UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

IANCA MIKELLY FARIAS DA COSTA

Trigonometria no triângulo retângulo: abordagem didática no 9º ano do ensino fundamental

PATOS
2022

IANCA MIKELLY FARIAS DA COSTA

Trigonometria no triângulo retângulo: abordagem didática no 9º ano do ensino fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Ma. Lidiane Rodrigues Campêlo da Silva.

PATOS
2022

C837t Costa, Ianca Mikelly Farias da.

Trigonometria no triângulo retângulo [manuscrito] : abordagem didática no 9º ano do ensino fundamental / Ianca Mikelly Farias da Costa. - 2022.

105 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.

"Orientação : Profa. Ma. Lidiane Rodrigues Campêlo da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Educação matemática. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Trigonometria. 4. Aprendizagem significativa. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Edson M. Almeida - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

IANCA MIKELLY FARIAS DA COSTA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: ABORDAGEM DIDÁTICA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 17/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ma. Lidiane Rodrigues Campêlo da Silva (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Dr José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCT)

Prof. Dr Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e Nossa Senhora Aparecida por me dar forças em todos os momentos de angústia, sendo a fé o alimento diário para seguir em frente.

Aos meus pais, Iolanda e Pedro, por todo apoio, paciência nos momentos de ausência e por acreditar em meus sonhos.

A minha irmã, Iorrana, por sempre estar ao meu lado diante das escolhas feitas por mim.

Aos meus avós maternos, Adelaide e José Porfírio, por todo incentivo. E aos meus avós paternos, Maria do Carmo e Manuel Lima (em memória), que de onde estão, comemoram comigo esta conquista.

Aos meus colegas de curso em especial, Anderson, Ícaro, Kaique, Bruno e Warley, que tornaram essa jornada acadêmica mais leve, sou grata por cada momento compartilhado entre nós.

A todos que fazem parte da coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPB.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB que fizeram parte da minha formação. Em especial a minha orientadora Professora Lidiane Silva, por toda contribuição neste trabalho, pelo companheirismo, paciência e por acreditar neste projeto.

E finalmente, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação. Obrigada!

“’Ninguém ama o que não conhece’: este pensamento explica porque tantos alunos não gostam da matemática. Se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la?”

(LORENZATO, 2002)

RESUMO

A matemática geralmente é vista como uma matéria de difícil compreensão, entretanto, essa área do conhecimento é de extrema importância para a sociedade como todo, visto que, ela tem contribuições nos mais diversos âmbitos, seja social, cultural ou profissional. A aproximação com o ensino na Educação Básica nos permitiu observar as dificuldades que os alunos têm com a matemática, em especial quando abordamos o conteúdo da trigonometria, não apresentavam domínio dos conhecimentos prévios necessários para o estudo deste conteúdo. Sendo assim, traçamos como objetivo geral desta pesquisa investigar o processo de ensino-aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo através de uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Quanto aos objetivos específicos, buscamos mapear metodologias consideradas alternativas no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria, bem como compreender as principais definições da trigonometria no triângulo retângulo e atribuir significado ao conhecimento matemático dos alunos acerca dos conceitos trigonométricos aplicados em situações cotidianas através de contribuições da aprendizagem significativa crítica. O caminho metodológico adotado para a pesquisa foi elaborado com base nas caraterísticas de um estudo bibliográfico e de caso, em que a análise dos dados tem como base uma abordagem qualitativa de pesquisa. O instrumento de coleta de dados foi uma sequência didática do conteúdo matemático aplicada em 08 encontros com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do Município de Areia de Baraúnas-PB, composta por 17 alunos dos quais apenas 05 devolveram a sequência didática. Os resultados obtidos com a aplicação da pesquisa mostram que o ensino-aprendizagem da trigonometria quando ancorado na perspectiva de demonstrar a sua aplicabilidade em situações do cotidiano, bem como na construção do passo a passo de seus conceitos, resulta em uma aprendizagem significativa ao discente. O mapeamento pedagógico realizado nesta pesquisa revelou importantes abordagens metodológicas que o professor pode desenvolver no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria para amenizar os problemas dessa área do conhecimento matemático.

Palavras-Chave: Ensino-aprendizagem. Educação Matemática. Trigonometria. Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

Mathematics is generally seen as a difficult subject to understand, however, this area of knowledge is extremely important for society as a whole, since it has contributions in the most diverse areas, whether social, cultural or professional. The approach to teaching in Basic Education allowed us to observe the difficulties that students have with mathematics, especially when we approach the content of trigonometry, they did not have mastery of the previous knowledge necessary for the study of this content. Therefore, the general objective of this research is to investigate the teaching-learning process of trigonometric ratios in the right triangle through a pedagogical intervention with students from the 9th year of Elementary School. As for the specific objectives, we seek to map methodologies considered as alternatives in the teaching and learning process of trigonometry, as well as understand the main definitions of trigonometry in the right triangle and assign meaning to the cognitive structure of students about trigonometric knowledge applied in everyday situations through contributions from the critical meaningful learning. The methodological path adopted for the research was based on the characteristics of a bibliographic and case study, in which the data analysis is based on a qualitative research approach. The data collection instrument was a didactic sequence of the mathematical content applied in 08 meetings with a class of the 9th year of Elementary School in the Municipality of Areia de Baraúnas-PB, composed of 17 students of which only 05 returned the didactic sequence. The results obtained with the application of the research show that the teaching-learning of trigonometry, when anchored in the perspective of demonstrating its applicability in everyday situations, as well as in the step-by-step construction of its concepts, results in a significant learning for the student. The pedagogical mapping carried out in this research revealed important methodological approaches that the teacher can develop in the teaching and learning process of trigonometry to alleviate the problems of this area of mathematical knowledge.

Keywords: Teaching-learning. Mathematics Education. Trigonometry. Meaningful Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO E GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior

IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

MEC - Ministério da Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PDE - Plano de Desenvolvimento da Educação

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

SAEB - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SD - Sequência Didática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está presente em nosso cotidiano, com contribuição nos mais diversos âmbitos, seja social, cultural ou profissional. Porém muitas pessoas temem a matemática, consideram essa área do conhecimento como algo difícil, gerando bloqueio à sua própria capacidade de aprender. Tais indivíduos incorporaram a ideia de que essa área é dedicada apenas para pessoas “inteligentes”, em que somente elas seriam capazes de compreender a matemática. D’Ambrosio (2013) relata que a abordagem curricular desta disciplina é vista de forma obsoleta, inútil e desinteressante.

No âmbito educacional, a rejeição é predominante também em decorrência dessa perspectiva enfatizada pelo autor. Assim, a matemática é uma das disciplinas que têm maior repulsa e, consequentemente, apresenta baixo índice de aprendizagem. Reflexo de um ensino cuja prática mais frequente nas escolas brasileiras é a apresentação oral de definições, conceitos e demonstrações com aplicações de exercícios para fixação do conteúdo. Ou seja, um ensino pautado na mera transmissão do conteúdo com enfoque de aprendizagem por repetição, mecanizada, sem, de um modo geral, apresentar a utilidade do conteúdo em outros contextos, tornando o ensino da matemática sem significado para o discente (BRASIL, 1998; PEREIRA, 2012).

Buscar transformar a visão do aluno com relação à matemática, acerca de sua importância e aplicabilidade é traçar um caminho de ensino no qual estabeleça uma conexão entre essa área do saber e outros contextos sociais, culturais ou profissionais bem como com outras disciplinas do currículo escolar de forma transdisciplinar e significativa com um enfoque que aborde, articule e explore assuntos de outras áreas. Para Silva (2013), é evidente que uma abordagem mecanicista não contribui para a formação dos cidadãos com real capacidade de atuação social, visto que, estes podem vir a sofrer dificuldades para aplicar conceitos matemáticos em seu cotidiano, reduzindo a experiência com a matemática a aplicação de regras, fórmulas e procedimentos de cálculo em ambiente escolar.

Dados do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) evidenciam o pouco rendimento do aluno com a Matemática através do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), composto pela Prova Brasil e desenvolvido pelo Ministério da Educação (MEC) e o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP).

A Prova Brasil tem por objetivo avaliar o desempenho dos alunos no Ensino Fundamental e Médio do sistema público de ensino e mais recentemente inclui amostragem da rede privada. No que tange a matemática, a avaliação é feita por meio de questões compostas de situações problemas.

Em 2019, segundo dados do site QEdu[1], o rendimento do Ensino Fundamental 5º e 9º anos ficou em 47% e 18% respectivamente, ou seja, rendimentos baixos no desenvolvimento da competência cobrada, a resolução de problemas. Já no 3º ano do Ensino Médio esse dado é alarmante, somente 7% dos alunos obtiveram sucesso no exame. Logo, ficam evidentes falhas no âmbito da Educação Matemática, sendo necessário buscar atribuir nas aulas metodologias de ensino que contribuam para a aprendizagem do aluno.

A motivação pessoal para esta pesquisa surgiu durante a formação da discente no curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). No qual teve a oportunidade de vivenciar a primeira experiência como docente pelo Programa de Residência Pedagógica[2], desenvolvido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), participando como voluntária durante os anos 2018-2020 em três turmas de segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública no município de Patos, no Estado da Paraíba. Durante esse período, notamos que os alunos apresentaram dificuldades em vários conteúdos da matemática, em especial quando abordamos a trigonometria. A partir dessa observação, buscamos investigar possíveis causas que interferem no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo e alternativas metodológicas que trabalhem com esse assunto.

Considerando essa problemática, identificamos a necessidade de elaborar um trabalho voltado para área dos conceitos iniciais da trigonometria, os quais são estudados nos anos finais do Ensino Fundamental e tem como tópico o estudo das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Visto que pode-se perceber dificuldades relacionadas aos conceitos iniciais das razões trigonométricas seno,

---

[1] Site educacional no qual disponibiliza dados estatísticos da Prova Brasil, Enem, Censo Escolar e Ideb. Disponível em: <https://www.qedu.org.br/>

[2] O Programa de Residência Pedagógica é uma das ações que integram a Política Nacional de Formação de Professores e tem o objetivo de induzir o estágio curricular supervisionado nos cursos de licenciaturas, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade de seu curso. Fonte: Capes. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica>

cosseno e tangente no triângulo retângulo, que por sua vez é base do estudo da trigonometria, além de conceitos geométricos fundamentais como o estudo de ângulos e triângulos.

Quanto ao meio pedagógico, é sabido que a aprendizagem não é um processo individual. A aprendizagem envolve o coletivo entre ações do educando, ações do educador e família (BESSA, 2008). Tendo o professor um papel de destaque, sendo este o profissional responsável por desenvolver estímulos capazes de despertar no aluno o interesse pelo conteúdo. Silva (2013), aponta que geralmente o ensino de trigonometria é visto como algo repleto de fórmulas e sem significado para o discente, dificultando assim sua compreensão.

Ademais, Pereira (2012), destaca três fatores relacionados às dificuldades no ensino e aprendizagem da trigonometria, sendo o primeiro ligado à grande quantidade de conteúdos programáticos, o segundo leva em consideração a falta de conhecimento prévio do aluno e o terceiro está associado a pouca afinidade que os professores têm com essa área do conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca algumas habilidades relacionadas ao ensino da Geometria, como por exemplo, o estudo de Semelhança de Triângulos e Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Estas habilidades são fundamentais para o estudo da trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental e nos anos posteriores referentes ao Ensino Médio. Além dos conhecimentos geométricos imprescindíveis para o ensino e aprendizagem de trigonometria, são necessários também conhecimentos algébricos como por exemplo o estudo de razão e proporção.

Além do mais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental destacam algumas áreas em que o conceito de semelhança é aplicado, sendo este conceito considerado importante para o estudo da trigonometria. Dentre as áreas, vale ressaltar os problemas históricos da Matemática e suas relações com as unidades de medidas. Este conceito de semelhança tem relação com as estratégias usadas pelos antigos egípcios para encontrar a altura das pirâmides e outros problemas com relação ao conceito de semelhança de triângulos e medidas de distâncias inacessíveis, o qual podemos usar de base para inserir em conceitos trigonométricos e resolver situações como as anteriormente, envolvendo o cálculo de distâncias do dia a dia (BRASIL, 1998).

Para Almeida (2016), não podemos nos referir ao ensino e aprendizagem da Matemática deixando de lado a construção clara da importância desse campo de conhecimento para diversos aspectos da sociedade, tais como os de natureza cultural, social, comunicacional, econômico, profissional dentre outros. Ao ensinarmos Trigonometria, podemos relacioná-la a aplicações de medidas inacessíveis no campo da engenharia civil, na topografia e em outras áreas. Além de aplicações em áreas distintas tais como, na saúde, para leitura de um eletrocardiograma; no clima, registro e previsão de temperaturas; na informática e em outros domínios da ciência, promovendo assim, um novo horizonte de conhecimento aos alunos e apresentando-lhes a importância de seu estudo.

Portanto, diante das observações dos autores citados, faz-se necessário reconhecer que o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria na educação básica apresenta lacunas, mas é possível obter uma aprendizagem significativa, com sentido para o educando. Isso é possível por meio da busca por estudos que auxiliem no planejamento das aulas dos professores bem como o diálogo com sua própria classe, a observação do que motiva e interessa aos estudantes para que o professor tenha mais elementos para enriquecer suas aulas. Sendo assim, a busca e o desenvolvimento de pesquisas sobre o tema são de suma importância, pois a organização e formação de propostas pedagógicas para o trabalho com os conteúdos contribui para o trabalho didático do professor e tal prática contribui para o desenvolvimento da experiência do professor.

A fim de compreender para poder proporcionar uma aprendizagem significativa aos alunos, buscamos base na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (MOREIRA, 2000, 2006, 2017) e nos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica propostos por Moreira (2000).

Apoiando-se nestes argumentos de ensino e aprendizagem do estudo da trigonometria, surgem os seguintes questionamentos: Quais as dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo do conteúdo da Trigonometria? Quais metodologias são consideradas alternativas para auxiliar o professor e o aluno no estudo da Trigonometria? Quais contribuições esse estudo pode proporcionar aos docentes e discentes?

Com base nos questionamentos acima, tem-se como objetivo geral do trabalho investigar o processo de ensino-aprendizagem das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo através de uma intervenção pedagógica, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede Municipal de Ensino do Município de Areia de Baraúnas-PB. Como objetivos específicos temos: 1) Mapear Metodologias consideradas alternativas no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria; 2) Compreender as principais definições da trigonometria no triângulo retângulo; 3) Atribuir significado ao conhecimento matemático dos alunos acerca dos conceitos trigonométricos aplicados em situações cotidianas através de contribuições da aprendizagem significativa crítica.

O delineamento da pesquisa ocorreu através de um levantamento bibliográfico, em que a coleta dos dados foi feita através de um estudo de caso com aplicação de uma Sequência Didática (SD), (APÊNDICE A e B), sobre o conteúdo de Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, sendo a categorização dos dados baseada em uma pesquisa classificada como qualitativa e quantitativa com objetivos gerais classificados em uma pesquisa exploratória (GIL, 2002). A amostra final é composta por cinco (05) alunos do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal do município de Areia de Baraúnas-PB.

No momento do desenvolvimento da pesquisa, vivemos um cenário atípico, pois na sociedade em geral atravessa a Pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2[3], limitando a ida à escola e não permitindo encontros presenciais. Sendo assim, as aulas desenvolveram-se de forma remota com auxílio de plataformas digitais disponibilizadas pelo Google Play[4].

A discussão realizada neste trabalho está principalmente estruturada nas ideias de autores como Moreira (2000, 2006, 2017), Pereira (2012), Andrade (2017) e Zabala (1998). Além disso, buscamos reforços nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017).

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos. Este primeiro é composto pelos objetivos e a problemática que nos fizeram optar por este tema, entre outros elementos. O segundo e terceiro capítulos estão estruturados pela

---

[3] A Covid-19 como é mundialmente conhecida é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global, por esse fator foi declarado como uma pandemia, provocando assim um isolamento social na humanidade. O SARS-CoV-2 é um betacoronavírus e surgiu na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019. Fonte: Ministério da Saúde. Disponível em: < https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus >

[4] O Google Play é um serviço fornecido pela Google LLC 1600 Amphitheatre Parkway Mountain View, CA 94043 EUA. Em que você pode usar o google play para procurar e fazer streaming ou download de conteúdos para seu dispositivo, por exemplo: classroom, whastsapp, google meet jamboard e etc… Fonte: Google Play. Disponível em: < https://play.google.com/intl/pt_br/about/play-terms/index.html >

fundamentação teórica, subdividida em seções. No quarto capítulo apresentamos o percurso metodológico da pesquisa. No quinto, abordamos os resultados e discussões acerca da sequência didática. As considerações finais foram foco do sexto e último capítulo.

2 ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Vivemos em uma sociedade caracterizada por mudanças cada vez mais rápidas, tanto cientificamente, tecnologicamente como de valores. Não sendo diferente do meio pedagógico visto que essas transformações interferem na relação com a educação escolar, âmbito esse que vem ampliando as discussões e buscando sair, ainda que não seja de forma rápida, de um modelo tradicional com marca excessivamente transmissiva de ensino para um modelo renovado de educação, mais contextualizado, em que o aluno assuma um papel mais ativo no processo didático. Isto é, busca transformar as práticas pedagógicas do ensino tradicional em práticas pedagógicas que promovam uma aprendizagem significativa ao discente. Porém, o ensino e aprendizagem da matemática ainda apresenta fortes marcas de um ensino mecanizado.

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15).

Embora a afirmação do autor já tenha três décadas, ela ainda continua muito atual no contexto brasileiro. Essa concepção de prática pedagógica, como acima referida, de que é possível aprender matemática por repetição, corrobora para que o ensino da matemática venha a ser apresentado acentuando seu caráter de abstração e com uso excessivo de fórmulas. Essa condução pode vir a despertar pouca ou quase nenhuma curiosidade no discente, colaborando para que estes não tenham motivações suficientes em estudá-la. Nesse sentido, vale destacar que “o ato de aprender não envolve apenas os sentidos, mas também sistemas complexos como interesse e atenção” (BESSA, 2008, p.11).

Mesmo que esta forma abstrata de ensino adeque-se para determinados grupos de matemáticos, ensinar matemática desconectada do contexto da realidade dos alunos, apenas repleta de fórmulas torna o processo e a relação com a matemática desinteressante para tantos outros grupos de estudantes.

> Não que a Matemática do matemático seja ruim. Não. Ela existe, é necessária, mas compõe tão-somente uma possibilidade dentre tantas matemáticas existentes. Essa Matemática, apresentada de forma internalista na maior parte do tempo, teórica, abstrata, resultante de um esforço histórico de colar significados a significantes, quase sempre se vendo a definição de objetos sem uma necessária preocupação com suas aplicações, tem seu espaço próprio, seu jardim, onde habitam seres que convivem em certa harmonia. No entanto, esse não é o jardim por onde passeiam os estudantes em sua maioria, que talvez não venham a ser matemáticos. (ALMEIDA, 2016, p. 156).

Então, com os avanços científicos, tecnológicos, de comunicação, de circulação da informação em que ela de forma ampla está ao alcance dos estudantes, faz com que a escola precise ser mais do que informativa. Faz-se necessário a adoção de práticas pedagógicas que contribuam para além do uso de fórmulas em que o ensino da matemática não envolva apenas os conteúdos de forma expositiva. Que se busque abranger principalmente objetivos e metodologias de ensino, problematizando a matemática em diferentes abordagens, em diferentes contextos para estimular o interesse pela aprendizagem do aprendiz. Sabemos que mudar as práticas é uma tentativa de contribuir com a melhoria dessa realidade.

Sendo assim, na busca para melhorar o processo de ensino e aprendizagem estudos de autores como Zabala (1998), Moreira (2000, 2006, 2017) e mais especificamente da matemática, estudos como os de D'Ambrósio (2013), Beatriz S. D'Ambrósio (1989), dentre outros, apontam metodologias de ensino que contribuem para este processo, não como uma fórmula milagrosa, mas como alternativas que o educador pode se valer para auxiliá-lo durante sua aula. Nesse aspecto, podemos mencionar a tentativa de vincular a matemática na vida cotidiana do aluno, assim como o esforço em evidenciar a sua importância para a realidade social, cultural ou pessoal do educando.

> [...] muitos professores têm defendido a idéia de um ensino mais vinculado à realidade do aluno. Sob este aspecto, é comum o discurso segundo o qual a Matemática tem sido ensinada de maneira muito abstrata, distanciada da vivência cotidiana do aluno. É preciso torná-la mais concreta, mais próxima dos problemas que a realidade apresenta. (JARDINETTI, 1997, p.04).

Nessa perspectiva de ensino e aprendizagem da matemática, os PCN do Ensino Fundamental relatam a importância da valorização da matemática, destacando que essa matéria deve ser abordada de forma que os alunos compreendam o: “[...] mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. [...]” (BRASIL, 1998, p. 15).

O planejamento do professor e a sua constante busca por metodologias de ensino que adequam-se à realidade de cada turma, a cada faixa etária de alunos, ao nível de aprofundamento do conteúdo a ser trabalhado com o objetivo de desenvolver suas aulas possibilitando aos estudantes a adquirirem uma aprendizagem significativa é um trabalho que precisa ser reconhecido e valorizado. Essa valorização precisa ocorrer de diversas formas, ser melhor pago pelo trabalho que faz, ter mais condições de tempo para estudar, planejar e ter acesso a mais materiais para enriquecer suas aulas.

Além do mais, o trabalho com a matemática em conjunto com outros recursos como a informática, materiais manipuláveis, entre outros, podem contribuir para potencializar o processo didático da aula, melhorando tanto o ensino desenvolvido pelo professor como, em consequência, a aprendizagem, proporcionando ao estudante desenvolver habilidades de visualização, argumentação lógica e da compreensão de quando pode aplicar determinado conteúdo à solução de novos problemas (CALDEIRA, 2009).

O professor realizando seu planejamento para o trabalho com seus conteúdos, pode organizar, elaborar ou mesmo aplicar sequências didáticas em suas aulas. Acerca do uso de sequência didática no ensino da matemática, podemos destacar, diante dos estudos para a elaboração deste trabalho, na tentativa de melhorar a qualidade das aulas, como principais pontos positivos: a diversidade que os professores podem ter na construção das aulas assim como as diferentes oportunidades que os alunos terão para aprender. Isto porque as sequências didáticas satisfazem condições, tais como aprender a aprender, melhorar a auto-estima do aluno, a funcionalidade do conteúdo, entre outras, que no processo de ensino-aprendizagem colaboram para que a aprendizagem do discente seja o mais significativa possível.

Uma explicação muito utilizada sobre a estrutura de uma sequência didática é a de ser composta por “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos [...]” (ZABALA, 1998,

p. 18). O que implica entender o desenvolvimento de um conteúdo ou unidade de ensino como um processo de organização do material para promover uma aprendizagem significativa aos discentes.

Para compor a análise feita nesta seção, utilizaremos as considerações acerca da aprendizagem significativa de David Ausubel. Teoria que forneceu elementos para a elaboração do instrumento de coleta de dados, a sequência didática, contribuindo assim, na metodologia da pesquisa para levantar e analisar os dados obtidos nesta investigação.

2.1 Teoria da Aprendizagem Significativa

Diante das leituras feitas e de conversas informais com professores da educação básica de matemática sobre o ensino e aprendizagem da trigonometria, bem como acerca dos debates em sala de aula na Licenciatura em Matemática, podemos perceber algumas dificuldades enfrentadas pelos docentes no processo de ensino desta área da matemática. Dentre as quais estão presentes a falta de conhecimentos prévios, por parte dos alunos, necessários para a aprendizagem deste conteúdo, tais como conceitos geométricos de proporcionalidade e semelhança, além de conceitos de ângulos, entre outros. Também podemos citar a prática de reduzir as aulas de matemática a exposição de conteúdos e resoluções de questões mecanicamente, além da grande quantidade de conteúdos programáticos no currículo.

Considerando estes aspectos de dificuldades no ensino e na aprendizagem na área da trigonometria, foi possível perceber, como docente e pesquisadora em formação, a necessidade de propor uma maneira de ensino que contemplasse o que propõem os PCN:

> Em síntese, os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem. (BRASIL, 1998, p. 60).

Conforme a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, “[...] o fator que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe (cabe ao professor identificar isso e ensinar de acordo). [...]” (MOREIRA, 2017, p. 160). A preocupação deste autor é com o processo de como ocorre a aprendizagem, a ordem em que os conceitos seriam estudados com base na perspectiva de promover uma aprendizagem significativa ao aprendiz (PEREIRA, 2012).

Ausubel, conforme entendimento a partir dos estudos de Moreira (2006), define aprendizagem significativa como um processo de interação entre o novo conhecimento e os conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do ser aprendente, sendo este conceito definido de subsunçor.

> [...] aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação “ancora-se” em conceitos relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Ou seja, novas idéias, conceitos, proposições podem ser aprendidos significativamente (e retidos), na medida em que outras ideias, conceitos, proposições, relevantes e inclusivos estejam, adequadamente claros e disponíveis, na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às primeiras. (MOREIRA, 2006, p. 15).

Outra condição para que ocorra o processo de aprendizagem significativa é que os alunos estejam predispostos a aprender. Entretanto, se o aluno não apresentar uma predisposição para aprender e o material não for elaborado de forma potencialmente significativa, o ensino não passará de um processo mecânico, isto é:

> [...] o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de maneira substantiva e não arbitrária, o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva. Essa condição implica que, independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for, simplesmente, a de memorizá-lo arbitrária e literalmente, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos (ou automáticos). E, de modo recíproco, independentemente de quão disposto a aprender estiver o indivíduo, nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos, se o material não for potencialmente significativo - se não for relacionável à estrutura cognitiva, de maneira não literal e não arbitrária. (MOREIRA, 2006, p. 20).

Quando o aluno não possui um conhecimento subsunçor, Ausubel propõe que o educador utilize organizadores prévios como estratégia facilitadora da aprendizagem. Os organizadores prévios no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo têm a intenção de mapear as ideias que o aluno já tem conhecimento, que ele já sabe, com ideias que ele precisa saber, de forma significativa. Dessa maneira, o uso de organizadores prévios pode ser expresso da seguinte forma:

> [...] que sirvam de ancoradouro para o novo conhecimento e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. Organizadores prévios são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material. Não são, portanto, sumários, introduções ou "visões gerais do assunto", os quais são, geralmente, apresentados no mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade do material que os segue, simplesmente destacando certos aspectos. [...] cabe, todavia, registrar aqui que os organizadores prévios não, necessariamente, são textos escritos. Uma discussão, uma demonstração ou, quem sabe, um filme ou um vídeo podem funcionar como organizador, dependendo da situação de aprendizagem (MOREIRA, 2006, p. 23-24).

Além destes aspectos na aprendizagem significativa, podem ser observados outros conceitos relacionados, quais sejam: a assimilação, diferenciação e reconciliação integrativa os quais não vamos abordar neste trabalho. Temos intenção, contudo, de dar continuidade a compreensão desses tópicos na aprendizagem do conteúdo matemático em projetos posteriores.

Como vimos, para Ausubel o que contribui para a aprendizagem do aluno são seus conhecimentos prévios, nomeado de subsunçor, pois é a partir desse conhecimento que o novo conhecimento ancora-se e se desenvolve. Diante desse aspecto, elencamos como subsunçores necessários para a aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo os seguintes tópicos: ângulos, proporcionalidade e semelhança em geometria, e o estudo do triângulo retângulo.

A teoria da aprendizagem significativa foi desenvolvida por Ausubel em meados de 1960 e está diretamente ligada aos processos da psicologia cognitivista. Um desses processos é a aprendizagem, considerando que, enquanto aprende o aluno atribui significado à realidade à sua volta (BESSA, 2008). Entretanto, com o passar do tempo novos estudos foram desenvolvidos por outros autores a fim de reorganizar e aprimorar as ideias de Ausubel. O pesquisador e físico Marco Antonio Moreira, por exemplo, em seus trabalhos relata sobre a visão da aprendizagem significativa crítica, a qual de agora em diante dedicaremos esforços no sentido de compreendê-la, pois priorizamos esta visão para a elaboração do estudo empírico deste trabalho, a sequência didática.

2.1.1 Aprendizagem significativa crítica

Na visão da aprendizagem significativa na perspectiva de Ausubel, a preocupação é com a consolidação da aprendizagem, já na aprendizagem significativa crítica a pergunta é: “o que o aprendiz faz com o que ele aprendeu?” (PEREIRA, 2012, p. 22).

A aprendizagem significativa crítica proposta por Moreira (2017, p. 226) está associada à “[...] perspectiva que permite ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela. [...]”. Isto é, aprender criticamente é o aluno identificar se o que ele aprendeu serve pra ele ou não, se servir, como ou o quanto o serve (PEREIRA, 2012).

Moreira (2000), ressalta oito princípios facilitadores no processo de aprendizagem significativa crítica, listamos estes abaixo:

a) **Princípio da interação social e do questionamento.** Ensinar/aprender perguntas ao invés de respostas (MOREIRA, 2000).

Este princípio tem a ideia do aluno desenvolver seu conhecimento por meio do seu próprio exercício de elaboração de perguntas, da realização de questionamentos acerca do que está apresentado. Uma postura que tira o aluno da zona de conforto da aula convencional a qual incentiva a mera localização de respostas ou de elaboração destas seguindo procedimentos já estruturados.

Nesta nova proposta, o professor pode incentivar seus alunos a questionar, a ter interações com o próprio docente, bem como com seus colegas de turma a fim de obter uma troca de conhecimentos e consequentemente tornar este fato um princípio facilitador da aprendizagem.

A questão de não centralizar o ensino na interação de perguntas feitas pelo professor e respostas dadas pelos alunos de forma direta, leva-nos a compreender que a relação em que apenas um ser pergunta e o outro responde não fomenta uma troca de ideias do conteúdo para cumprir os objetivos educacionais que propõe este princípio da aprendizagem significativa crítica para o discente. Assim,

> Um ensino baseado em respostas transmitidas primeiro do professor para o aluno nas aulas e, depois, do aluno para o professor nas provas, não é crítico e tende a gerar aprendizagem não crítica, em geral mecânica. Ao contrário, um ensino centrado na interação entre professor e aluno enfatizando o intercâmbio de perguntas tende a ser crítico e suscitar a aprendizagem significativa crítica. [...] (MOREIRA, 2000, p. 52)

De fato, o conhecimento matemático é construído a partir de questionamentos e inquietações do homem ao longo da construção da sociedade para obter respostas às suas perguntas. A postura de produção de conhecimento, independente do nível em que é elaborado, seja algo mais aprofundado ou algo aparentemente simples, não se dá apenas pela repetição de procedimentos, mas pela sua reelaboração e renovação e isso requer uma postura crítica diante da realidade a qual se está envolvido.

b) **Princípio da não centralidade do livro de texto.** Aprender fazendo uso de vários tipos de materiais educativos (MOREIRA, 2000).

Viemos ao longo deste trabalho pontuando a importância da prática pedagógica do professor de qualquer disciplina e, em especial o de matemática, objeto de nossa reflexão, não ser restritiva, incorporar a conexão com a realidade e não se isolar no que é específico de sua área. Essa ideia está presente também quanto ao material didático usado pelo professor nas suas aulas, o quanto se ganha em usar materiais que nem são classificados como didáticos, mas podem ser explorados com a intenção de análise, seleção, exclusão segundo o objetivo e assuntos que se explorar indo além da postura informativa e instrucional do livro didático. Nesse sentido, vale dizer que, em geral, as aulas de todas as matérias têm grande dependência do livro didático, fazendo uso quase único constante deste material e seguindo quase sempre a mesma lógica da comunicação de verdades já elaboradas, desperdiçando possibilidades ricas de estímulo de raciocínio, de elaboração de hipóteses e de sua posterior exclusão ou validação.

Nessa ideia de amplitude, é válido que o docente busque utilizar outros recursos. Não que os livros didáticos disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) sejam ruins, pois não fizemos nenhum estudo para classificá-los. A intenção com essa discussão é com apoio na ideia de Moreira (2000) de que sair dessa zona de conforto e da postura instrucional de aula e do livro didático pode proporcionar ao discente um amplo caminho para o conhecimento do conteúdo abordado pelo professor. Nessa perspectiva,

> [...] o trabalho feito em cima do livro didático tem avançado nos últimos anos, [...] a qualidade dos livros tem melhorado e, principalmente, o sistema de escolhas destes por meio dos professores da educação básica. Mas isto não basta. É necessário desvencilhar-se do livro didático como objeto instrucional prioritário, sem mais determinar que tudo (ou a maioria dos conteúdos) deva partir dele [...]. (PEREIRA, 2012, p. 22-23)

Assim, para compor as aulas de matemática, os professores podem valer-se de materiais alternativos, tais como o uso de sequências didáticas, que podem vir a ser compostas por materiais educativos como jogos, dobraduras, leituras, produção textual, filmes e softwares educacionais. Dos quais, todos estes recursos, podem ser opção no processo de ensino e aprendizagem. Além do que elas são estruturadas com base naquilo que o professor tem consciência de que precisa ser mais e melhor trabalhado em suas turmas, considerando os organizadores prévios e os subsunçores em relação aos conteúdos e a realidade da turma.

c) **Princípio do aprendiz como perceptor/representador.** O aprendiz percebe e representa o mundo na maneira pela qual ele compreende (MOREIRA, 2000).

Este princípio está ancorado no aspecto de que o aprendiz não é apenas um receptor, ele é, principalmente, um ser perceptor. Conforme fica evidente pelas argumentações de Pereira (2012), um ser perceptor, percebe e representa em sua estrutura cognitiva o novo conhecimento, com base em suas experiências pessoais de mundo. Ainda segundo Moreira, (2000, p. 53), “A questão é que o aprendiz é um perceptor/representador, isto é, ele percebe o mundo e o representa. Quer dizer, tudo que o aluno recebe ele percebe.”

Assim, é viável o professor de uma forma geral e, no caso da reflexão deste trabalho, o docente de matemática ficar atento a forma como o aluno percebe aquilo que o professor apresentou e a metodologia, o como apresentou enquanto ensina. Pois, cada estudante vai elaborar sua percepção a partir dos subsunçores que vão dar maior ou menor sentido aquilo que está sendo trabalhado, segundo a noção que elabora de maior ou menor funcionalidade para a sua vida. Nessa perspectiva, Moreira (2000, p. 54), parafraseando (POSTMAN; WEINGARTNER, 1969), afirma que “a capacidade de aprender poderia ser interpretada como a capacidade de abandonar percepções inadequadas e desenvolver novas e mais funcionais”. Uma das argumentações do autor acerca da aprendizagem significativa crítica é a de que ela “implica a percepção crítica e só pode ser facilitada se o aluno for, de fato, tratado como um perceptor do mundo e, portanto, do que lhe for ensinado, e a partir daí um representador do mundo, e do que lhe ensinamos” (MOREIRA, 2000, p. 55). Nessa relação, estão em jogo as diversas linguagens presentes na construção da percepção do aluno e da representação que ele elabora a partir da sistematização de sua aprendizagem.

d) **Princípio do conhecimento como linguagem.** A linguagem está diretamente relacionada à forma como percebemos e representamos a realidade (MOREIRA, 2000).

Moreira (2000), argumentando sobre a linguagem como um ponto importante para a concretização da aprendizagem significativa e da aprendizagem significativa em uma perspectiva crítica, como ele defende, diz que a linguagem não é neutra. Porém, resumir o papel da linguagem a essa compreensão seria tornar mais simples o seu papel na aprendizagem do que ela realmente é.

Assim, para dar a devida importância ao papel da linguagem nesse processo o autor argumenta que aprender uma ciência “implica aprender sua linguagem e, em conseqüência, falar e pensar diferentemente sobre o mundo” (MOREIRA, 2000, p. 55). Logo, a matemática, assim como as demais disciplinas curriculares, apresenta uma linguagem específica e uma explicação do mundo utilizando seus signos, símbolos, pela lógica dos seus enunciados próprios.

Este princípio tem, por exemplo, a ideia de que quando aprendemos um novo conteúdo, estamos aprendendo a linguagem deste conteúdo novo. Em termos de aprendizagem significativa crítica, temos que, aprender criticamente é entender que esta linguagem aprendida nos apresenta uma nova visão do mundo e esta visão está ligada ao conhecimento que já temos internalizado, ao que já sabemos (MOREIRA, 2000). Isto é, o ser aprendente deve estar ciente de como estas relações são produzidas e compreendidas. Nesse contexto, “Praticamente tudo o que chamamos de 'conhecimento' é linguagem. Isso significa que a chave da compreensão de um ‘conhecimento’, ou de um 'conteúdo' é conhecer sua linguagem” (MOREIRA, 2000, p. 55).

e) **Princípio da consciência semântica.** O significado está nas pessoas e não nas palavras (MOREIRA, 2000).

Este princípio, como Moreira (2000) explica, exige a tomada de consciência de três aspectos. O primeiro e mais importante é o de que "o significado está nas pessoas, não nas palavras", assim o significado das palavras são atribuídos a elas segundo a sua experiência e, nesse ponto, a importância do conhecimento prévio do aluno no processo de aquisição de significados acerca do conteúdo da matéria ou da aula encontra destaque. O segundo nível de consciência é o de que as palavras são representações acerca do que elas pretendem explicar, mas a palavra "não é a coisa" (MOREIRA, 2000, p. 56).

O terceiro ponto de consciência semântica é o de não deixar de perceber que "ao usarmos palavras para nomear as coisas" o significado das palavras muda de acordo com os contextos em que estejam inseridos. Essa compreensão é muito importante para que o professor tenha clareza da importância dos significados das palavras e terminologias matemáticas em diversos contextos, pois isto pode causar não só a incompreensão em algum conteúdo, mas também a confusão entre o que significam no contexto específico dessa área.

f) **Princípio da aprendizagem pelo erro.** Aprendemos corrigindo nossos erros (MOREIRA, 2000).

A ideia central deste princípio, "[...] é a de que o ser humano erra o tempo todo. É da natureza humana errar. O homem aprende corrigindo seus erros. Não há nada errado em errar. Errado é pensar que a certeza existe, que a verdade é absoluta, que o conhecimento é permanente" (MOREIRA, 2000, p. 58).

Ademais, ainda segundo esse autor, a escola apresenta o conceito de certeza estabelecido cujos "[...] professores são contadores de verdades e os livros estão cheios de verdades. [...]" (MOREIRA, 2000, p. 58). Nesta perspectiva, a escola acaba promovendo uma aprendizagem de fatos e certezas, entretanto, quando pensamos no erro cabe ao discente e docente encará-lo como um processo natural, visto que o ser humano erra e acerta o tempo todo.

No contexto da aprendizagem significativa crítica, o erro é compreendido como a oportunidade de aprender a aprender, de aprender a repensar certezas e ao mesmo tempo se superar ao corrigi-las. Sendo um processo de construção do seu eu, da identidade pessoal de cada um (MOREIRA, 2000).

g) **Princípio da desaprendizagem.** Aprender a desaprender e selecionar apenas o relevante (MOREIRA, 2000).

Como já foi dito até aqui, a aprendizagem significativa é um processo pelo qual o novo conhecimento interage com o conhecimento prévio, e, de certa maneira, apoia-se nele. Ausubel chama esse processo de assimilação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. É preciso também destacar que esse conceito já foi trabalhado por Piaget trabalhando na sua teoria construtivista da qual Ausubel é um dos seus sucessores em estudos dessa natureza.

Para aprender de maneira significativa é necessário que ocorra esta assimilação. Entretanto, quando esse processo não ocorre, em que o conhecimento prévio de certa forma impede de absorver o novo conhecimento, estamos diante de um caso de desaprendizagem. O termo “desaprender” aqui não está relacionado ao fato de não aprender o conteúdo, e sim, ao aspecto do aluno observar e selecionar na sua estrutura cognitiva os conceitos que serão relevantes para a aprendizagem do novo conteúdo.

Sendo assim, aprender a desaprender é saber selecionar e distinguir na estrutura cognitiva o relevante do irrelevante para então obter uma aprendizagem significativa e crítica. Para este tipo de aprendizagem, “[...] sua facilitação deveria ser missão da escola na sociedade tecnológica contemporânea.” (MOREIRA, 2000, p. 60).

h) **Princípio da incerteza do conhecimento.** Perguntas são instrumentos de percepção, definições e metáforas são instrumentos para pensar (MOREIRA, 2000).

Moreira (2000, p. 60), parafraseando Postman (1996), relata que “definições, perguntas e metáforas são três dos mais potentes elementos com os quais a linguagem humana constrói uma visão de mundo”. O aprendiz que percebe tais instrumentos compreende o conhecimento como construção humana. Todo conhecimento que está presente hoje na humanidade não veio do acaso, esse conhecimento foi construído, desconstruído e segue em construção dia após dia por distintas gerações. O ser humano é um ser por natureza curioso, então certamente sempre existirão perguntas, que serão encontradas respostas e que provavelmente serão contestadas, surgindo assim novas interpretações e outras novas perguntas. E quanto mais complexas e problematizadoras forem essas questões mais o conhecimento se renova. Nesse sentido, “[...] A incerteza do conhecimento não é a rejeição do conhecimento, mas o conceito de que o aprendido hoje pode ser contestado amanhã, e essa constatação também pode ser objeto de análise e assim por diante.” (PEREIRA, 2012, p. 25).

Esta seção condensa os estudos que fizemos acerca da aprendizagem significativa e da aprendizagem significativa crítica, como propõe Moreira (2000), e nos ajuda a refletir acerca de como o professor de matemática pode em sua prática de sala aula contribuir para facilitar a aprendizagem dos seus alunos de modo que esse processo seja significativo e possa fazer sentido para a realidade dos estudantes. A próxima seção, por sua vez, apresenta o contexto do surgimento da trigonometria e, em sequência, os conceitos fundamentais para compreensão da trigonometria no triângulo retângulo.

3 ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Esta seção apresenta conceitos relacionados ao conteúdo matemático da trigonometria. Abordamos um resumo do contexto histórico da trigonometria a fim de situar o leitor quanto à construção temporal dos conceitos trigonométricos na sociedade. Abordamos também definições do conteúdo que tratam sobre conceitos geométricos fundamentais, tais como ângulos e definição de triângulo retângulo, além do estudo das razões trigonométricas nos triângulos retângulos.

Ao longo desta seção, sempre que pertinente, mencionamos autores que abordam este campo da matemática, os quais estudamos e serviram de base para discussão apresentada. Para construção das definições foram considerados autores como Andrade (2017), Barbosa (1995), Carmo *et al.* (1992), Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci (1998).

3.1 Breve contexto histórico da trigonometria

Apresentar a história da matemática em um trabalho acadêmico como este tem a função de reafirmar a ideia de que, trabalhar história da matemática com o aluno é revelar aplicações que o homem fez na construção dos saberes matemáticos em uma sociedade em diferentes momentos históricos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, relatam que, ao usar deste aspecto histórico o professor apresenta as ligações entre o passado e o presente. Explorar a abordagem da História da Matemática nas aulas é de grande valia, pois "pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, [...] o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento." (BRASIL, 1998, p. 42).

A Trigonometria divide-se etimologicamente em "[...] *trigonom*, que significa triângulo, e *metria*, que significa medida [...]" (PEREIRA, 2012, p. 30-31). Assim sendo, trigonometria quer dizer medida de triângulos. Reafirmando a ideia de conhecimento como uma elaboração coletiva, "a trigonometria, como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação [...]" (BOYER, 1974, p. 116).

Nessa perspectiva, descreveremos sobre a introdução da trigonometria de forma resumida, analisando sua construção em três momentos históricos de civilizações que contribuíram para o seu desenvolvimento. São elas: gregas, hindus e árabes. Reportando, sempre que possível, como sua origem está direcionada às necessidades práticas na medição de distâncias inacessíveis.

Carmo *et al.* (1992), relatam que a trigonometria foi criada a partir da matemática grega, e seu desenvolvimento está associado às necessidades práticas da Astronomia, com contribuição no cálculo do tempo, além de contribuições nas navegações, principal meio de transporte da época, com a geografia local associada a posicionamentos e distâncias de um ponto a outro.

Ademais, podemos citar um outro exemplo de aplicação da trigonometria no início de seu desenvolvimento, proposto por Aristarco de Samos que viveu em torno de 300 a.C e fez cálculos para identificar a distância da Terra ao Sol usando conceitos trigonométricos. Apesar dos erros encontrados nesse trabalho de Samos, provavelmente devido aos experimentos que ele usou, seu raciocínio é considerado correto (CARMO *et al.*, 1992).

Hiparco de Nicéia, astrônomo grego, foi responsável por grandes contribuições na trigonometria sendo considerado o pai desta área da matemática, o mesmo viveu por volta de 190-120 a.C, e relacionou conceitos astronômicos aos geométricos para desenvolver o que conhecemos hoje como trigonometria (PEREIRA, 2012).

Ademais, dentre os autores gregos que contribuíram no estudo e desenvolvimento da trigonometria podemos citar Tales de Mileto, Pitágoras, Eratóstenes e Ptolomeu.

Vale ressaltar, conforme Pereira (2012), que o matemático Cláudio Ptolomeu, 100-178 d.C, escreveu a obra mais influente sobre a trigonometria da antiguidade. A coleção era composta por treze livros chamada de Síntese Matemática, estas descreviam sobre o modelo grego do qual o autor analisava “[...] o movimento do sol, da lua e dos planetas [...]” (PEREIRA, 2012, p. 29).

Na matemática indiana, a trigonometria continuou com aplicações na Astronomia, entretanto seu desenvolvimento na Índia apresentou características voltadas ao campo matemático da aritmética, isto é, com aplicações de operações numéricas, como afirma Carmo *et al*. (1992).

Ainda segundo Carmo *et al.* (1992), os matemáticos árabes herdaram conceitos da trigonometria grega e hindu, entretanto os matemáticos árabes foram responsáveis por desenvolver novas relações trigonométricas, as quais conhecemos hoje como “[...] a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante [...]” (CARMO *et al.*, 1992, p. 105). Neste trabalho dedicaremos esforços no estudo das relações trigonométricas cosseno, tangente e seno, sendo esta última composta por contribuições dos matemáticos árabes para o seu desenvolvimento.

Basicamente o interesse pela trigonometria entre os povos gregos, hindus e árabes era sua aplicação na Astronomia. Com o surgimento do Renascimento, época da expansão marítima europeia, o qual levou a um progresso da cartografia, houve então a necessidade de aplicações da trigonometria nesta área da cartografia e na topografia (CARMO *et al.*, 1992).

Quanto à origem das palavras seno e cosseno, estão atreladas a estudos na Astronomia. Enquanto que a palavra tangente, provavelmente, está associada a problemas de alturas e distâncias inacessíveis (ANDRADE, 2017).

A palavra seno, segundo Lima (1991, p. 187), “[...] significa volta, curva, cavidade [...]”. Este fato deve-se ao gráfico da função seno ser bastante sinuoso, o que leva muitas pessoas a acreditarem nesta definição. Entretanto, o significado da palavra seno é atribuído de outra forma.

> [...] na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria jiba, em vez de jaib. Jiba significa a corda de um arco. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. (ANDRADE, 2017, p. 26-27).

Já a definição de cosseno surgiu a partir do conceito do seno, isto é, o cosseno é o seno do complemento de um ângulo (LIMA *et al.*, 1997). Por exemplo, o cosseno do ângulo de 60º é o seno do complemento do ângulo de 30º.

Com relação à tangente, “a função tangente era a antiga função sombra, utilizada nos relógios de sol. A noção de tangente apareceu com a necessidade de se calcular alturas [...]” (ANDRADE, 2017, p. 27). Com base nesta perspectiva, trabalharemos com a razão trigonométrica da tangente no cálculo de alturas inacessíveis para compor o processo de ensino e aprendizagem das razões trigonométrica seno, cosseno e tangente.

De acordo com a BNCC a trigonometria no Ensino Fundamental deve ser trabalhada no 9º ano. Sendo sua abordagem relacionada ao estudo de medidas estabelecendo relações entre o comprimento dos lados e medidas dos ângulos de um triângulo (PEREIRA, 2012).

Nesse sentido, pode-se perceber que a trigonometria foi explorada de início para determinar distâncias inacessíveis. Mas adiante, seu estudo estendeu-se a outras ciências, como por exemplo, reafirmando sua utilização na medicina, no clima e até mesmo na música.

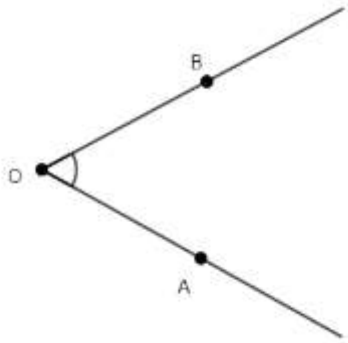
3.2 Definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo

Detalharemos a seguir a construção do conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de conhecimentos geométricos fundamentais ao seu estudo.

Segundo Barbosa (1995), Carmo *et al*., (1992) entre outros autores que escreveram sobre Geometria Euclidiana Plana, ressaltam que o ângulo, por definição, é uma figura geométrica composta por duas semirretas de mesma origem. Sendo as semirretas os lados do ângulo e o ponto de encontro destas semirretas seu vértice. O ângulo pode ser representado de várias formas: AÔB, BÔA, Ô ou com uma letra do alfabeto grego, por exemplo β. Quando utilizamos a notação AÔB, por exemplo, a letra que indica o vértice deve aparecer entre as outras duas letras que representam os pontos das duas semirretas que formam o ângulo.

O ângulo agudo é um ângulo cuja sua medida é menor que um ângulo de 90º. Conforme a figura 01 abaixo.

Figura 01- Ângulo agudo



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

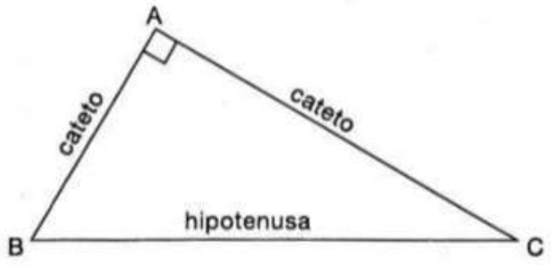
Os ângulos são medidos em graus, para fazer esta medição utiliza-se um instrumento denominado de transferidor, tipo de régua no formato de meio círculo para medir ângulos de até 180º ou um círculo completo para medir ângulos de até 360º

(CARMO *et al.*, 1992). No cotidiano, podemos obter a ideia de ângulo através da visualização de vários objetos, dentre eles podemos citar a figura formada por dois ponteiros de um relógio, entre outras figuras.

Muitas figuras geométricas planas são construídas através de segmentos de retas. A mais simples delas é o triângulo, esse composto por três pontos não colineares. Em outras palavras, três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta. Também é constituído por três segmentos de retas, formadas pelos três pontos. Chamamos os três pontos de vértices do triângulo e os segmentos de reta, são os lados do triângulo (BARBOSA, 1995).

Por definição, conforme Barbosa (1995), para que um triângulo seja retângulo é necessário que este possua um ângulo reto, de 90º. O lado oposto a este ângulo reto é chamado de hipotenusa do triângulo retângulo, sendo este o maior lado do triângulo. Os outros dois lados do triângulo são chamados de catetos e os ângulos opostos aos catetos são agudos, menores que 90º. Conforme a figura 02 abaixo.

Figura 02 - Triângulo retângulo

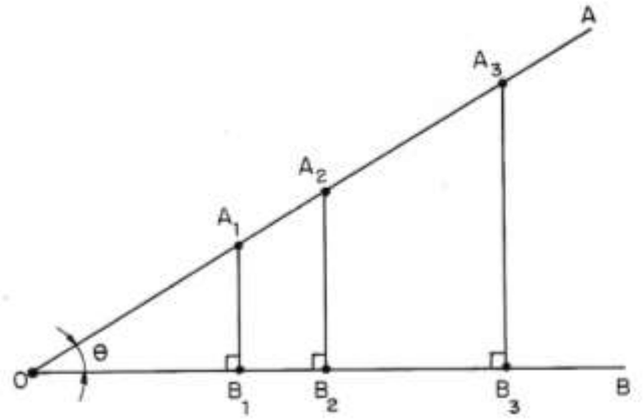


Fonte: Barbosa (1995)

A partir da construção do conceito de ângulo agudo e triângulo retângulo, definimos as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Para construir o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo, considere o ângulo agudo θ, isto é $0º < \theta < 90º$, no vértice O. Considerando arbitrariamente sobre a semirreta OB os pontos B1, B2, B3 etc, por esses pontos tracemos perpendiculares que se encontram com a semirreta OA nos pontos A1, A2, A3 etc, respectivamente. Obtemos assim os triângulos retângulos OA1B1, OA2B2, OA3B3 etc. Os triângulos formados são semelhantes por possuírem os mesmos ângulos agudos θ (CARMO *et al.*, 1992). Podemos, portanto, escrever:

Figura 03 - Ângulo subdividido



Fonte: Carmo *et al.* (1992)

A partir dos triângulos formados na figura 03, podemos estabelecer três relações que dependem apenas do ângulo agudo θ. Estas relações não dependem da medida do comprimento dos lados do triângulo retângulo. Considerando K1, K2 e K3 constantes, temos: 1) $\frac{\overline{A1B1}}{\overline{OA1}} = \frac{\overline{A2B2}}{\overline{OA2}} = \frac{\overline{A3B3}}{\overline{OA3}} = \cdots = K1$; 2) $\frac{\overline{OB1}}{\overline{OA1}} = \frac{\overline{OB2}}{\overline{OA2}} = \frac{\overline{OB3}}{\overline{OA3}} = \cdots = K2$; 3) $\frac{\overline{A1B1}}{\overline{OB1}} = \frac{\overline{A2B2}}{\overline{OB2}} = \frac{\overline{A3B3}}{\overline{OB3}} = \cdots = K3$; (ANDRADE, 2017; CARMO *et al.*, 1992; GIOVANNI; GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 1998).

A constante K1, da primeira relação, é chamada de *seno do ângulo agudo θ* e representa o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo θ e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo (GIOVANNI; GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 1998). Isto é:

$$sen\ \theta = \frac{\overline{A1B1}}{\overline{OA1}}$$

Já a constante K2, da segunda relação, é chamada de *cosseno do ângulo agudo θ* e representa o valor da razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo θ e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo (GIOVANNI; GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 1998). Isto é:

$$cos\ \theta = \frac{\overline{OB1}}{\overline{OA1}}$$

Analisando a terceira e última relação, a constante K3 representa a *tangente do ângulo agudo θ* e seu valor é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo θ e a medida do cateto adjacente ao ângulo θ em qualquer triângulo retângulo (GIOVANNI; GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 1998). Isto é:

$$tg\ \theta = \frac{\overline{A1B1}}{\overline{OB1}}$$

As relações *sen θ*, *cos θ* e *tg θ* são chamadas de razões trigonométricas do ângulo agudo θ.

Esta é uma síntese dos conteúdos abordados na pesquisa de campo deste trabalho monográfico. À medida que esta seção foi sendo elaborada, a partir do estudo e consulta aos autores mencionados, pudemos aprimorar nossa compreensão acerca da trigonometria no triângulo retângulo. Nesse sentido, nos pareceu importante estudar, organizar e sintetizar os conceitos expostos para contribuir em nosso processo de maturação da aprendizagem deste conteúdo e assim de seu ensino.

4 METODOLOGIA

A pesquisa acadêmica é definida como um procedimento científico por meio do qual investiga-se a realidade. Essa atividade tem como objetivo oportunizar meios teóricos e práticos que possibilitem construir respostas para problemas propostos pelo pesquisador, relacionando pensamento e ação. Portanto, é a pesquisa que fortalece as atividades de ensino, atualizando-os frente a realidade do mundo (DEMO, 1985; MINAYO, 1994). Dessa maneira, buscamos desenvolver uma pesquisa baseada em teóricos e articulada com a prática docente, visto que o ato de ensinar está intimamente relacionado ao de pesquisar, pois “não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino.” (FREIRE, 2002, p. 32).

Acreditamos, assim, que o procedimento adotado para o trabalho enfatiza a necessidade de articular pesquisa e ensino e proporciona o entendimento do objeto de investigação. Nesse caso específico, envolvendo as razões trigonométricas de um triângulo retângulo como objeto de aprendizagem.

Para melhor compreender o processo metodológico, abordamos nas seções seguintes o delineamento que norteou a pesquisa, tais como: a caracterização da pesquisa, a escola e a turma em que o trabalho foi desenvolvido e o instrumento utilizado para obter os dados da pesquisa juntamente as percepções da pesquisadora em formação.

4.1 Caracterização da pesquisa

A realização desta pesquisa teve por objetivo analisar uma proposta de ensino baseada em uma sequência didática no estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para tanto, optamos por uma abordagem de pesquisa qualitativa, em que se caracteriza os dados de forma narrativa, em outras palavras, “[...] trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atividades, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações [...]” (MINAYO, 1994, p. 21-22). Sendo assim, o uso da abordagem de pesquisa qualitativa contribui para uma melhor explicação e compreensão da realidade educacional investigada.

O pesquisador no momento da análise dos dados coletados por meio da pesquisa ancorada em uma perspectiva qualitativa examina os dados na busca de compreendê-los e explicá-los com o intuito de descrevê-los e não com preocupação de quantificá-los, mas com a tarefa de transformá-los em informação. Nesse sentido,

> Os autores que seguem tal corrente não se preocupam em quantificar, mas, sim, em compreender e explicar a dinâmica das relações sociais que, por sua vez, são depositárias de crenças, valores, atitudes e hábitos. Trabalham com a vivência, com a experiência, com a cotidianidade e também com a compreensão das estruturas e instituições como resultados da ação humana objetivamente. [...] (MINAYO,1994, p. 24)

Ademais, levamos em consideração que a abordagem de pesquisa qualitativa e a quantitativa não se opõem, mas podem e devem, sempre que possível e necessário, complementar-se (NEVES, 1996). Então, na presente pesquisa utilizamos o aspecto quantitativo não para quantificar dados de um determinado fenômeno, mas para fortalecer o processo de análise e compreensão destes.

Quanto à classificação das pesquisas com base em seus objetivos gerais, Gil (2002) as classifica em exploratórias, descritivas e explicativas. Optamos pelo nível de pesquisa exploratória pois é o que melhor adequa-se a abordagem do problema/objeto de estudo, bem como as condições da pesquisadora em processo formativo. Esta pesquisa envolve um aprimoramento de ideias, em outras palavras, “propicia maior familiaridade com o problema” (GIL, 2002, p. 41) além de abranger levantamento bibliográfico, entrevistas com os sujeitos pesquisados, bem como a análise de exemplos, e adequar-se à abordagens de estudo bibliográfico e de caso (GIL, 2002). Reiteramos assim que este trabalho foi elaborado com base nas caraterísticas de um estudo bibliográfico e de caso.

Para melhor compreender a problemática em questão, a dificuldade dos alunos em conteúdos da matemática que versam sobre a trigonometria, buscamos suporte em autores que discutem sobre o processo de ensino, ensino e aprendizagem da trigonometria e livros didáticos, dos quais contribuíram para a construção da fundamentação teórica do presente trabalho, além da análise dos documentos: da BNCC e o PCN do Ensino Fundamental. Os autores estudados são: Pereira (2012), Moreira (2000, 2006, 2017), Zabala (1998), Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci (1998), Andrade (2017), Carmo *et al.* (1992), Barbosa (1995).

A fase da pesquisa de campo deste trabalho teve como objetivo analisar as dificuldades e a aprendizagem dos alunos em conteúdos da matemática que tratam sobre a trigonometria. Para isto, optou-se por uma intervenção didática sobre o conteúdo de Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, aplicada em 08 encontros.

4.2 A escola

A instituição educacional em que a pesquisa foi desenvolvida localiza-se na zona urbana de Areia de Baraúnas-PB. O município possui área territorial de 96 km² com uma população estimada em aproximadamente 2.126 habitantes (IBGE[5], 2017). A escolha desta escola aconteceu pelo fato de estar localizada no município em que a pesquisadora reside e pelo amplo contato com os profissionais que trabalham na escola, tornando mais fácil o aceite da direção para realização da investigação.

Portanto, a escola em que a pesquisa foi aplicada é da rede Municipal de Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, situada na zona da 6º Gerência Regional de Educação do alto sertão paraibano. Conta com 117 alunos e um corpo docente composto por 10 professores efetivos, todos atuando na sua área de formação, e conta com apenas 01 professor de matemática.

Vale ressaltar que desses 117 alunos, 84 participavam das aulas pelo Classroom e 25 via material impresso. Segundo informações da direção, a escola conta com 08 alunos matriculados e não participam de nenhum tipo de atividade do ano letivo de 2021, caracterizando o abandono escolar. Mesmo a gestão informando que tentou manter contato para reestabelecer os vínculos desses alunos, não obtiveram êxito.

O rendimento da escola conforme dados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) no ano de 2017, dados do último registro, foi de 3,7. Sendo que a escola tinha como meta alcançar o índice de rendimento igual a 4,0. O que concerne à aprendizagem em matemática no 9º ano do Ensino Fundamental, segundo dados do site QEdu nos anos de 2015 e 2017, últimos registros disponibilizados da Prova Brasil para esta escola, o rendimento na competência de resolução de problemas ficou em apenas 3% e 0%, respectivamente. Estes dados revelam o baixo rendimento de aprendizagem da matemática nesta escola, um cenário preocupante e também comum a outras realidades.

4.3 A turma

---

[5] IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Neste trabalho, em função do conteúdo matemático objeto de análise, a turma selecionada para a pesquisa foi uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Composta por 17 alunos, dos quais 05 devolveram o material da pesquisa, a resolução das atividades propostas na sequência didática desses 05 alunos apenas 04 participaram do início ao fim, sendo que 01 acompanhou as aulas pelo material impresso.

O professor regente da turma relata que a falta de compromisso dos alunos do 9º ano com as aulas é um problema recorrente inclusive com as demais disciplinas da escola, sendo um assunto bastante tratado em reuniões entre os professores e a direção escolar.

O perfil dessa turma foi traçado a partir de informações coletadas por meio das observações diretas e conversas orais e escritas estabelecidas junto ao professor regente da turma e também com a direção escolar.

4.4 Sequência Didática: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Preparamos uma intervenção pedagógica para melhor compreender o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo matemático. Como já referido, no momento de aplicação da sequência didática o mundo se encontra diante de uma pandemia, da qual a população estava em distanciamento social. Sendo assim, nos encontros síncronos, caracterizados pela interatividade simultânea, utilizou-se da ferramenta do Google Meet para a realização da sequência didática. Já os momentos assíncronos foram realizados pela plataforma do Whatsapp.

Através destas ferramentas que auxiliam os professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem de forma remota, optou-se por aplicar uma sequência didática no intuito de proporcionar aos alunos situações que favorecem uma aprendizagem significativa, conforme abordado no referencial teórico deste trabalho. Nesse sentido, procuramos estabelecer um processo em que o aprendiz compreendesse que é capaz de identificar formas de resoluções para situações problemas envolvendo o conteúdo da trigonometria, tornando-se cada vez mais autônomo na sua aprendizagem. Entretanto, o contexto da pandemia aliado a outros aspectos tais como a falta de adesão, estímulo, entre outros não tornaram possível a realização da proposta tal qual como havia sido inicialmente planejada.

Identificando que no modelo remoto as aulas de matemática se tornam cada vez mais de difícil compreensão para os estudantes acompanharem o processo de resolução passo a passo das questões matemáticas, e que assim pulam etapas necessárias à compreensão dos cálculos e dos raciocínios para sua resolução, buscamos uma alternativa que pudesse colaborar no sentido desta melhor visualização. Encontramos no Youtube uma ideia de como produzir uma caneta touch[6], utilizando materiais de fácil acesso, que pudesse se adaptar a tela do celular aberta no Google Jamboard como se fosse a reprodução de uma mesa digitalizadora e assim procedemos.

Pegamos uma caneta, retiramos o refil de tinta na ponta onde seria a escrita da caneta, fizemos uma bolinha de algodão e afixamos na sua saída, pegamos um pedaço de papel alumínio com a parte brilhosa exposta para fora e envolvemos na bola de algodão, fixando assim o papel alumínio na caneta. Assim a utilizamos para descrever no celular os cálculos que iam automaticamente aparecendo na tela do Jamboard compartilhada no Google Meet para os alunos visualizarem. Eliminando a dificuldade em selecionar a caneta do aplicativo do Google e utilizar um mouse do computador para fazer a escrita cursiva, manual, que é muito lenta e deixa a escrita completamente desorganizada quando não se tem uma habilidade motora fina muito bem desenvolvida.

A proposta da sequência didática baseia-se na concepção de Zabala, na qual uma SD pode ter contribuições positivas no ensino e aprendizagem do conteúdo a ser aprendido. Assim a SD representa “[...] um processo que não só contribui para que o aluno aprenda certos conteúdos, mas também faz com que aprenda a aprender e que aprenda que pode aprender. [...]” (ZABALA, 1998, p. 63).

A opção por uma SD para a construção do conhecimento acerca da trigonometria no triângulo retângulo se deu porque esta possibilitaria adequar, na sua estrutura, vários meios metodológicos com potencial de promover a aprendizagem do aluno.

Zabala (1998) apresenta quatro unidades didáticas como exemplo de intervenção pedagógica, para tanto optamos pela proposta da segunda unidade. Essa

---

[6] Caneta Touch é um instrumento que se assemelha a uma caneta e serve para escrever/digitar em smartphones e tablets. Fonte: Canal da Lu. Disponível em: <https://youtu.be/TWeGpuWmcpg>

unidade é representada da seguinte forma: “1. Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática 2. Busca de soluções 3. Exposição do conceito e algoritmo 4. Generalização 5. Aplicação 6. Exercitação 7. Prova ou exame 8. Avaliação.” (ZABALA, 1998, p. 67).

Entretanto, não seguimos criteriosamente esta sequência, optamos por fazer algumas alterações que se adequassem à turma a qual trabalhamos no desenvolvimento da pesquisa. Retiramos a parte de “prova ou exame” pois consideramos que outros procedimentos poderiam contribuir melhor para a investigação e optamos, então, por outros métodos de avaliação a exemplo de um diário para o aluno relatar, registrar o que aprendeu durante a aula. Outro instrumento com esse potencial foi o questionário composto de questões diretas sobre o conteúdo e outras no formato de questões autoavaliativas.

Ademais, a sequência de estudos trabalhada tem suporte na BNCC, bem como nas ideias de aprendizagem significativa crítica proposta por Moreira (2000). A SD aborda os seguintes objetos de conhecimento conforme a BNCC: “Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes;” e “Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.” (BRASIL, 2017, p. 317-319).

Vale ressaltar que a intenção da pesquisadora em formação era ter conhecimento da construção dos saberes dos discentes diariamente e para isso foi desenvolvido um diário através do formulário Google, a fim de captar estas informações. Entretanto, não houve sucesso nessa iniciativa visto que os alunos não responderam ao diário, mesmo sendo convidados a responderem-no.

Sabendo que a secretaria de educação do município em que a pesquisa foi aplicada é responsável pela entrega de atividades impressas aos responsáveis legais dos discentes, enviamos os materiais da pesquisa para este setor de forma que os discentes recebessem tal material. Sendo disponibilizado pela pesquisadora os materiais mais necessários como transferidor de 180° e papel colorido tamanho A4, pois os mesmos facilitariam nas construções dos triângulos. Junto aos materiais, também foram entregues uma sequência de atividades, questionários I e II, uma avaliação, assim como o termo de consentimento.

As questões de 01 a 06 e de 01 a 04 dos questionários I e II (APÊNDICE A), respectivamente, foram adaptadas da dissertação de Mestrado de Andrade (2017) e do site Matemática Multimídia (online).

Já as questões da atividade avaliativa (APÊNDICE B) foram desenvolvidas da seguinte forma: a primeira questão foi adaptada do livro didático “A conquista da Matemática” e a segunda foi retirada de forma idêntica desse mesmo livro, cujo os autores são Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci (1998), a terceira questão foi adaptada do artigo científico “Lendo e escrevendo o mundo com Matemática: estudando trigonometria com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental” de Jürgensen (2019).

A seguir descreveremos brevemente o que foi apresentado nos encontros divididos em quatro etapas.

1ª Etapa (02 aulas)

O objetivo desta etapa foi o de trabalhar o mapeamento dos conhecimentos prévios dos alunos acerca de conceitos matemáticos necessários ao estudo da trigonometria e apresentar a história matemática desse conteúdo aos discentes. Para identificar os conhecimentos prévios (subsunçores), propusemos uma situação problema a ser debatida em sala de aula entre alunos e pesquisadora/professora em formação.

2ª Etapa (06 aulas)

O objetivo desta etapa foi trabalhar a construção, passo a passo, das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Portanto, nesta segunda etapa, orientamos os discentes na construção do desenho do triângulo retângulo. Durante a produção do triângulo, abordamos conceitos da geometria euclidiana plana, ângulos, proporcionalidade e semelhança de triângulos, bem como as relações métricas no triângulo retângulo e também abordamos os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Optamos então, pelo uso de tabelas para anotar dados dos triângulos construídos pelos alunos e aplicações de atividades.

3ª Etapa

O objetivo desta etapa foi trabalhar a confecção de um material concreto, o Teodolito: “[...] instrumento ótico utilizado para medir ângulos, tanto horizontais como verticais, em medidas diretas e indiretas de distâncias” (MUSEU DE ASTRONOMIA, 2010, online). Com orientações da sua utilização na prática para medir alturas inacessíveis de algum ponto do município de Areia de Baraúnas-PB.

A motivação para desenvolver a construção de um teodolito, utilizando materiais de fácil acesso, veio da experiência da pesquisadora em formação em uma aula da componente curricular Laboratório no Ensino de Matemática II, enquanto discente do curso de Licenciatura Plena em Matemática pela UEPB.

4ª Etapa

O objetivo desta etapa foi aplicar um questionário avaliativo do conteúdo das razões trigonométricas no triângulo retângulo aos alunos, composto por problemas teóricos e questões que versam sobre uma autoanálise, a fim do aluno se autoavaliar e avaliar a metodologia adotada pela pesquisadora em formação. A seguir destacamos o procedimento e a análise dos dados obtidos por meio da sequência didática.

5 PROCEDIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos os procedimentos e análise dos dados adquiridos com a aplicação da sequência didática entre os dias 10 de setembro de 2021 e 01 de outubro de 2021, totalizando 08 encontros, dos quais 06 foram de 30 minutos e 02 de uma hora de forma síncrona na plataforma Google Meet.

As considerações acerca do conteúdo de Geometria Euclidiana Plana estão ancoradas nas ideias do livro de Barbosa (1995), já com relação ao conteúdo da trigonometria buscamos base em autores como Carmo *et al.* (1992) e no livro didático "A Conquista da Matemática" dos autores Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci (1998). A discussão de aprendizagem significativa crítica tem fundamento nas discussões propostas por Moreira (2000) e também analisaremos a SD de acordo com a aprendizagem significativa da Teoria Ausubeliana.

Sendo assim, analisamos as questões as quais nos propusemos sobre o conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo na SD. Para facilitar a análise dos dados atribuímos um código para cada aluno sujeito da investigação, bem como para manter o anonimato destes os chamaremos de alunos A1, A2, A3, A4 e assim sucessivamente. Dos 17 alunos matriculados, apenas os discentes A1, A2, A3, A4 e A5 devolveram a sequência didática. Entretanto o aluno A1 devolveu sua SD sem resolução para os questionários I e II, e o aluno A5 participou da pesquisa somente via material impresso, não acompanhando as aulas síncronas.

5.1 1ª Etapa:

Primeiro encontro:

O primeiro encontro com a turma do 9º ano aconteceu no dia 10 de setembro de 2021 e durou cerca de 30 minutos, apenas 02 (dois), A1 e A2, dos 17 (dezessete) alunos matriculados assistiram a aula. Este momento foi destinado às apresentações tanto da pesquisadora como dos educandos, mobilizado pelo professor de matemática da turma, que se dispôs a colaborar com a realização da pesquisa em sua turma.

Nesta aula, explicamos sobre a proposta da sequência didática com a turma e o que a pesquisadora, em processo de formação, pretendia alcançar com o desenvolvimento da proposta de ensino, corroborando a ideia de Zabala (1998) que tanto professores quanto alunos precisam ter clareza acerca dos propósitos da SD.

Explicamos tratar-se de uma pesquisa acadêmica voltada ao ensino e aprendizagem da trigonometria a qual seria desenvolvida em 04 (quatro) etapas.

Então, como forma de mapear e organizar os conhecimentos prévios (subsunçores) dos alunos apresentamos uma situação problema. Para Ausubel (MOREIRA, 2017), o mapeamento do que o aluno já sabe é um dos principais fatores que influenciam na aprendizagem deste.

A escolha da situação problema como organizador prévio tem base em estudos das sequências didáticas, pois “[...] quando o professor pede aos alunos diferentes formas de resolver o problema ou conflito, é a que pode permitir saber que conhecimentos têm acerca do tema em questão. [...]” (ZABALA, 1998, p. 67).

Ademais, esta escolha também foi estabelecida pelo fato de que a situação problema provocaria uma discussão acerca do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, pois consideramos válida a ideia de que “[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção.” (FREIRE, 2002, p. 25).

Sendo assim, a sugestão da situação problema para esta aula foi trabalhar o conteúdo de trigonometria com uma questão extraída do site Matemática Multimídia (online), a qual trabalha uma reportagem sobre a altura das árvores da Floresta Amazônica, acessível pelo link https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/994/a_altura_da_arvore---folha_do_aluno.pdf. Segundo dados da questão, existem árvores na Amazônia com mais de 50 metros de altura, dessa forma era viável questionar os alunos sobre como alguém conseguiu medir árvores tão altas.

A fim de aproximar essa questão ao cotidiano do estudante, à realidade do bioma local, questionamos acerca de quais árvores eles tinham conhecimento na região em que residiam. Os alunos presentes, A1 e A2, permaneceram em silêncio, apesar de serem convidados a falar da flora na região da escola.

Para resolver esta questão, os alunos poderiam falar sobre os vários recursos existentes para medir alturas, tais como a trena que seria o mais comum ao seu cotidiano, GPS, teodolito, entre outros. Durante esse momento, os dois alunos, A1 e A2, responderam que não sabiam.

Além do mais, os alunos poderiam trazer a relação que a trigonometria tem com medidas de distâncias inacessíveis, pois, estes discentes já tinham trabalhado situações problemas, parecidas com esta, usando a trigonometria. Vale ressaltar que, na semana anterior à aplicação da pesquisa, os estudantes, conforme informações do professor, já tinham estudado este conteúdo com ele.

A falta de comunicação dos discentes durante a aula mesmo quando questionados pelo professor, talvez por receio de expressarem sua opinião, corrobora para o que Moreira (2000) ressalta sobre a predisposição em aprender. Ele aponta que, se o aluno não apresenta predisposição para aprender, o ensino continuará sendo mecânico (MOREIRA, 2000).

Nesta fase da pesquisa, questionamos os alunos acerca do conteúdo de trigonometria, se eles conheciam esse termo, o que se estudava nessa área, envolvendo exemplos cotidianos. Porém, responderam que não tinham conhecimento da trigonometria apesar de já terem estudado esse conteúdo. Concluímos assim, que estes discentes não tinham definido na sua estrutura cognitiva um conhecimento acerca da trigonometria ou não se sentiram confiantes para explaná-lo.

A fim de esclarecer como surgiu a trigonometria e para que serve, apresentamos o contexto histórico do conteúdo. Nesse momento explicamos o significado da palavra trigonometria e quem foi o responsável por desenvolver este termo, no caso, o alemão Bartolomeu Pitiscus (CARMO *et al*., 1992). Destacamos também, o fato de a trigonometria não ser obra de um só homem, tendo contribuições de vários matemáticos de diferentes civilizações, dentre as quais podemos destacar os gregos, hindus e árabes. Os discentes escutaram de forma passiva a exposição. Neste momento houve pouca interação dos alunos. Com estas falas concluímos a primeira aula.

Usar o recurso da história da trigonometria nessa sequência de atividades tinha o objetivo de situar os alunos acerca dos "porquês" do desenvolvimento e evolução até os dias atuais da trigonometria. Os PCN do Ensino Fundamental ressaltam a importância da apresentação da história da matemática. Isto é,

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 43).

A falta de presença dos alunos não era só na aula de matemática, essa falta era constante em outras disciplinas da escola, conforme revelado pelo professor que o tema já havia sido tratado em uma reunião escolar e que esta turma, em especial, apresentava índice de interação bastante destoante das outras turmas da escola. Como o estudo foi realizado apenas nesta série com turma única, não temos outras vivências na escola para comparar o nível de motivação e interação deles.

Segundo encontro:

O segundo encontro aconteceu no dia 16 de setembro de 2021, nesta aula estavam presentes 03 (três) alunos, A1, A6 e A4, e durou cerca de 30 minutos. Neste encontro, ocorreu a continuação do contexto histórico. Falamos aqui sobre a evolução da trigonometria. Fato este que ocorreu no período histórico do Renascimento com novas aplicações da trigonometria em áreas como a cartografia e topografia. Questionamos os alunos acerca do significado destas duas palavras, mesmo sendo algo novo na sua estrutura cognitiva o aluno A1 falou com relação à cartografia.

Aluno A1: “relacionado a cartas”; Alunos A4 e A6: “não sei”.

Mesmo o aluno A1 errando a resposta, verificou-se que este sentiu-se motivado em participar da aula. Além desse fato, Moreira (2000) ressalta que o princípio de aprendizagem pelo erro permite ao aluno entender que o seu conhecimento pode ser construído através do erro.

Com relação a aplicações da trigonometria em outras áreas, ressaltamos sua aplicação na medicina para verificar a frequência cardíaca ou na música para análise da harmonização sonora. Deixando claro para os alunos que estas aplicações na medicina e na música serão estudadas na 2º série do Ensino Médio usando o conceito de funções trigonométricas.

Notou-se nesse momento um tom de surpresa dos discentes presentes na aula, pois até então tínhamos reduzido a aplicação da trigonometria a análise de distâncias inacessíveis. Pois essa era a situação problema que traçamos para a aprendizagem em trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental.

A fim de proporcionar um estímulo aos alunos acerca do conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo usamos o recurso de medição com o teodolito, instrumento utilizado para medir ângulos, como já referenciado no texto.

Assim, ressaltamos que mais adiante, especificamente na terceira etapa, iríamos construir um “teodolito caseiro” utilizando materiais de fácil acesso. Para adentrar realmente no objeto de estudo, explicamos que iríamos fazer medições de ângulos usando o teodolito construído por eles, associando-o ao conceito de razões trigonométricas para encontrar medidas de alturas inacessíveis.

Concluímos nesta aula a primeira etapa da pesquisa. Mais uma vez os alunos pouco interagiram. Quando convidados a falar geralmente respondiam que “não sabiam”.

5.2 2ª Etapa:

Terceiro encontro:

O terceiro encontro aconteceu no dia 17 de setembro de 2021, com a presença de 03 (três) alunos, A2, A4 e A6, e durou em média 30 minutos.

Iniciamos a aula com a construção de triângulos retângulos através de desenhos. Barbosa (1995) relata que o uso de desenho na geometria ajuda na visualização da linguagem do conteúdo que está sendo trabalhado. Sendo assim, atribuímos este aspecto de desenhos para construção dos triângulos como material didático na sequência didática auxiliando no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria.

Então, apresentamos o transferidor aos alunos. Explicamos que se trata de um instrumento responsável por medir ângulos, e que iríamos utilizá-lo diversas vezes durante o desenvolvimento da SD. Sendo assim, destacamos a unidade de medida, grau, que íamos utilizar na construção dos ângulos dos triângulos retângulos.

Para iniciarmos a construção do triângulo retângulo, questionamos os discentes acerca de seus conhecimentos das definições de retas. O aluno A6 falou que o professor responsável pela turma já tinha explicado esse assunto, porém ele já tinha esquecido. Os alunos A2 e A4 permaneceram em silêncio. Então, antes de iniciarmos a construção do triângulo retângulo, relembramos as definições de reta, semirreta e segmento de reta, usando a lousa interativa do aplicativo Jamboard, disponibilizado pela Play Store, para a explicação.

Este passo na construção do conhecimento do conteúdo, trigonometria no triângulo retângulo, é de fundamental importância o domínio dos alunos, pois a partir dali trabalharíamos constantemente com o conceito de semirretas e segmentos de reta para o desenho dos triângulos.

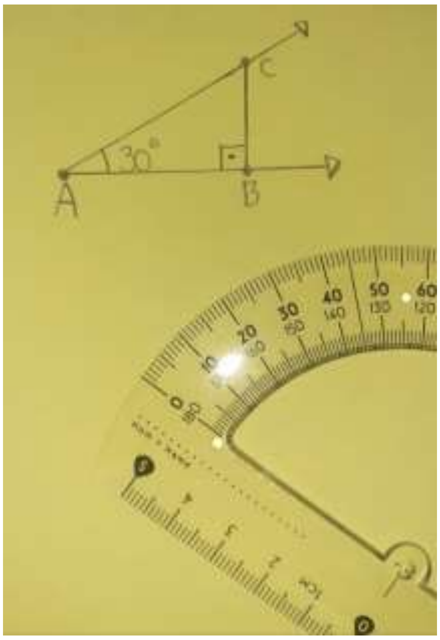
Durante a aula, solicitamos a criação de triângulos retângulos usando os materiais do kit disponibilizado pela pesquisadora, tais como o transferidor e as folhas de papel A4 coloridas, para formar o triângulo retângulo com os ângulos de 30º, 90º e 60º. Ficou a critério dos estudantes sujeitos da pesquisa a definição da medida do comprimento dos lados da figura plana que eles próprios desenharam.

Na construção do ângulo de 30º, usamos régua e transferidor. Primeiro criamos uma semirreta horizontal com auxílio da régua, nomeamos esta de r, com um ponto A na sua origem. Depois, posicionamos o transferidor no ponto A e definimos um ângulo agudo de 30º, trançando assim mais uma semirreta, chamando-a de s.

A construção do ângulo de 90° foi feita com régua e transferidor. Escolhemos arbitrariamente um ponto B sobre a semirreta r. Posicionamos o transferidor no ponto B e marcamos um ângulo reto. Por B traçamos um segmento de reta perpendicular a semirreta r formando um vértice C na semirreta s.

O aluno A2, o único que estava com o material da SD, durante esta aula, disponibilizou o seguinte desenho via WhatsApp. O aluno não exprimiu nenhuma dúvida durante a aula, falando apenas quando questionado, mas pela observação do desenho podemos comprovar que ele conseguiu assimilar as informações da construção do triângulo.

Figura 04 - Triângulo retângulo, pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Encerramos a terceira aula com a construção do triângulo retângulo. O silêncio da turma, mesmo quando convidados a falar, era constante. Esse fato pode vir a corroborar para a ideia de que estes alunos estavam habituados apenas a escutar o professor falar. Não apresentavam dúvidas, não questionavam. A difícil tarefa nesse momento era mostrar aos alunos que eles podiam expressar suas opiniões, suas dúvidas. Paulo Freire (2002) ressalta que não há criatividade sem curiosidade. Estávamos diante de alunos que não se manifestaram curiosos, demonstrando falta de estímulos para aprender.

Sendo assim, buscamos explorar os subsunçores no intuito de envolver os alunos no processo comunicativo em sala de aula. Moreira (2000), em seus princípios facilitadores da aprendizagem significativa crítica, aponta que o ensino para ser significativo e crítico é necessário que os alunos assim como os professores busquem a consciência semântica. Isto é, o ensino se fortalece quando discente e docente compartilham significados do conteúdo estudado.

Enquanto pesquisadora e professora em formação pudemos sentir que os discentes não ampliavam o diálogo, apresentavam respostas curtas, objetivas como um sim ou um não, tornando a interação entre professor-aluno ou entre aluno-aluno desafiadora. Situação a qual pede um conjunto de ações do coletivo de professores da escola com a finalidade de que cada um possa colaborar com a construção de significados dos conteúdos trabalhados em diversas áreas e os estudantes possam, aos poucos, demonstrar desenvoltura em sua formação escolar

Reafirmamos assim que mesmo tentando fazer algo diferente, sobretudo no formato remoto, trabalhando com a SD, adotando o uso de outros recursos pedagógicos, inicialmente os alunos presentes até o terceiro encontro não interagiram. Esse fato nos fez questionarmos que se o professor permanecer adotando em suas aulas o mesmo formato instrucional, esse ciclo, do aluno apenas escutar o docente falar, provavelmente não será quebrado.

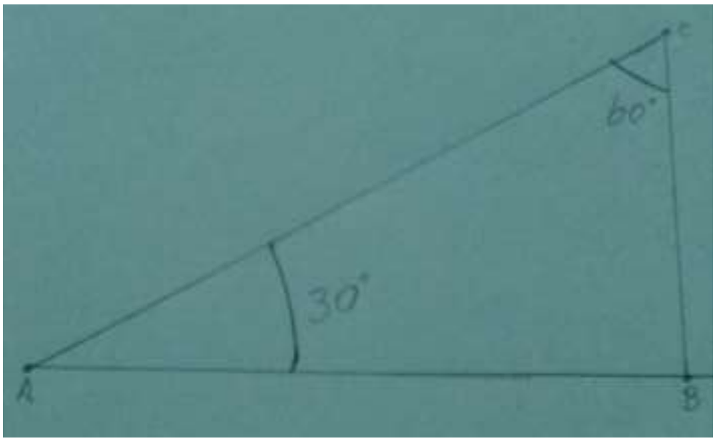
Mesmo com estas dificuldades de interação enfrentadas, principalmente durante o período de aulas remotas, é preciso persistir para aos poucos ganhar a adesão dos alunos de forma engajada em seu processo de aprendizagem. Além disso, é preciso ter a consciência de que uma técnica ou recurso não fará milagres, pois inúmeros outros fatores também estão em jogo no processo educacional. O desestímulo familiar e social, a falta de perspectiva de futuro também são elementos que podem interferir nesse quadro.

Quarto encontro:

Este encontro ocorreu no dia 20 de setembro de 2021 e estavam presentes os alunos, A2, A4 e A7, porém o aluno A7 não permaneceu na aula até o fim. O encontro durou cerca de 01 hora.

Prosseguindo com a SD relembramos alguns momentos da aula passada, da construção do triângulo retângulo, para que os alunos, A4 e A7, pudessem acompanhar o que estava sendo proposto naquele momento. O aluno A4 estava presente no terceiro encontro, porém naquele momento estava sem o material da SD, com isso só observou a realização da atividade. Neste quarto encontro compareceu de posse dos recursos, acompanhou a revisão e elaborou seu triângulo retângulo, enviando a foto de sua atividade via aplicativo de WhatsApp para a pesquisadora em formação, demonstrando assim que a manipulação do material no encontro três o instigou.

Figura 05 - Triângulo retângulo pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O Aluno A4, disponibilizou a foto acima. Podemos perceber que este aluno conseguiu assimilar o conteúdo explicado. Durante a aula, não apresentou dúvidas, respondendo apenas quando era questionado.

Após a revisão, explicamos as várias maneiras de representar ângulos. Com isso, iniciamos o preenchimento da sequência de atividades I. A primeira questão pedia para anotar os valores dos ângulos agudos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, presentes nos vértices A e C do triângulo construído pelos alunos.

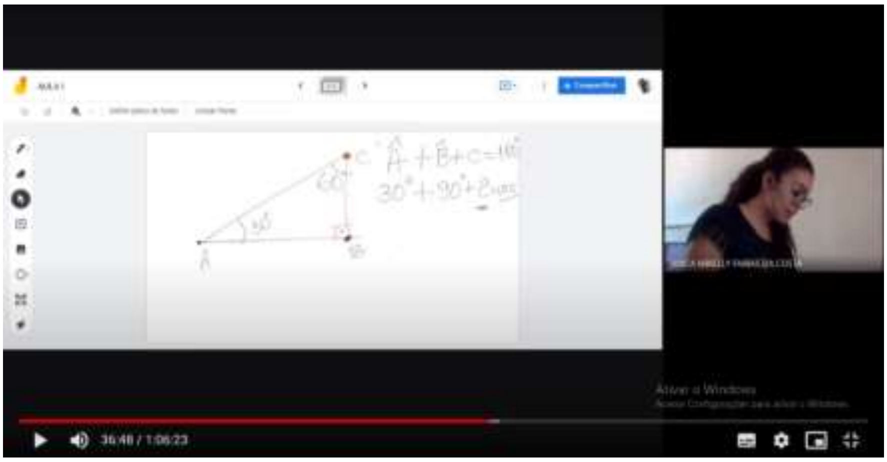
Questionamos os discentes acerca da medida do ângulo $\hat{A}$. O aluno A2 respondeu que era 30º. Porém, com relação a medida do ângulo $\hat{C}$ não conseguiram identificar rapidamente a resposta. Para identificar tal medida, fomos construindo ideias. Perguntamos aos alunos se eles recordavam das classificações dos tipos de ângulos, assunto visto em anos anteriores ao 9º ano, porém os discentes não lembravam. Então, relembramos a classificação dos tipos de ângulos agudo, obtuso e reto, em que ângulos agudos são menores que 90º, os ângulos obtusos são maiores que 90º e ângulos retos são iguais a 90º.

O aluno A7 respondeu que a medida do ângulo $\hat{C}$ era 90º. Os outros dois alunos permaneceram em silêncio. Então convidamos estes discentes a observar o desenho do triângulo, especialmente, no vértice do ângulo $\hat{C}$. Com essa observação os estudantes chegaram à conclusão que este ângulo era agudo, menor que 90º, o que os levou a entender que a medida em questão não era um ângulo reto.

Sendo assim, perguntamos aos alunos quanto media a soma dos ângulos internos de um triângulo. Pelo Teorema 6.5, do livro de Geometria Euclidiana Plana de João Lucas Marques Barbosa (1995), a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

O aluno A2 respondeu o seguinte: “eu acho que é 180º”. Confirmamos que sua resposta estava certa. E a partir desse ponto, traçamos a seguinte ideia: a soma do ângulo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ é igual a 180º, com isso, o aluno A2 chegou à conclusão que o ângulo $\hat{C}$ equivale a 60º, já o aluno A4 respondeu que não sabia. Representamos essa ideia na figura abaixo:

Figura 06 - Soma dos ângulos internos de um triângulo

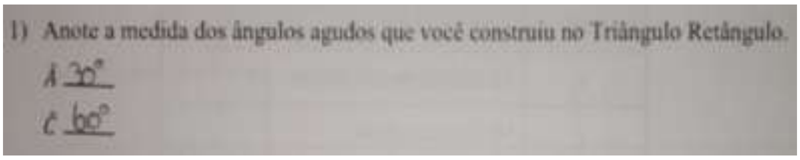


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Vale ressaltar que após a resposta correta do aluno A2, os discentes ficaram mais animados e sempre respondiam as perguntas feitas a eles. Mas ainda não tinham a iniciativa de perguntar, de tirar dúvidas que viessem a surgir no decorrer da aula, mesmo estando cientes que podiam fazer seus questionamentos durante as aulas.

Logo após esse momento, pedimos para que os alunos verificassem com o auxílio do transferidor se o ângulo de 60º formou-se no vértice C. Os dois alunos, A2 e A4, constataram que sim, em seus triângulos formou-se o ângulo de 60º. O ângulo de 60º formou-se automaticamente após a construção dos ângulos de 30º e 90º. Sendo assim, explicamos que este fato é decorrente da definição de ângulos complementares, em que a soma das medidas dos ângulos agudos internos em um triângulo retângulo resulta em 90º. A soma de 30º mais 60º é igual ao ângulo reto (90º).

Figura 07 - Questão 01, pelo aluno A2


1) Anote a medida dos ângulos agudos que você construiu no Triângulo Retângulo.

$\hat{A}$ 30°

$\hat{C}$ 60°

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

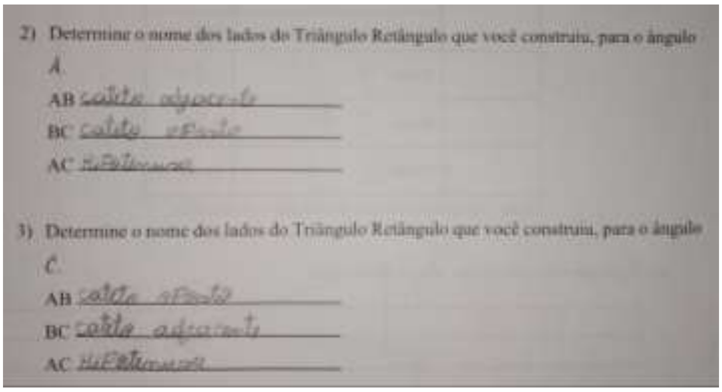
Os alunos que devolveram a SD respondida fizeram as anotações conforme o recorte da resposta do aluno A2, na figura 07, efetuando assim a solução correta. Ressaltamos assim que estes discentes estavam acompanhando as aulas e compreendendo essa parte assunto.

Nas questões 02 (dois) e 03 (três), trabalhamos os nomes dos lados do triângulo retângulo com relação aos ângulos de 30º e 60º, respectivamente. Os alunos não lembravam das classificações dos lados de um triângulo retângulo, mesmo tendo estudado este conteúdo uma semana anterior à aplicação da SD, como já referido anteriormente. O que comprova, mais uma vez, que estes alunos não adquiriram uma aprendizagem significativa do conteúdo estudado.

Explicamos, usando um desenho do triângulo retângulo, no Jamboard, que os lados recebem o nome de catetos e dependendo do ângulo de visão, são nomeados de cateto oposto ou cateto adjacente e que o maior lado do triângulo opõe-se ao maior ângulo, no qual é denominado de hipotenusa.

Na resolução da terceira questão os alunos apresentavam-se mais entusiasmados, desenvolvendo a resolução de forma ágil. O melhor incentivo para um ser aprendente é este experimentar que está aprendendo e que pode aprender. O que contribui para atribuir sentido na tarefa de aprendizagem.

Figura 08 - Questões 02 e 03, pelo aluno A4


2) Determine o nome dos lados do Triângulo Retângulo que você construiu, para o ângulo A.

AB

BC

AC

3) Determine o nome dos lados do Triângulo Retângulo que você construiu, para o ângulo C.

AB

BC

AC

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Os demais alunos, outros 03 (três), que devolveram a SD apresentaram respostas iguais às do aluno A4, a qual estava correta. Logo, podemos perceber que estes compreenderam o conteúdo trabalhado até aqui.

Pela dificuldade apresentada pelos discentes em medir os lados do triângulo na quarta questão, apresentamos as características da régua, instrumento utilizado para realizar pequenas medições. Explicamos que ela é composta de marcações que representam unidades de medida em centímetros (cm) e milímetros (mm).

Concluímos a quarta aula. Nesta aula criamos uma situação a qual os alunos pudessem participar ativamente da resolução das atividades, ao invés de se limitar a copiar as explicações do professor. Assim a pesquisadora pode observar que os alunos interagiram mais neste encontro, apesar de pouco questionarem.

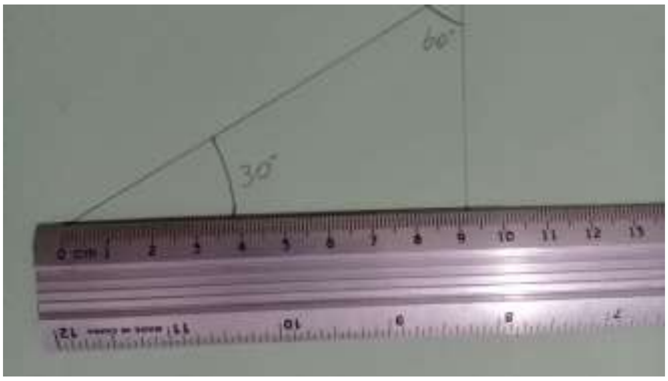
Quinto encontro:

Esta aula aconteceu no dia 24 de setembro de 2021, com a presença de 05 (cinco) alunos, A1, A2, A3, A7 e A9. O encontro durou em média 30 minutos. Continuamos com uma revisão sobre a utilização da régua para que os alunos tivessem uma melhor compreensão de como manuseá-la.

No quarto exercício, os sujeitos da pesquisa deveriam preencher as tabelas I e II, como mostra a figura 13, medindo com a régua em centímetros os lados dos catetos e a hipotenusa, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, com relação ao ângulo $\hat{A}$ e com relação ao ângulo $\hat{C}$, e também encontrar os valores das três razões entre os lados do triângulo listados nas tabelas. Organizamos estes dados nas tabelas como forma de facilitar a visualização e comparação dos resultados entre os alunos em próximas questões.

O aluno A4 não estava presente na aula, mas para resolver esta questão ele buscou ajuda da pesquisadora pelo WhatsApp para esclarecer dúvidas de como faria para encontrar a solução para a atividade. A foto abaixo, enviada pelo discente, representa o momento em que estava efetuando a medição de um dos lados do triângulo.

Figura 09 - Medição do triângulo, pelo aluno A4

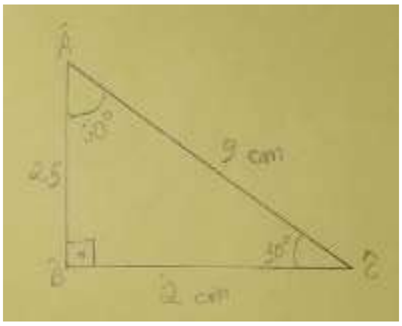


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

A busca por ajuda mostrou que o aluno estava empenhado em compreender o conteúdo. Vale ressaltar, mais uma vez, que a participação do aluno na construção do conhecimento é de fundamental importância para a sua aprendizagem. Isto é, a busca por ajuda pelo WhatsApp nos fez perceber que este aluno entendeu que a aprendizagem é construída em conjunto, conforme propõe Moreira (2000) no princípio da interação social e do questionamento.

Já o aluno A5, que não estava presente nas aulas síncronas e não procurou a pesquisadora no WhatsApp, enviou seu material impresso da SD respondido. Vale ressaltar que este aluno acompanhou as aulas somente pelo material impresso. Então, resolvemos analisar como ele elaborou o triângulo retângulo.

Figura 10 - Medidas do triângulo, pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

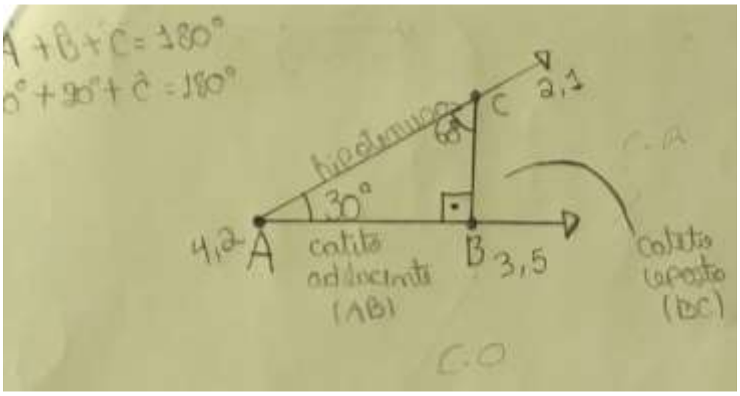
Analisando o material do aluno A5, foi possível observar que o valores dos ângulos e as medidas dos lados do triângulo retângulo estavam incorretas. O desenvolvimento de sua aprendizagem ocorreu de forma que não houve a interação aluno-professor, não sendo possível saber se houve a interação entre aluno-aluno.

Então, de acordo com as ideias de Moreira (2000), se não acontecer o diálogo, o questionamento, às dúvidas, isto é, sem a participação do aluno nas aulas o processo de aprendizagem perde sentido. Infelizmente o cenário mundial da pandemia afetou de várias formas o ensino-aprendizagem, muitos alunos não têm recursos suficientes para acompanhar as aulas remotamente, o que acaba prejudicando sua aprendizagem.

O aluno A2 teve maior interação durante esta aula síncrona, sendo o único que estava medindo os lados do triângulo retângulo. Apresentou dúvidas, isto é, sempre que não compreendia a explicação questionava de imediato, promovendo um momento de interações entre aluno-professora/pesquisadora em formação.

Podemos observar que o desenho do aluno A2 abaixo está com medidas corretas, ficando claro que um processo de ensino e aprendizagem baseado em questionamentos pode promover uma aprendizagem significativa ao aprendiz. Este fato corrobora com as ideias de Moreira (2000) ao classificar a pergunta como o principal instrumento intelectual que promove a aprendizagem significativa e crítica.

Figura 11 - Medidas do triângulo, pelo aluno A2



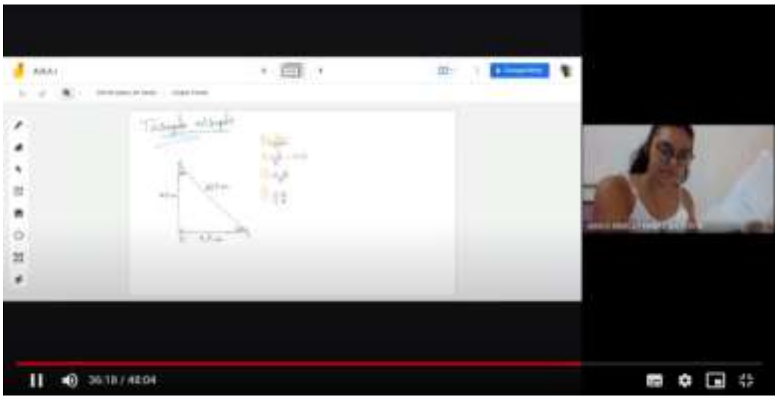
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Assim sendo, preenchemos a primeira tabela correspondente ao ângulo de 30º. Nesse processo identificamos os elementos com relação ao ângulo de 30º no triângulo retângulo, em que a medida do lado $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são os *catetos adjacente (C.A) e cateto oposto (C.O)*, respectivamente, e a medida do lado $\overline{AC}$ é a *hipotenusa (H)* do triângulo.

Com ajuda do Jamboard, explicamos o conceito de razão entre os lados do triângulo retângulo. Dessa forma, trabalhamos as três razões nomeadas abaixo usando os lados do triângulo retângulo.

1) cateto oposto sobre hipotenusa;
2) cateto adjacente sobre hipotenusa;
3) cateto oposto sobre cateto adjacente.

Figura 12 - Razões entre os lados do triângulo



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

A primeira razão, em que trabalhamos, foi a do cateto oposto dividido pela hipotenusa. As outras duas razões foram realizadas na aula seguinte, pois o tempo não foi suficiente para abordar todo o assunto.

A fim de auxiliar os alunos nos cálculos destas razões, fizemos uso da calculadora e encontramos os valores da primeira razão para o ângulo de 30º. Optamos pelo uso da calculadora como recurso didático para resolver as razões, pois com a ajuda desse material ganhamos tempo na execução dos cálculos.

Dessa forma, não surgiram dúvidas no momento das divisões com o uso da calculadora, porém para transcrever o valor com duas casas decimais surgiram questionamentos os quais foram sanados na hora. Concluímos assim a quinta aula. Neste encontro, apesar de poucos alunos participarem do encontro via Google Meet, houve maior interação, contribuindo assim para que o aprendiz venha a compreender o conteúdo de forma significativa.

Sexto encontro:

Este encontro ocorreu no dia 27 de setembro de 2021, com participação de 05 (cinco) alunos, A2, A3, A4, A6 e A7. A aula durou cerca de 01 hora. Nesta oportunidade, continuamos com a explicação das tabelas, finalizando a primeira e iniciando a segunda do ângulo de 60º. Para preencher a segunda tabela, seguimos a mesma linha de resolução da primeira.

Abaixo temos os resultados das tabelas I e II dos alunos A2 e A4, respectivamente. Os demais alunos que devolveram a SD seguiram a mesma linha de resolução.

Figura 13 - Questão 04, tabelas I e II, pelo aluno A2

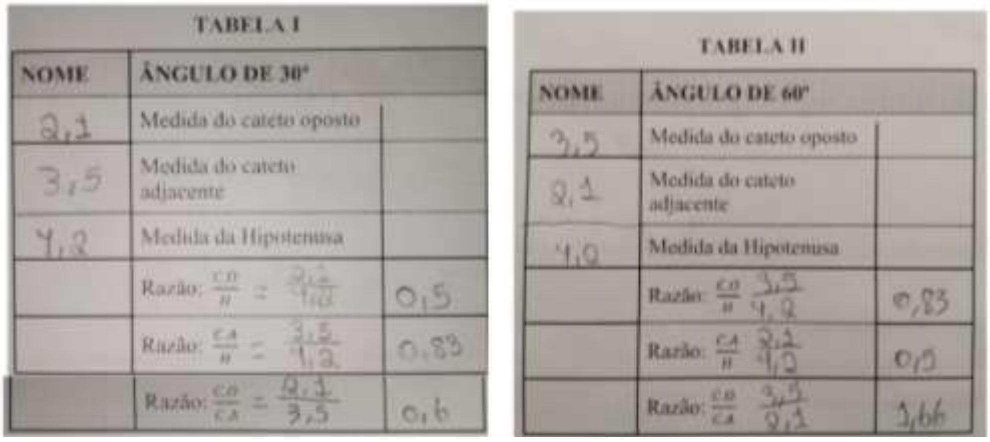


TABELA I

NOME	ÂNGULO DE 30°	
2,1	Medida do cateto oposto	
3,5	Medida do cateto adjacente	
4,2	Medida da Hipotenusa	
	Razão: $\frac{CO}{H} = \frac{2,1}{4,2}$	0,5
	Razão: $\frac{CA}{H} = \frac{3,5}{4,2}$	0,83
	Razão: $\frac{CO}{CA} = \frac{2,1}{3,5}$	0,6

TABELA II

NOME	ÂNGULO DE 60°	
3,5	Medida do cateto oposto	
2,1	Medida do cateto adjacente	
4,0	Medida da Hipotenusa	
	Razão: $\frac{CO}{H}$ $\frac{3,5}{4,2}$	0,83
	Razão: $\frac{CA}{H}$ $\frac{2,1}{4,2}$	0,5
	Razão: $\frac{CO}{CA}$ $\frac{3,5}{2,1}$	1,66

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 14 - Questão 04, tabelas I e II, pelo aluno A4

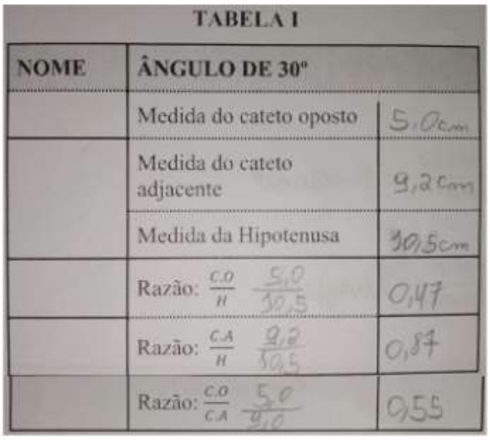


TABELA I

NOME	ÂNGULO DE 30º	
	Medida do cateto oposto	5,0cm
	Medida do cateto adjacente	9,2cm
	Medida da Hipotenusa	10,5cm
	Razão: $\frac{C.O}{H}$ $\frac{5,0}{10,5}$	0,47
	Razão: $\frac{C.A}{H}$ $\frac{9,2}{10,5}$	0,87
	Razão: $\frac{C.O}{C.A}$ $\frac{5,0}{9,0}$	0,55

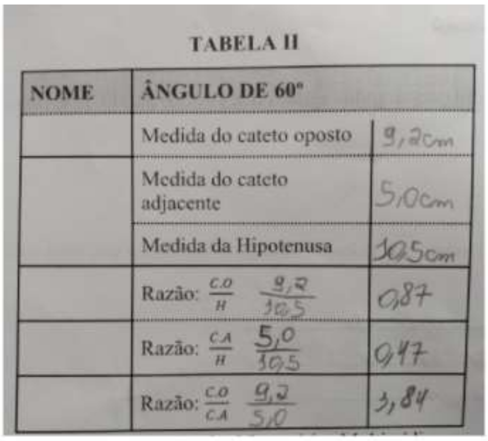


TABELA II

NOME	ÂNGULO DE 60º	
	Medida do cateto oposto	9,2cm
	Medida do cateto adjacente	5,0cm
	Medida da Hipotenusa	10,5cm
	Razão: $\frac{C.O}{H}$ $\frac{9,2}{10,5}$	0,87
	Razão: $\frac{C.A}{H}$ $\frac{5,0}{10,5}$	0,47
	Razão: $\frac{C.O}{C.A}$ $\frac{9,2}{5,0}$	1,84

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Se observamos os valores da última coluna dessas tabelas, podemos perceber que temos valores parecidos para as três razões do triângulo retângulo, tanto para o ângulo de 30º como para o ângulo de 60º, mesmo com medidas de lados do triângulo retângulo de tamanhos diferentes.

Antes de responder a quinta questão, figura 16, a qual pedia para explicar as conclusões acerca dos resultados das razões dessas tabelas acima, organizamos as ideias a partir de um diálogo.

Para que os alunos pudessem compreender esse processo, elaboramos uma nova tabela para anotar e observar os valores que os discentes encontraram no triângulo retângulo que construíram. Neste caso, escolhemos apenas o valor da terceira razão do ângulo de 30º e deixamos claro para os educandos que este processo se repetiria para as demais razões que construímos.

Figura 15 - Tabela para o ângulo de 30º, pela pesquisadora

TRIÂNGULO	ÂNGULO DE 30º	
Pesquisadora	Cateto oposto	10,9 cm
	Cateto adjacente	17,5 cm
	Razão: $\frac{cat.op}{cat.adj}$	0,63 cm
[redacted]	Cateto oposto	17,5 cm
	Cateto adjacente	10,1 cm
	Razão: $\frac{cat.op}{cat.adj}$	1,73 cm
[redacted]	Cateto oposto	2,1 cm
	Cateto adjacente	3,5 cm
	Razão: $\frac{cat.op}{cat.adj}$	0,6 cm

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Os alunos, A2 e A3, presentes na aula, falaram os valores dos lados da terceira razão do seu triângulo retângulo. Entretanto, o aluno A3 provavelmente fez o processo de medição do triângulo incorreto, pois seu resultado não foi condizente com o esperado por esta terceira razão, do qual era esperado que os alunos chegassem ao valor que representa a tangente do ângulo de 30º.

Já o aluno A4 não tinha concluído as medições do seu triângulo nesta aula, enviando sua resolução via WhatsApp dias depois, por esse motivo suas respostas não foram registradas na tabela que foi utilizada no momento da aula síncrona quando a pesquisa só dispunha dos dados de A2 e A3.

Vale ressaltar que, a fim de comparação com o resultado dos estudantes A2 e A3, colocamos, como professora/pesquisadora em formação, os dados do triângulo por nós construído com a finalidade de eles perceberem que a semelhança de triângulos retângulos ocorre por causa dos ângulos serem congruentes. Portanto, convidamos os alunos a observarem a tabela acima. Os discentes observaram que as razões apresentam resultados parecidos, explicamos que só não são exatamente iguais os resultados alcançados pela pesquisadora e o aluno A2 por erro de precisão do instrumento de medição que utilizamos, o transferidor e a régua.

Analisando o resultado da última coluna da tabela da figura 15, concluímos que o resultado da razão é considerado uma constante. Sendo assim, podemos reescrever este fato para as três razões que trabalhamos na SD da seguinte forma:

A razão entre o cateto oposto e a hipotenusa;

$$\frac{C.O}{H} = \frac{C.O'}{H'} = \frac{C.O''}{H''} = \cdots = k1$$

A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa;

$$\frac{C.A}{H} = \frac{C.A'}{H'} = \frac{C.A''}{H''} = \cdots = k2$$

A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

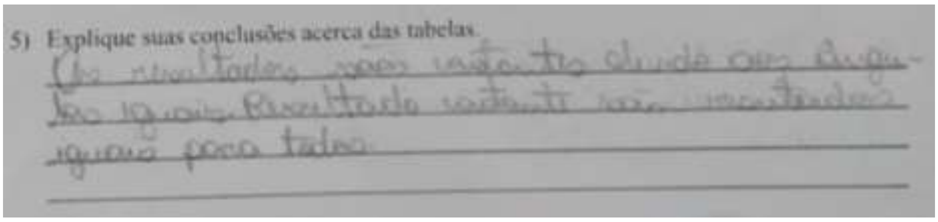
$$\frac{C.O}{C.A} = \frac{C.O'}{C.A'} = \frac{C.O''}{C.A''} = \cdots = k3$$

Questionamos aos sujeitos da pesquisa o porquê deste fato ter acontecido, já que os triângulos eram de tamanhos diferentes, porém tinha valores de razões parecidos. Os alunos não conseguiram identificar a ideia rapidamente. Então, como forma de aguçar os conhecimentos cognitivos dos alunos, mostramos a projeção do desenho de dois triângulos retângulos, um maior e um outro menor, ambos com os ângulos de 30º e 60º. Com a visualização dos desenhos o aluno A3 respondeu que era por causa dos ângulos dos triângulos serem iguais.

Para complementar essa ideia do discente A3, explicamos que os triângulos retângulos produzidos pelos educandos têm medidas de lados diferentes, mas têm ângulos iguais. Com isso, pelo caso de semelhança, Ângulo Ângulo (AA), os triângulos são semelhantes entre si, e em triângulos semelhantes os catetos e hipotenusa crescem proporcionalmente. Assim, o resultado da divisão entre os lados correspondentes forma uma razão constante.

Este fato decorre do conceito de semelhança de triângulos. Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices e lados (BARBOSA, 1995). Em outras palavras, ocorre quando há ângulos congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Figura 16 - Questão 05, pelo aluno A3


5) Explique suas conclusões acerca das tabelas.

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Podemos perceber, pela resposta dada pelo aluno A3, que este compreendeu que em triângulos retângulos de diferentes tamanhos se o ângulo for mantido, esses triângulos são semelhantes e em triângulos semelhantes os pares de lados sempre formam uma razão constante.

Para responder a sexta questão, a qual pedia para escrever o nome destas razões, dissemos aos discentes que estas três razões recebem nomes especiais, então perguntamos se eles tinham alguma ideia de como podemos chamá-las. Os alunos, de início, não lembraram, apesar de já terem trabalhado com esse conteúdo.

Após falarmos o nome da primeira razão, o seno, o aluno A3 respondeu que era seno, cosseno e tangente, revelando que viu estes nomes na SD. Explicamos que ele estava correto e que na trigonometria estas três razões, que são definições fundamentais para o seu estudo, são encontradas em diversos livros didáticos os quais podemos citar Castrucci, Castrucci Jr e Giovanni (1998), Bianchini (2015), dentre outros com as seguintes denominações e conceitos:

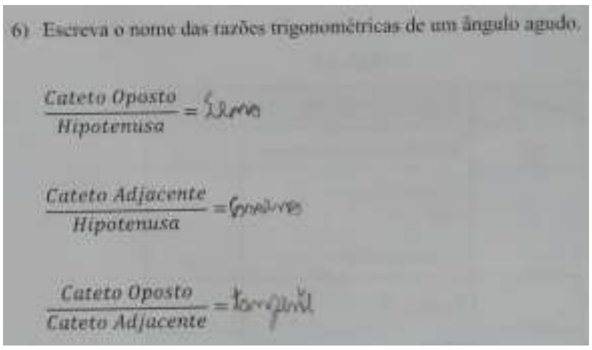
1ª) O *seno* de um ângulo agudo é denominado pela razão do cateto oposto sobre a hipotenusa;

2ª) O *cosseno* de um ângulo agudo é denominado pela razão entre o cateto adjacente sobre a hipotenusa;

3ª) A *tangente* de um ângulo agudo é denominada pela razão do cateto oposto sobre o cateto adjacente.

O registro abaixo é da SD do aluno A5, esta resolução é um exemplo de resposta que representa de forma geral as resoluções dos quatro (04) alunos que entregaram a SD respondida.

Figura 17 - Questão 06, pelo aluno A5


6) Escreva o nome das razões trigonométricas de um ângulo agudo.

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \text{Seno}$$

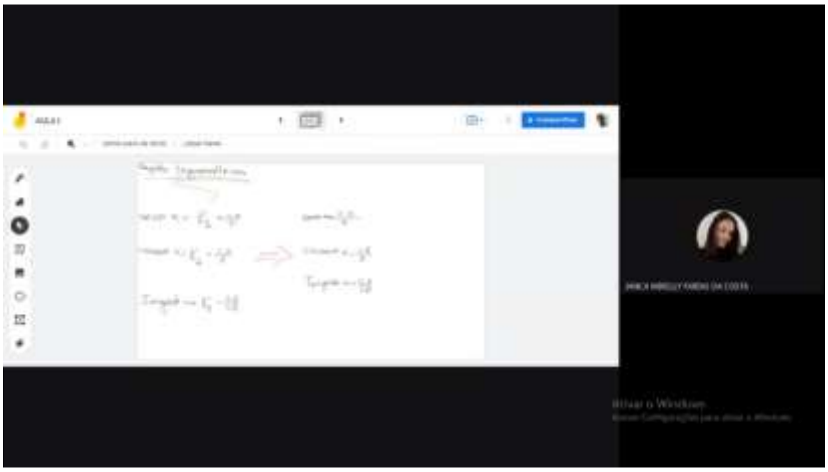
$$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \text{Cosseno}$$

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \text{tangente}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Já a figura 18, logo abaixo, registra o momento da aula em que trabalhamos essa parte das definições das três razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, estudadas no 9º ano do Ensino Fundamental, no Jamboard.

Figura 18 - Razões trigonométricas, pela pesquisadora



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Assim, finalizamos mais uma aula. A participação ativa dos alunos durante esta aula tornou esse momento interativo e produtivo, temos aqui o discente como um ser protagonista da sua aprendizagem. O que leva os alunos a perceberem que podem participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem, que seu conhecimento é adquirido em conjunto a partir da relação mediada entre o docente e os discentes. Portanto, esse momento fortalece a ideia de aprendizagem significativa e consequentemente que ainda com as dificuldades e limitações dos contextos é possível propor situações com potencial de promover uma aprendizagem significativa ao discente.

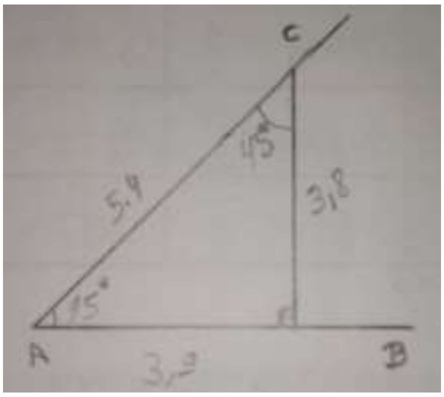
Sétimo encontro:

Este encontro aconteceu no dia 30 de setembro de 2021. Contou com a presença de 04 (quatro) alunos, A3, A6, A9 e A10. A aula durou cerca de 30 minutos.

Nesta aula iniciamos o questionário II composto por 04 (quatro) questões. No primeiro exercício pedimos para que os discentes desenhassem um triângulo retângulo com os dois ângulos agudos de 45º, usando os instrumentos já trabalhados, régua e transferidor.

Construção do triângulo retângulo pelo aluno A4, sendo um exemplo de resposta que representa os demais desenhos dos discentes da turma que devolveram a SD.

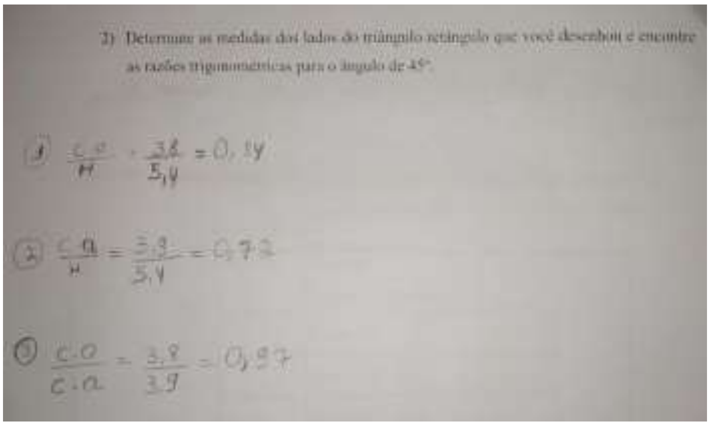
Figura 19 - Questão 01, pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

A questão 02 (dois) pede para que os alunos meçam os lados do triângulo e depois encontrem as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nesse momento houve a participação constante dos alunos presentes na aula, surgindo poucas dúvidas.

Figura 20 - Questão 02, pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Na questão 03 (três), pedimos aos sujeitos da pesquisa que anotassem os valores das razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 60º e 45º para a tabela, conforme a apresentada na figura 21. Relatamos aos alunos que estas razões são denominadas de ângulos notáveis, pois são usados com frequência em resolução de problemas (GIOVANNI; GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 1998).

Com isso, organizamos na tabela os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis em decimais.

Figura 21 - Questão 03, pela pesquisadora

	30º	45º	60º
seno	0,53	0,73	0,85
cosseno	0,85	0,70	0.53
tangente	0.62	1,04	1,61

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Concluímos o sétimo encontro com a turma do 9º ano. Neste encontro os alunos foram participativos, construíram todos os passos das três questões fazendo sempre suas perguntas. Durante todo esse encontro ficou perceptível o estímulo em participar da aula.

Oitavo encontro:

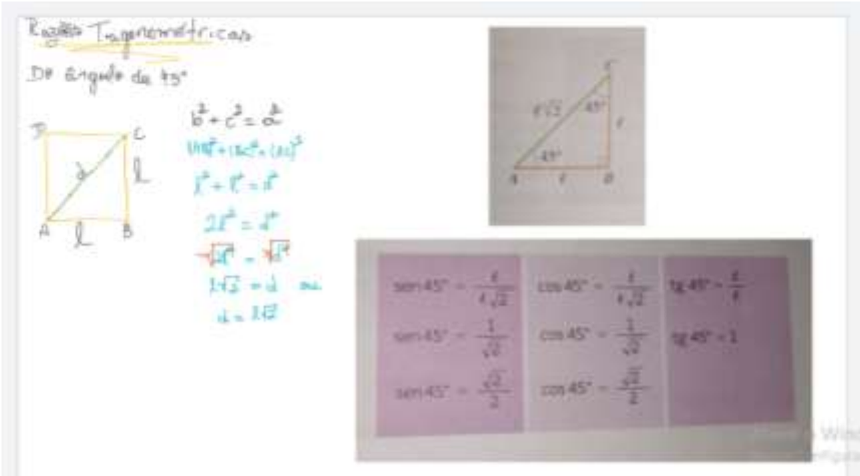
Última aula síncrona com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ocorreu no dia 01 de outubro de 2021. Neste encontro estavam presentes 04 (quatro) alunos, A2, A3, A4 e A6, o momento durou em média 30 minutos.

Iniciamos a aula explicando que os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo geralmente são encontrados na forma decimal, como já tínhamos trabalhado. Porém, explicamos que ao trabalhar com as razões trigonométricas dos ângulos agudo de 30º, 45º e 60º podemos encontrar o resultado dessas razões de forma exata, isto é, como uma fração.

Neste momento, optamos por uma explicação de forma expositiva, fazendo uso do Jamboard, para que os alunos compreendessem os valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de 45º, 30º e 60º. A justificativa por trabalhar nesta parte do conteúdo de forma meramente expositiva ocorreu pelo fato da aula durar apenas 30 minutos e na próxima semana a escola começaria a aplicação de provas bimestrais, não tendo mais tempo para continuarmos com a pesquisa em aulas síncronas.

As primeiras razões trigonométricas que construímos foi para o ângulo de 45º. Mostramos aos discentes que se considerarmos um quadrado $ABCD$, com as medidas dos lados sendo ℓ e se traçamos uma diagonal d, tínhamos um triângulo ABC. Então, neste triângulo aplicamos o Teorema de Pitágoras, já estudado pelos alunos, e encontramos que o valor dessa diagonal mede $d = \ell\sqrt{2}$. Conforme a imagem da figura 22, em que representa o momento da explicação em aula síncrona.

Figura 22 - Razões trigonométricas para o ângulo de 45º

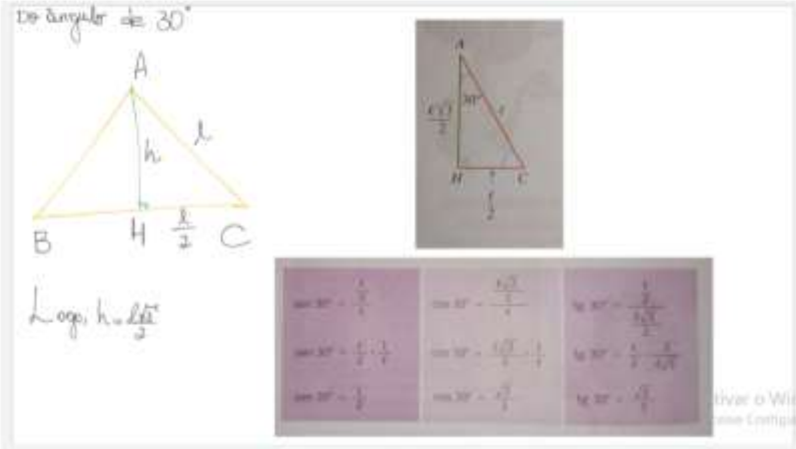


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Com isso, aplicamos os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para encontrar os valores exatos do ângulo de 45º.

Para as razões trigonométricas do ângulo de 30º usamos o desenho de um triângulo equilátero ABC, todos os seus ângulos medem 60º e todos os seus lados têm o mesmo comprimento ℓ. Consideramos que a altura, com relação ao vértice A e ao lado $\overline{BC}$ com H sendo o pé desta altura, é h. Os dois triângulos formados são congruentes e $\overline{HB} = \overline{HC} = \frac{\ell}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACH da figura 23, concluímos que $\overline{AH} = h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, com isso, observamos que o ângulo $H\hat{A}C$ mede 30º.

Figura 23 - Razões trigonométricas para o ângulo de 30º

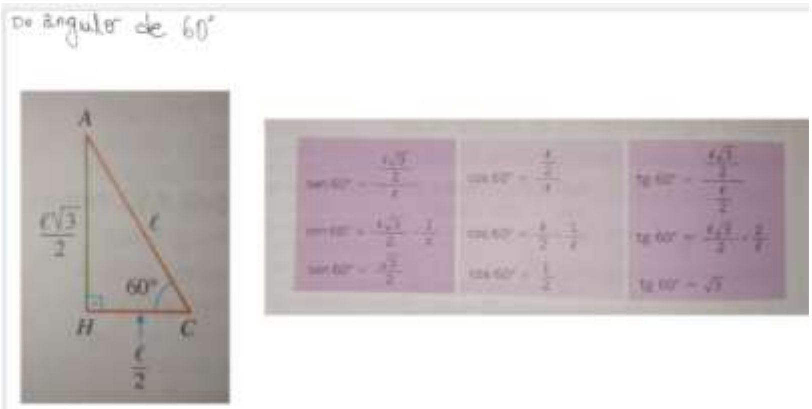


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Aplicando as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para o ângulo de 30º, encontramos os valores exatos destacados na figura 23.

Para o ângulo de 60º utilizamos o mesmo triângulo retângulo do ângulo de 30º, construído a partir do triângulo equilátero. Porém, utilizamos o ângulo de 60º que corresponde ao vértice C. Sendo assim, mostramos o processo de construção dos valores exatos das razões trigonométricas para o ângulo de 60º. A figura 24, representa o momento da aula em que trabalhamos estas razões.

Figura 24 - Razões trigonométricas para o ângulo de 60º

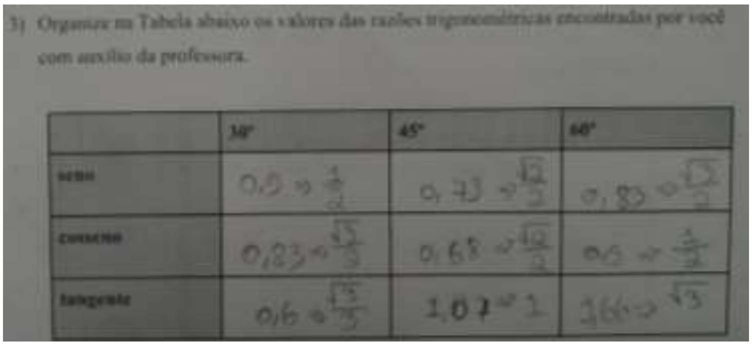


Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Na terceira questão pedimos para os alunos organizarem, juntamente com os valores decimais, os valores exatos em forma de fração das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º.

Retiramos um recorte da SD do aluno A2 como exemplo de resolução, conforme a figura 25. Os demais alunos seguem essa mesma linha de resolução, porém com resultados das razões diferentes/aproximado como já referido no trabalho em aulas passadas.

Figura 25 - Questão 03, pelo aluno A2



3) Organize na Tabela abaixo os valores das razões trigonométricas encontradas por você com auxílio da professora.

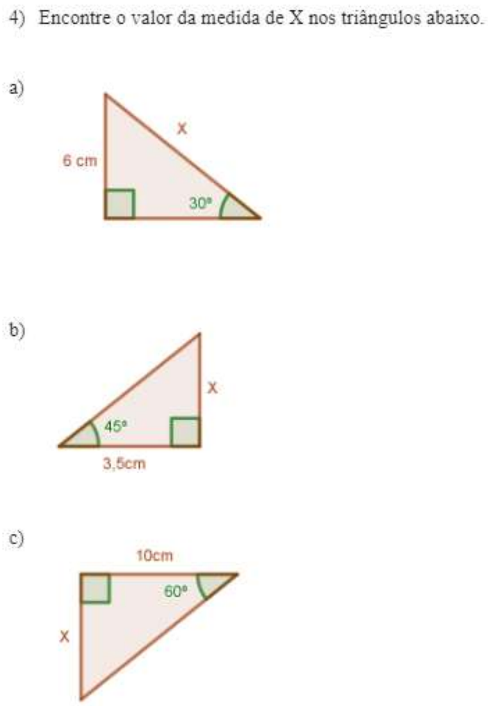
	30°	45°	60°
seno	0,5 ⇒ $\frac{1}{2}$	0,73 ⇒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,83 ⇒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	0,83 ⇒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,68 ⇒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5 ⇒ $\frac{1}{2}$
tangente	0,6 ⇒ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1,07 ⇒ 1	1,66 ⇒ $\sqrt{3}$

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Comunicamos aos alunos que os valores das razões seno, cosseno e tangente podem ser encontradas facilmente em uma tabela (ANEXO A) de razões trigonométricas ou através de calculadoras científicas. Assim, não sendo necessário todo o processo feito durante estas aulas, pois geralmente em provas, vestibulares ou em demais situações os valores das razões trigonométricas já são dados. Porém, ressaltamos aos discentes que é importante eles terem o entendimento do surgimento destas razões trigonométricas para poderem atribuir este conhecimento em situações problemas, do seu cotidiano ou em outras esferas que venham a precisar desse conteúdo matemático.

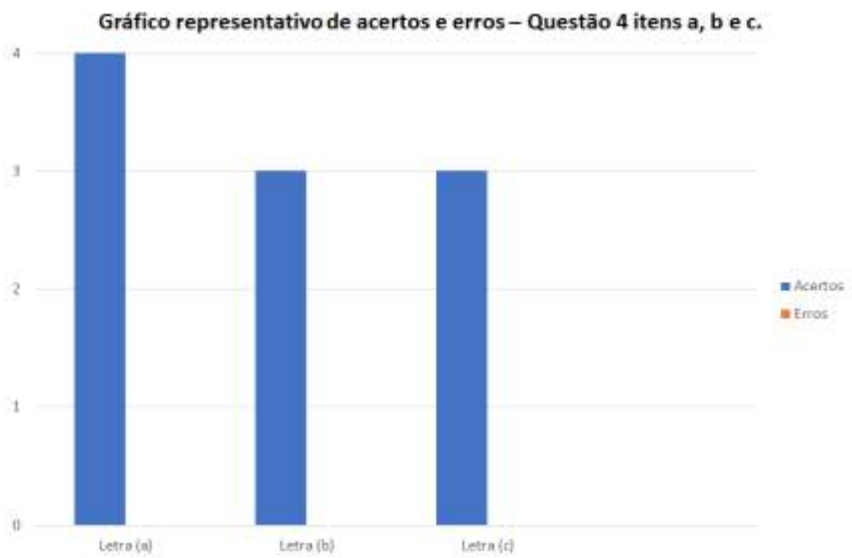
Para concluir esta etapa aplicamos na quarta questão exercícios para encontrar a medida de um dos lados dos triângulos retângulos, o item a) foi respondido em aula síncrona, enquanto que os outros foram feitos pelos próprios discentes em um momento assíncrono. Sendo assim, buscamos que os alunos percebessem que com um ângulo e uma medida dada de um dos lados do triângulo retângulo, conseguimos identificar a medida dos outros lados. Esse fato será aplicado na prática, na SD proposta, no momento em que os sujeitos da pesquisa medem a altura de um determinado objeto.

Figura 26 - Questão 04, itens a, b e c.



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Gráfico 01 - Desempenho no item 04



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Dos 05 (cinco) alunos que devolveram a SD, apenas 04 (quatro) responderam a esta questão. Os discentes A2, A3, e A5 conseguiram responder as três alternativas corretamente. Entretanto, o aluno A5 respondeu apenas à primeira alternativa que por sua vez estava correta, mas não concluiu toda a resolução dos itens.

Dessa forma, dos discentes que responderam a questão 04 (quatro), 100% dos alunos acertaram a letra (a), 75% a letra (b) e 75% a letra (c), evidenciando que os discentes que responderam a SD conseguiram assimilar o processo de aplicação do conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Finalizamos aqui a segunda etapa da pesquisa com a participação dos alunos respondendo às questões da SD junto a pesquisadora. Ficou claro que com o decorrer das aulas os alunos foram interagindo mais com a pesquisadora, apesar de pouco questionarem ou tirarem suas dúvidas na aula. Alguns estudantes, principalmente os alunos A2, A3 e A4, sempre que sentiam dificuldade no conteúdo estudado procuravam tirar dúvidas e assim resolver as questões da SD.

Antes de iniciar a terceira etapa apresentamos os vários modelos de teodolito, desde os mais antigos até os mais atuais e como estes eram utilizados. Para esta apresentação, utilizamos o material disponibilizado pelo site do Museu de Astronomia e Ciências Afins, acessível pelo link http://site.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito.html.

Já para a construção do teodolito caseiro, explicamos que este processo ocorreria por meio do auxílio de vídeos disponibilizados na plataforma do YouTube e pela folha do aluno com instruções da construção anexada na SD (ANEXO B).

5.3 3ª Etapa:

No dia 01 de outubro de 2021, foi disponibilizado o material para a construção do Teodolito Caseiro, instrumento que nos auxiliará para medirmos a altura de um determinado objeto. O material bem como as orientações necessárias para a construção tem como principal referência o site Matemática Multimídia, acessível pelo link https://m3.ime.unicamp.br/recursos/994, Bianchini (2015) e Andrade (2017).

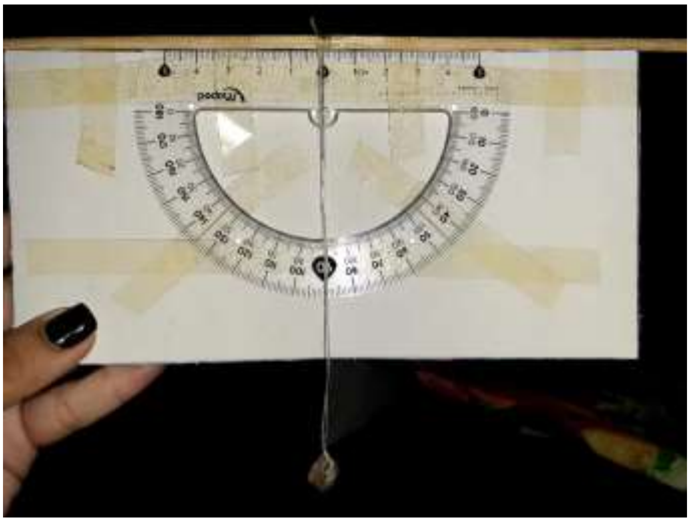
Os materiais foram disponibilizados no grupo do WhatsApp sendo estes dois vídeos, o primeiro explicava como fazia a construção do teodolito caseiro, este por sua vez foi criado pela pesquisadora, disponível pelo link https://youtu.be/-OMIqlwgeYk. Já o segundo vídeo, explicando como se faz a medição da altura de um objeto, foi extraído do canal do YouTube de Aline Ferreira, disponível pelo link https://youtu.be/CnV2iMWfdAs.

Para construção do teodolito utilizamos os seguintes materiais, propostos por Bianchini (2015):

- Papel cartão (ou papelão);
- Régua;
- Transferidor;
- Tesoura;
- Calculadora (com a calculadora científica é possível eliminar uma passagem da atividade);
- Canudo (lápis ou palito de churrasco também podem substituir o canudo);
- Fita adesiva (transparente);
- Peso (pedra, moeda ou uma porca, usamos para o fio de prumo);
- Linha de costura (ou barbante);
- Fita métrica (ou uma trena).

Dos alunos que participaram da pesquisa, apenas dois, A2 e A7, construíram o teodolito. Alguns alunos relataram não ter todos os materiais, a exemplo do papelão. Sabíamos que era um risco que corríamos ao aplicar a SD durante o período de pandemia, mesmo com o incentivo da pesquisadora para procurarem o material com alguém, estes não sentiram-se motivados o suficiente para desenvolver esse passo da SD. Temos na figura 27, uma imagem disponibilizada pelo aluno A2, a qual serve como referência para a figura disponibilizada pelo aluno A7.

Figura 27 - Teodolito caseiro pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Terminado a construção do teodolito os alunos foram orientados, através do link do vídeo disponibilizado no grupo do WhatsApp, a como usar o teodolito por eles construído, aplicando-o em situações reais do cotidiano para identificar a medida da altura de objetos com alturas inacessíveis.

Para efetuar os cálculos e descobrir a altura do objeto escolhido pelos discentes, os alunos precisam identificar que, do ponto de observação até o objeto, forma-se um triângulo retângulo e assim irão considerar os seguintes aspectos: o ângulo do triângulo retângulo que o estudante deve considerar para encontrar a medida da altura; a distância do aluno até o objeto; a altura do discente, sendo esta considerada como parte da altura do objeto; e a razão trigonométrica apropriada para efetuar os cálculos da altura procurada (MATEMÁTICA MULTIMÍDIA, online).

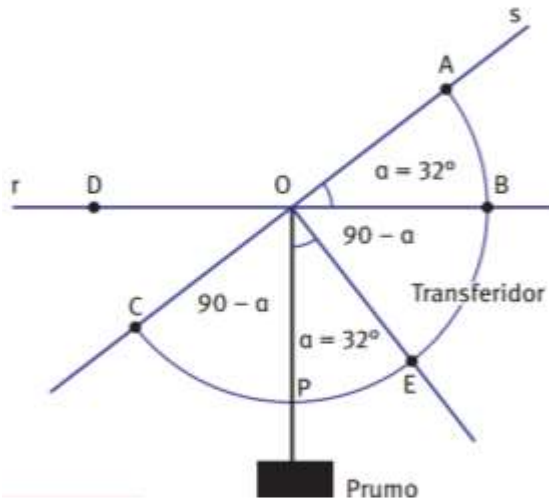
Seguindo as orientações do site Matemática Multimídia, para medir a altura de uma árvore, por exemplo, os discentes deveriam obter uma distância da árvore e mirar ao topo desta, através do canudo ou de um outro objeto que esteja preso na mira do teodolito. Depois, deveria segurar o cordão com a mão e visualizar o menor ângulo que se formou no transferidor.

O próximo passo é anotar esse valor. Para medir a distância do seu ponto até a árvore, o aluno precisará de uma trena. Logo, o discente deveria permanecer ou marcar o mesmo ponto que mediu o ângulo agudo e assim medir sua distância até a árvore. Nesta fase alguém poderia ajudar o estudante, pois este deve permanecer ou marcar exatamente o ponto de referência que mediu o ângulo. Depois, o aluno deveria anotar o valor dessa distância do seu ponto até a árvore (ANDRADE, 2017; BIANCHINI, 2015; MATEMÁTICA MULTIMÍDIA, online).

Por fim, os alunos iriam medir a sua altura e anotar o valor, já que ele fica como parte da altura da árvore. Para usar este medidor de ângulos, os sujeitos da pesquisa precisavam fazer uso do conceito de tangente de um ângulo agudo e assim determinar a altura do objeto, nesse exemplo o objeto seria a árvore (ANDRADE, 2017; BIANCHINI, 2015; MATEMÁTICA MULTIMÍDIA, online).

O processo para construir o cálculo de alturas inacessíveis utilizando o teodolito pode ser efetuado de acordo com o exemplo da figura 28 como podemos observar a seguir.

Figura 28 - Teodolito



Fonte: Matemática multimídia (online)

Neste exemplo da figura 28 utiliza-se como ângulo de visada o ângulo agudo de 32º. A justificativa para este fato é que a reta s passa pela linha-de-fé do transferidor, sendo assim a reta r faz um ângulo α com a reta s, os ângulos AÔB e CÔD são opostos pelo vértice e, portanto, congruentes. OP corresponde ao fio de prumo e é perpendicular à reta r, então, o ângulo CÔP mede 90º - α. Como OE é perpendicular à reta s, temos o ângulo EÔP medindo α igual a 32º (MATEMÁTICA MULTIMÍDIA, online).

Entretanto, nessa fase da pesquisa, os alunos não fizeram as medições de alturas inacessíveis, apesar de serem estimulados pela pesquisadora. Os mesmos ressaltaram não ter a trena, outros não deram justificativa.

Concluímos aqui a terceira etapa da pesquisa. Apesar de os alunos não concluírem por completo o planejado para esta etapa, observamos que os discentes, A2, A3 e A7, estavam motivados para a construção do teodolito. Nesse momento atípico que vivemos, devido à pandemia pelo coronavírus, temos uma grande dependência do esforço de cada aluno, e infelizmente no decorrer da pesquisa houve pouca contribuição dos discentes da turma do 9º ano.

Apesar da pouca interação dos discentes durante as três primeiras aulas, não colaborando no processo de identificação dos subsunçores, através do organizador prévio adotado nesta pesquisa, o qual consideramos um importante passo para a identificação e construção dos saberes prévios dos alunos acerca de conceitos geométricos fundamentais ao estudo da trigonometria, como já referido no texto.

Entretanto, a partir do quarto encontro os discentes começaram a participar, pois a construção das respostas da SD dependia constantemente da participação efetiva do aluno. Assim, podemos considerar diante da análise feita das soluções dos questionários I e II da SD e das interações dos estudantes em aula ainda que não tenha sido a desejável, foi progressiva e que a aprendizagem dos alunos que se envolveram no processo durante estas três etapas pode ser considerada positiva.

5.4 4ª Etapa

Nesta etapa final da sequência de estudos, propomos uma avaliação, disponível junto a SD. Quando se fala em avaliação, intuitivamente temos a concepção de avaliar os resultados obtidos pelos alunos após estes fazerem a resolução de uma atividade com essa finalidade. Entretanto, buscamos nesta pesquisa outros métodos avaliativos que não se limitassem apenas aos resultados de questões dispostas pelos discentes.

Utilizamos a seguir um trecho argumentando sobre porque devemos avaliar, ressaltando a importância da avaliação no processo de ensino e aprendizagem:

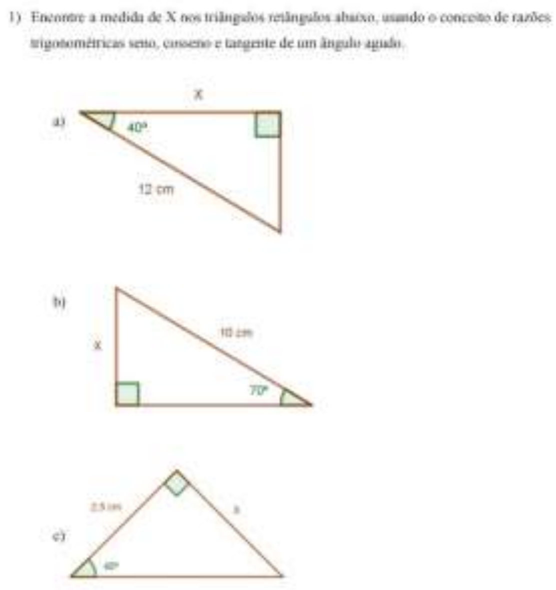
> [...] O aperfeiçoamento da prática educativa é o objeto básico de todo educador. E se entende este aperfeiçoamento como meio para que todos os alunos consigam o maior grau de competências, conforme suas possibilidades reais. O alcance dos objetivos por parte de cada aluno é um alvo que exige conhecer os resultados e os processos de aprendizagem que os alunos seguem. E para melhorar a qualidade do ensino é preciso conhecer e poder avaliar a intervenção pedagógica dos professores, de forma que a ação avaliadora observe simultaneamente os processos individuais e os grupais. Referimo-nos tanto aos processos de aprendizagem como aos de ensino, já que, desde uma perspectiva profissional, o conhecimento de como os meninos e meninas aprendem é, em primeiro lugar, um meio para ajudá-los em seu crescimento e, em segundo lugar, é o instrumento que tem que nos permitir melhorar nossa atuação na aula. (ZABALA,1998, p. 201).

Portanto, investigamos a aprendizagem dos alunos acerca do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo com questões diretas sobre este conteúdo, mas também, analisamos a concepção dos discentes com relação a metodologia de ensino adotada pela pesquisadora em formação na aplicação da SD. Também, uma autoavaliação da aprendizagem dos alunos com o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo e com a matemática.

A avaliação foi composta por 03 (três) questões, (Apêndice B), a primeira e a segunda foram direcionadas a situações problemas sobre as razões trigonométricas. Já a terceira tratava-se sobre o desenvolvimento da sequência didática, sendo esta composta por 06 (seis) itens.

Na primeira questão pedimos para que os alunos resolvessem a medida do lado *X* dos triângulos retângulos. Repetimos aqui o mesmo objetivo da quarta questão do questionário II. Optamos por essa questão para avaliarmos o desempenho do aluno com relação a aplicação dos conhecimentos adquiridos durante o estudo do conteúdo, tema desta pesquisa.

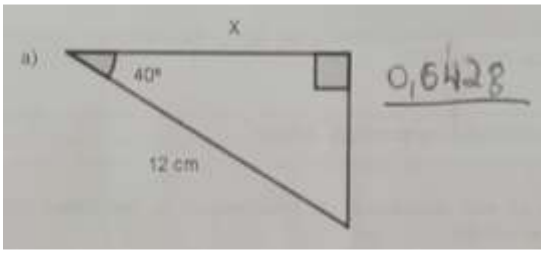
Figura 29 - Questão 01, pela pesquisadora



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

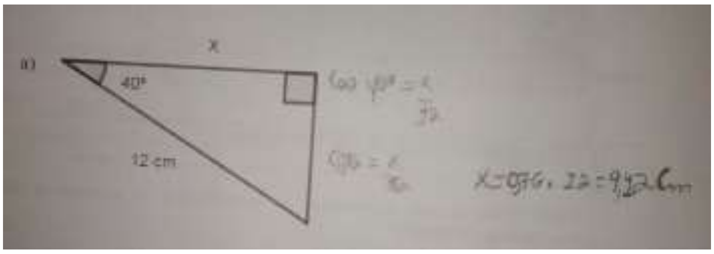
Abaixo, listamos a resolução desta questão por alguns alunos. Visto que, dos 05 (cinco) que devolveram a SD, apenas 04 (quatro) responderam a esta questão. Com relação ao item a, apenas um estudante, o A5, acertou. Destacamos nas figuras 30 e 31 a seguinte análise.

Figura 30 - Questão 01 item a, pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 31 - Questão 01 item a, pelo aluno A5



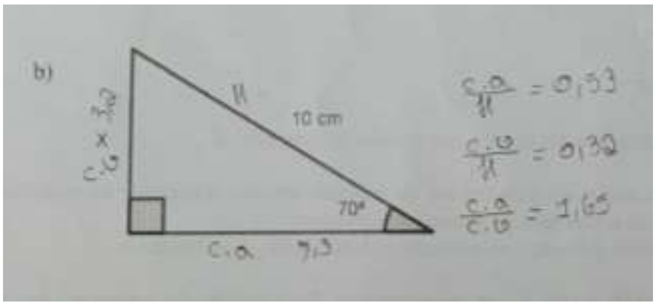
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O aluno da figura 30 não demonstra domínio do conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo, apresentando um resultado do qual não conseguimos compreender o raciocínio escolhido pelo discente. Já o aluno da figura 31 apresentou ter compreendido o conteúdo, efetuando o processo de resolução corretamente.

Para resolver esta questão o discente precisaria identificar qual razão trigonométrica utilizaria, a partir da observação do ângulo de 40º. Neste caso, a razão trigonométrica correta é a do cosseno. Assim, temos que o cosseno do ângulo de 40º é igual a razão do cateto adjacente pela hipotenusa. Feito isso, substituímos os valores dos respectivos lados do triângulo na razão que compreende o cateto adjacente e hipotenusa, respectivamente. Pode-se utilizar a tabela trigonométrica ou até mesmo a calculadora científica para verificar o valor do ângulo do cosseno de 40º. Com isso, efetuamos os cálculos e encontramos a medida do lado *X* do triângulo retângulo aproximadamente igual a 9,2 cm.

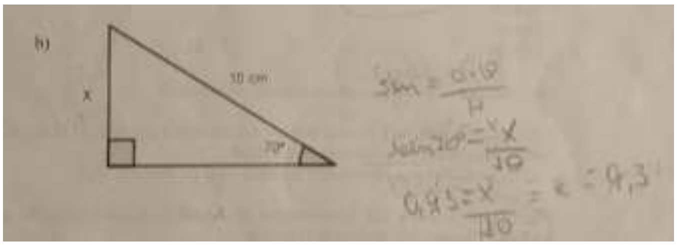
Com relação ao item b, temos a seguinte análise: dos 04 (quatro) alunos que responderam a este item, apenas dois, A3 e A5, acertaram.

Figura 32 - Questão 01 item b, pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 33 - Questão 01 item b, pelo aluno A3



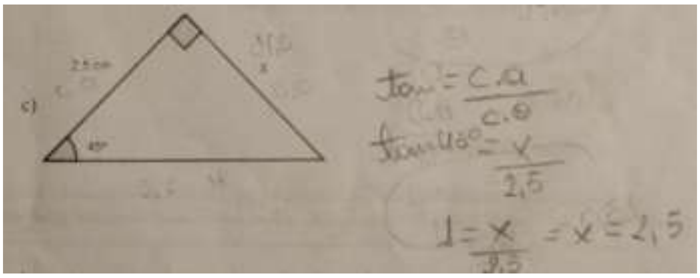
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O aluno da figura 32 possui noções básicas do conteúdo, mas falhou na interpretação da questão. Já o aluno da figura 33 conseguiu assimilar corretamente o conteúdo, isto é, aplicou os conceitos de razões trigonométricas no triângulo retângulo corretamente.

A resolução deste item segue a mesma linha de construção da resolução do item a, porém a partir da observação do ângulo de 70º a razão trigonometria a ser utilizada é o seno. Assim, o seno do ângulo de 70º é igual a razão entre o cateto oposto pela hipotenusa. Efetuando os cálculos, encontramos a medida de *X* aproximadamente igual a 9,4 cm.

Com relação ao item c, dos alunos que responderam a questão 01 (um) apenas dois acertaram, A3 e A5. As resoluções dos alunos A1 e A2 seguem a mesma linha de construção das respostas dos itens a e b, os quais responderam de forma incorreta. Abaixo temos a resolução do item c.

Figura 34 - Questão 01 item c, pelo aluno A3



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

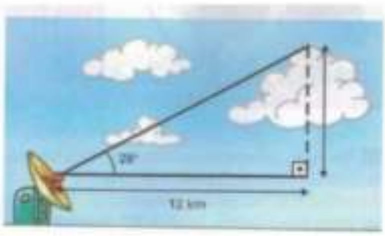
O aluno A3, como mostra a figura 34, respondeu corretamente a este item. A resolução desta questão segue a mesma dos itens anteriores, a e b. A razão trigonométrica que deve ser utilizada é a tangente. Logo a tangente do ângulo de 45º é igual a razão do cateto oposto pelo cateto adjacente. Efetuando os cálculos encontramos que a medida de *X* é aproximadamente igual a 2,5 cm.

Na questão 02 (dois) do questionário avaliativo, trabalhamos uma situação problema. O objetivo desta questão é identificar a capacidade dos discentes em resolver situações que sejam desafiadoras para eles. Trabalhando assim, estratégias de resolução para resolver o problema. Em matemática esse tipo de situação ganha significado, visto que, o aluno consegue perceber a importância do estudo e aplicação do conteúdo em situações reais.

Dos 05 (cinco) alunos que devolveram a SD, 04 (quatro) fizeram esta questão. Os discentes, A1, A2, A3 e A5, responderam corretamente. O aluno A4 não respondeu. Temos abaixo o recorte desta questão e sua resolução elaborada pelos alunos.

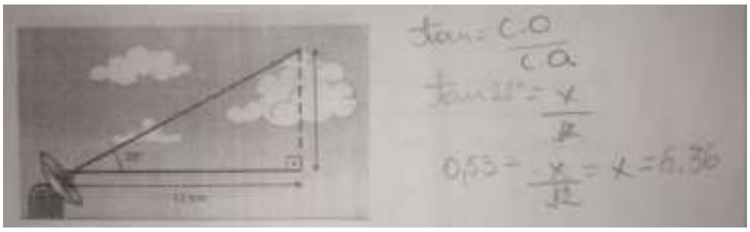
Figura 35 - Questão 02

2) A determinação feita por radares de altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que evitem turbulências. Nessas condições, determine a altura das nuvens detectadas pelos radares conforme o desenho seguinte.
(Use: sen 28º = 0,47; cos 28º = 0,88; tg 28º = 0,53.)



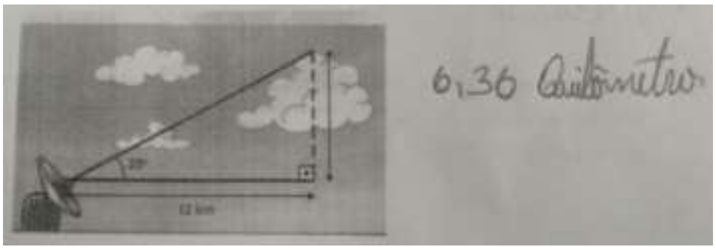
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 36 - Questão 02, pelo aluno A3



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Figura 37 - Questão 02, pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Os alunos, A2, A3 e A5, responderam de acordo com a figura 36, de forma correta. O discente A3, como podemos observar, conseguiu assimilar o conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo e aplicá-lo na resolução da situação problema envolvendo a medida da altura das nuvens.

Já o aluno da figura 37, respondeu apenas o resultado da medida da altura das nuvens, este não desenvolveu o passo a passo da resolução da questão. Esta ideia de resolução corrobora para o fato de que o aluno tenha buscado uma resposta para a questão, sem se atentar ao processo de construção da mesma. Elaboramos o quadro 01, logo a seguir, para melhor visualizarmos o desempenho dos alunos nas questões matemáticas da avaliação. A letra E representa as respostas incorretas e a letra C representa as respostas certas, como já referido o aluno A4 não respondeu estas duas questões.

Quadro 01 - Acertos e erros das questões avaliativas 01 e 02

1ª Questão	(a)	(b)	(c)	2ª Questão
A1	E	E	E	C
A2	E	E	E	C
A3	E	C	C	C
A4	-	-	-	-

A5	C	C	C	C

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Conforme visualização do quadro 01, podemos observar que das 17 (dezessete) respostas disponibilizadas nas questões 01 (um) e 02 (dois) pelos discentes A1, A2, A3 e A5, estes acertaram 09 (nove) e erraram 07 (sete). Sendo a segunda questão com bons resultados, vale ressaltar que a construção do conhecimento matemático baseado em situações problemas aponta para uma perspectiva de que o trabalho com situações problemas é válido e pode gerar uma aprendizagem significativa para o discente.

Quanto à análise do perfil do discente A1, este participou apenas de três encontros síncronos e não respondeu aos questionários I e II da SD. Com relação ao questionário avaliativo, o discente respondeu por completo, entretanto errou todas as alternativas da primeira questão, já a segunda questão o aluno acertou.

Com relação ao aluno A2, este teve participação significativa durante a aplicação da sequência didática contribuindo de forma positiva para o desenvolvimento da SD bem como para a sua aprendizagem. Entretanto, quanto à resolução da primeira questão da sequência de atividades avaliativa, o aluno não compreendeu seu enunciado, mesmo tendo domínio do conteúdo estudado conforme análise da sua contribuição durante a aplicação da SD. O discente errou na execução do processo de resolução desta questão, isto é, não usou o valor do ângulo associado às razões trigonométricas para encontrar a medida do lado *X*. Já na questão 02 (dois), o discente efetuou corretamente o processo de resolução.

Quando analisamos as contribuições do aluno A2 durante o desenvolvimento da SD e sua resposta para a primeira e segunda questões do questionário avaliativo, podemos ressaltar que o seu erro na primeira questão não justifica que o aluno não tenha compreendido o conteúdo. Pois quando analisamos a sua resposta para a segunda questão, composta de uma situação problema, e as questões dos questionários I e II, o discente demonstrou que compreendeu o conteúdo.

O aluno A3, durante o desenvolvimento da SD, também teve participação significativa, isto é, respondeu aos questionários I e II e sempre que sentia dificuldades buscava saná-las através de questionamentos. Conforme análise de seus acertos nas questões 01 (um) e 02 (dois), podemos observar que este compreendeu o processo de resolução, aplicando assim seu conhecimento de forma correta.

O aluno A4, teve participação durante a aplicação da SD efetuando todo processo de resolução da SD e mostrava ter compreendido o conteúdo durante as aulas síncronas, entretanto não respondeu às questões 01 (um) e 02 (dois) na atividade avaliativa.

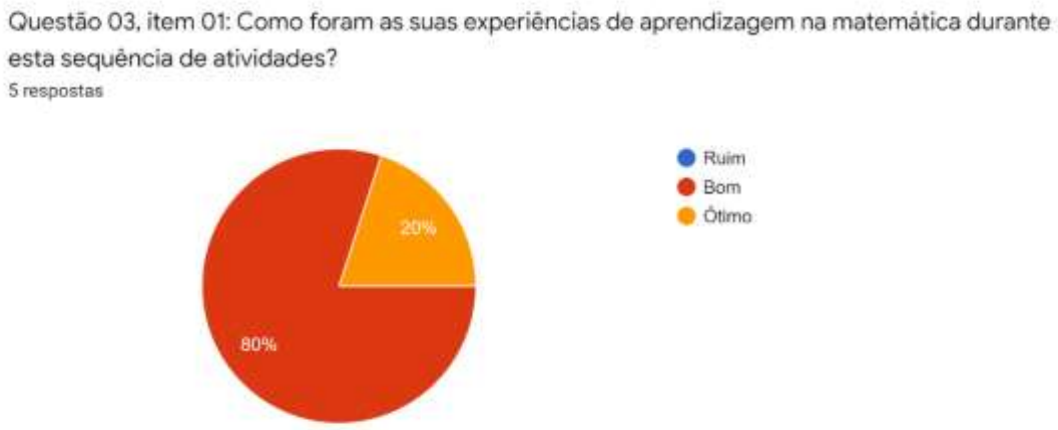
Com relação ao discente A5, este participou da pesquisa somente via material impresso, como já referido. De acordo com a análise de seu material foi possível observar que ele errou em alguns pontos do conteúdo na SD, mas nas questões avaliativas direcionadas a aplicação do conteúdo, 01 (um) e 02 (dois), o discente acertou, esse fato revela que seu esforço, estudo e autoconfiança foi favorável para o desenvolvimento das resoluções das atividades e para a sua aprendizagem.

Quanto aos erros dos alunos que participaram do processo de resolução da SD, Moreira (2000), relata que o princípio da aprendizagem pelo erro na aprendizagem significativa crítica é visto como um recurso humano que muitas vezes constrói o conhecimento. Isto é, o erro dos discentes na resolução das atividades podem ser analisados como forma de melhorar a sua aprendizagem na busca de identificar as causas e corrigi-las. E não determinar o nível de aprendizagem dos discentes segundo estes erros, pois devemos levar em consideração todo processo de conhecimento do aluno durante as aulas síncronas, dos quais demonstraram compreender o conteúdo.

A terceira questão pedia para os alunos responderem sobre o desenvolvimento da SD. Assim, os seis itens que a compõem são sobre autoavaliação da aprendizagem do discente, a metodologia adotada durante as aulas e sobre a importância da matemática para a sociedade.

O primeiro item solicitava para que os discentes respondessem sobre como foram as suas experiências de aprendizagem na matemática durante esta sequência de atividades. Captar estas experiências tinha o objetivo de o aluno se autoavaliar a respeito de sua aprendizagem na matemática.

Gráfico 02 - Questão 03, item 01



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

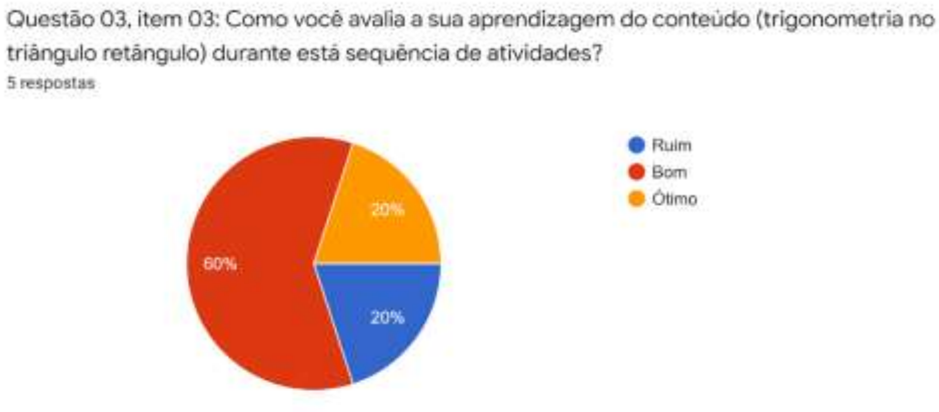
Analisando o gráfico 02, temos que, dos 05 (cinco) alunos que entregaram a SD, 04 (quatro) consideraram que sua aprendizagem foi boa, o que corresponde a 80% destes, e apenas 01 (um) ou 20% ressaltou que sua aprendizagem foi ótima. A partir da análise destes dados podemos perceber que os discentes relatam terem obtido uma experiência de aprendizagem significativa na disciplina de matemática. Mesmo com a persistência dos erros podemos inferir que a aplicação da SD contribuiu para a aprendizagem dos alunos na matemática.

No segundo ponto, tínhamos o objetivo de avaliar a concepção dos alunos acerca da metodologia adotada pela pesquisadora durante a aplicação da SD. A adoção por aulas que buscassem novos métodos de ensino corrobora para o que Moreira (2000) cita em um dos seus princípios facilitadores da aprendizagem significativa crítica, isto é, a não centralidade do livro texto. Buscamos através da SD trabalhar outros materiais educativos, a exemplo da história da matemática, o desenho geométrico e também a construção do teodolito caseiro.

Assim, perguntamos acerca da diferença entre as aulas com o uso da SD pela pesquisadora e as demais aulas de matemática das quais eles tinham experiência. Os 05 (cinco) alunos marcaram a alternativa com o seguinte enunciado: aula dinâmica, pois fez uso de material concreto a exemplo do teodolito caseiro associando o conteúdo a situações problemas que podem ser encontradas no cotidiano dos alunos.

O terceiro item pedia para os alunos avaliarem e justificarem a sua aprendizagem no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, durante a aplicação da SD. O objetivo central deste ponto era que os discentes se auto avaliassem sobre a sua aprendizagem em trigonometria.

Gráfico 03 - Questão 03, item 03



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Dos 05 (cinco) alunos que responderam a esta questão, 01 (um) disse que tinha sido ótima a sua aprendizagem, 03 (três) alunos relataram que sua aprendizagem foi boa e 01 (um) disse que sua aprendizagem foi ruim, conforme o gráfico 03. Após a análise do gráfico, podemos observar que 80% dos alunos disseram obter uma aprendizagem positiva do conteúdo estudado durante a aplicação da SD. Acreditamos que a utilização de uma metodologia e a condução de atividades que encorajem os alunos a perceberem que mesmo com as limitações nos conteúdos podem e são capazes de aprender, tem potencial de motivá-los e iniciarem um processo de mudança na sua relação com a matemática. Abaixo, listamos as justificativas que os alunos deram para a classificação de sua aprendizagem:

- “Consegui entender sobre o assunto, gostei bastante de ter aprendido sobre trigonometria no triângulo retângulo” (A2)
- “Eu sou péssima em matemática, mas eu acho que evolui um pouco. Mais pra frente vou melhorando, mas isso me ajudou muito”. (A3)
- “eu aprendi um pouco, pois a explicação da professora foi ótima” (A4)
- “eu acho ruim porque não sou muito bom em matemática” (A1)

Partindo do pressuposto que tínhamos o intuito de que o aluno pudesse atribuir significado ao que estuda a partir da aproximação da matemática escolar com aplicações em situações reais do cotidiano do discente, temos assim que este propósito contribuiu para tornar a aprendizagem do aluno A2 de forma significativa e prazerosa.

A resposta de A3 corrobora de forma positiva a metodologia adotada na SD. Apesar de ter declarado pouca afinidade com a matemática, a escolha por trabalhar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo com bases em conceitos da aprendizagem significativa e aprendizagem significativa crítica, contribuiu para o estudante perceber uma evolução na sua aprendizagem. Considerando a resposta do aluno A1 vale ressaltar que ele não teve assiduidade nas aulas síncronas e não respondeu os questionários I e II da SD, sendo justificável que ele classifique sua aprendizagem como ruim nesse conteúdo. Voltamos aqui ao ponto situado por Moreira (2000) quanto a adesão do estudante ao processo de aprender, não sabemos ao certo por quais motivos ele não teve constância nas aulas pelo Meet, mas a pouca assiduidade interfere na aprendizagem se o aluno, por algum motivo, não procurar outras alternativas fora da escola para aprender.

As respostas de A1 e a A3 nos faz recordar do aspecto citado na introdução deste trabalho, seção onde pontuamos que muitos indivíduos parecem já ter se convencido de que o fato de não serem bons com a matemática é uma sentença definitiva em sua vida escolar. Por esta crença e todos os fatores que os levaram a pensar assim e até a se recusarem a oportunidade de conhecer a matemática, pois creem que não são bons o suficiente para aprendê-la. A falta de motivação do aluno A1 em participar das aulas pode ser decorrente de vários fatores, dos quais não podemos destacar com propriedade os que lhe afetam de modo particular.

O quarto item da questão três tinha o objetivo de avaliar se os discentes obtiveram uma aprendizagem significativa para a sua vida cotidiana com o estudo desta SD. Todos escolheram a opção positiva. Aprender significativamente e criticamente é o aluno ser capaz de entender se o que ele aprendeu serve para ele, se sim, como ele vai aplicar este conteúdo na sua realidade (MOREIRA, 2000).

Observando as respostas dadas pelos alunos que participaram da pesquisa e devolveram a sequência didática respondida, temos pistas que um ensino baseado nesta perspectiva tem potencial para gerar resultados positivos no processo de ensino-aprendizagem, pois mesmo que eles ainda não tenham dominado todos os procedimentos matemáticos para a resolução de todas as questões do assunto trabalhado, demonstraram compreender onde são utilizados, fato esse que caracteriza estarem em processo de letramento matemático.

No quinto item, questionamos os alunos acerca da importância da matemática para a sociedade como um todo. Sabe-se, de acordo com o PCN, que “a Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.” (BRASIL, 1998, p. 24). Assim, o objetivo desta questão era entender a posição do aluno com relação à matemática e suas contribuições para a humanidade assim como para o cotidiano do discente.

Neste item, todos os quatro (05) alunos optaram pelo item em que a matemática contribui para resolver situações problemas da humanidade bem como do cotidiano do discente, logo esta ciência ajuda o ser aprendente a compreender essas situações. O que condiz de forma positiva com o estudo apontado pelo PCN do Ensino Fundamental ao conhecimento matemático esperado no processo de ensino-aprendizagem.

O sexto e último item da terceira questão, pedia para os alunos deixarem um recado sobre a aplicação desta sequência didática, a qual estudamos durante as 04 (quatro) etapas. O principal objetivo desta questão era compreender a concepção dos alunos acerca da aplicação do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo através da metodologia adotada pela pesquisadora na sequência didática. Como também poder dar a oportunidade aos alunos para expressarem suas opiniões acerca da adoção da metodologia da SD, isto é, identificar se os alunos conseguiram de fato entender que estes podem ter participação efetiva nas aulas e se os recursos didáticos foram importantes para a construção de seus saberes.

Dos 05 (cinco) alunos que devolveram a SD, apenas 03 (três) responderam a esta questão. Consideramos a resposta do aluno A2 a fim de exposição do trabalho visto que foi o enunciado que se deteve a analisar aspectos que a SD potencializou acerca do conteúdo: “Na trigonometria é importante saber identificar os dados de um triângulo que são conhecidos como hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente. A trigonometria estabelece relação entre os ângulos agudos do triângulos retângulos e as medidas de seus lados”.

Esta resposta é importante para a compreensão da aprendizagem do aluno no seu crescimento intelectual, isto é, na sua estrutura cognitiva, e também porque é a partir desse conhecimento que como professora/pesquisadora em formação temos a oportunidade de melhorar nosso trabalho na docência.

Não temos esta pesquisa como a única solução para os problemas no processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo, mas o retorno dado pelos alunos participantes da pesquisa foi favorável para continuarmos a aplicação desta SD, sendo ela passível de aprimoramentos.

Podemos, então, dizer que o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo ancorado nos Princípios da Aprendizagem Significativa Crítica de Moreira (2000) e da Aprendizagem Significativa Ausubeliana, associado as sequências didáticas, corrobora de forma positiva para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. Despertando, assim, na estrutura cognitiva dos alunos possibilidades de compreender as diversas situações/problemas que o estudo da trigonometria tem influência, seja no cotidiano do discente ou em outras esferas sociais.

Relatamos nesta seção o processo de análise dos dados obtidos através da aplicação da SD, passaremos agora às considerações finais deste trabalho apresentando uma síntese dos resultados para os objetivos traçados nesta pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo geral investigar o processo de ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, mais especificamente às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, através de uma intervenção pedagógica em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do município de Areia de Baraúnas-PB.

A realização da pesquisa foi norteada por um levantamento bibliográfico acerca do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de uma pesquisa de campo realizada através da aplicação de uma sequência didática direcionada para esta temática. A categorização dos dados teve base na abordagem qualitativa e quantitativa de pesquisa. Sendo assim, consideramos estes processos e procedimentos para o desenvolvimento e avaliação deste trabalho.

As Teorias da Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Significativa Crítica, Moreira (2000, 2006, 2017), foram as concepções que deram norte ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo adotado na pesquisa.

Buscamos, com a aplicação da SD, construir o passo a passo do conceito das razões trigonométrica seno, cosseno e tangente, para que o discente pudesse compreender a aplicação desse conteúdo em situações práticas, a exemplo de medidas com alturas inacessíveis. E conforme a análise do questionário avaliativo os discentes demonstram que compreenderam este objetivo da SD.

Quanto ao objetivo de mapear metodologias consideradas alternativas no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria, identificamos através de produções acadêmicas, as quais podemos citar, Pereira (2012), Andrade (2017), Silva (2013) e Jürgensen (2019), possibilidades metodológicas que contribuíram para este processo. Tais como, as adotadas neste trabalho, a história da matemática e a resolução de problemas. Então, associamos as contribuições metodológicas destas pesquisas à teoria da aprendizagem significativa crítica de Moreira (2000), para promover uma situação de ensino em que o aluno fosse o ser protagonista da sua aprendizagem. De acordo com a análise feita nas respostas dos discentes, podemos considerar que a metodologia adotada ainda é passível de melhorias e tem potencial de contribuir positivamente para a aprendizagem do aluno.

Sabemos que o discente carrega consigo um vasto conhecimento, cabe ao docente explorar as várias formas de identificar estes conhecimentos e ensinar conforme a realidade do aluno. Na aprendizagem significativa, o mapeamento do que o aluno já sabe é um dos principais fatores que influenciam na aprendizagem deste, e para identificar esse conhecimento abordamos o conceito de conhecimento prévio chamado de subsunçor. Assim, listamos aqueles que consideramos relevantes para o ensino e aprendizagem da trigonometria nos triângulos retângulos: ângulos, proporcionalidade e semelhança em geometria, e o estudo do triângulo retângulo.

Como os alunos já tinham estudado o conteúdo, razões trigonométricas no triângulo retângulo, objeto de investigação da pesquisa, buscamos identificar quais características ainda estavam presentes na estrutura cognitiva dos discentes através dos organizadores prévios. Isto é, trabalhamos uma situação problema com o objetivo de mapear e organizar os subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos alunos. Porém, os discentes pouco colaboraram com informações acerca dos conhecimentos prévios deles, e mesmo quando questionados, pouco falavam. Dessa maneira, inicialmente, não foi possível identificar quais conhecimentos os alunos já tinham necessários para a aprendizagem da trigonometria.

Durante a aplicação da SD, foi possível perceber dificuldades apresentadas pelos alunos nos conhecimentos prévios necessários para este conteúdo. Diante desta situação, podemos concluir que, o formato de aula “expositiva” provavelmente adotado no contexto anterior a aplicação da pesquisa não proporcionou aos alunos, participantes da pesquisa, uma aprendizagem significativa do conteúdo em questão.

Considerando o objetivo de compreender as principais definições da trigonometria no triângulo retângulo podemos concluir que, através dos dados coletados na SD, os alunos, que devolveram a sequência didática, compreenderam os principais aspectos que compõem o conteúdo da trigonometria no 9º do Ensino Fundamental.

Tínhamos ainda a intencionalidade de atribuir significado na estrutura cognitiva dos alunos acerca dos conhecimentos trigonométricos aplicados em situações cotidianas através de contribuições da aprendizagem significativa crítica. Isto é, além do discente entender o processo de construção dos conceitos das razões trigonométricas, buscamos trazer a aplicação da trigonometria para o cotidiano da turma com problemas relacionados à medição de alturas inacessíveis. Embora os alunos não tenham efetuado as medições com o teodolito, estes responderam a atividade avaliativa da SD e afirmaram ter compreendido as situações as quais a trigonometria é aplicada.

Encerramos aqui, uma fase desse estudo. Temos esta pesquisa como uma possibilidade, dentre tantas outras existentes, de vislumbrar metodologias mais eficazes e significativas para proporcionar situações efetivas de aprendizagem aos alunos. Entretanto, este estudo pode e deve ser melhorado a fim de proporcionar melhores contribuições ao ensino e aprendizagem da Trigonometria.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática**. Campina Grande: Eduepb, 2016.

ANDRADE, Susana Bertozi Tavares de. **Medindo alturas inacessíveis:** aplicações com o teodolito caseiro e virtual no estudo da trigonometria. Cornélio Procópio, PR, 2017, 144 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** [s.l.], SBM, 1995.

BESSA, Valéria da Hora. **Teorias da aprendizagem.** Curitiba, PR: IESDE Brasil S.A, 2008.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília, 2017.

_______. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental (SEF) **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Fundamental. Matemática. Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica. **Plano de Desenvolvimento da Educação**: Prova Brasil. Brasília: INEP/Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011.

________. ideb 2017. In: Qedu: use dados. Transforme a educação. [Brasil, Meritt e Fundação Lemann, 2012]. Disponível em: https://www.qedu.org.br/estado/115-paraiba/aprendizado. Acesso em: 04 junho. 2021.

CARMO, Manfredo Perdigão do. *et al.* **Trigonometria Números Complexos.** [s.l.], SBM, 1992.

CALDEIRA, Ana Maria de Andrade. **Ensino de ciências e matemática, II**: temas sobre a formação de conceitos. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Por que se ensina matemática?** [s.l.], SBEM, 2013.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II N**, v. 2, p. 15-19, 1989.

DEMO, Pedro. **Introdução à metodologia da ciência.** São Paulo: Atlas, 1985.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 23. ed. São Paulo: Paz e Terra S/A, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR., José Ruy. **A conquista da matemática.** São Paulo: FTD, 1998.

JARDINETTI, José Roberto Boettger. **Abstrato e o concreto no ensino da matemática:** algumas reflexões. Rio Claro, SP: Bolema, 1997.

JÜRGENSEN, Bruno Damien da Costa Paes. **"Lendo e escrevendo o mundo" com matemática:** estudando trigonometria com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Bolema, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: Graftex comunicação visual, 1991.

LIMA, Elon Lages. *et al.* **A matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1997.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). *et al.* **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. 21º ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa crítica.** In: Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa, 3., 2000. *Anais*. Lisboa (Peniche). Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagens Significativas, p. 47-65.

__________. **A teoria da aprendizagem significativa:** e sua implementação em sala de aula. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

__________. **Teorias de aprendizagem.** 2ª ed. São Paulo: E.P.U, 2017.

Museu de Astronomia e Ciências afins. **Teodolito**. Disponível em: http://site.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito.html . Acesso em: 19 Jun. 2021.

NEVES, José Luis. **Pesquisa qualitativa:** características, usos e possibilidades. São Paulo, 1996.

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio**: contribuições da teoria da aprendizagem significativa. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2012.

SILVA, Wellington da. **O ensino de trigonometria**: perspectivas do ensino fundamental ao médio. 2013. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

SOARES, Maria Zoraide M. C; SANTINHO, Miriam Sampieri; MACHADO, Rosa Maria; RODRIGUES, Wilson Roberto. A altura da árvore: geometria e medidas. **Recursos**

educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/994. Acesso em: 18 jun. 2021.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa**: Como ensinar, Porto Alegre: Armted, 1998.

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO[7] I E II

NOME: ______________________________ IDADE: ________

DATA: ___/_____/_____

1. Anote a medida dos ângulos agudos que você construiu no Triângulo Retângulo.

   $\hat{A}$ ________

   $\hat{C}$ ________

2. Determine o nome dos lados do Triângulo Retângulo que você construiu, para o ângulo $\hat{A}$.

   AB ______________________

   BC ______________________

   AC ______________________

3. Determine o nome dos lados do Triângulo Retângulo que você construiu, para o ângulo $\hat{C}$.

   AB ______________________

   BC ______________________

   AC ______________________

4. Preencha as tabelas abaixo com os dados que você encontrar no seu triângulo. Use a régua para determinar as medidas dos lados e a calculadora para encontrar o valor das razões.

TABELA I

NOME	**ÂNGULO DE 30º**	
	Medida do cateto oposto	
	Medida do cateto adjacente	

[7] As questões de 01 a 06 e de 01 a 04 do questionário I e II respectivamente, foram adaptadas da Dissertação de Mestrado de Susana Andrade, 2017, e do site Matemática Multimídia (online).

	Medida da Hipotenusa	
	Razão: $\frac{C.O}{H}$	
	Razão: $\frac{C.A}{H}$	
	Razão: $\frac{C.O}{C.A}$	

Fonte: Adaptação do site Matemática Multimídia.

TABELA II

NOME	ÂNGULO DE 60º	
	Medida do cateto oposto	
	Medida do cateto adjacente	
	Medida da Hipotenusa	
	Razão: $\frac{C.O}{H}$	
	Razão: $\frac{C.A}{H}$	
	Razão: $\frac{C.O}{C.A}$	

Fonte: Adaptação do site Matemática Multimídia.

5. Explique suas conclusões acerca das tabelas.

____

____

____

____

6. Escreva o nome das razões trigonométricas de um ângulo agudo.

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} =$$

$$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} =$$

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} =$$

QUESTIONÁRIO II

NOME: ____ IDADE: ________

DATA: ___/_____/_____

1. No quadro abaixo, desenhe um triângulo retângulo com ângulos agudos de 45º. Use a régua e o transferidor para construir o desenho.

2. Determine as medidas dos lados do triângulo retângulo que você desenhou e encontre as razões trigonométricas para o ângulo de 45º.

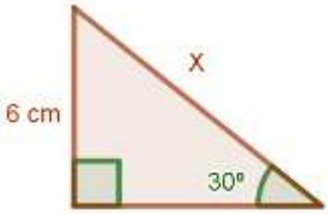
3. Organize na Tabela abaixo as razões trigonométricas encontradas por você com auxílio da professora.

	30º	45º	60º
seno			
cosseno			
tangente			

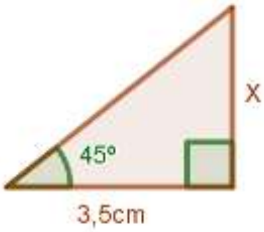
Fonte: Bianchini, 2015.

4. Encontre o valor da medida de X nos triângulos abaixo.

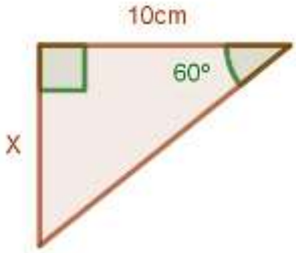
a)



b)



c)



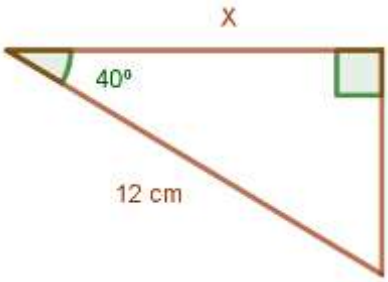
APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO AVALIATIVO[8]

NOME: ____ IDADE: ________

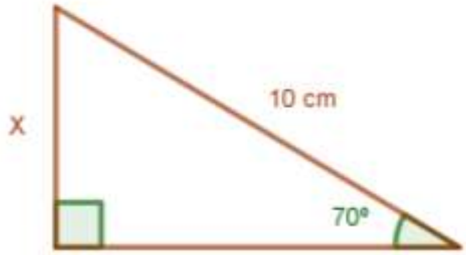
DATA: ___/_____/_____

1. Encontre a medida de X nos triângulos retângulos abaixo, usando o conceito de razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

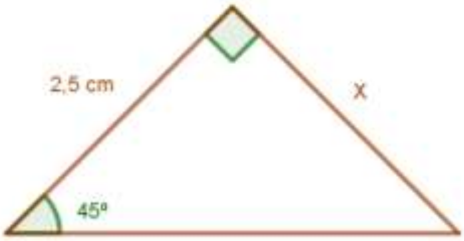
a)



b)



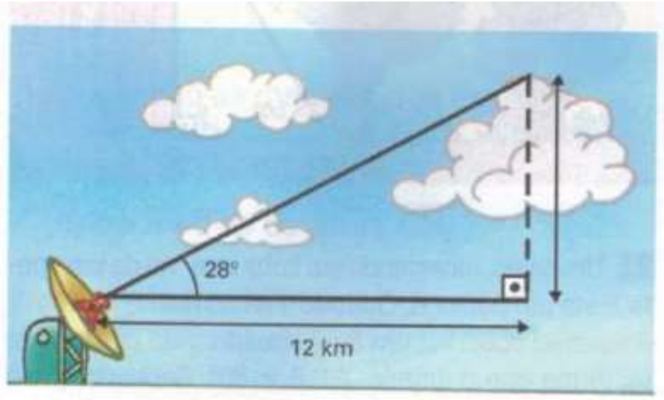
c)



2. A determinação feita por radares de altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que evitem turbulências. Nessas condições, determine a altura das nuvens detectadas pelos radares conforme o desenho seguinte.
(Use: sen 28º = 0,47; cos 28º = 0,88; tg 28º = 0,53.)

---

[8] Questão 01 adaptada do livro do autor Giovanni Giovanni Jr e Castrucci - A Conquista da Matemática, vol.único, 1998. Questão 02 foi retirada de forma idêntica do mesmo livro da questão 01. Questão 03 adaptada doartigo científico "Lendo e escrevendo o mundo" com Matemática: estudando trigonometria com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do autor Bruno Jürgensen, 2019.



Fonte: Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci (1998)

3. Sobre o desenvolvimento da sequência didática:

Como foram as suas experiências de aprendizagem na matemática durante esta sequência de atividades?

( ) Ruim

( ) Bom

( ) Ótimo

Qual a diferença desta, para outras aulas de matemática?

( ) Aula dinâmica, pois fez uso de material concreto a exemplo do teodolito caseiro associando a situações problemas do cotidiano;

( ) Não teve diferença com relação às outras aulas de matemática.

Como você avalia a sua aprendizagem do conteúdo (trigonometria no triângulo retângulo) durante esta sequência de atividades?

( ) Ruim

( ) Bom

( ) Ótimo

Justifique sua resposta:

___

___

___

Você considera que obteve uma aprendizagem significativa para a sua vida cotidiana com o estudo desta sequência didática?

( ) Sim, porque compreendi a aplicação da trigonometria em diversas situações do cotidiano, a exemplo de aplicações com alturas inacessíveis bem como na medicina e música;

( ) Não obtive uma aprendizagem significativa.

Você considera a matemática importante (relevante) para a sociedade em geral?

( ) Sim, porque ela contribui para resolver situações problemas que estão presentes na humanidade ou em nosso cotidiano, ajudando assim, o ser humano a compreender essas situações;

( ) Não, porque a matemática ajuda a resolver situações problemas da humanidade, mas não contribui no meu cotidiano;

( ) Não, pois não preciso da matemática no meu dia a dia.

Deixe aqui um recado sobre a aplicação desta sequência didática que estudamos durante esses encontros.

APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro ser de meu conhecimento e livre vontade a participação na pesquisa presente sobre o processo de ensino e aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo. A investigação é vinculada ao trabalho de conclusão de curso da Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB - Campus VII.

Estou ciente de que a sequência didática é um instrumento de coleta de dados do processo investigativo e que as informações por mim fornecidas serão utilizadas na escrita do trabalho **mantendo em sigilo a minha identidade pessoal, bem como a instituição a qual estou vinculado.**

Aluno (a)

Escola

Areia de Baraúnas - PB______ de ___________________________de 2021.

ANEXO A - TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Fonte: Bianchini, 2015.

ANEXO B - PROCEDIMENTO PARA CONSTRUIR O TEODOLITO CASEIRO

Folha do aluno — Geometria e medidas

Comentários iniciais

Você já ouviu ou leu em algum lugar que na Amazônia existem árvores com mais de 50 m de altura? Mas, como foi que alguém conseguiu medi-las? Será que alguém subiu lá com uma corda ou será que levaram um guindaste?

Depois desta atividade, você poderá medir a altura das árvores que quiser!

Procedimento

Etapa 1 **Tangente de qualquer ângulo**

> ***Pense e responda***
>
> Como é possível obter a tangente de qualquer ângulo agudo de um triângulo retângulo?

Etapa 2 **O medidor de ângulos**

2.1 Recorte um pedaço (20 cm × 10 cm) do papel cartão;
2.2 Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, destacando o segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°, como na FIGURA 1;
2.3 Prenda o barbante com o peso e o canudo, como nas FIGURAS 2 e 3.

O medidor de ângulos está pronto. Vamos medir um objeto muito alto?

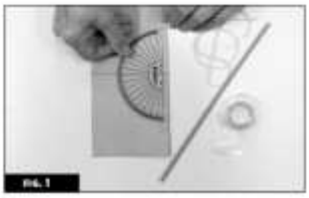


FIG. 1

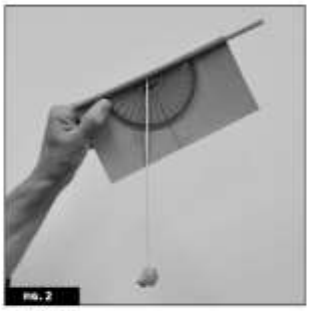


FIG. 2

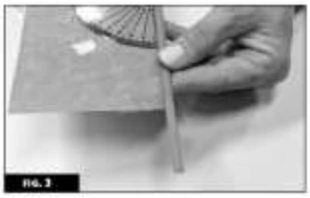


FIG. 3

Etapa 3 **A altura da árvore**

Escolha uma árvore, uma antena ou um poste alto cuja altura você gostaria de saber.

Mas e agora? Como descobrir este valor apenas com um instrumento que mede ângulos?

Sugerimos que você organize os dados obtidos em uma planilha:

Altura do observador	Distância ao objeto	Leitura no medidor	Ângulo de visada (α)	tg α	Altura do objeto

TABELA 1

> ***Pense e responda***
>
> Qual é o ângulo formado entre o chão e o objeto que você está medindo? Isso será útil para calcular a altura desejada?

A altura da árvore — Folha do aluno

Fonte: Matemática Multimídia, online.