12)^3}$. O saldo pode ser encontrado com um cálculo rápido, mesmo sem o uso da máquina. Mas, se os juros fossem de 1% ao mês, teríamos o montante dado por $\boldsymbol{M = 100\,(1 + 0,01)^{36}}$, para o mesmo período. Sem uma máquina, os cálculos são demorados. Admitindo que o financiador necessitasse retirar o montante após 2 anos e 210 dias.

O montante é dado por

$$M = 100\ (1 + 0{,}12)^{2+\frac{210}{360}}$$

pois os dias correspondem a $\frac{210}{360}$ de ano. Assim

$$M = 100\ (1 + 0{,}12)^{\frac{31}{12}}$$

Sem usar máquina, os cálculos são muito difíceis, pois deve-se achar

$$\sqrt[12]{1{,}12^{31}}$$

E isto na hipótese de que tivesse sido 210 dias.

Outra fonte de cálculos complicados, no século XVI, era a determinação da longitude, sem a qual o êxito das grandes navegações seria posto em risco.

Concomitantemente na Suíça, a invenção dos logaritmos foi criada por Jobst Bürgi (relojoeiro) e, na Escócia, por John Napier (latifundiário). A invenção se deu de forma independente, sem um saber das pesquisas do outro.

3.4.2 Aplicações dos Logaritmos

Os logaritmos podem ser encontrados nas ondas sonoras. Essas ondas podem ser percebidas de diferentes modos. Chamamos de volume do som a sensação fisiológica associada a como percebemos um som, ou seja, o volume do som é algo subjetivo que pode variar de pessoa para pessoa. Na Física, utilizamos logaritmo para calcular a medida de nível sonoro de um ruído ou a medida de energia liberada em um terremoto.

Também podem ser utilizados na Química, para calcular o valor do pH de uma solução ou medir o intervalo de tempo que a medida da messa de uma substância radioativa.

3.4.3 Definição e condição de existência de Logaritmo

Dados a e b, números reais positivos, com $a \neq 1$, o **logaritmo de b na base a** é o número real x tal que

$$a^x = b$$

Ou seja,

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b, para\ b > 0, a > 0\ e\ a \neq 1$$

O número b é conhecido por logaritmando.

3.4.4 Consequências da definição de logaritmos

Satisfeitas as condições de existência de logaritmo, temos as seguintes consequências:

1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 0$, pois $a^1 = a$
3. $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$
4. $a^{\log_a n} = n$, pois $\log_a n = m \to a^m = n \to a^{\log_a n} = n$
5. $\log_a m = \log_a n \to m = n,\ pois\ a^{\log_a n} = n \to m = n$

3.4.5 Propriedades operatórias de logaritmos

1. Logaritmo de um produto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

2. Logaritmo de um quociente

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

3. Logaritmo de uma potência

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

3.4.6 Mudança de base

Algumas vezes é necessário mudar a base de um logaritmo para facilitar o cálculo do valor dele. Se a, b, e c são números reais positivos, com $a \neq 1\ e\ c \neq 1,\ então$:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demonstração: Considerando $\log_b N = p$; $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$. Então, pela definição de logaritmo temos que,

$$N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$$

Se $a^q = a^{rp}$, então, $q = rp$.

Portanto, $p = \frac{q}{r}$ e $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

3.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

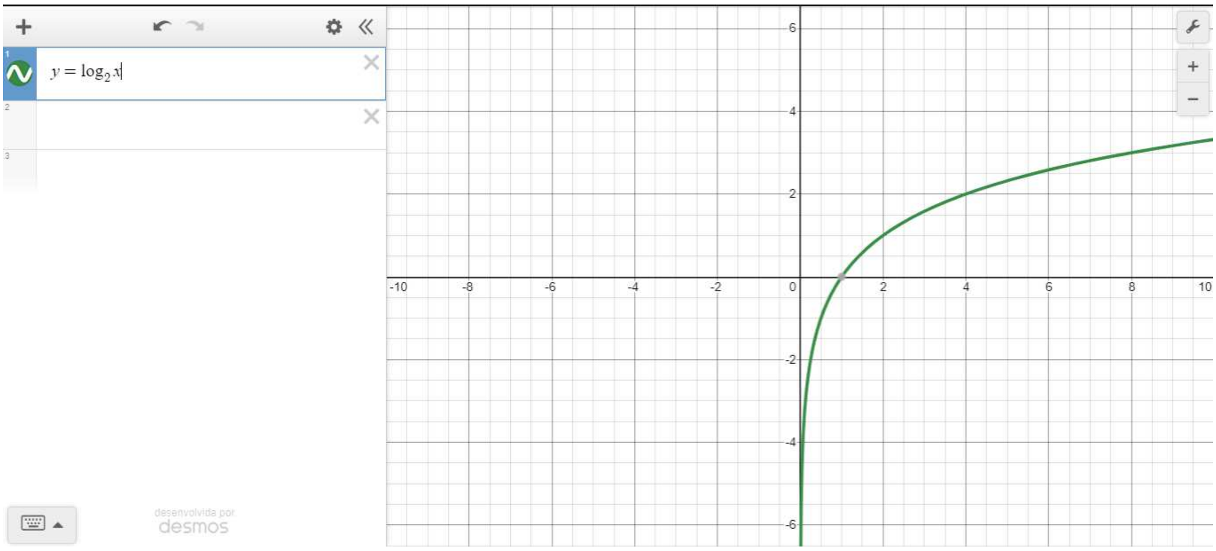
3.5.1 Definição da Função Logarítmica

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é chamada de Função Logarítmica se existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.5.2 Gráfico da Função Logarítmica no Desmos

Tendo em vista que já explicamos a parte introdutória de como abrir a plataforma Desmos quando falamos do Gráfico da Função Exponencial, aqui nos deteremos a explicar apenas como inserir a Função Logarítmica e a construção de seu gráfico.

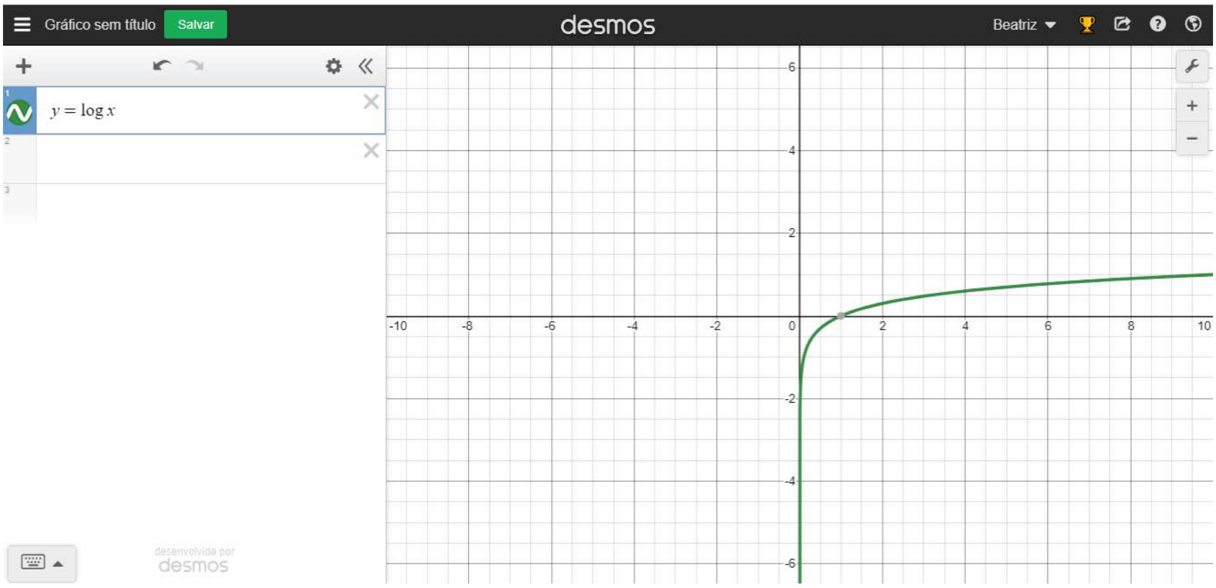
Figura 6 – Gráfico da Função Logarítmica com base diferente de 10



Fonte: www.desmos.com

Vale lembrar que para colocar a base da Função Logarítmica, basta selecionar a tecla SHIFT juntamente com (-). Também podemos construir o gráfico com a base 10, como mostra a figura abaixo.

Figura 7 – Gráfico da Função Logarítmica de base 10



Fonte: www.desmos.com

3.6 UM OLHAR DESCRITIVO DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Antes de darmos início a pesquisa de campo escolhemos alguns livros didáticos de Matemática que possuem o conteúdo Funções Exponencial e Logarítmica. Esses livros foram analisados para podermos ter uma ideia sobre como são tratadas as Funções Exponencial e Logarítmica. A seguir apresentamos um olhar descritivo de cada livro.

Livro 1 – Matemática: Funções e Progressões

Esse livro é de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara Sousa e foi publicado em 2020. Incialmente os autores começam apresentando o livro por completo, dizendo o que irá conter no livro, como aberturas de capítulos, atividades resolvidas, fórum, dentre outras atividades. Em seguida, os autores apresentam quais os objetivos a serem atingidos.

Ao introduzir o capítulo eles fazem conexões entre aplicações e o cotidiano. Além disso, falam sobre algumas curiosidades do tema e propõem orientações para o professor, que são chamadas de “pense e responda” onde irá conter perguntas relacionadas ao cotidiano, e o professor poderá aplica-las em sala de aula.

Após isso, trazem as definições do conteúdo, alguns exemplos para verificação, apresentam alguns exercícios resolvidos, e propõem atividades não resolvidas. Por fim, fazem conexões com outras áreas do conhecimento, como a Biologia, Geografia, dentre outras áreas.

Livro 2 – Matemática: Contexto & Aplicações

Luiz Roberto Dante, autor deste livro 2, publicado em 2016, faz uma breve apresentação do que contém no livro, como “exercícios resolvidos”, “para refletir”, “fique atento!”, “você sabia?”, “caiu no ENEM”, dentre outros tópicos.

O autor, inicialmente, traz a discussão e apresentação do conteúdo, em seguida, mostra alguns exemplos. Vale lembrar que ele também chama a atenção para os tópicos “Você sabia?” onde são apresentadas algumas curiosidades sobre o tema, o “fique atento” onde são apresentados alguns fatos históricos a respeito do assunto e o “para refletir” onde o professor poderá fazer indagações em sala de aula, instigando seus alunos a refletirem sobre o assunto.

Muitas das vezes o autor traz a História da Matemática para iniciar um conteúdo, como por exemplo, o número de ouro para introduzir o conceito de número irracional. São apresentados exercícios a serem resolvidos para que os alunos treinem, exercícios resolvidos e problemas.

Livro 3 – Conexões Matemáticas: Funções e Aplicações

Esse livro foi desenvolvido por Fabio Martins Leonardo, pela Editora Moderna, no ano de 2020. No livro do professor, é apresentado um guia, o qual está subdividido em duas partes, a parte geral e a parte específica.

Na parte geral, é introduzida a BNCC com as habilidades e competências específicas dos conteúdos de Funções, as metodologias ativas, a importância da Matemática, a língua materna e a Matemática, os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade, um olhar inclusivo e a avaliação. Em seguida, são apresentadas algumas sugestões de livros e artigos para o professor, para que ele possa entender mais sobre o Ensino de Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, História da Matemática, Currículo, Didática, Formação de Professores, Sites e Artigos para Downloads, e Revistas e Periódicos.

Também nesse livro, são sugeridas algumas “questões para avaliação”, onde são apresentadas algumas questões com suas possíveis resoluções.

Livro 4 – Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências

Este livro foi produzido por Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, no ano de 2020. De início, os autores fazem uma apresentação geral do livro, ou seja, dizem quais são os objetivos a serem atingidos, e explicam que todo o livro engloba as competências e habilidades da BNCC previstas para o Ensino Médio.

Além disso, na abertura de cada capítulo é apresentado uma imagem que possui relação com o conteúdo, para que possam despertar ainda mais a curiosidade dos alunos e para que estes possam fazer conexões com o cotidiano. Também são apresentas situações-problema contextualizadas. Vale ressaltar que os autores trazem alguns aspectos históricos antes de iniciar um conteúdo. Por fim, são apresentados exercícios que aumentam o grau de dificuldade na medida que avançamos.

Livro 5 – Função Logarítmica

Este livro foi escrito por José Valdir Floriani, no ano de 1999, em Blumenau e faz parte da coleção Arithmos. O autor inicia o livro trazendo algumas reflexões sobre os livros de Matemática. Ele também faz uma breve apresentação do livro, falando sobre a aprendizagem de Matemática, a Educação Matemática, e sobre a coleção Arithmos.

O livro está dividido em onze capítulos, onde, de início são apresentados o contexto histórico da Função Logarítmica, uma contextualização, ou seja, é apresentado um exemplo já resolvido com duas possíveis resoluções, a definição da Função Logarítmica, exercícios resolvidos, logaritmos decimais com a apresentação da história do ln, as demonstrações das propriedades, mudança de base, funções inversas, gráfico das funções Exponenciais e Logarítmicas e aplicações resolvidas.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo abordaremos sobre os aspectos metodológicos da pesquisa e posteriormente fazemos a caracterização da pesquisa. Em seguida, descrevemos os instrumentos utilizados para a coleta de dados. Também, realizamos uma discussão sobre alguns critérios utilizados para a análise dos dados. Para finalizar, apresentamos os problemas geradores da pesquisa.

4.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Sabemos que o século XXI exige que as pessoas sejam capazes de pensar e serem cada vez mais criativas, visto que estamos imersos a tecnologia e se não formos criativos para resolver problemas, a tendência é sermos substituídos por máquinas. Nesse sentido, há a necessidade de formar cidadãos críticos e autônomos, fazendo sempre a diferença na educação.

Santos acredita que,

> Seres racionais, porém, são capazes de pensar, isto é, são capazes de transformar necessidades sentidas em problemas, que se manifestam como questões. Questões, por sua vez, pedem soluções. Levantar problemas e gerar soluções é o que se chama atividade intelectual ou teórica. Teorizar é levantar um problema e para ele gerar soluções possíveis. É desnecessário dizer que cada problema não tem uma solução, mas infinitas possibilidades de solução (SANTOS, 2007, p. 18).

Em nossa visão, a pesquisa acadêmica serve como ponto de partida para a construção do conhecimento, podendo resolver de maneira significativa os problemas advindos das necessidades humanas, sempre fazendo questionamentos e indagações intencionais, ou seja, irá transformar as necessidades em problemas e as soluções serão obtidas por meio da escolha da solução mais apropriada.

Segundo Romberg (2007) o termo pesquisa refere-se aos processos, ou seja, as coisas que realizamos. Contudo, esse autor enfatiza que não podemos enxergar a pesquisa como algo meramente mecânico, ou como um conjunto de atividades a serem seguidas em uma ordem predeterminada, fazer pesquisa requer criatividade e pode ser considerada uma arte.

4.1.1. A Pesquisa pedagógica

A pesquisa foi de cunho qualitativo, onde o professor, em geral, com ou sem a colaboração de outros, se envolvem com a pesquisa de sua própria sala de aula. Assim, como dizem Lankshear e Knobel (2008), pesquisa pedagógica significa, no mínimo, professores pesquisando suas próprias salas de aula. Dois aspectos que podem ser percebidos numa pesquisa pedagógica: (1) A pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula; e (2) O principal pesquisador, em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica, é o professor cuja sala de aula está sob observação.

Esses autores afirmam que os objetivos da pesquisa pedagógica são: melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores; e reconhecer que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula. Assim, a escolha por determinada abordagem metodológica para estruturar uma investigação, depende do problema da pesquisa, do contexto em que serão coletados os dados, bem como das técnicas e métodos a serem utilizados (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008).

Segundo Lüdke e André (2018), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como o seu principal instrumento. Os dados coletados são, em geral, descritivos e ela se preocupa mais com o processo do que com o produto. Dessa forma, a primeira fase é exploratória, em seguida é realizada a coleta sistemática de informações e, ao final, será realizada a análise sistemática dessas informações.

A pesquisa foi aplicada de maneira remota com um grupo de alunos do 1° ano do Ensino Médio da Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, localizada na cidade de Monteiro/PB. Bogdan e Biklen (1994) dizem que os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas em seu ambiente habitual de ocorrência. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação.

Desse modo, os dados recolhidos nessa abordagem:

> [...] incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Na pesquisa qualitativa, para Goldenberg (1999, p. 53) a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma instituição, etc. Ou seja, a abordagem qualitativa em uma pesquisa também "consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos".

Essas considerações justificam a inserção desta pesquisa pedagógica no modelo qualitativo. A utilização de estratégias pedagógicas, como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o trabalho com problemas geradores em sala de aula, exige uma constante interação entre o pesquisador e os sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, sendo que trabalhos investigativos e reflexivos pressupõem ações, conscientizações e transformações.

Para a estruturação dos encontros adotamos o roteiro para a Resolução de Problemas de Matemática, proposto por Onuchic e Allevato (2011), que consiste em: (1) preparação do problema: nessa etapa, selecionaremos nove problemas, a fim de promover a construção de um novo conceito; (2) leitura individual: nessa etapa, de posse do problema proposto, os alunos farão uma leitura individual, na etapa (3) leitura em conjunto: após formarem grupos, farão uma leitura coletiva. Aqui, o professor poderá assistir ao aluno, conduzindo-o à interpretação do problema. Após os alunos esclarecerem todas as dúvidas em relação ao enunciado do problema, eles irão, de forma colaborativa, fazer a (4) resolução do problema. Durante a etapa 4, o professor irá (5) observar e incentivar: ajudar os alunos a trabalharem de forma colaborativa, instigando-os a trocar ideias entre si.

É importante destacar que o conceito matemático do problema não poderá ser trabalhado com o aluno anteriormente, dessa forma, os alunos utilizarão seus conhecimentos prévios e técnicas já conhecidas para a resolução do problema proposto.

Na etapa (6), representantes dos grupos são chamados para ir fazer o registro das resoluções na lousa: independentemente de estarem corretas ou erradas, todas as resoluções devem ser registradas na lousa para que os alunos possam analisá-las e discuti-las. Na sétima etapa, (7) plenária: os alunos são convidados para a discussão das resoluções, tirando as dúvidas e defendendo seus pontos de vista, nesse momento, o professor deve assumir o papel de mediador da discussão. Após a discussão do problema, inicia-se uma nova etapa, (8) busca de consenso: na qual o professor irá estimular a classe a chegar em um consenso sobre a resolução correta do problema na lousa. Finalmente, o professor realizará a (9) formalização do conteúdo: em que apresentará, de maneira organizada e estruturada os conceitos, os princípios e os procedimentos.

Devido à pandemia, ocasionada pela Covid-19, algumas etapas, propostas por Onuchic e Allevato (2011) tiveram que ser adaptadas e reformuladas para que a aplicação ocorresse remotamente, que será apresentada a seguir.

Durante os encontros, os problemas serão apresentados para os alunos por meio da ferramenta “Apresentar tela” disponível no Google Meet. Em seguida, os alunos deverão realizar a (2) Leitura Individual do problema. Neste momento, as autoras propunham a organização de grupos e a leitura em conjunto, no entanto, devido ao número reduzido de alunos participando da pesquisa e ao distanciamento social, não haverá a possibilidade de formação de grupos, por esse motivo, após a leitura individual, será solicitado que algum aluno realize a leitura em voz alta, a (3) Leitura em Conjunto, ou seja, os alunos terão a oportunidade de tirar as dúvidas em relação à interpretação do problema.

A quarta etapa é a (4) Resolução do Problema, e, apesar da aplicação remota, os alunos terão a abertura para realizar consultas e tirar dúvidas com os outros colegas e com o professor. Neste momento, Onuchic e Allevato (2011), sugerem a observação e o incentivo do professor, no entanto, a aplicação remota provoca um distanciamento entre o professor e o aluno, por este motivo, a observação (visual) fica comprometida, contudo, deverá ter o quinto passo (5) Incentivo do professor a todo momento.

De acordo com a finalização das resoluções, os alunos que terminem as resoluções deverão (6) Compartilhar as Resoluções nos grupos de Whatsapp, este passo substituiu a etapa de Resolução na Lousa proposto na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com isso todos poderão analisar as resoluções realizadas pelos colegas.

O passo seguinte é a (7) Plenária, na qual os alunos defendem suas resoluções. A plenária será realizada por meio da ferramenta “Apresentar tela” do Google Meet, e o representante de cada grupo de Whatsapp, irá apresentar a resolução do problema. Quando todos que se dispuseram a apresentar defendendo seu ponto de vista e mostrando os caminhos utilizados, o professor e os alunos (8) buscarão o consenso da resolução correta do problema com o auxílio do Whiteboard, ferramenta gratuita da Microsoft. Por fim, será realizada a (9) Formalização do Conteúdo com uma linguagem matemática formal, pelo professor com o auxílio do Meet, ferramenta gratuita do Google.

4.2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida de maneira remota com um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, localizada na cidade de Monteiro/PB, e tem como entidade mantenedora a SEE/PB, inserida no Cariri Paraibano. Além disso, oferece ensino na modalidade de Ensino Médio Integral Técnico, Regular e Profissionalizante em Instrumento Musical e em Manutenção e Suporte em Informática. Os alunos da referida escola são da zona rural e urbana, sendo estes, em sua maioria, da zona urbana.

Esta escola participa do Programa Escola Cidadã Integral implantado pelo Governo do Estado em 2018 e possui como objetivo principal a articulação entre o Modelo Pedagógico e o Modelo de Gestão a fim de criar as condições de oferta de excelência acadêmica, formação para a vida e a consolidação de valores e competências necessárias para o século XXI. A partir desta articulação, as Metodologias de Êxito da parte diversificada do Currículo fazem a mobilização e a articulação do modelo Pedagógico com a BNCC e o Plano de Ação da Escola. Também são oferecidos Cursos de Formação Continuada para implementação do Currículo Integrado através de Disciplinas da Base Diversificada: Projeto de Vida, Preparatório Pós-Médio, Avaliação Semanal, Orientação de Estudo, Disciplinas Eletivas que oportunizam a formação humana integral através da interdisciplinaridade com as dimensões do currículo: Inteligência/Cognição (Logos), Corporeidade (Eros), Espiritualidade (Mytos) e Afetividade (Pathos).

Vale ressaltar que após a pandemia da Covid-19 são ministradas apenas três aulas semanais de Matemática. Sendo elas, uma presencial e duas remotamente. Para os alunos que não possuem acesso à internet, a escola disponibiliza atividades impressas e livros para que os alunos acompanhem todos os conteúdos que estão sendo ministrados semanalmente.

4.3 INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA PESQUISA

Devido a Covid-19, toda a nossa pesquisa necessitou ser feita remotamente, para isso, foram utilizadas as Tecnologias Digitais para ajudar em todo o processo de construção do conhecimento.

Os alunos ainda temem muito a Matemática e acreditam ser uma disciplina para poucos. Mas, na verdade, todos são capazes de entendê-la. Sabendo-se disso, Antunes e Cambrainha (2020) afirmam que é necessário promover uma transformação digital profunda e mudar a forma como conceber, planejar e executar as aulas de matemática com auxílio de tecnologias e da internet. Ou seja, os professores devem planejar suas aulas sempre buscando inserir as tecnologias de maneira a englobar ainda mais os alunos.

Nesse sentido, para a realização da nossa pesquisa foram utilizadas algumas ferramentas digitais, tais como o Notbook, Celular, Mesa Digitalizadora, Whiteboard, Jamboard, WhatsApp, Plataforma Desmos, Google Forms e Google Meet.

Destacamos a importância do uso de ferramentas como o Whiteboard e o Jamboard, que funcionam como uma Lousa Digital, facilitando a visualização dos alunos durante a resolução de um problema ou formalização de um conteúdo. Para escrever com mais facilidade, a pesquisadora fez uso de uma Mesa Digitalizadora.

Já o Desmos, é uma plataforma rica em termos de possibilidades de articulação e manipulação. Essa plataforma proporciona uma matemática dinâmica de forma gratuita para todos os níveis de ensino. Além disso, os professores podem desfrutar dessa plataforma utilizando atividades para sala de aula e também como uma Calculadora Gráfica.

Foram formados três Grupos no WhatsApp para que os alunos-participantes pudessem postar as resoluções dos problemas propostos nos encontros. Semanalmente a pesquisadora criava e disponibilizava, por meio dos grupos, os links de acesso ao Google Meet. Vale ressaltar que, a pesquisa durou aproximadamente dois meses. No início dos encontros, tínhamos um total de nove alunos-participantes, contudo, apenas cinco alunos participaram efetivamente dos encontros.

4.4. COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de registros de observações, e gravação de vídeo dos encontros realizados no Google Meet, bem como das conversas entre os participantes realizadas no chat dessa plataforma digital, diário de bordo. Também foi feito um questionário de avaliação para que os alunos-participantes respondessem, em sua opinião, o que eles acharam dos encontros remotos quando ensinamos Matemática através da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

4.4.1. Interpretar a informação coletada

Esse será o momento em que o pesquisador irá fazer a análise e interpretação dos dados coletados na pesquisa. Para fazer essa interpretação o pesquisador irá agrupar, categorizar, organizar e interpretar a informação relevante dentro do universo coletado sob dois enforques: um centrado nos números e quantidades associados a escalonamento e estratificação da informação, o método quantitativo; ou pode retirar o enfoque dos números e repousá-lo sobre a identificação, explicação e compressão do fenômeno, por meio do método qualitativo.

As nossas gravações dos encontros foram realizadas pelo Google Meet, e com isso, a pesquisadora pôde revê-las ao término dos encontros. Além disso, em todos os encontros os alunos enviavam suas resoluções dos problemas propostos para os grupos do WhatsApp, assim, a pesquisadora poderia analisar quais os principais erros cometidos pelos alunos e quais as principais dificuldades, podendo ajuda-los a entender melhor o conteúdo. Também foi aplicado um questionário, a fim de saber o que acharam dos encontros remotos.

4.5 PROBLEMAS GERADORES DA PESQUISA

Esta seção está destinada aos problemas construídos, ressaltando as motivações que levaram à sua criação e os objetivos a serem alcançados em cada um deles. O foco destes problemas é auxiliar o professor na formalização da Função Exponencial e Logarítmica dos seus alunos através da Resolução de Problemas. Para esta pesquisa, foram elaborados nove problemas, os problemas foram elaborados de acordo com a realidade dos alunos envolvidos na pesquisa em questão.

Problema 1. A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus influenza. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.
O vírus influenza é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.
Qual o diâmetro interno do vírus influenza, na notação científica? Em mm.

Objetivos do problema:

- (Re)construir o conceito de potenciação
- Trabalhar com notação científica e sua relação com potenciação
- Ligar esse problema a Função Exponencial

Problema 2. Os jornais noticiaram que, durante o mês de outubro de 2011, a população mundial deveria atingir a marca de 7 bilhões de habitantes, o que nos faz refletir sobre a capacidade do planeta de satisfazer nossas necessidades mais básicas, como o acesso à água e aos alimentos. Estima-se que uma pessoa consuma, em média, 150 litros de água por dia. Assim, considerando a marca populacional citada acima, o volume de água, em litros, necessário para abastecer toda a população humana durante um ano, está entre

a) $10^{13} e\ 10^{14}$
b) $10^{14} e\ 10^{15}$
c) $10^{15} e\ 10^{16}$
d) $10^{16} e\ 10^{17}$
e) $10^{17} e\ 10^{18}$

Objetivos do problema:

- Conscientizar sobre o consumo adequado da água
- Trabalhar o conceito de potenciação
- Trabalhar com notação científica e sua relação com potenciação
- Ligar esse problema a Função Exponencial

Problema 3. Encontre o valor de x na equação

$$8^x = 128^{\sqrt{x}}$$

Objetivos do problema:

- Trabalhar as propriedades de potenciação
- Trabalhar as propriedades de radiciação

Problema 4. Simplificar

$$\frac{14^{20}}{28^{10}}$$

Objetivo do problema:

- Trabalhar as propriedades de potenciação

Problema 5. A área A (em m^2) da superfície corporal de um indivíduo pode ser calculada em função da sua massa p (em kg) por meio da fórmula $A = 0{,}11\sqrt[3]{p^2}$. O valor resultante é útil para determinar a quantidade de calor perdida através do suor. Assim, uma pessoa com massa igual a $64\ kg$ possui a área em m^2 da superfície corporal aproximadamente igual a:

a) $1{,}76$
b) $1{,}56$
c) $1{,}86$
d) $1{,}66$

Objetivos do problema:

- Refletir sobre a medida da área da superfície corpórea e massa corporal
- Trabalhar as propriedades de potenciação
- Trabalhar as propriedades de radiciação

Problema 6. Considere a seguinte situação.

- Fase 0: José contou um segredo para 4 pessoas.
- Fase 1: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 2: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 3: ...
- ...

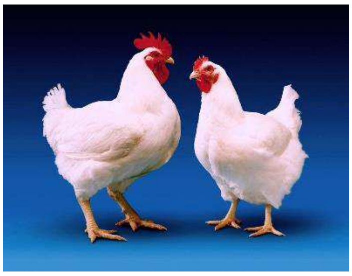
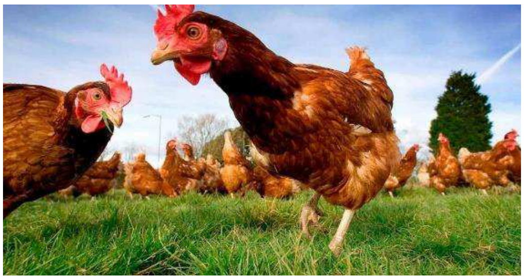
Considerando-se que as fases seguintes repetem o ocorrido na fase imediatamente anterior, se fizermos x representar o número associado a casa uma das fases, $S(x)$ representar o número de pessoas que ouviu o segredo na fase x e $\mathbb{N}$ representar o conjunto dos números naturais, então a função $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que modelará essa situação poderá ser representada por:

a) $S(x) = 4x$
b) $S(x) = x^4$
c) $S(x) = 4x + 1$
d) $S(x) = 4^{x+1}$
e) $S(x) = 4^x$

Objetivos do problema:

- Construir o conceito de Função Exponencial
- Entender o comportamento dessa função

Problema 7. Um avicultor cria galinhas caipiras e galinhas de granja em áreas diferentes da propriedade.

Observação: As galinhas de granja (à esquerda) podem pesar até 4 kg.; galinhas caipiras (à direita) pesam até 2 kg. Depois de algumas pesquisas e observações de campo, o avicultor percebeu que a quantidade de aves crescia de maneira exponencial. A quantidade de galinhas de granja na propriedade dele aumentava de acordo com a lei $f(x) = 2^{t+2} + 17$ e a de galinhas caipiras de acordo com $g(x) = 2^{t+1} + 81$, com t em anos e $t \geq 0$.

a) Qual a quantidade inicial de indivíduos em cada uma das populações de aves nessa propriedade?
b) Depois de quantos anos as populações dessas aves teriam a mesma quantidade de indivíduos?
c) Mostre graficamente essa situação.

Objetivos do problema:

- Relacionar a criação de galinhas da região com o conceito de Função Exponencial
- Entender o comportamento dessa função

- Trabalhar as propriedades de potenciação

Problema 8. Antes de tomar a decisão para fazer uma jogada em uma partida de xadrez, o enxadrista deve analisar várias jogadas possíveis e as variantes dela. Em determinada situação, um enxadrista verificou que a medida de intervalo de tempo t, em minutos, para tomar uma decisão de qual peça mover depende da quantidade n de jogadas que ele consegue antever e que essa medida é dada pela expressão

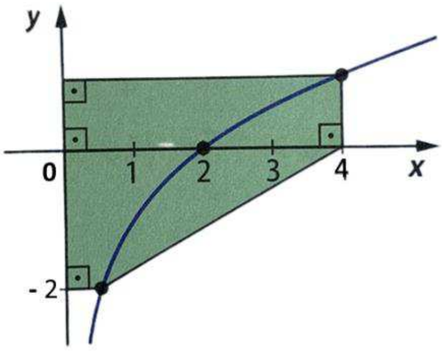
$$T(n) = 2 + \log_2 n$$

O xadrez é um jogo de tabuleiro cuja versão moderna foi inventada na Europa no século X. O jogo é composto de 1 tabuleiro, com 64 casas claras e escuras dispostas de maneira alternada, e 32 peças, 16 para cada enxadrista. O objetivo do jogo é dar xeque-mate no rei do adversário, isto é, colocar o jogo em uma disposição em que não reste nenhum movimento válido para o rei. Se o jogador demorou 7 minutos para decidir o movimento da peça então quantas jogadas ele conseguiu antever?

Objetivos do problema:

- Relacionar o jogo Xadrez com o conceito de Função Logarítmica
- Formalizar o conceito de logaritmo de um número

Problema 9. A curva a seguir representa o gráfico da função $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$. Qual a medida da área da região sombreada da figura?



Objetivos do problema:

- Re(construir) o conceito de área de uma figura plana
- Formalizar o conceito de logaritmo de um número

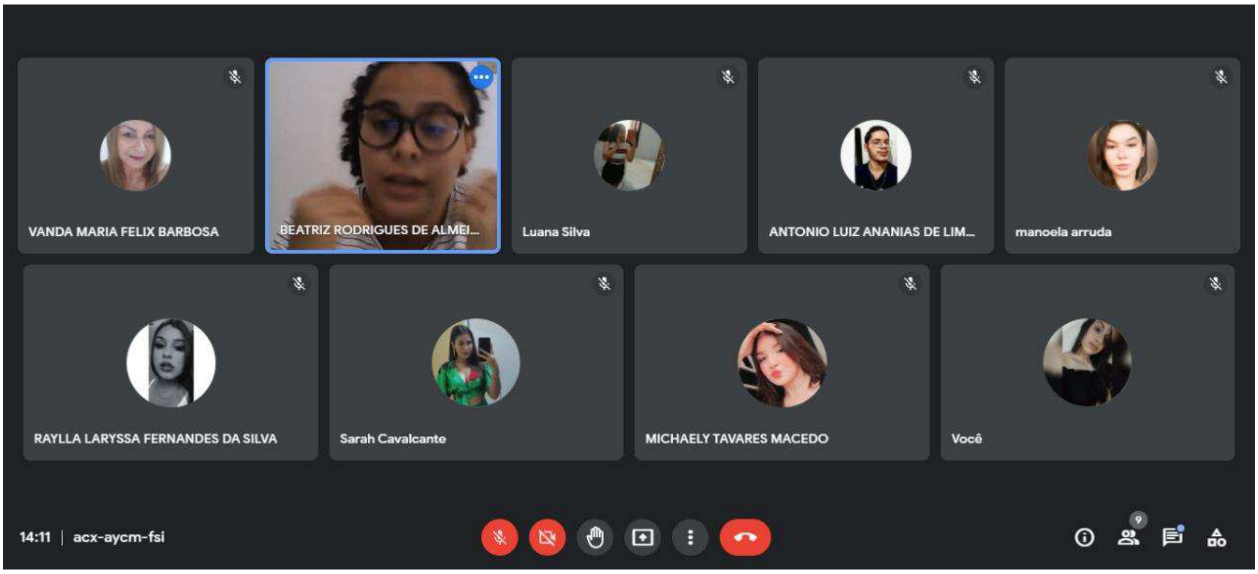
5 ENCONTROS REMOTOS: APLICAÇÃO DOS PROBLEMAS

Devido à pandemia da Covid-19 realizamos os encontros de maneira virtual, ou seja, pelo Google Meet. Esses encontros aconteceram semanalmente com os alunos-participantes da pesquisa. Para descrever os dados coletados, foram gravados os encontros da pesquisa de campo. Vale ressaltar que nos primeiros encontros tivemos problemas com a opção de gravação no Google Meet, mas durante os encontros esse problema foi resolvido. A seguir detalharemos como esses encontros foram realizados com os alunos-participantes da pesquisa.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 26 de agosto de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes oito pessoas, sendo seis alunos-participantes, uma estudante de Licenciatura em Matemática para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como prints, e a professora de Matemática da escola-campo.

Figura 10 – Conversa com os alunos-participantes



Fonte: Dados da pesquisa

Primeiramente a pesquisadora deu as boas-vindas a todos que estavam presentes e agradeceu aos alunos por terem aceitado participar de forma voluntária na pesquisa de campo. Após isso, contou um pouco sobre a sua trajetória acadêmica e a motivação da pesquisa. Falou que quando fez o ENEM[3] não pensava inicialmente em fazer o curso de Licenciatura em Matemática, na verdade, queria fazer Engenharia Mecânica. Contudo, após alguns períodos cursados, a pesquisadora se encantou pela Matemática e em especial pela Educação Matemática. Destacou que quando foi estudar em Monteiro/PB, estava disposta a ir em busca de conhecimentos e novas experiências. Os alunos-participantes disseram que acharam muito interessante a história e que era motivadora visto que temos que seguir uma carreira que gostamos.

Em seguida, foi feita uma exposição sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para que os alunos tivessem um conhecimento inicial da metodologia a qual trabalharíamos como uma dinâmica para sala de aula virtual. Sendo assim, a pesquisadora ressaltou que alguns estudos indicam que, quando os professores ensinam Matemática através da Resolução de Problemas os alunos ficam mais criativos, possuem mais autonomia e deixou claro que nessa metodologia, o problema é o ponto de partida para se fazer matemática. Também chamou atenção para o fato da não preocupação com resoluções certas ou erradas dos problemas propostos, e enfatizou a importância da criatividade e empenho durante a resolução do problema.

Posteriormente, apresentou slides para explicação do Termo de Compromisso da Pesquisa. Nessa apresentação estava explícito os objetivos do primeiro encontro, ou seja, combinar a participação na pesquisa, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos-participantes e da pesquisadora. Nessa apresentação também foi exposto como seria a dinâmica de trabalho que estava estruturada da seguinte maneira:

Os participantes da pesquisa trabalharão em grupos formados no WhatsApp, com o objetivo de compartilhar as resoluções das atividades propostas;

- Os participantes de cada grupo deverão engajar-se na resolução e exploração dos problemas apresentados. Cada grupo será formado por três participantes;
- O trabalho individual de cada participante terá um efeito direto sobre o sucesso do seu grupo;
- A exploração final e a construção dos conceitos do tema serão de responsabilidade da pesquisadora;
- As tarefas extras da pesquisa deverão ser entregues no WhatsApp um dia antes do próximo encontro;

---

[3] Exame Nacional do Ensino Médio

- Após ter verificado no WhatsApp as resoluções das tarefas de cada grupo, a pesquisadora, no início do encontro seguinte, convidará um dos grupos para compartilhar e discutir a sua resolução no Google Meet.

A pesquisadora explicou cada um dos pontos da dinâmica e todos os alunos-participantes concordaram com esses termos. Também ressaltou que as questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento da pesquisa deveriam ser discutidos por todos, alunos-participantes e a pesquisadora, a fim de chegar-se a um comum acordo. Por fim, foi perguntado se alguém possuía alguma dúvida e todos responderam que não.

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

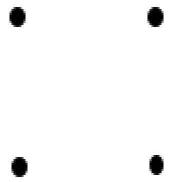
O segundo encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 02 de setembro de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes dez pessoas, incluindo sete alunos-participantes, a professora de Matemática da escola-campo, eu e mais uma residente do Programa de Residência Pedagógica – esta última para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como por exemplo, registrando *prints* da tela.

Iniciei o encontro dando às boas vindas a todos os presentes e discorri sobre a importância da matemática no cotidiano das pessoas. Também chamei a atenção ao fato de que apesar desta está presente em coisas simples do nosso dia a dia, infelizmente, muitos alunos ainda não conseguem compreendê-la e nem ver a sua aplicabilidade. Por fim, parabenizei os alunos-participantes pelo fato deles estarem buscando conhecer e ver a beleza da matemática. Seguindo as etapas do roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), apresentei um desafio pelo Google Meet de forma a motivar os alunos a participarem dos encontros remotos e para que estivessem familiarizados em resolver problemas.

Vale ressaltar que ao mesmo tempo em que estavam acontecendo os encontros remotos da pesquisa de campo, pude participar de uma oficina oferecida pelo Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática – CAEM, da Universidade Estadual Paulista - USP, ministrado pelo Prof. Rodrigo Ruiz Campos, intitulado “Uma Abordagem da Teoria dos Números nos Anos Iniciais”. Nessa oficina, o Prof. Rodrigo mostrava desafios matemáticos que poderiam ser trabalhados com os alunos em sala de aula virtual ou presencial.

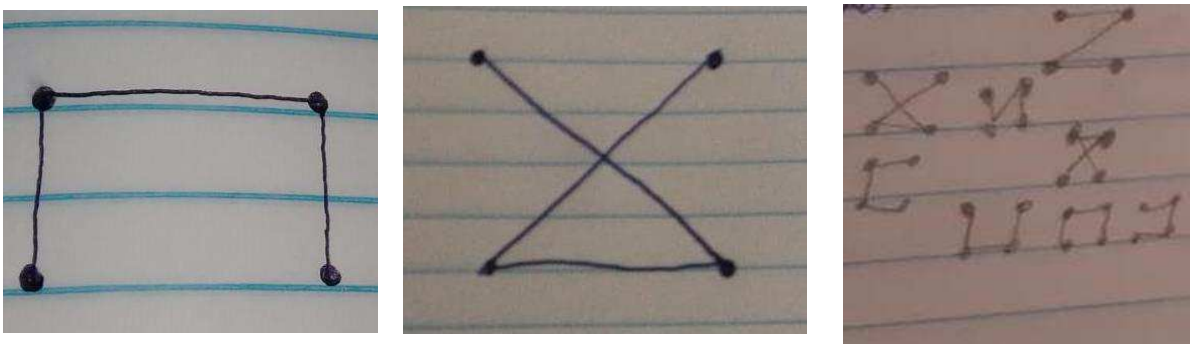
Após apresentar o desafio solicitei aos alunos que fizessem uma leitura individual, para depois realizar-se a leitura em conjunto, onde pudesse ser feita a retirada de dúvidas. Como estávamos impossibilitados de formar grupos como no ensino presencial, criei grupos no WhatsApp com esses alunos para facilitar o diálogo e a postagem da resolução das atividades, assim, ficaram subdivididos em três grupos de três pessoas (G1, G2 e G3). A primeira atividade foi:

Problema 1. Junte esses quatro pontos com três retas sem retirar o lápis do papel



Os alunos-participantes ficaram muito entusiasmados com a resolução deste desafio/problema, pois perceberam que era um problema para pensar matemática de forma dinâmica. No momento em que os alunos discutiam suas possíveis soluções, acompanhei as discussões nos grupos, incentivando e mediando-os durante toda a atividade. Após a resolução do problema, cada grupo postou os resultados nos grupos, onde pude perceber que todos foram bastante criativos em suas respostas, como pode ser conferido abaixo:

Figura 11 – Resoluções do Problema 1

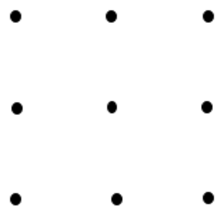


Fonte: Dados da pesquisa

Assim, pude baixar e compartilhar as fotos via Google Meet para que toda turma fosse capaz de visualizar. Esse momento foi uma adaptação da sexta etapa do roteiro (Registro das resoluções na lousa) de Onuchic e Allevato (2011).

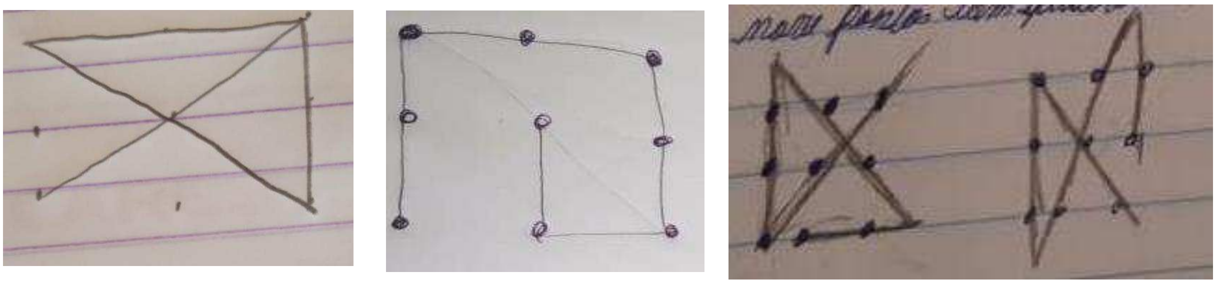
Na Plenária (sétima etapa do roteiro), solicitei aos líderes dos Grupos que explicassem as suas resoluções e em trabalho colaborativo ajudei-os na chegada de um consenso de onde haviam acertado e errado. Assim, buscando fazer com que os alunos fossem estimulados a serem criativos, requeri que eles tentassem resolver um segundo problema – semelhante ao primeiro – com um grau maior de dificuldade:

Problema 2. Junte esses nove pontos com quatro retas sem tirar o lápis do papel.



Seguindo novamente as etapas do roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011) e nesse segundo problema, foi possível perceber que os alunos-participantes sentiram algumas dificuldades para resolvê-lo. Conseguiram desenvolver uma linha de raciocínio para se chegar à solução, mas, devido ao tempo, apenas um grupo acertou a solução do problema.

Figura 12 – Resoluções do Problema 2



Fonte: Dados da pesquisa

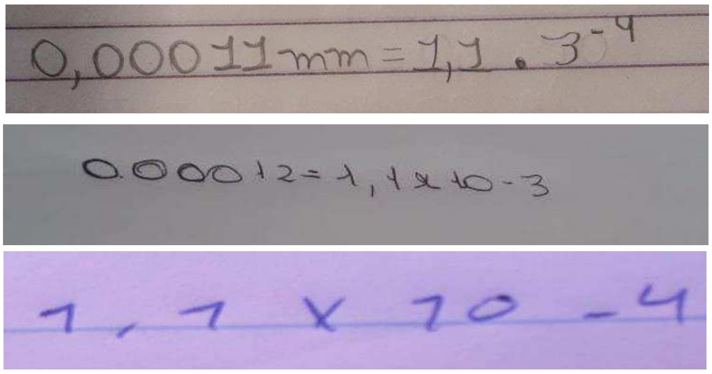
Durante a Plenária percebi que os grupos 1 e 2 não juntaram todos os nove pontos com as quatro retas, ou utilizaram mais retas do que o indicado pelo desafio/problema. Contudo, o grupo 3 apresentou duas resoluções corretas. Nesse sentido, os alunos perceberam que para juntar os nove pontos, seria necessário que as retas ultrapassassem os pontos. Após isto, como já estavam familiarizados em resolver problemas, apresentei pelo Google Meet um terceiro problema com o objetivo de (re)construir os conceitos de potenciação.

Problema 3. A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus influenza. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões. O vírus influenza é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm. Qual o diâmetro interno do vírus influenza, na notação científica? Em mm.

Vale ressaltar que novamente utilizei o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) e solicitei primeiramente que os alunos fizessem uma leitura individual do problema para em seguida fazermos juntos uma leitura em conjunto. Reforcei que os alunos poderiam se comunicar por meio dos grupos do WhatsApp enfatizando que a troca de ideias é essencial para uma aprendizagem mais significativa. A maior parte dos alunos lembravam dos conceitos de potenciação e com isso não sentiram muitas dificuldades na resolução deste problema.

Após os alunos postarem suas resoluções do problema nos grupos do WhatsApp, baixei e apresentei essas resoluções no Google Meet e, novamente, solicitei que um líder de cada grupo explicasse como haviam pensado para resolver o problema.

Figura 13 – Resoluções do Problema 3



Fonte: Dados da pesquisa

Buscando chegar a um consenso, percebi que o Grupo 2 se confundiu com a contagem quando estava movimentando a vírgula. Contudo, todos entenderam o conceito de potenciação e notação científica, por fim, formalizamos este conceito. Vale lembrar que todos esses conceitos já foram descritos no Capítulo 3.

Ao final do encontro, enviei através dos grupos do WhatsApp a primeira tarefa para ser discutida no próximo encontro e pedi que todos os alunos tentassem resolver e postassem suas resoluções até um dia anterior ao próximo encontro, para que pudéssemos iniciar com a discussão e resolução dessa tarefa.

5.3 TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 09 de setembro de 2021, assim como no segundo encontro, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Estavam presentes oito pessoas, cinco alunos-participantes, a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica, esta última para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como registro de *prints*. Alguns alunos estavam com problemas na internet e não conseguiram estar presentes em todo o encontro. Vale lembrar também que alguns alunos não estavam mais participando dos encontros remotos da pesquisa, ou seja, apenas os grupos 1 e 2 estavam participando ativamente dos encontros virtuais, totalizando cinco alunos-participantes.

No primeiro momento questionei se os alunos-participantes haviam resolvido o problema que havia deixado como tarefa no último encontro.

Tarefa 1. Os jornais noticiaram que, durante o mês de outubro de 2011, a população mundial deveria atingir a marca de 7 bilhões de habitantes, o que nos faz refletir sobre a capacidade do planeta de satisfazer nossas necessidades mais básicas, como o acesso à água e aos alimentos. Estima-se que uma pessoa consuma, em média, 150 litros de água por dia. Assim, considerando a marca populacional citada acima, o volume de água, em litros, necessário para abastecer toda a população humana durante um ano, está entre:

a) $10^{13} e\ 10^{14}$

b) $10^{14} e\ 10^{15}$

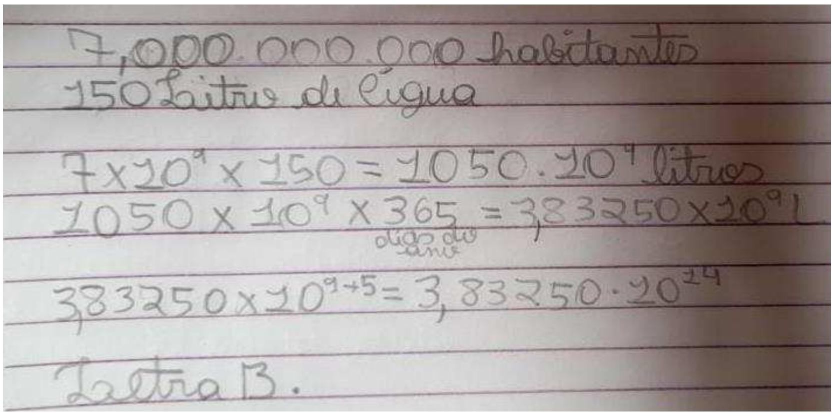
c) $10^{15} e\ 10^{16}$

d) $10^{16} e\ 10^{17}$

e) $10^{17} e\ 10^{18}$

Como tínhamos pouco tempo para a realização do encontro virtual, escolhi apenas um grupo para apresentar a sua resolução e explicar como chegaram à solução da tarefa proposta. Então, seguindo o roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), baixei a resolução do grupo do WhatsApp e compartilhei pelo Google Meet, utilizando o *Whiteboard* (lousa digital), para que todos pudessem acompanhar o desenrolar do pensamento utilizado para resolver a tarefa. Houve uma leitura em conjunto com os alunos-participantes e, em seguida, em uma plenária, o líder do Grupo 1 explicou a sua resolução do problema.

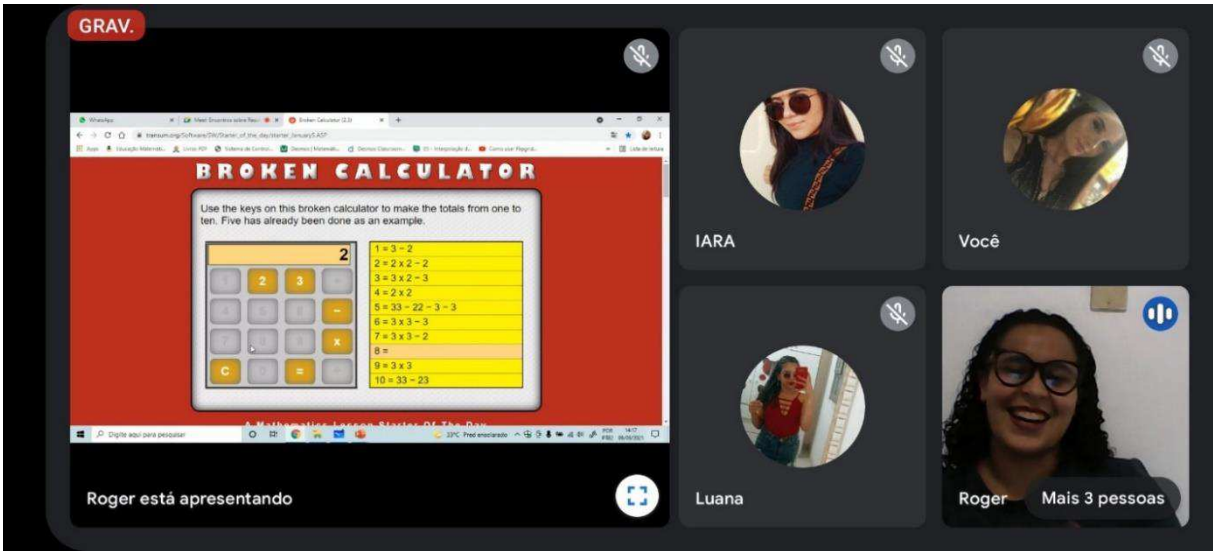
Figura 14 – Resolução da Tarefa 1



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos-participantes do Grupo 1 haviam acertado a resolução do problema, e, por isso, não houve necessidade de realizar a 8º etapa do roteiro (Busca do Consenso). Nesse sentido, buscando uma melhor interação, apresentei o Broken Calculator, que é uma calculadora dinâmica, a qual foi apresentada na Oficina do CAEM. Nessa calculadora é apresentado ao professor algumas possibilidades de teclas que irão funcionar para que possa realizar as operações e chegar aos resultados de 1 a 10. No nosso caso, foram as seguintes:

Figura 15 – Broken Calculator



Fonte: Dados da pesquisa

Escolhi as seguintes teclas: $2, 3, -, x, C, =$ para que os alunos pudessem realizar as operações de subtração e multiplicação para chegar aos resultados de 1 a 10. Os alunos participaram ativamente na resolução dessa atividade e afirmaram ter adorado o momento em que estavam raciocinando, mas de maneira descontraída.

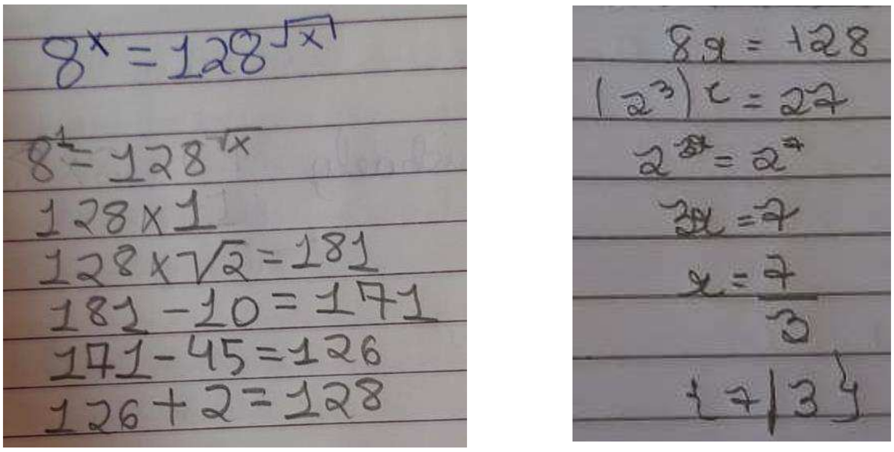
Após isso, seguindo as etapas do roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), apresentei o problema abaixo referente ao conteúdo de Radiciação, com o intuito (re)construir os conceitos relacionados a esse conteúdo:

Problema 4. Encontre o valor de x na equação

$$8^x = 128^{\sqrt{x}}$$

Foi solicitado que os alunos realizassem a leitura individual e, em seguida, realizamos a leitura em conjunto buscando sanar as dificuldades. Reforcei que os alunos deveriam tentar resolver o problema e postar suas resoluções em seus respectivos grupos do WhatsApp. Após alguns minutos, os alunos chegaram as seguintes resoluções:

Figura 16 – Resoluções do Problema 4



Fonte: Dados da pesquisa

Após os alunos postarem nos grupos do WhatsApp suas respectivas resoluções, compartilhei pelo Google Meet e solicitei que um líder de cada grupo explicasse como chegaram à solução do problema. Mas, devido ao tempo, os alunos não conseguiram chegar à solução correta do problema. Então, em conjunto com os alunos, busquei chegar a um consenso, onde apresentei a seguinte resolução para o problema:

Resolução:

$$8^x = 128^{\sqrt{x}}$$

Considerando as propriedades de potenciação, temos que:

$$(2^3)^x = (2^7)^{\sqrt{x}}$$

Utilizando a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, chegamos a

$$2^{3x} = 2^{7\sqrt{x}}$$

Como as bases são iguais,

$$3x = 7\sqrt{x}$$

Mas, para retirar a raiz quadrada,

$$(3x)^2 = \left(7\sqrt{x}\right)^2$$

Como $\sqrt[n]{x^n} = x$, obtemos:

$$9x^2 = 49x$$

Isto é, uma Equação do 2º grau

$$9x^2 - 49x = 0$$

Resolvendo por Bhaskara, obtemos as seguintes raízes.

$$\Delta = 49^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0$$

$$\Delta = 2401$$

$$x = \frac{-(-49) \pm \sqrt{2401}}{2 \cdot 9} = \frac{49 \pm 49}{18}$$

$$x' = \frac{98}{18} = \frac{49}{9} \; e \; x'' = \frac{0}{18} = 0$$

Portanto, esses são os valores correspondentes a x.

Apesar de ser um problema aparentemente simples de ser resolvido, é necessário ter o conhecimento das propriedades de Potenciação e Radiciação. Os alunos relataram que acharam um pouco difícil e segundo uma aluna "Quando chegou na fórmula de Bhaskara ficou melhor [...] acho que porque a gente já conhecia".

Para finalizar o encontro, apresentei mais um problema e pedi para que os alunos fizessem a leitura individual.

Problema 5. Simplificar

$$\frac{14^{20}}{28^{10}}$$

Após fazermos a leitura em conjunto, a solicitei que os alunos discutissem nos grupos do WhatsApp, tentando chegar a uma resposta para o problema, mas devido ao tempo, os alunos não conseguiram finalizar a solução do problema. Então realizei a busca do consenso, que é uma das etapas do roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011).

Resolução:

$$\frac{14^{20}}{28^{10}} = \frac{14^{20}}{2 \cdot 14^{10}}$$

Utilizando a propriedade $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, temos

$$\frac{14^{20}}{2^{10} \cdot 14^{10}}$$

Agora, utilizando a propriedade $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{14^{10}}{2^{10}}$$

Mas, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{14}{2}\right)^{10} = 7^{10}$$

Com esse problema pudemos fazer com que os alunos (re) apreendessem os conceitos de potenciação e radiciação. Ao final do encontro apresentei pelo Google Meet os slides contendo a formalização do conteúdo e a tarefa para ser discutida no próximo encontro.

5.4 QUARTO ENCONTRO

O quarto encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 24 de setembro de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes quatro pessoas, sendo uma aluna-participante, a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica, para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como *prints*. Vale ressaltar que os encontros foram marcados para acontecerem todas as quintas-feiras, contudo, obtive um imprevisto e precisei realizar a pesquisa em outro dia da semana, o que ocasionou a ausência de muitos alunos, visto que já possuíam outros compromissos.

Para iniciar o encontro, realizei a correção da tarefa deixada no último encontro. Contudo, a aluna que estava participando do encontro não conseguiu responder a tarefa, pois estava com muitas atividades da escola. Com isso, a pesquisadora apresentou no *Jamboard* (lousa digital) a seguinte resolução para a tarefa:

Tarefa 2. A área A (em m^2) da superfície corporal de um indivíduo pode ser calculada em função da sua massa p (em kg) por meio da fórmula $A = 0{,}11\sqrt[3]{p^2}$. O valor resultante é útil para determinar a quantidade de calor perdida através do suor. Assim, uma pessoa com massa igual a 64 kg possui a área em m^2 da superfície corporal aproximadamente igual a:

a) 1,76

b) 1,56

c) 1,86

d) 1,66

Resolução:

Sabendo que a massa de um indivíduo é 64kg, temos que

$$A = 0{,}11 \cdot \sqrt[3]{64^2}$$

$$A = 0{,}11 \cdot \sqrt[3]{(2^6)^2}$$

$$A = 0{,}11 \cdot \sqrt[3]{2^{12}}$$

$$A = 0{,}11 \cdot 2^4$$

$$A = 0{,}11 \cdot 16$$

$$A = 1{,}76m^2$$

Logo, a medida da área da superfície corpora deste indivíduo é de $1{,}76m^2$.

Tendo em vista insucesso com as tarefas extras deixadas para serem resolvidas pelos alunos e entregues um dia anterior ao próximo encontro, resolvi não utilizar mais essa etapa do terceiro roteiro e segui o segundo roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011).

Para dar início ao conteúdo de Função Exponencial, apresentei o desafio em uma ferramenta digital para trabalhar com a Torre de Hanói. Em seguida, expliquei como funcionava e quais as regras da Torre de Hanói. Então, para dar início, coloquei apenas três discos, de modo que utilizasse apenas sete movimentos. Sendo assim, a aluna-participante ia falando as cores dos discos e para qual pino iria movê-lo enquanto eu realizava todos os movimentos como mostra na figura abaixo.

Figura 17 – Torre de Hanói

Fonte: Dados da pesquisa

Pude então perceber que a aluna-participante gostou muito e interagiu bastante. Dando continuidade, sugeri o aumento de discos e perguntei a aluna qual seria a quantidade mínima de movimentos que ela achava que fosse necessário para movimentar quarto discos, ela disse que achava que seria uns nove momentos. Com isso, foi realizado o mesmo procedimento para quarto discos, ou seja, a aluna iria sugerindo para onde movimentar os discos e a enquanto eu realizava essas movimentações. Percebendo a dificuldade que a aluna estava em realizar as movimentações dos discos, auxiliei-a, fazendo-a repensar sobre onde iria colocar os discos de maneira que realizasse apenas quinze movimentos. Após o auxílio, a aluna conseguiu realizar o problema com êxito.

Após isso, mostrei que para realizar a movimentação de cinco discos, seria necessário trinta e um movimentos mínimos e fiz uma recapitulação dos movimentos mínimos de três e quarto discos, de maneira que a aluna percebesse que o número de momentos crescia muito rápido e exponencialmente.

Seguindo as etapas do roteiro de Onuchic e Allevato (2011) apresentei o seguinte problema para compreender a Função Exponencial:

Problema 6. Considere a seguinte situação.

- Fase 0: José contou um segredo para 4 pessoas.
- Fase 1: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 2: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 3: ...
- ...

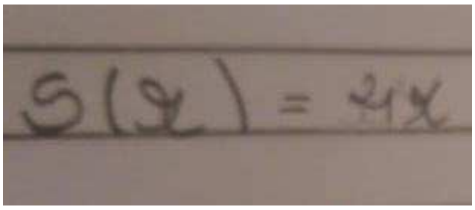
Considerando-se que as fases seguintes repetem o ocorrido na fase imediatamente anterior, se fizermos x representar o número associado a casa uma das fases, $S(x)$ representar o número de pessoas que ouviu o segredo na fase x e $\mathbb{N}$ representar o conjunto dos números naturais, então a função $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que modelará essa situação poderá ser representada por:

a) $S(x) = 4x$
b) $S(x) = x^4$
c) $S(x) = 4x + 1$
d) $S(x) = 4^{x+1}$
e) $S(x) = 4^x$

Após apresentar o problema pelo Google Meet, utilizando o Whiteboard (lousa digital), solicitei que a aluna realizasse uma leitura individual do problema, em seguida fizemos uma leitura em conjunto para que pudesse ser feita a retirada de dúvidas. Disponibilizei um tempo para que a aluna pudesse pensar na resolução do problema e que a postasse no grupo do WhatsApp. Enquanto ela estava resolvendo, a pesquisadora observava e a incentivava.

Dessa forma, a aluna apresentou a seguinte resolução:

Figura – Resolução do Problema 6



Fonte: Dados da pesquisa

Após a aluna postar a sua resolução no grupo do WhatsApp, apresentei pelo Google Meet a resolução. Foi solicitado, então, que ela explicasse a sua linha de raciocínio para se chegar à solução. Contudo, devido ao pouco tempo disponibilizado para a resolução do problema a aluna não conseguiu chegar à solução correta, ou seja, confundiu a Função Exponencial com a Função Polinomial do 1º grau. Sabemos que na Função Polinomial do 1º grau o gráfico dessa função que cresce linearmente, e não tão rápido como a Função Exponencial, ou seja, não se enquadra na situação, visto que no Problema 6 é descrito que o segredo se espalha muito rapidamente.

Sendo assim, a pesquisadora tentando chegar a um consenso, apresentou pelo Google Meet, utilizando o Whiteboard (lousa digital) a seguinte resolução para o problema:

Resolução:

Podemos observar a regularidade do número de pessoas $S(x)$ em cada fase para concluir qual é a lei da função para uma fase x.

Fase 0: $S(0) = 4 = 4^1 = 4^{0+1}$

Fase 1: $S(1) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 4^{1+1}$

$\vdots$

Fase $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{S(x) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^{x+1}}$

Após isso, fiz a formalização do conteúdo pelo Google Meet e expliquei o que é uma Função Exponencial, como surgiu, algumas características, e as ideias iniciais do comportamento dessa função quando traçamos o seu gráfico. Vale lembrar que essa formalização já foi apresentada no Capítulo 3.

5.5 QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 30 de setembro de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes sete pessoas, sendo quatro alunos-participantes, e a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como *prints*.

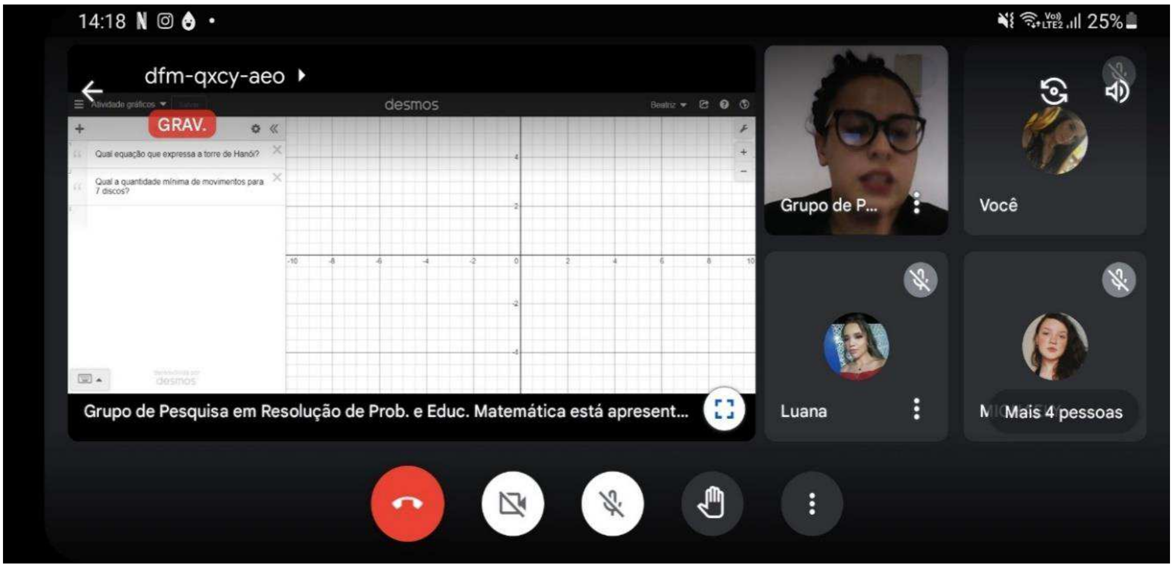
Como muitos alunos não haviam participado do encontro anterior, resolvi iniciar retomando o assunto da Torre de Hanói, visto que um dos problemas a ser proposto nesse encontro era relacionado a isso. Com isso, apresentei novamente a Torre de Hanói e recapitulei como funcionava as regras. Alguns alunos alegaram já conhecê-lo.

Com o intuito de apresentar um desafio para os alunos-participantes, seguindo as etapas do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), comuniquei aos alunos que nesse encontro iríamos utilizar a Plataforma *Desmos* para entender um pouco mais sobre a Função Exponencial. O link de acesso à atividade foi disponibilizado pelo chat do Google Meet. Contudo, como a internet dos alunos estava oscilando muito, a realização da atividade não foi muito bem sucedida. Buscando resolver a situação, apresentei a tela para que todos pudessem ter acesso a atividade. A seguir, apresentei os problemas propostos no *Desmos:*

Qual equação que expressa a Torre de Hanói?

Qual a quantidade mínima de movimentos para 7 discos?

Figura 19 – Problemas no Desmos sobre o Gráfico da Função Exponencial



Fonte: Dados da pesquisa

De início expliquei como funcionava essa plataforma e como as respostas poderiam ser introduzidas. Em seguida, solicitei que os alunos fizessem uma leitura individual dos desafios/problemas e posteriormente fizemos a leitura em conjunto para a retirada de dúvidas. Foi disponibilizado um tempo para que os alunos, em seus grupos, discutissem e resolvessem o problema, enquanto isso, eu observava e incentivava-os a construírem ideias para resolver o desafio/problema. Como não possuíamos muito tempo para a realização do encontro, os alunos sentiram algumas dificuldades para chegarem às soluções, ou seja, em como chegar na generalização. Sem essa generalização, não seria possível responder a quantidade mínima de movimentos para sete discos.

Sabendo-se disso, discuti com os alunos sobre as possíveis soluções para o problema, encaminhando-os a chegarem a uma resposta. Após isso, os alunos perceberam que o maior disco se movimentava apenas uma vez, enquanto que os outros discos se movimentavam mais vezes. A partir disso, chegou-se a seguinte generalização:

$$f(x) = 2^x - 1$$

Após chegar na solução, os alunos puderam facilmente descobrir qual seria o número mínimo de movimentos para sete discos. Assim, coloquei no controle deslizante o número sete e o *Desmos* plotou o gráfico, interceptando no número 127. Mas, esse resultado também poderia ser calculado manualmente.

$$f(x) = 2^x - 1$$
$$f(7) = 2^7 - 1$$
$$f(7) = 128 - 1$$
$$f(7) = 127$$

Portanto, para mover sete discos, são necessários 127 movimentos mínimos.

Em seguida, a pesquisadora apresentou pelo Google Meet, utilizando o *Whiteboard*, um novo problema:

Problema 7. Um avicultor cria galinhas caipiras e galinhas de granja em áreas diferentes da propriedade.

Observação: As galinhas de granja (à esquerda) podem pesar até 4 kg.; galinhas caipiras (à direita) pesam até 2 kg. Depois de algumas pesquisas e observações de campo, o avicultor percebeu que a quantidade de aves crescia de maneira exponencial. A quantidade de galinhas de granja na propriedade dele aumentava de acordo com a lei $f(x) = 2^{t+2} + 17$ e a de galinhas caipiras de acordo com $g(x) = 2^{t+1} + 81$, com t em anos e $t \geq 0$.

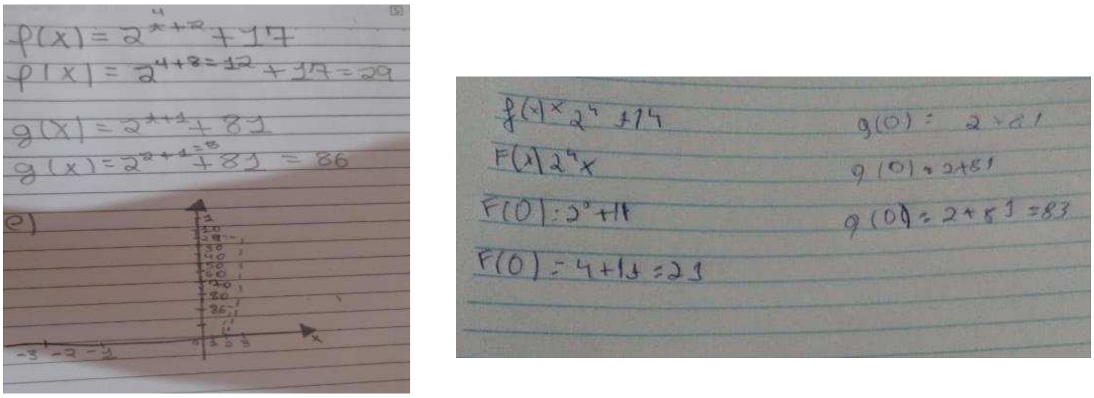
a) Qual a quantidade inicial de indivíduos em cada uma das populações de aves nessa propriedade?

b) Depois de quantos anos as populações dessas aves teriam a mesma quantidade de indivíduos?

c) Mostre graficamente essa situação.

Seguindo as etapas do roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011), solicitei que os alunos realizassem a leitura individual do problema e em seguida uma aluna fez a leitura em conjunto pelo Google Meet. Após isso, os alunos discutiram nos grupos tentando chegar a uma resolução para o problema. Reforcei que os alunos-participantes deveriam tirar fotos de suas resoluções e postar nos grupos do WhatsApp. Durante as discussões nos grupos, pude observar e incentivavar os alunos. Após algum tempo, os alunos apresentaram as seguintes resoluções:

Figura 20 – Resoluções do Problema 7



Fonte: Dados da pesquisa

Então, compartilhei as resoluções pelo Google Meet, utilizando o *Whiteboard* para que um líder de cada grupo explicasse suas respectivas resoluções. Devido ao tempo, o Grupo 1, confundiu-se um pouco na resolução e nos conceitos de potenciação. Já o grupo 2, apresentou a resolução correta para a letra do problema, mas devido ao tempo não conseguiram terminar de resolver.

Levando em consideração que o Grupo 1 não conseguiu chegar à solução correta do problema e o Grupo 2 não terminou de resolver, discuti juntamente com os alunos sobre como poderia ser resolvido o problema chegando a seguinte resolução:

Resolução:

a) Para calcular a quantidade inicial de aves de cada uma das populações, consideraremos $t = 0$. Assim,

$$f(0) = 2^{0+2} + 17 = 4 + 17 = 21$$

$$g(0) = 2^{0+1} + 81 = 2 + 81 = 83$$

Logo, haviam 21 galinhas caipiras e 83 galinhas de granja.

b) As populações teriam a mesma quantidade de aves quando $f(t) = g(t)$

$$f(t) = g(t)$$

$$2^{t+2} + 17 = 2^{t+1} + 81$$

$$2^t \cdot 2^2 + 17 = 2^t \cdot 2^1 + 81$$

$$4 \cdot 2^t + 17 = 2 \cdot 2^t + 81$$

$$4 \cdot 2^t - 2 \cdot 2^t = 81 - 17$$
$$2 \cdot 2^t = 64$$
$$2^t = \frac{64}{2}$$
$$2^t = 32$$
$$2^t = 2^5$$
$$t = 5$$

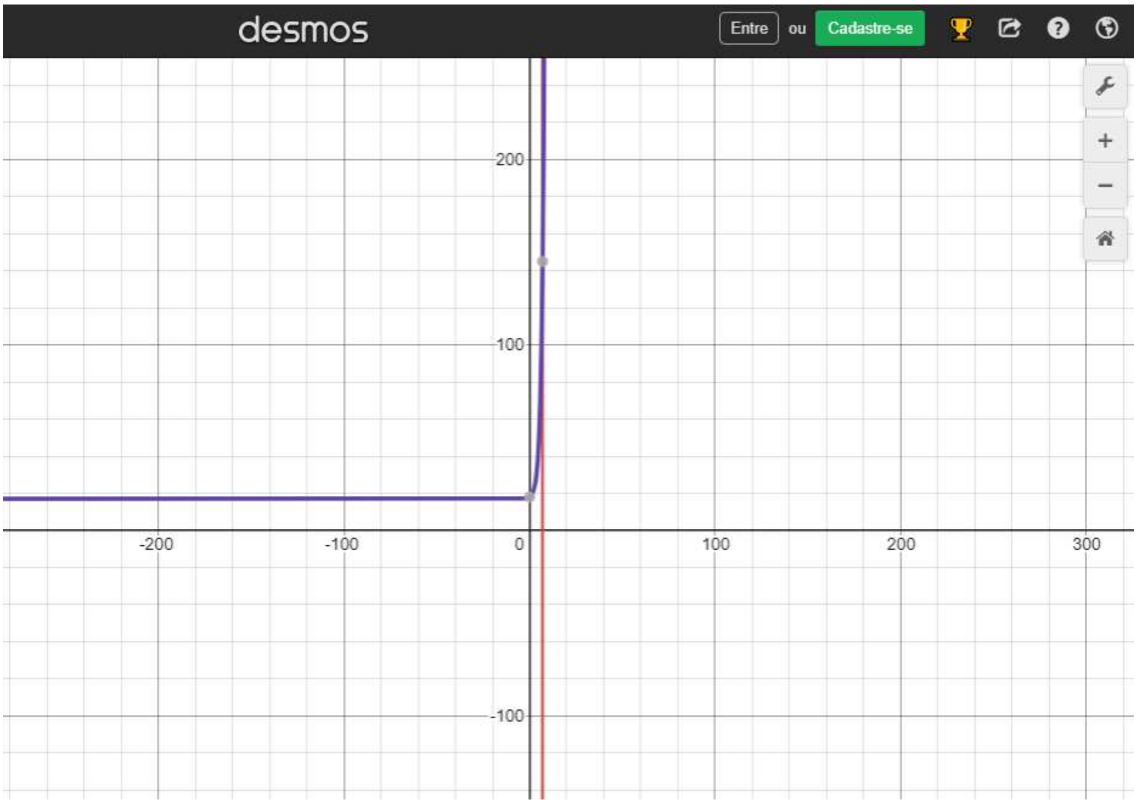
Logo, as populações teriam a mesma quantidade de aves depois de 5 anos.

c) Podemos calcular o valor de $f(5)$ ou de $g(5)$ que são iguais e marcam a interseção dos gráficos no plano cartesiano.

$$f(5) = 2^{5+2} + 17$$
$$f(5) = 2^7 + 17$$
$$f(5) = 128 + 17$$
$$f(5) = 145$$

Utilizando a Plataforma *Desmos*, também chegamos a mesma solução, mas de forma mais prática e dinâmica, sem ter que realizar a construção do gráfico manualmente.

Figura 21 – Gráfico da Função



Fonte: Elaborado pela autora

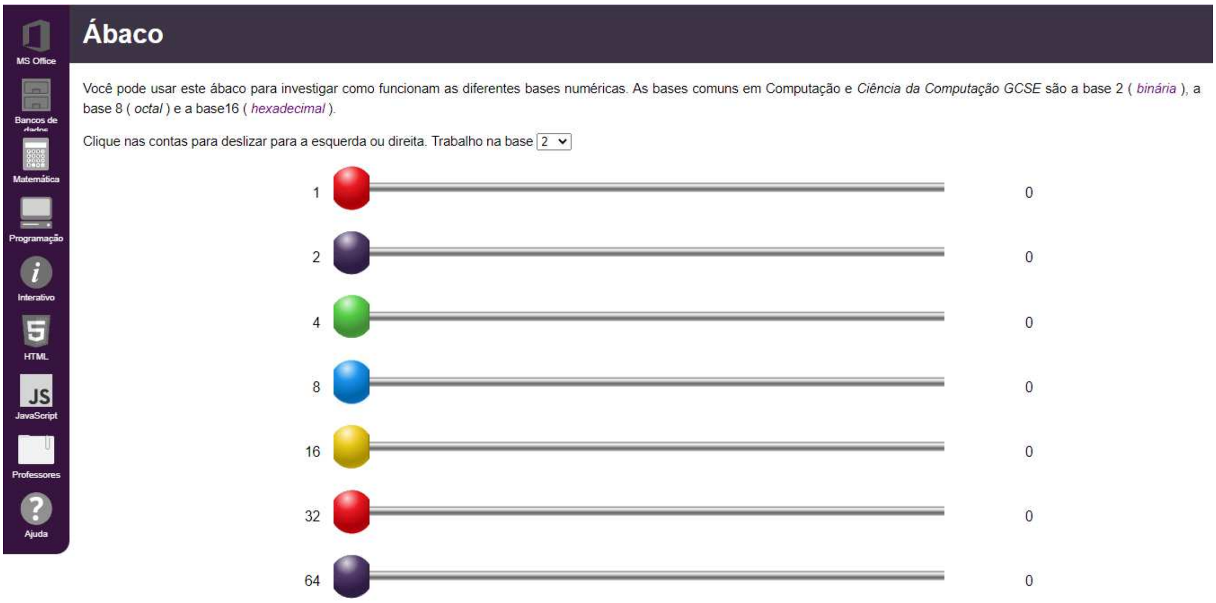
Como o tempo do encontro estava acabando, disponibilizei nos grupos do WhatsApp a formalização do conteúdo Gráfico da Função Exponencial. Nesse slide continha informações de como construir o gráfico dessa função, algumas considerações e a análise dos gráficos dessa função, ou seja, quando é crescente ou decrescente. Todas essas informações já foram descritas no Capítulo 3.

5.6 SEXTO ENCONTRO

O sexto encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 07 de outubro de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes sete pessoas, sendo cinco alunos-participantes, a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma estudante de Licenciatura em Matemática para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como *prints*.

No início do encontro propus um desafio/problema (Ábaco) com o intuito de estimular os alunos a serem bons “resolvedores” de problemas. Comumente, utilizamos a base 10 no nosso sistema de numeração, contudo, esse Ábaco pode alterar a base e a tecnologia ajuda na visualização.

Figura 22 – Ábaco



Fonte: https://www.advanced-ict.info/mathematics/abacus.html

O intuito desse Ábaco de base 2 é fazer somas de modo que utilizem apenas os números 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64. Com isso, expliquei como funcionava e, a partir daí os alunos iriam sugerindo números para que pudéssemos realizar as somas. Os alunos ficaram muito entusiasmados com o número de acertos, eles conversavam entre si, sugerindo as possibilidades para chegar ao resultado.

Após isso, a pesquisadora mostrou a relação da potenciação com a base 2, ou seja, explicou que os números que estavam no Ábaco referem-se as seguintes potencias:

$$2^0 = 1$$
$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$\vdots$$
$$2^6 = 64$$

Fazendo relação com o Ábaco, expliquei que na Função Logarítmica, nem todos os números podem ser escritos na base 10, e para isso é necessário que haja uma mudança de base. Em seguida, buscando construir o conceito de Função Logarítmica, apresentei o seguinte problema:

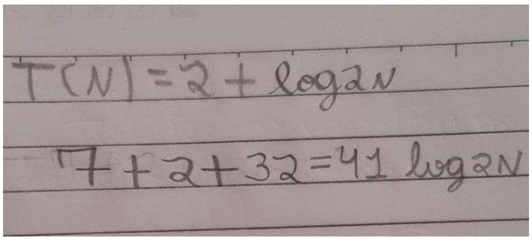
Problema 8. Antes de tomar a decisão para fazer uma jogada em uma partida de xadrez, o enxadrista deve analisar várias jogadas possíveis e as variantes dela. Em determinada situação, um enxadrista verificou que a medida de intervalo de tempo t, em minutos, para tomar uma decisão de qual peça mover depende da quantidade n de jogadas que ele consegue antever e que essa medida é dada pela expressão

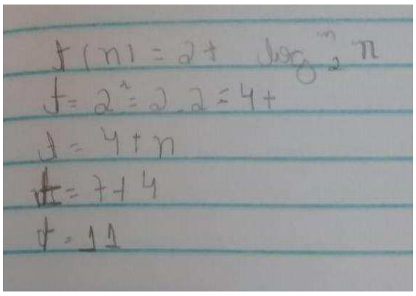
$$T(n) = 2 + \log_2 n$$

O xadrez é um jogo de tabuleiro cuja versão moderna foi inventada na Europa no século X. O jogo é composto de 1 tabuleiro, com 64 casas claras e escuras dispostas de maneira alternada, e 32 peças, 16 para cada enxadrista. O objetivo do jogo é dar xeque-mate no rei do adversário, isto é, colocar o jogo em uma disposição em que não reste nenhum movimento válido para o rei. Se o jogador demorou 7 minutos para decidir o movimento da peça então quantas jogadas ele conseguiu antever?

Como estava utilizando a metodologia de Resolução de Problemas, solicitei que os alunos realizassem uma leitura individual do problema e em seguida, uma aluna fez a leitura em conjunto. Após a retirada de todas as dúvidas, sugeri que os alunos discutissem em seus respectivos grupos do WhatsApp sobre como resolver o problema. Enquanto havia uma discussão frutífera sobre o problema proposto, eu os incentivava a chegarem a uma solução. Em seguida, os alunos-participantes enviaram suas resoluções nos grupos do WhatsApp, e eu os compartilhava pelo Google Meet, utilizando o *Whiteboard*.

Figura 22 – Resoluções do Problema 8





Fonte: Dados da pesquisa

Um líder de cada grupo explicava suas respectivas respostas. Como os alunos ainda estavam muito habituados aos conceitos e definições serem apresentados antes do problema e devido ao tempo, eles não conseguiram chegar a uma solução correta para o problema. Sendo assim, busquei chegar a um consenso e apresentei a seguinte resolução:

Resolução:

Considerando $T(n) = 7$, temos que

$$T(n) = 2 + \log_2 n$$
$$7 = 2 + \log_2 n$$
$$\log_2 n = 7 - 2$$
$$\log_2 n = 5$$

Pela definição, temos que

$$n = 2^5 = 32$$

Assim, o enxadrista conseguiu antever 32 jogadas.

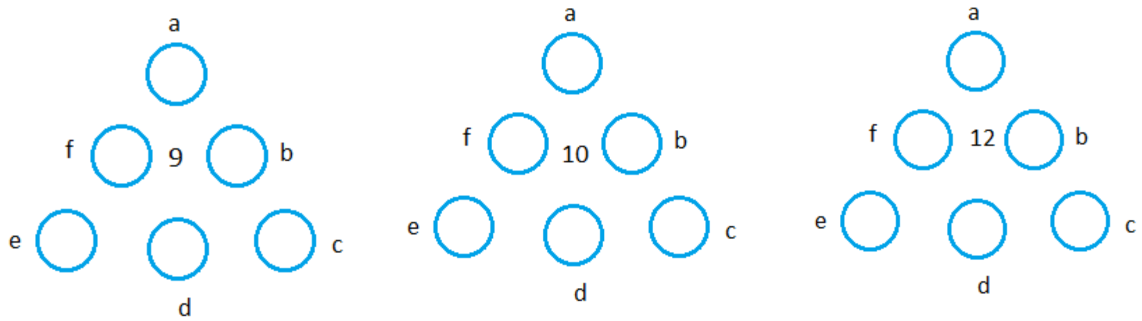
Por fim, explorei a formalização do conteúdo pelo Google Meet, apresentando aplicações da Função Logarítmica, a história do Logaritmo, a definição e suas consequências, as propriedades e a mudança de base. Vale lembrar que tudo isso já foi descrito no Capítulo 3.

5.7 SÉTIMO ENCONTRO

O sétimo encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 14 de outubro de 2021, em uma sala de aula virtual do Google Meet. Nesse encontro estavam presentes sete pessoas, cinco alunos-participantes, a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma residente do Programa de Residente Pedagógica para ajudar na coleta de dados da pesquisa, como *prints*.

Para dar início ao encontro, seguindo o roteiro de Onuchic e Allevato (2011) para ensinar Matemática em sala aula, apresentei pelo Google Meet, fazendo uso do *Whiteboard*, o desafio/problema dos Triângulos Mágicos, com o intuito de estimular o raciocínio lógico dos alunos. Esse problema consiste em organizar números de 1 a 6, em que a soma dos três lados resulte o número que está no interior do triângulo. O problema pode ser conferido abaixo:

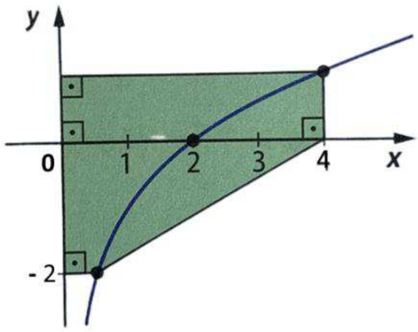
Problema 9. Organize os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nos triângulos seguintes, de modo que soma dos três lados dê o resultado indicado em seu interior.



Primeiramente, solicitei que os alunos realizassem a leitura individual do problema para que em seguida, pudéssemos fazer a leitura em conjunto. Como eu estava apresentando a tela, os alunos iam dizendo quais números colocar nos círculos representados pelas letras, por exemplo, “número 5 na letra a”. Os alunos conversavam entre si pelo Google Meet tentando buscar uma solução cabível ao desafio/problema. Eles ficaram muito entusiasmados e todos foram muito participativos. Surgiram apenas algumas dificuldades para realizar a soma 12, porém nos demais triângulos os alunos conseguiram realizar sem muitas dificuldades.

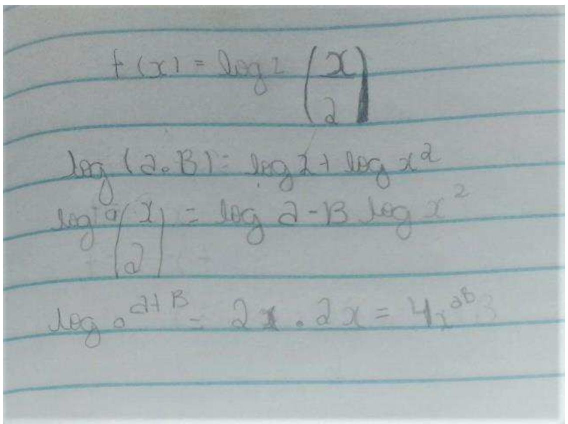
Como estes já estavam familiarizados com a resolução de problemas, introduzi o conteúdo Gráfico da Função Logarítmica e propus pelo Google Meet, um problema aos alunos. Nesse problema seria necessário entender os conceitos de Função Logarítmica, estudados no encontro anterior, e também os conceitos de área de uma figura plana, como o trapézio e o retângulo.

Problema 10. A curva a seguir representa o gráfico da função $f(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2}\right)$. Qual a medida da área da região sombreada da figura?



Solicitei que os alunos realizassem a leitura individual do problema e em seguida, a leitura em conjunto para a retirada de dúvidas. Após isso, foi disponibilizado um tempo para que os alunos pudessem tentar resolver o problema e enviarem suas respectivas soluções para os grupos do WhatsApp. Contudo, apenas o Grupo 1 apresentou uma solução, o Grupo 2 não conseguiu resolver o problema.

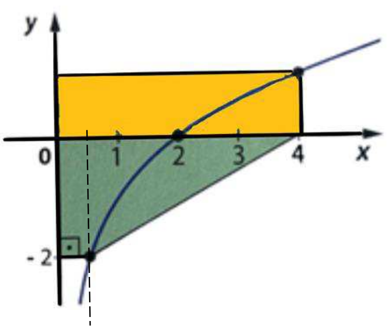
Figura 23 – Resolução do Problema 10



Fonte: Dados da pesquisa

Após os alunos do Grupo 1 explicarem sua resolução, estes não construíram de maneira significativa os conceitos de área de uma figura plana, como o retângulo e o trapézio, também não souberam utilizar de maneira efetiva a definição de Logaritmo. Buscando chegar a um consenso, desenvolvi juntamente com os alunos a seguinte resolução:

Resolução:



Para resolver esse problema, temos vários caminhos, um deles seria dividir a figura em duas áreas conhecidas, como a do retângulo e do trapézio.

Como queremos encontrar a medida da área do retângulo que está na cor amarela, precisamos da medida da largura. Para isso, devemos assumir $x = 4$.

Se $x = 4$, temos que

$$f(x) = y = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(4) = \log_2\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$f(4) = \log_2 2 = 1$$

Também, podemos calcular utilizando a definição de Logaritmo.

$$\log_2 2 = 1$$

$$2^y = 2$$

$$2^y = 2^1$$

$$y = 1$$

Então, a medida da largura do retângulo é 1u.

Agora, para encontrar a área do trapézio, precisamos inicialmente encontrar a medida da base menor deste trapézio, então devemos assumir $f(x) = -2$.

Se $f(x) = -2$, temos que

$$f(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-2 = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando a propriedade comutativa, temos

$$\log_2\left(\frac{x}{2}\right) = -2$$

Utilizando a definição de Logaritmo $\log_a b = x \ \rightarrow b^x = a$, podemos encontrar a medida da base menor do trapézio.

Ou seja, $2^{-2} = \frac{x}{2}$

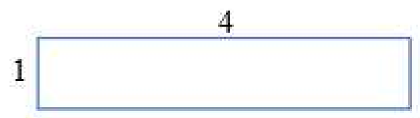
Agora, $\frac{1}{2^2} \cdot 2 = x$

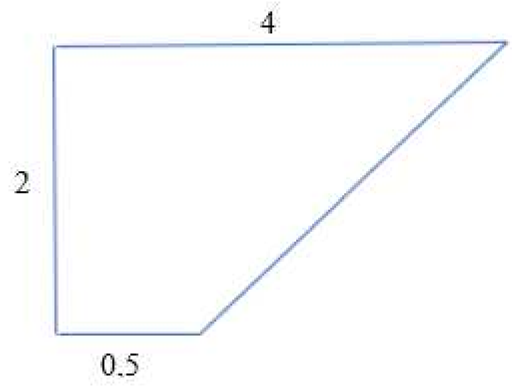
Logo, $\frac{1}{4} \cdot 2 = x$

Simplificando, temos $\frac{1}{2} = x$

Então, a medida da base menor do trapézio é $\frac{1}{2}\ u$ ou $0{,}5u$.

Após obter os dados e sabendo que, pelo conhecimento prévio, a área de um retângulo pode ser calculada pelo comprimento vezes largura e a área do trapézio é calculada pela soma das bases (base maior mais base menor) multiplicado pela altura e dividido por dois. Nesse sentido, a Função Logarítmica nos forneceu esses dois dados importantes, $y = 1$ que é a largura do comprimento do retângulo e a outra $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ que é a medida da base menor do trapézio.





Para calcular a área do retângulo, temos:

$$A_r = b \cdot h$$

$$A_r = 4 \cdot 1$$

$$A_r = 4u^2$$

Para calcular a área do trapézio, temos:

$$A_t = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_t = \frac{(4 + 0{,}5) \cdot 2}{2}$$

$$A_t = 4{,}5u^2$$

Portanto, a medida da área da região sombreada da figura que o problema pede é:

$$A_T = 4u^2 + 4{,}5u^2 = 8{,}5u^2$$

Onuchic e Allevato (2011) dizem que os problemas são propostos aos alunos antes de ser apresentado, de maneira formal, o conteúdo matemático apropriado para resolução. Sendo assim, na metodologia de Resolução de Problemas, o problema é o ponto de partida para a formalização do conteúdo que o professor planejou, seguindo o caminho oposto ao que é feito de costume, que é começar diretamente com o conteúdo e somente após formalizá-lo propor problemas aos alunos.

Assim, finalizando a aula, apresentei os slides com a formalização do conteúdo planejado, explicando como construir o gráfico da Função Logarítmica, algumas características do gráfico dessa função, e quando o Gráfico da Função Logarítmica é crescente e decrescente.

5.8 OITAVO ENCONTRO

O último encontro da pesquisa de campo aconteceu no dia 21 de outubro de 2021. Estavam presentes cinco alunos-participantes, a professora de Matemática da escola-campo, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica – que estava presente em todos os encontros da pesquisa – auxiliando na coleta de dados.

Nesse último encontro, combinei com os alunos para fazer uma pequena confraternização na escola, respeitando todos os protocolos de segurança, ou seja, utilizando máscara, álcool em gel e distanciamento social. O objetivo dessa comemoração foi conhecer pessoalmente todos os alunos-participantes da pesquisa e agradecê-los pela participação voluntária em todos os encontros.

Figura 24 – Confraternização

Fonte: Dados da pesquisa

Sabemos que não está sendo fácil estudar remotamente e que há muito motivos para desistir. Mas, esses alunos foram essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa. Então, a agradeci imensamente a disponibilidade, o interesse, o empenho e a colaboração de todos os alunos-participantes. Sendo assim, confeccionei e entreguei certificados para os cinco alunos que participaram efetivamente de todo o projeto, as estudantes de Licenciatura em Matemática (apenas uma estudante estava presente na confraternização), que estavam ajudando na coleta de dados como *prints* e a professora de matemática da escola-campo que deu todo o suporte durante a pesquisa.

Os alunos também fizeram um pequeno discurso e enfatizaram que a matemática, na maioria das vezes, é muito difícil de entender, contudo, durante os encontros eles puderam ver que esta pode ser melhor compreendida quando trabalhada de forma dinâmica. Enfatizaram também que sempre busquei com que todos gostassem e entendessem a disciplina. E, por fim, a professora de matemática escola-campo também elogiou todos os alunos, visto que apesar de todos os contratempos, estavam presentes e sempre participativos, em busca de um novo conhecimento.

6 ANÁLISE DOS ENCONTROS

Este capítulo está destinado a apresentar os resultados e a análise da pesquisa de campo no contexto da Resolução de Problemas. Visando construir uma aprendizagem significativa da Função Exponencial e Logarítmica nos encontros, foi utilizada a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011), que adaptamos para o Ensino Remoto.

A pesquisa foi desenvolvida em 8 encontros/aulas remotos que consistiram em (1) propor o problema; (2) fazer a leitura individual; (3) leitura em conjunto – adaptado – onde convidávamos um dos alunos-participantes para fazer a leitura em conjunto, contudo, nem sempre havia essa participação, então, essa etapa do roteiro era realizada por meio do Google Meet; (4) resolução do problema – adaptado – como não poderiam formar grupos semelhante ao ensino presencial, os alunos se comunicavam via grupos do WhatsApp; (5) Observar e Incentivar – adaptado – nos grupos do WhatsApp e Google Meet; (6) registros das resoluções na lousa – adaptado – a professora/pesquisadora compartilhava as resoluções que os grupos tinham postado no WhatsApp; (7) plenária – adaptado – os alunos foram convidados a explicarem suas resoluções enquanto apresentávamos pelo Google Meet, houve muita discussão, às vezes precisávamos tirar dúvidas; (8) busca do consenso – adaptado – visto que, na maioria dos encontros, devido ao tempo, os alunos não conseguiram chegar a resolução correta, a professora/pesquisadora utilizava o Whiteboard (lousa digital) para resolver o problema; e (9) formalização do conteúdo – adaptado – a professora/pesquisadora transmitia os slides pelo Google Meet contendo as definições, propriedade e gráficos, e às vezes, devido ao tempo, enviava essa formalização para os Grupos do WhatsApp.

6.1 RESULTADOS E ANÁLISE

Com base no relato dos encontros, faremos agora uma análise simplificada porque ao longo dos encontros também já foram feitas outras análises. Considerando alguns aspectos que se mostraram relevantes durante o ensino de Função Exponencial e Logarítmica através da Resolução de Problemas, essa análise, nada mais é do que, um estudo mais aprofundado sobre os encontros ocorridos, em que pretendemos simplificar as informações mais importantes que foram percebidas durante o desenvolvimento da pesquisa de campo. Também procuramos, encontrar relações com os Capítulos 2 e 3 a respeito de temas que são considerados como suporte para nossa investigação.

Os desafios e problemas selecionados foram considerados pelos alunos como interessantes e foi possível envolvê-los nas discussões decorrentes na maioria dos encontros virtuais. Entre os participantes da pesquisa, depois de alguns encontros, foi se criando um ambiente de amizade, favorável a aprendizagem, onde eles tentavam se ajudar pelos grupos do WhatsApp, essa foi a grande diferença na aplicação do projeto. Era possível errar e percebendo o erro, discutir com o colega e com a professora/pesquisadora via WhatsApp, e tentar uma nova forma de resolver o problema. Nesse sentido, o nosso trabalho está em sintonia com as ideias de Onuchic e Allevato (2011), citado por nós no Capítulo 2, nas páginas 21, 22 e 23. Nesse ponto, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi a grande protagonista durante a aplicação dos problemas.

Depois dos encontros iniciais, os alunos realmente sentiram-se com vontade de trabalhar e foi possível perceber. Huanca (2014, p. 258) diz que, os alunos investigam, pensam e tentam resolver o problema "usando seus conhecimentos prévios, descobrindo caminhos e decidindo quais deles devem tomar para resolver o problema ao trabalhar colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução".

Em relação a Função Exponencial, de maneira simplificada, podemos avaliar que os alunos trabalharam com os desafios e problemas, sempre utilizando os conhecimentos prévios que eles possuíam, o que possibilitou o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e pensamento, na medida em que:

- Trabalhou-se com dados do problema;
- Relacionou-se os dados ao contexto em que estavam inseridos;
- Favoreceu-se as discussões com o trabalho em grupo;
- Desenvolveu-se a habilidade de resolver problemas.

Dessa forma, avaliamos que a Função Exponencial trabalhada através da Resolução de Problemas, representou uma boa oportunidade de desenvolver alguns conceitos e aspectos importantes da Álgebra e a representação gráfica da Função Exponencial. Já as dúvidas dos alunos foram debatidas e sanadas pela professora/pesquisadora com problemas secundários. Também, as discussões na plenária foram momentos importantes para a construção do novo conhecimento exponencial, no qual pudemos tornar mais evidente o objetivo de favorecer a compreensão. Os alunos se sentiram mais motivados e perceberam que suas dúvidas eram bastante pertinentes. Aos poucos, eles foram expondo suas ideias e incertezas, possibilitando uma rica troca de experiências utilizando as ferramentas digitais.

Já em relação a Função Logarítmica, de maneira simplificada, podemos avaliar que os alunos trabalharam com os desafios e problemas propostos, sempre observando os conceitos de logaritmos, propriedades e a representação gráfica, o que possibilitou o desenvolvimento das capacidades, na medida em que:

- Aproximou-se a Função Logarítmica de outras áreas de conhecimento;
- Valorizou-se a importância da Função Logarítmica para a Matemática e outras áreas;
- Usou-se a aplicabilidade da Função Logarítmica para estimular o interesse pela matemática;
- Estimulou-se a capacidade de trabalhar em equipe.

Os alunos, ao trabalhar os problemas 8 e 9, compreenderam a Função Logarítmica. Nós trabalhamos o conhecimento e a consciência sobre os dados do problema ao fornecer contextos relevantes para os conceitos logarítmicos e geométricos. O entendimento de alguns dos conceitos de logaritmo também foram trabalhados nos problemas citados, na medida em que não foi dada ênfase as fórmulas e aos cálculos, e sim aos conceitos envolvidos nos assuntos pesquisados através da Resolução de Problemas. Antes de usar as fórmulas e as propriedades, os alunos puderam perceber a utilidade e a necessidade do logaritmo que estava sendo trabalhado em um problema que envolvia áreas de figura geométricas planas. Também demos a oportunidade aos alunos de tomarem a responsabilidade de resolver os problemas.

Então, destacamos, contudo, a importância de trabalhar com a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais, os quais foram relevantes durante o desenvolvimento da pesquisa. Se configuram, portanto, em estratégias relevantes a serem utilizadas no meio educacional, pois com elas, o aluno torna-se ativo no desenvolvimento da sua própria aprendizagem. Também enfatizamos a importância da formação inicial e os momentos em que a professora/pesquisadora participou do Programa de Residência Pedagógica, que a fez ampliar o olhar para novas metodologias de ensino e ferramentas tecnológicas. Os quais, podem proporcionar uma melhor aprendizagem ao aluno, de maneira que os conduzam a desenvolver o aprendizado com compreensão, e não apenas isso, mas também o seu lado emocional, visto que são pessoas, dotadas de sentimentos e emoções.

Quanto ao uso das ferramentas digitais eles ficaram eufóricos, porque podia utilizar de seus recursos para desenhar vários gráficos em um mesmo plano cartesiano, mudar a cor dos gráficos para identificá-los melhor. Através dos pontos marcados nos gráficos, e comparações entre eles, perceberam as propriedades de crescente e decrescente da Função Exponencial e Logarítmica. Entenderam melhor o comportamento do gráfico dessas funções principalmente o fato de se aproximar do eixo x e não cortá-lo.

Observamos que introduzir Tecnologias Digitais faz com que a aula fique dinâmica e auxilia os alunos na resolução do problema. A construção do gráfico na resolução de um desafio que foi apresentado no quinto encontro foi bem mais rápida na plataforma Desmos comparado com o que acontecia no papel, em que os alunos tinham que fazer manualmente os gráficos em folha quadriculada. Isso despertou um maior interesse para construir os gráficos e foi possível usá-los para ensinar novos conceitos.

A seguir apresentamos alguns relatos das respostas dos alunos-participantes, quando perguntamos se a metodologia de Resolução de Problemas que utilizamos para ensinar Função Exponencial e Logarítmica foi importante para eles e, se contribuiu com o aprendizado deles em relação à Matemática.

- *Sarah: A metodologia foi incrível e muito interativa, de maneira que se tornou muito melhor a nossa aprendizagem. Eu acho que ajudou bastante, em todos os sentidos, porque eu até que tenho um pouco de dificuldade para poder lembrar da maioria das fórmulas, mas com os desafios, com os problemas, as aulas e tudo mais, deu uma boa ajudada. A metodologia foi muito divertida.*

- *Iara: Utilizou desafios e jogos muito divertidos. Professora, em meio a essa pandemia... Não só, porque envolveu muito, aplicativos, tecnologia... Tudo de bom tanto para nós, como um todo. A matemática está presente no nosso cotidiano, então é fundamental qualquer assunto que envolver a matemática. Essa metodologia de ensinar ajudou muito, em tudo isso... Eu perdi um pouco da minha vergonha de falar. Ainda mais porque eu tenho amigos próximos.... Foi importante para mim, porque eu quis, não foi algo que me obrigaram a fazer. Algo que eu realmente quis, então isso foi importante, é bom a gente fazer coisa que a gente gosta, sem precisar de obrigação, porque coisa obrigada, é muito ruim. Tive mais um conhecimento, as aulas eram muito bacanas.*

- *Antônio: Acho um ponto bom, pois sempre bom ter pesquisas, para o bem dos alunos. Eu achei interessante mesmo porque eu não gostava, eu não vou mentir, eu não gostava muito de Matemática, mas depois dessa metodologia, eu fui aprendendo mais sobre Matemática, fui gostando mais. Eu achei muito interessante os desafios e os problemas propostos para nós, muito interessante mesmo... e, eu gostei muito, porque interagi com meus colegas.*

- *Luana: Dinâmicas oral, desafios e joguinhos super divertidos. Aprendi muita coisa, eu já tinha visto essas coisas, acho que um tempo atrás, mas nada que ficasse na minha cabeça e agora, eu acho que não esqueço mais não. Eu amei aprender tudo isso... Assim, a Matemática para mim tá em tudo. Ótimas aulas, explicações bem maneiras, professora excelente.*

- *Michaely: As aulas sempre foram dinâmicas com brincadeiras envolvendo o tema de funções para melhorar o entendimento, assim as aulas não ficam chatas. Então, eu acho que do começo até agora, eu mudei bastante, seja por pressão psicológica, que eu sentia antes, em relação à Matemática, em relação à nota, que eu não tirava notas tão boas, e me destaquei na pesquisa. Aí, eu fiquei muito feliz por isso. Então, essa questão de conseguir falar abertamente sobre Matemática, sem gaguejar, foi incrível, consegui, consegui superar minhas expectativas em relação a isso, fora o aprendizado com ajudo de alguns aplicativos tecnológicos... A professora Beatriz sempre desenvolveu aulas dinâmicas para o nosso entendimento, assim a gente aprende se divertindo.*

Observando esses relatos dos alunos, em relação à importância e contribuições da metodologia utilizada para ensinar Função Exponencial e Logarítmica, pudemos perceber que este, ajudou a melhorar suas expectativas em relação à Matemática, como está exposto na fala de alguns participantes quando dizem que não gostavam da disciplina.

Os relatos desses alunos nos revelaram que a metodologia utilizada na pesquisa ajudou, não apenas em relação ao desenvolvimento do conhecimento matemático, mas também em relação a sua autoestima, autoconfiança e autonomia, como a fala da participante Iara quando diz que: “Foi importante para mim, porque eu quis, não foi algo que me obrigaram a fazer”. Ela nos mostra em sua fala que é um ser humano e tem suas vontades próprias, sabe o que quer para si. Esse despertamento dela, foi muito importante na pesquisa, pois comprova sua eficácia, em relação ao desenvolvimento cognitivo e emocional do sujeito participante. Comprovando assim, a relevância de inserir a metodologia de Resolução de Problemas e ferramentas digitais, na sala de aula, não apenas de Matemática, mas se estende a outras áreas do conhecimento.

Assim como Onuchic (1999), acreditamos que o trabalho de ensino de Matemática e particularmente da Função Exponencial e Logarítmica devem acontecer numa atmosfera de investigação orientada em Resolução de Problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos caminhos, novos conhecimentos para obter a solução.

Outro ponto a analisar é o fato de que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas procurou dar significado à Função Exponencial e Logarítmica, pois os alunos aprenderam a trabalhar nos grupos do WhatsApp e participaram das atividades propostas em cada encontro. Por exemplo, o sétimo encontro foi o ápice do trabalho em grupo, foi possível perceber o trabalho em equipe que os alunos desempenharam, momentos em que eles se ajudaram e colaboraram para o entendimento do problema, no momento da plenária eles conversaram entre si e tiraram dúvidas sobre as soluções uns dos outros, foi realizada a construção do gráfico da Função Logarítmica utilizando os conhecimentos prévios da definição de logaritmo e a área de figuras planas.

Temos consciência de que todos esses resultados foram despertados pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os alunos estavam tendo a oportunidade de pensar, de questionar, de construir seus pensamentos, eles estavam podendo expor suas opiniões e fazer o seu conhecimento funcionar sem que o professor lhes ditasse caminhos, a professora/pesquisadora durante os encontros assumiu o papel de mediadora deixando que os alunos se tornassem protagonistas em todos os momentos.

Finalizando, no decorrer desta pesquisa novas compreensões e indagações foram tecidas acerca dos conceitos e gráficos de Função Exponencial e Logarítmica fazendo uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir dessas compreensões e indagações, algumas considerações serão apresentadas no próximo capítulo, procurando estabelecer as amplitudes e limitações deste trabalho de conclusão de curso no contexto da Educação Matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo construir conceitos e gráficos de Função Exponencial e Logarítmica, com um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, fazendo uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir dos resultados obtidos, esperava-se a construção de um novo conhecimento nos alunos em relação a Função Exponencial e Logarítmica no contexto do cotidiano. Assim, por meio das falas dos alunos durante as aulas, as anotações da pesquisadora no diário de bordo e após a análise dos dados produzidos, observamos que o objetivo foi alcançado, conforme apresentamos a seguir.

Durante o planejamento dos problemas, a professora/pesquisadora estava preocupada em selecionar desafios e problemas que motivassem os alunos a participarem dos encontros remotos, e para que eles estivessem familiarizados em resolver problemas. Os desafios e problemas foram elaborados de maneira contextualizada, relacionando-os a realidade dos alunos do 1º ano do Ensino Médio. A aplicação desses desafios e problemas aconteceu em oito encontros e, geralmente, eram trabalhados um desafio e um problema relacionados à Função Exponencial ou Logarítmica.

No primeiro encontro, que aconteceu pelo Google Meet, foram apresentados aos alunos-participantes a proposta deste trabalho, a metodologia de Resolução de Problemas segundo Onuchic e Allevato (2011) a qual adaptamos para o ensino remoto e também apresentamos, o termo de compromisso da pesquisa.

Ao iniciar a aplicação dos desafios e problemas nos demais encontros remotos, os alunos-participantes ficaram um pouco perdidos por não ter sido apresentado um conteúdo introdutório. Por este motivo, surgiram algumas inquietações e dúvidas dos alunos em como iniciar a resolução, qual conceito iriam utilizar e, se necessitava ou não de fórmulas. Essas dificuldades foram diminuindo ao longo dos encontros remotos e os alunos já resolviam os desafios e os problemas com mais facilidade. No entanto, apresentavam dúvidas de interpretação do problema e trabalhar em grupo, por esses e outros motivos, adaptamos a metodologia de Resolução de Problemas para o ensino remoto.

Na Resolução de Problemas assim como ocorre em outras metodologias de ensino, o professor tem o papel de fazer o convite para que os alunos participem da atividade. Com isso, ele tem um desempenho fundamental na organização da aula. Nesta pesquisa, notamos a harmonia entre diferentes estratégias de ensino, especialmente entre a Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais. Isso pode ser exemplificado quando os alunos-participantes ficaram entusiasmados com o uso de ferramentas digitais, eles participavam ativamente e afirmavam que estavam começando a gostar de Matemática, pois viram que essa disciplina não estava vinculada apenas ao uso de fórmulas, ou seja, eles faziam matemática de maneira dinâmica.

A Resolução de Problemas colaborou para a construção de um ambiente virtual comunicativo, pois emergiram situações em que os alunos-participantes tiveram a necessidade de ler, escrever e de discutir pelo Google Meet, Whiteboard/lousa digital, e Grupos de WhatsApp sobre a resolução dos problemas propostos. Dessa forma, consideramos então que, todos os resultados foram possíveis mediante a utilização da metodologia de Resolução de Problemas e a ajuda das Tecnologias Digitais. Assim, as Tecnologias Digitais contribuíram significativamente para a aprendizagem de conceitos relacionados a Função Exponencial e Logarítmica.

Os Grupos do WhatsApp foram muito importantes durante o desenvolvimento da pesquisa. Nesses grupos haviam semanalmente interação entre os alunos e a professora/pesquisadora. Para a pesquisa, trouxe resultados muito positivos, pois foram utilizados para algumas etapas da metodologia de Resolução de Problemas, ou seja, observar e incentivar nos grupos, os alunos postavam as resoluções dos problemas, e a partir daí, a professora/pesquisadora transmitia pelo Google Meet essas resoluções para discussão em uma plenária.

Ensinar Matemática utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas auxiliou na compreensão dos conceitos abordados nos encontros remotos, estimulou os alunos a relacionarem conteúdos por eles conhecidos com os novos conteúdos trabalhados e contribuiu para sua autoestima.

Seguindo as ideias de Van de Valle (2009), podemos dizer que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não é simplesmente apresentar um problema, sentar e esperar que algo mágico aconteça. O professor é responsável pelo ambiente de aprendizagem na sala de aula, presencial ou remota, e pelo trabalho colaborativo a ser desenvolvido entre professor e alunos. Cabe ao professor, ao preparar uma aula presencial ou remota desenvolver seu trabalho de forma que todos os alunos compreendam a matemática, utilizando-se de problemas relacionados aos conteúdos matemáticos.

Após a pesquisa, ficou claro para nós a importância da Resolução de Problemas como uma das possíveis estratégias pedagógicas para ensinar Matemática, mas será que é tão simples assim? Não, não é. Não é fácil para o professor, nem para os alunos, visto que é necessário adotar novas posturas. Por exemplo, devido ao tempo, e a algumas lacunas trazidas do Ensino Fundamental em relação a Matemática, não foi possível que os alunos construíssem por completo os conhecimentos sobre os conceitos e gráficos de Função Exponencial e Logarítmica, mesmo assim, conseguimos interagir, de maneira a ajudar os alunos no sentido de sanar algumas lacunas.

Além disso, destacamos aqui que, a pesquisa bibliográfica nos deu a oportunidade de buscar por informações histórias sobre Função Exponencial e Logarítmica e com isso, tornou-se possível compreender a sua importância no cotidiano. A participação na Residência Pedagógica permitiu a pesquisadora um contato direto com o ensino dessas Funções no ensino remoto. Essa fase da pesquisa de campo trouxe clareza sobre a importância de se ensinar através da Resolução de Problemas em consonância com as recomendações da BNCC, ou seja, dar sentido a Função Exponencial e Logarítmica.

A Residência Pedagógica nos deu a oportunidade de envolver a teoria e a prática de forma a possibilitar não apenas o envolvimento dos futuros professores durante os encontros de formação na UEPB, campus Monteiro/PB. Também, consideramos que o nosso trabalho criou um elo entre Resolução de Problemas, Formação Inicial de Professores, Tecnologias Digitais e Função Exponencial e Logarítmica, e contribuiu na formação de todos os residentes que compunham o Programa de Residência Pedagógica. Foi a primeira vez que aplicamos a metodologia de Resolução de Problemas na Residência Pedagógica, mas temos certeza de que, em outra oportunidade, essa dinâmica deverá apresentar melhor resultados, pois a prática, seguramente aprimorará a metodologia.

Esperamos, então, que este trabalho possa contribuir com outras experiências em Resolução de Problemas, em especial aquelas pessoas que gostariam de conhecer a beleza da Função Exponencial e Logarítmica. Feitas essas considerações, encerra-se este Trabalho de Conclusão de Curso com a expectativa de que possibilite discussões a respeito deste tema e supere as dificuldades no processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. 1ª ed. São Paulo: Paco Editora, 2014. p. 35–52.

_______. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Resolução de Problemas: Teoria e prática.** 2ª ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.

ANTUNES, G; CAMBRAINHA, M. **Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem**. In: IV Simpósio Nacional da Formação de Professores. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BOALER, J. **O que a Matemática tem a ver com isso? Como Professores e Pais podem transformar a aprendizagem matemática e inspirar sucesso.** Porto Alegre: Penso, 2019.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUZA, P. R. C. **Prisma Matemática: Funções e Progressões**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC, 1997.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 1998.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2003.

________. Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006. v.2

________. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

COSTA, M. A. F. Tramas da cultura digital na Base Nacional Comum Curricular. In: VIANNA, M. (Org.) **Novos diálogos entre Ciência e Tecnologia: perspectivas de pesquisas.** Porto Alegre: Editora Fi, 2020, p. 39-53.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. São Paulo, 3ed, 2016.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências**. São Paulo: Ática, 2020.

FRENKEL, E. **Amor e Matemática: o coração da realidade escondida.** Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2014.

FERNANDES, W. E. P.; CUÉLLAR, D. J. G. Estrategias asociadas al uso de GeoGebra en un contexto de resolución de problemas. In: **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura.** Belém do Pará: Grupo de Pesquisas sobre Praticas Socioculturais e Educação Matemática, 2021, v. 16, n. 37, p. 61-80.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar - Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

________. **A resolução de Problemas e a Modelização matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição parra a formação continuada do professor de matemática.** 315p. Doutorado em Educação Matemática — Instituto de Geociência e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

HUANCA, R. R. H.; ALMEIDA, B. R. **O ensino e a aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula: por quê?** In: III CONAPESP – III Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências, Campina Grande. Anais do III CONAPESP, 2018.

HUANCA, R. R. H.; SILVA, D. J. B.; SOUZA, P. Q. **Cálculo Diferencial sob a Perspectiva da Resolução de Problemas**. Campina Grande: eduepb, 2021.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. K. Research on Mathematical Problem Solving. In: SHUMWAY, R. J. (Org.). **Research in Mathematics Education**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1980. p. 286-323.

LEONARDO, F. M. **Conexões: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Moderna, 2020.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. 2ª. ed. São Paulo: EPU, 2018.

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 9, p. 153-168.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action. Reston**: NCTM, 1980.

_______. **Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

_______. **Professional Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1991.

_______. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000. NCTM,1995

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**: **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

________. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 212- 231.

ONUCHIC, L R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. 1ed. Campinas: Papirus, 2013.

POLYA, G. **How to solve it: A new aspect of mathematical method**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica** - a construção do conhecimento. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SERRAZINA, L. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação em Portugal. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.) **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 55-84.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: o recurso problemateca.** Porto Alegre: Penso, 2016.

VALDIR, J. V. **Função Logarítmica**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

VALE, I. Resolução de Problemas um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.) **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 55-84.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. New York: Longman, 2001.

_______. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.