UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - PATOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JESIEL DE MEDEIROS NONATO

LOGARITMO E SUA APLICAÇÃO NA MÚSICA

PATOS-PB
2021

JESIEL DE MEDEIROS NONATO

LOGARITMO E SUA APLICAÇÃO NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, campus VII, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

PATOS-PB
2021

N812l Nonato, Jesiel de Medeiros.
Logaritmo e sua aplicação na música [manuscrito] / Jesiel de Medeiros Nonato. - 2021.
23 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2021.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Logaritmo . 2. Funções logarítmica . 3. Logaritmo na música . I. Título

21. ed. CDD 510.16

Elaborada por Kléber T. de Sousa - CRB - 15/472 BSC5/UEPB

JESIEL DE MEDEIROS NONATO

LOGARITMO E SUA APLICAÇÃO NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, campus VII, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 19/10/2021.

BANCA EXAMINADORA

José Ginaldo de Souza Farias

Profª. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Marcelo da Silva Vieira

Prof Dr.. Marcelo da Silva Vieira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Cicero dos Santos

Prof Me.Cicero dos Santos
Secretaria da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba (SEECTPB)

RESUMO

Este trabalho foi realizado a partir de pesquisas bibliográficas com o objetivo de apresentar a aplicabilidade do logaritmo na música. Para isso, fez-se necessário definir e apresentar as propriedades do logaritmo e das funções logarítmicas. Para definir a operação de logaritmo, foi visto a forma de Napier de comparar os termos de uma progressão geométrica com os termos de uma progressão aritmética, vendo que o logaritmo transforma uma progressão que cresce de maneira exponencial em uma progressão que tem uma distância igual entre seus termos, exatamente da mesma forma que acontece na construção da escala musical temperada.

Palavras-Chave: Logaritmo. Funções logarítmicas. Logaritmo na música.

ABSTRACT

This work was carried out from bibliographical research with the objective of presenting the applicability of the logarithm in music. For this, it was necessary to define and present the properties of the logarithm and logarithmic functions. To define a logarithm operation, we saw Napier's way of comparing the terms of a geometric progression with the terms of an arithmetic progression, seeing that the logarithm transforms a progression that grows exponentially into a progression that has a distance equal to its terms, in exactly the same way as in the construction of the tempered musical scale.

Keywords: Logarithm. Logarithmic functions. Logarithm in music.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	6
2	**LOGARITMO**	7
2.1	**Sistemas de logaritmo**	11
2.2	**Mudança de base**	12
3	**FUNÇÕES LOGARÍTMICAS**..	14
4	**APLICAÇÃO NA MÚSICA**	19
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**..	22
	REFERÊNCIAS	23

1 INTRODUÇÃO

Descobertas científicas são frutos da necessidade humana de solucionar problemas em determinado momento oportuno. No fim do século XVI, com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, os cálculos aritméticos estavam se tornando extremamente trabalhosos. Assim, houve a necessidade de se criar um método que permitisse efetuar, com maior simplicidade, tais cálculos como multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes.

Na tentativa de manter os termos de uma progressão geométrica próximos, John Napier (1550 - 1617) foi uma das primeiras pessoas a publicar a tábua de logaritmos. Nessa época, não se havia nenhum conceito de base de um sistema de logaritmo. Coube a Henry Briggs (1561 - 1631) o trabalho de construir a primeira tábua de logaritmos de base dez.

Atualmente, com o desenvolvimento e utilização de calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade. Porém, não se pode negar que o estudo de logaritmo proporcionou um desenvolvimento na matemática e na música, como será apresentado.

Utilizando da ideia de Napier, foi criada a escala dodecafônica temperada, proposta por Andréas Werckmeister e utilizada e difundida por Johann Sebastian Bach em O Cravo Bem-Temperado. O objetivo deste trabalho é justamente mostrar que o logaritmo está presente na música e expor o desenvolvimento musical através do conhecimento sobre logaritmo e funções logarítmicas.

2 LOGARITMO

Napier, no final do século XVI, com o objetivo de simplificar cálculos numéricos, criou o conceito de logaritmo. Nessas análises, ele se utilizou da ideia comparativa entre progressão geométrica e progressão aritmética. Esse método é conhecido como relação de Stiffel.

Observa-se:

2	4	8	16	32	64	128	256	(progressão geométrica)
1	2	3	4	5	6	7	8	(progressão aritmética)

O primeiro ponto a se observar é que o produto de dois termos da primeira progressão se associa a soma de dois termos correspondentes da segunda progressão. Por exemplo, na progressão aritmética, a soma $3 + 5 = 8$. Enquanto na progressão geométrica corresponde a $8 \times 32 = 256$. A associação entre as duas progressões se dá pelo posicionamento de seus termos. No exemplo, foi somado o 3º e o 5º termo da PA e o resultado foi o 8º termo, da mesma forma foi multiplicado o 3º e o 5º termo da PG e o resultado foi o 8º termo.

Outra maneira de se observar essa associação é pelo produto de potências de mesma base. A PG acima é de razão dois, logo o produto do exemplo pode ser rescrito como $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$, em outras palavras, o resultado do produto é a razão da PG elevado à soma dos expoentes, ou seja, elevado aos termos da PA. Generalizando essa ideia, existe uma constante que é a razão da progressão geométrica e também base do logaritmo que é elevado a um número que está em progressão aritmética, da seguinte forma:

a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^n	(progressão geométrica)
1	2	3	4	5	6	7	n	(progressão aritmética)

Seja:

$$a^n = b$$

Então:

$$\log_a b = n.$$

• **Definição:** Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potencia obtida seja igual a b. Em símbolos temos: $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b.$$

Em $\log_a b = n$, dizemos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e n é o logaritmo. A operação pela qual se determina o logaritmo de b na base a é chamada de logaritmação.

• **Definição:** Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, se o logaritmo de b na base a é n, então b é o antilogaritmo de n na base a.

$$\log_a b = n \Leftrightarrow \operatorname{antilog}_a n = b.$$

Exemplos:

a) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{antilog}_2 3 = 8$
b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Leftrightarrow \operatorname{antilog}_{\frac{1}{2}} -2 = 4$

Definido o logaritmo, quatro propriedades decorrem de imediato da definição:

1) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero;

$$\log_a 1 = 0.$$

2) O logaritmo da base é igual a um;

$$\log_a a = 1.$$

3) A potência da base a elevado a $\log_a b$ é igual a b;

$$a^{\log_a b} = b.$$

Para justificar essa propriedade é só recorrer à definição de logaritmo onde:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$$
$$a^{\log_a b} = a^n = b.$$

4) Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais;

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c.$$

Demonstração. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a c} = b \Leftrightarrow b = c$.

Como foi dito anteriormente, o logaritmo foi criado com o objetivo de simplificar os cálculos matemáticos. Assim vale as seguintes propriedades:

1. Logaritmo do produto

"Em qualquer base $a\,(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores". Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$ provemos que $z = x + y$. De fato:

$$\left.\begin{array}{r} \log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Longrightarrow a^y = c \\ \log_a(b \cdot c) = z \Longrightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Longrightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Longrightarrow a^z = a^{x+y} \Longrightarrow z = x + y.$$

Se observar, a propriedade transforma o logaritmo do produto de dois fatores em uma soma de logaritmos desses fatores, assim, basta conhecer o valor desses dois logaritmos e somar esses resultados, tornando mais simples os cálculos. Mas essa propriedade funciona para o produto de n termos e a demonstração pode ser feita por indução, veja:

Demonstração.

i. Para $n = 2$ já foi demonstrado que é verdadeira;

ii. Suponhamos que a propriedade é válida para $p \geq 2$ fatores e mostremos que a propriedade é válida para $p + 1$ fatores, assim:

$\log_a(b_1.b_2 \ldots b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_p$ (hipótese)

$\log_a(b_1.b_2 \ldots b_p.b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$ (tese)

manipulando o primeiro membro da tese temos:

$$\log_a[(b_1.b_2 \ldots b_p).b_{p+1}] = \log_a\big(b_1.b_2 \ldots b_p\big) + \log_a b_{p+1}$$

da última igualdade concluímos que:

$$\log_a\big(b_1.b_2 \ldots b_p\big) + \log_a b_{p+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}.$$

2. Logaritmo do quociente

"Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois fatores reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor". Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$ provemos que $z = x - y$. De fato:

$$\left.\begin{array}{c} \log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Longrightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Longrightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Longrightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Longrightarrow a^z = a^{x-y} \Longrightarrow z = x - y.$$

Uma observação a se fazer é quando $b = 1$, escrevemos:

$$\log_a \left(\frac{1}{c}\right) = \log_a 1 - \log_a c \Longrightarrow \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c.$$

Da observação se tira a definição de cologaritmo, que nada mais é do que o oposto do logaritmo de b na base a. Se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b$$

considerando que $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$, temos:

$$\operatorname{colog}_a b = \log_a \frac{1}{b}.$$

3. Logaritmo da potência

"Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência." Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b.$$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$ *e* $\log_a b^\alpha = y$, provemos então que $y = \alpha \cdot x$. De fato:

$$\left.\begin{array}{c} \log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y \Longrightarrow a^y = b^\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Longrightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Longrightarrow y = \alpha \cdot x.$$

Desta propriedade decorre um corolário.

- **Corolário:** "Em qualquer base $a\ (0 < a \neq 1)$, o logaritmo da raiz enézima de um numero real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando." Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a b.$$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$ e $\log_a \sqrt[n]{b} = y$, provemos então que $y = \frac{1}{n} \cdot x$. De fato:

$$\left.\begin{array}{r}\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ \log_a \sqrt[n]{b} = y \Longrightarrow a^y = \sqrt[n]{b}\end{array}\right\} \Longrightarrow a^y = \sqrt[n]{a^x} \Longrightarrow a^y = a^{\frac{x}{n}} \Longrightarrow y = \frac{1}{n} \cdot x.$$

Um detalhe importante que deve ser lembrado é que o logaritmo foi criado com o intuito de facilitar os cálculos, logo expressões que envolvam operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação são chamadas de expressões logarítmicas pelo fato de poderem ser calculadas usando logaritmo. Por exemplo:

$$A = \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta} \ \ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}^*$$

usando logaritmo, temos:

$$\log A = \log \frac{a^{\alpha}.\sqrt[n]{b}}{c^\beta} = \log(a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}) - \log c^\beta = \alpha \log a + \frac{1}{n}\log b - \beta \log c.$$

Assim, para se obter o resultado de $\log A$, basta saber os valores de $\log a$, $\log b$ e $\log c$, e as operações envolvida entre esses logaritmos são apenas a soma e a subtração, tornando o cálculo mais simplificado.

2.1 Sistemas de logaritmo

Dado uma base $a\ (0 < a \neq 1)$, o sistema de logaritmo é o conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos nessa base. Entre a infinidade de valores que pode assumir a base e, portanto, entre a infinidade de sistemas de logaritmos, existem dois sistemas de logaritmos particularmente importantes, que são:

a) Sistema de logaritmos decimais é o sistema de logaritmos de base 10, também chamado de sistema de logaritmo decimal ou de Briggs, em homenagem ao matemático Henry Briggs pelo seu destaque no estudo dos logaritmos decimais, onde publicou a primeira tabela com os logaritmos de 1 a 1000 no ano de 1617. Por convenção, a notação mais usada para o logaritmo de base decimal $\log_{10} b$ é simplesmente $\log b$.

b) Sistema de logaritmos neperianos é o sistema de base e ($e = 2{,}71828\ldots$ número de Euler que é um número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de John Neper, matemático escocês autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome natural se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e. Por convenção, a notação mais usada para o logaritmo neperiano $\log_e b$ é $\ln b$.

2.2 Mudança de base

A utilização do logaritmo no estudo de cálculos complexos tem como objetivo facilitar a realização de tais cálculos. Mas, como estudado anteriormente, as propriedades do logaritmo só podem ser utilizadas quando temos logaritmos em uma mesma base. Sendo assim, é importante que se tenha o conhecimento sobre a mudança de base.

- **Proposição:** Se a, b e c são números reais positivos e $a, c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, provemos que $x = \frac{y}{z}$. Como $a \neq 1$, então $z \neq 0$. De fato:

$$\left.\begin{array}{r}\log_a b = x \Rightarrow a^x = b\\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b\\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a\end{array}\right\} \Rightarrow a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow x \cdot z = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}.$$

Essa proposição também pode ser apresentada da seguinte forma:

- **Proposição:** Se a, b e c são números reais positivos e $a, c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c.$$

Demonstração. Para essa demonstração, basta que apliquemos a mudança de base em $\log_c b$, assim:

$$\log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a b.$$

Da mudança de base decorrem duas consequências:

1. Se a e b são reais positivos e diferentes de um, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Demonstração. Transformando $\log_a b$ para a base b, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

2. Se a e b são reais positivos com a diferente de um e β não nulo, então tem-se:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b.$$

Demonstração. Consideremos os dois caso:

1º caso: Se $b = 1$, temos:

$$\left.\begin{array}{r}\log_a 1 = 0 \\ \log_{a^\beta} 1 = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \log_{a^\beta} 1 = \frac{\log_a 1}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a 1}{\beta \cdot \log_a a} = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a 1.$$

2º caso: Se $b \neq 1$, temos:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\log_b a^\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b.$$

3 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Neste capítulo faremos um estudo sobre as funções logarítmicas. Denotamos tal função por $f(x) = \log_a x$, onde $(0 < a \neq 1)$. Assim, definimos função logarítmica:

- **Definição:** Uma função real $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é dita função logarítmica quando satisfaz as seguintes propriedades:

A. f é uma função crescente, isto é, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$;

B. $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

A partir de agora, iremos enunciar uma lista de propriedades que são consequências decorrentes da definição apresentada.

Propriedade 1. Uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Demonstração. Se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ são diferentes , então ou $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso resulta de A que $f(x) < f(y)$. No segundo caso tem-se $f(x) > f(y)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $f(x) \neq f(y)$.

Propriedade 2. O logaritmo de 1 é zero.

Demonstração. Por B tem-se $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo, $f(1) = 0$.

Propriedade 3. Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Demonstração. Como $f(x)$ é uma função crescente, toma-se $0 < x < 1 < y$. De A resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, logo, $f(x) < 0 < f(y)$.

Propriedade 4. Para todo $x > 0$, tem-se $f(1/x) = -f(x)$.

Demonstração. Como $x \cdot (1/x) = 1$, da propriedade B tem-se que $f\big(x \cdot (1/x)\big) = f(1)$, $f(x) + f(1/x) = f(1) = 0$. Então, $f(1/x) = -f(x)$.

Propriedade 5. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, vale $f(x/y) = f(x) - f(y)$.

Demonstração: $f\big((x/y)\big) = f\big(x \cdot (1/y)\big) = f(x) + f(1/y) = f(x) - f(y)$.

Propriedade 6. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ e todo número racional $r = p/q$, tem-se $f(x^r) = r \cdot f(x)$.
Demonstração. Vamos observar que a propriedade $f(xy) = f(x) + f(y)$ se estende para uma quantidade qualquer de fatores, ou seja,

$$f(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

em particular, se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$f(x^n) = f(x \cdot x \cdots x) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = n \cdot f(x).$$

Portanto, a propriedade é válida quando $r = n$ é um número natural.

A propriedade também é válida para $r = 0$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se que $x^0 = 1$, logo, $f(x^0) = f(1) = 0 \cdot f(x)$.

Consideremos agora o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, onde r é um inteiro negativo. Então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo:

$$f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = f(1) = 0$$

daí,

$$f(x^{-n}) = -f(x^n) = -nf(x).$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ temos

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$$

logo,

$$q \cdot f(x^r) = f[(x^r)^q] = f(x^p) = p \cdot f(x)$$

assim temos

$$q \cdot f(x^r) = p \cdot f(x) \Longrightarrow f(x^r) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x).$$

Propriedade 7. Uma função logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração. Dados arbitrariamente dois números reais α e β é sempre possível achar dois números positivos x e y tais que $f(x) < \alpha$ e $f(y) > \beta$. Torna-se um número natural n tão grande que $n > \beta/f(2)$. Como $f(2) > 0$ (propriedade 3), têm-se $n \cdot f(2) > \beta$. Como $n \cdot f(2) = f(2^n)$, $f(2^n) > \beta$. Agora escolhendo $y = 2^n$; $f(y) > \beta$, o que mostra que a função é ilimitada superiormente.

Para provar que f é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $f(1/x) = -f(x)$. Dado qualquer número real x, como foi provado acima, $f(y) > -\alpha$. Fazendo $x = 1/y$, isto é, $y = 1/x$, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > -\alpha \Leftrightarrow -f(x) > -\alpha \Leftrightarrow f(x) < \alpha.$$

Algo interessante sobre as funções logarítmicas é que elas também são chamadas de sistemas de logaritmos, pois é através da multiplicação de uma função logarítmica por uma constante que se obtém todo um sistema de logaritmo em uma base determinada. Em outras palavras:

- **Teorema:** Dadas as funções logarítmicas $f, g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe uma constante $k > 0$ tal que $g(x) = k \cdot f(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $f(a) = g(a)$. Provaremos, neste caso, que $f(x) = g(x)$ para todo $x > 0$. Em primeiro lugar, de $f(a) = g(a)$ concluímos que $f(a^r) = g(a^r)$ para todo r racional. Com efeito, $f(a^r) = r \cdot f(a) = r \cdot g(a) = g(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existisse algum $b > 0$ tal que $f(b) \neq g(b)$. Para fixar ideias, digamos que fosse $f(b) < g(b)$. Escolhamos um número natural n tão grande que

$$n \cdot [g(b) - f(b)] > f(a)$$

então

$$f(a^{1/n}) = f(a)/n < g(b) - f(b).$$

Por simplicidade, escrevamos $k = f(a^{1/n})$. Os números $k, 2k, 3k, \ldots$ dividem $\mathbb{R}_+^*$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento k. Como $k < g(b) - f(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot k$, pertence ao interior do intervalo $(f(b), g(b))$, ou seja, $f(b) < m \cdot k < g(b)$. Ora,

$$m \cdot k = m \cdot f(a^{1/n}) = f(a^{m/n}) = g(a^{m/n})$$

então

$$f(b) < f(a^{m/n}) \ = \ g(a^{m/n}) < g(b).$$

Como f é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Por outro lado, como g também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$. Essa contradição mostra que b não existe; deve-se ter $g(x) = f(x)$ para todo $x > 0$.
O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas fe g, funções logarítmicas arbitrárias, temos $f(2) > 0$ e $g(2) > 0$ porque $2 > 1$. Seja $k = g(2)/f(2)$. Consideremos a função logarítmica $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = k.f(x)$. Como $h(2) = k \cdot f(2) = [g(2)/f(2)] \cdot f(2) = g(2)$, segue-se do que se provou acima que $h(x) = g(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, que $g(x) = k \cdot f(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar.

Quando se estuda funções, questões em relação à sobrejetividade e a injetividade da função são levantadas. Nesse caso iremos apresentar o próximo teorema que mostra que a função logarítmica é sobrejetiva. Sendo assim:

- **Teorema:** Toda função logarítmica f é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real k, existe sempre um único número real x tal que $f(x) = k$.

Demonstração: A unicidade de $f(x) = k$ se dá por conta de f ser injetiva. Como demonstrado na propriedade 7, f é ilimitado superior e inferiormente, garantindo assim que o contradomínio coincide com a imagem de f. Logo f é sobrejetiva.

Esse teorema importante nos da a segurança de se utilizar da função logarítmica em cálculos, nos dando a certeza de que os resultados serão únicos. Do teorema acima apresentado decorre:

- **Corolário:** Toda função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$.

Demonstração: Da propriedade 1 segue que f é injetiva e do teorema acima mostrado decorre que f é sobrejetiva, logo f é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$.

Dado o corolário demonstrado, temos que a função logarítmica é uma bijeção, assim, dado uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, essa admite uma função inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Essa função inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é a função exponencial.

4 APLICAÇÃO NA MÚSICA

Após fazer um estudo aprofundado de logaritmo e funções logarítmicas, mostraremos um pouco sobre sua aplicabilidade. Dentre tantas áreas do conhecimento que o logaritmo está presente, falaremos sobre sua função na música, principalmente no que chamamos de harmonia musical.

Historicamente, Pitágoras, dentre tantas contribuições para a matemática, foi o primeiro a ter uma visão crítica em relação ao som. Com o objetivo de entender o que hoje é considerado harmonia musical, Pitágoras desenvolveu um instrumento chamado de monocórdio e realizou experimentos que relacionavam o tamanho da corda com o som obtido. "Este experimento de Pitágoras é a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial." PERES (2011).

Segundo DEPIZOLI (2015) "o monocórdio é composto de uma corda esticada entre dois cavaletes, que pode ter o seu tamanho variado através de um anteparo". Pitágoras percebeu que alterando o tamanho da corda, se alterava o som emitido pelo monocórdio. Em seus experimentos, ele observou que, em relação ao tamanho da corda, tocando em $1/2$ obtinha o som que hoje entendemos como o intervalo de oitava, em $2/3$ o intervalo de quinta e $3/4$ o intervalo de quarta e que tais sons "combinavam" com o som da corda solta $(1/1)$. Dessa forma, combinando os sons, foi criada a escala pitagórica.

Algo interessante a se observar nesse momento que foi descoberto intuitivamente por Pitágoras em seu experimento é que a frequência de um som é inversamente proporcional ao comprimento da corda que a gera. Assim, por exemplo, se a corda solta soa a nota Dó, tocando em $1/2$ dessa corda temos a oitava que é o Dó mais agudo com frequência duas vezes maior que o primeiro Dó.

A partir daí, tinha-se uma escala musical na qual era definida por parâmetros matemáticos. Porém, a escala pitagórica apresentava um problema auditivo que era a restrição de executar músicas nas notas (tom) em que foram compostas, pois ao se alterar a harmonia, os sons pareciam desafinados. Isso acontece porque na forma em que se foi construído a escala, certas notas não apresentam a mesma razão de frequência.

Tomando o Dó como referência e sem se preocupar com a oitava em que as nota da escala aparecem, se sua frequência for um, pela escala pitagórica, temos o Sol com frequência $3/2$, então temos o Ré com frequência $9/4$ e assim sucessivamente. Acontece que quando se chegar ao Dó usando essa multiplicação de frequências, teremos algo do tipo $531441/4096$.

Dado que o primeiro Dó é de frequência igual a um, temos que essa frequência encontrada não é um múltiplo de dois, assim não é uma oitava do Dó. Matematicamente falando, esse problema, chamado de coma pitagórico, se dá por conta que não existem $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $(3/2)^m = 2^n$.

Apesar de tal problema existir, não há dúvidas que a escala pitagórica foi essencial para o desenvolvimento da música e foi utilizada durante séculos, como afirma dos Santos:

> "A escala definida por Pitágoras foi usada durante séculos até pouco depois da Idade Média. Posteriormente a isso, com o Renascimento, uma série de novas ideias surgiu nas artes em geral. Na música, em particular, foi a necessidade de transpor as melodias para outras tonalidades, o que na época não era possível, pois a escala utilizada não favorecia tal procedimento. Com isso uma música feita para determinada tonalidade não poderia ser executada em outra tonalidade, pois as relações entre as notas variam de acordo com o tom a ser escolhido. Portanto os intervalos entre as notas passariam a soar desafinados."

Esse problema só foi solucionado com o surgimento da escala temperada (escala musical usada nos dias atuais no ocidente). A principal característica dessa escala é que as notas possuem uma mesma "distância" entre elas. O fato de isso acontecer é que as notas musicais formam uma PG de razão $2^{1/12}$. Tomando o Dó com frequência relativa igual a um temos:

Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Dó
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	2

Essa escala temperada também pode ser interpretada como uma escala logarítmica de base dois. Aplicando o logaritmo de base dois na PG, encontramos uma PA de razão $1/12$. Na música temos que um semitom é o intervalo entre duas notas consecutivas e a distância entre essas duas notas é a razão da PA. Assim, como um tom é o intervalo de dois semitons, sua distância é igual a $2/12$.

Algo que o logaritmo proporcionou a música foi o de que pares de notas de um mesmo intervalo estão à mesma distância, visualmente isso não é possível sem o uso do logaritmo. Pegamos como exemplo quatro frequências do Lá em intervalos de oitava, sendo essas frequências 110 Hz, 220 Hz, 440 Hz e 880 Hz. Observando assim as frequências, não se consegue notar que esses Lás estão em uma mesma distância de intervalo musical que é a de oitava. Aplicando o logaritmo nessas frequências, respectivamente, temos os valores aproximados de 2,041; 2,342; 2,643 e 2,944. Essa ideia mostra que enquanto as frequências crescem de maneira exponencial, o logaritmo mantem uma mesma razão de distância entre os intervalos de oitavas da nota.

Essa ideia de intervalo musical se relaciona com a matemática da seguinte maneira. Dados duas notas distintas, para descobrir o intervalo i de oitavas temos:

$$i = \log_2 \left(\frac{frequência\ final}{frequência\ inicial}\right)$$

Quando $0 < i \leq 1$, as duas notas estão em uma mesma oitava. Quando $i > 1$, as duas notas estão em oitavas distintas.

Estima-se que o ouvido humano consiga ouvir sons entre as frequências de 20 e 20000 Hz. Musicalmente falando, a faixa auditiva é de 10 oitavas aproximadamente. Vejamos esse detalhe:

$$i = \log_2 \left(\frac{20000}{20}\right) = \log_2 1000$$

$$i = \frac{\log 1000}{\log 2} = \frac{\log 10^3}{\log 2}$$

$$i \approx \frac{3}{0{,}30103} \approx 9{,}96578414$$

Quando aprofundamos o estudo para a física sonora, também encontramos o logaritmo presente. O menor valor de intensidade sonora que o ser humano consegue ouvir é de $I_o = 10^{-12}\ w/m^2$, chamado de limiar de audibilidade e o maior valor de intensidade é de $I = 1\ w/m^2$, chamado de limiar de dor. Assim, para calcular o nível sonoro, temos:

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{I_o}\right)$$

A unidade padrão do nível sonoro é o decibel, em homenagem ao alemão Alexander Graham Bell, e, segundo Roballo (2014), é definido em escala logarítmica pelo fato que o ouvido humano varia sua sensibilidade linearmente enquanto que o respectivo estímulo varia de forma exponencial.

Para definirmos, por exemplo, o maior nível sonoro que o ouvido humano consegue ouvir, é só fazer:

$$N = 10 \log \left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120\ Db$$

Assim, o maior nível sonoro que o ouvido humano consegue suportar é o de 120 decibéis.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sempre, na história da humanidade, houve a necessidade de criar ferramentas matemáticas para resolver problemas relacionados ao cotidiano. Não foi diferente com a criação do logaritmo, que foi criado com o objetivo de facilitar cálculos e permitiu um avanço extraordinário na astronomia e na navegação.

Não só nessas áreas, o logaritmo se tornou uma ferramenta essencial para as artes, principalmente para a música, onde foi usado na criação de uma escala onde as notas musicais tivessem em uma mesma distância e solucionar o problema de se tocar uma musica em apenas uma única harmonia. Ou seja, o fato de hoje termos uma estrutura musical bem definida se deve à matemática e mais precisamente às operações exponenciais e logarítmicas.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual ed. 1977. v. 2.

LIMA, Elon Larges. **Logaritmos**. (2ª Edição). Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 1996.

DE OLIVEIRA, Andreia Julio. **O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. 2005.

SAMPAIO, Pedro Valim. **Interrelações entre matemática e música**. 2017.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

PEREIRA, Marcos do Carmo. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje**. 2013.

DEPIZOLI, Carlos Antonio. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas**. 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

TEIXEIRA, Alexandre Carlos da Silva. **Matemática na música a escala cromática e as progressões geométricas**. 2015.

ROBALLO, Murilo Sergio. **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas**. 2014.

DOS SANTOS, Dyego Raphael Alves. MATEMÁTICA E MÚSICA.