



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA  
CAMPUS CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

# Análise numérica para solução de integrais não elementares

por

**BALDOINO SONILDO DA NÓBREGA**

sob orientação da Professora

**Dra. KÁTIA ELIZABETE GALDINO**

CAMPINA GRANDE-PB

2012

**BALDOINO SONILDO DA NÓBREGA**

# **Análise numérica para solução de integrais não elementares**

Monografia apresentada ao curso de Especialização em  
Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual  
da Paraíba em cumprimento as exigências legais para  
obtenção do título de Especialista.

**sob orientação da Professora:**

**Dra. KÁTIA ELIZABETE GALDINO**

**CAMPINA GRANDE-PB**

**2012**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

N669a Nóbrega, Baldoino Sonildo da.  
Análise Numérica para Solução de Integrais Não Elementares [manuscrito] / Baldoino Sonildo da Nóbrega. 2012.  
64 f. : il. color.

Monografia (Especialização em Ensino de Matemática Básica) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnologias, 2012.

“Orientação: Prof. Dra. Kátia Elizabete Galdino, Departamento de Matemática, Estatística e Computação”.

1. Matemática - Função. 2. Função não elementar. 3. Integração numérica. I. Título.

22. ed. CDD 515.7

# Análise numérica para solução de integrais não elementares

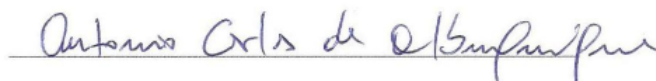
por

**Baldoino Sonildo da Nóbrega**

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:



Prof. Ms. Antônio Carlos de Albuquerque (UEPB)

Membro da Banca



Prof. Dra. Rosana Marques da Silva (UFCG)

Membro da Banca



Prof. Dra. Kátia Elizabete Galdino (UEPB)

Orientador

**Junho/2012**

# Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por está sempre presente em todos os momentos de minha vida abrindo as portas para que eu alcance meus objetivos.

Aos meus pais Antonio Sonaldo e Maria Selma, aos meus irmãos Sonaldo Junior, Lucielma, Sidelânia e Syntia por terem me dado muita força e incetivo que foram fundamentais e a minha namorada Valma Ravanny pelo apoio e carinho.

Aos meus amigos e companheiros de estudo Jairo, Vanlex e Rivanildo que muitas vezes me ajudaram e deram força para não desistir.

A Professora e Orientadora Dra. Kátia Elizabete Galdino pela atenção, compreensão e dedicação no desenvolvimento deste trabalho.

A Professora Dra. Rosana Marques por sempre ter atendido tão bem aos meus pedidos durante toda a graduação.

A todos Professores do Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada. Enfim, a todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.

# Dedicatória

A toda minha família.

# Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre como resolver integrais definidas de funções contínuas que não podem ser calculadas utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, funções que não possuem primitivas ou que seja de difícil obtenção. A integração numérica oferece um caminho prático para estimar os valores dessas integrais, através de métodos numéricos, como a Regra do Trapézio, e as Regras Simpson. Será feita uma aproximação da função  $f$  a integrar por um polinômio  $P$  que é uma função simples de integrar. Também será estimado o erro em que se incorre ao usar tais métodos de aproximação.

# Abstract

This paper presents a study on how to solve definite integrals of continuous functions that can not be calculated with the Fundamental Theorem of Calculus, their functions which are not primitive or elementary formulations it is difficult to obtain. The numerical integration offers a practical way to estimate the integral by numerical methods, such as the Trapezium Rule and Simpson's Rules. There will be an approach to integrate the function  $F$  by a polynomial  $P$  which is a simple function to integrate. Also the error is estimated to be incurred when using such methods of approximation.



# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>9</b>
1.1 Preliminares . . . . .	9
1.2 Integral . . . . .	11
1.3 Relação entre Integração e Derivação . . . . .	15
<b>2 Interpolação Polinomial</b>	<b>19</b>
2.1 Polinômios de Lagrange . . . . .	20
2.1.1 Fórmula de Lagrange . . . . .	20
2.2 Polinômios de Newton . . . . .	21
2.2.1 Fórmula de Newton . . . . .	22
2.3 Polinômios de Gregory-Newton . . . . .	23
2.3.1 Fórmula de Gregory-Newton . . . . .	24
2.4 Erro de truncamento da interpolação polinomial . . . . .	25
<b>3 Integração Numérica</b>	<b>28</b>
3.1 Motivação . . . . .	28
3.2 Fórmulas de Newton-Cotes . . . . .	30
3.2.1 Regra do Trapézio . . . . .	31
3.2.2 Primeira Regra de Simpson . . . . .	36
3.2.3 Segunda Regra de Simpson . . . . .	40
<b>4 Aplicações das Regras de Newton-Cotes tipo Fechada</b>	<b>43</b>
4.1 Aplicação 1 . . . . .	43

	ii
4.2 Aplicação 2 . . . . .	47
4.3 Aplicação 3 . . . . .	54
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>



# Introdução

O cálculo é a matemática da variação. No cerne do cálculo estão os conceitos matemáticos relacionados de derivação (ou diferenciação) e integração.

A importância do cálculo integral reside nas suas inúmeras aplicações em vários domínios da engenharia, mas também em física, em teoria das probabilidades, em economia, em gestão, ou seja, existe um grande número de aplicações.

O processo inverso da derivação no cálculo é a integração. De acordo com a definição do dicionário, integrar significa "juntar as partes em um todo; unir; indicar a quantidade total". Uma relação de grande importância entre derivação e integração é dado no Teorema Fundamental do Cálculo, que é peça chave de todo Cálculo Diferencial e Integral, pois estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração. Ao colocar em prática esse teorema numa integral definida é necessário encontrar uma fórmula  $F(x)$  para umas das primitivas de  $f(x)$  e fazer o devido cálculo do número, porém algumas primitivas são muito difíceis de se encontrar e outras não podem ser calculadas, pois suas primitivas não têm fórmulas elementares. Seja qual for a razão, quando não se pode calcular uma integral definida com uma primitiva, uma solução é recorrer a integração numérica. A idéia básica dos métodos de integração numérica é aproximar a função a ser integrada  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , por um polinômio, chamado polinômio interpolador e integrar esse polinômio, ou seja,

$$\int_a^b = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + Erro,$$

onde  $w_i$  são chamados de pesos e dependem do polinômio escolhido e os pontos  $x \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , são chamados de pontos de integração.

A escolha do polinômio interpolador e dos pontos de integração define a Fórmula

de integração usada. Neste trabalho vamos considerar as fórmulas de Newton-Cotes fechadas, com  $n = 1, 2$ , e  $3$ , chamadas de fórmulas ou regras do Trapézio e de Simpson, usando o polinômio interpolador de Gregory-Newton como polinômio interpolador. Apresentaremos alguns resultados e feito comparações entre as regras supra-citadas buscando qual melhor a se aplicar e quando poderá ser utilizada, assim como também os seus erros cometidos, já que os resultados são aproximações. A seguir um pequeno resumo de cada capítulo deste trabalho.

No capítulo 1 trataremos de alguns conceitos importantes do cálculo, bem como a idéia básica da integração. Introduziremos alguns conceitos tais como, continuidade e de diferenciabilidade de uma função. Em particular, será mostrado que se  $f$  for diferenciável, então  $f$  é contínua. Em seguida abordaremos a definição de integral usando somas de Riemann e um breve comentário sobre o seguinte teorema: se  $f$  é contínua em um intervalo fechado, então  $f$  é integrável. A parte final do capítulo trataremos da relação entre derivação e integração com a demonstração do Teoremas Fundamental do Cálculo, assim como também a definição de primitivas.

O capítulo 2, é uma breve apresentação sobre conceitos básicos de interpolação polinomial. Apresentaremos alguns métodos para construir um polinômio interpolador de um conjunto de pares ordenados. Alguns desses polinômios são: Polinômio de Lagrange, Polinômio de Newton e Polinômio de Gregory-Newton.

No capítulo 3 trataremos de integração numérica, mais precisamente de técnicas de integração. Inicialmente apresentaremos a motivação com alguns exemplos de funções não elementares, mais adiante é feita a escolha do polinômio interpolador a ser utilizado na construção das técnicas, esse é chamado Polinômio de Gregory-Newton, que é um caso particular do Polinômio de Newton para pontos igualmente espaçados. Na sequência, abordaremos cada técnica de integração numérica separadamente, se resumindo às fórmulas de Newton Cotes tipo Fechada que são as Regras do Trapézio e a Primeira e Segunda Regra de Simpson.

O capítulo 4 é formado por várias aplicações nas mais diversas áreas, como por exemplo, na engenharia civil, na matemática e na estatística, mostrando a grande importância do assunto citado no capítulo 3.

No capítulo 5 trataremos de algumas ponderações e comparações entre as devidas técnicas citadas neste trabalho.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

Para apresentação deste trabalho, precisamos de uma breve revisão bibliográfica de alguns conceitos básicos do cálculo como continuidade, derivadas, integrais, entre outros.

### 1.1 Preliminares

**Definição 1.1** *Seja  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no intervalo  $I$ . Dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $a \in I$  se, para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, é possível encontrar um  $\delta > 0$  de tal forma que para todo  $x \in I$  com  $|x - a| < \delta$  implica que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ , isto é, uma função  $f$  é contínua em um número  $a$  se:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ou seja, é possível tornar  $f(x)$  arbitrariamente tão próximo de  $f(a)$  quanto desejamos, desde que se tomemos um  $x$  suficientemente próximo de  $a$ . Dizemos que uma função  $f$  é contínua, se esta função for contínua em todo  $a$  pertencente ao seu domínio.<sup>[2]</sup>

**Definição 1.2** . *Seja  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida num intervalo aberto  $I$ . Dizemos que  $f$  é derivável em um ponto  $x \in I$  se o seguinte limite existir*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Neste caso, este limite é denominado **derivada de  $f$  no ponto  $x$**  denotado por  $f'(x)$ . Dizemos que  $f$  é derivável, se ela for derivável em todos os pontos do seu domínio.<sup>[6]</sup>

\* Chamaremos de derivada lateral de  $f$  pela direita do ponto  $x_0$  denotado por  $f'(x_0^+)$ :

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existe, onde  $x \rightarrow x_0^+$  significa que  $x > x_0$ .

\* Chamaremos de derivada lateral de  $f$  pela esquerda do ponto  $x_0$  denotado por  $f'(x_0^-)$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existe, onde  $x \rightarrow x_0^-$  significa que  $x < x_0$ .

\* Observação 1. Caso uma das derivadas laterais não exista em  $x_0$  ou os seus valores sejam diferentes, dizemos que  $f$  não é derivável em  $x_0$ .

**Proposição 1.3** . Se a função  $f : I \rightarrow R$  é derivável no ponto  $a \in I$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

*Prova:* Seja  $a \in I$  fixo. Basta mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Por hipótese temos que  $f$  é derivável no ponto  $a$ , assim sua derivada neste ponto é dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ fazemo } x = a+h, \text{ temos } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Podemos escrever  $f(x)$  de forma que contenha  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ , como se segue:

$$f(x) = \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] + f(a).$$

Aplicando o limite em ambos os lados da expressão acima e como existem os limites de  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ,  $(x - a)$  quando  $x \rightarrow a$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a).$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f'(a) \cdot 0 + f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

■

Portanto, se uma função  $f$  é derivável no intervalo  $I$ , então  $f$  é contínua em  $I$ .

A recíproca desta proposição não é verdadeira, isto é, nem toda função contínua é derivável. Um exemplo claro deste fato é a função  $f(x) = |x|$  a qual é contínua,

porém no ponto  $x_0 = 0$  não possui derivada, já que as derivadas laterais neste ponto são diferentes. Pois a derivada lateral pela direita é 1 e a derivada lateral pela esquerda é -1.

**Exemplo 1.1.** Dada  $f(x) = \frac{1}{x}$ , encontre a função derivada de  $f$ .<sup>[6]</sup>

**Solução:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{(x+0)x} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

## 1.2 Integral

Um dos grandes avanços da geometria clássica foi obter fórmulas para determinar área e volume das mais variadas formas geométricas. Nesta seção abordaremos o conceito de Integral definida utilizando a ideia de Somas de Riemann.

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, com  $a$  e  $b$  números reais e  $a < b$ , sendo  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  e seja  $R$  a região limitada pela curva  $y = f(x)$ , as retas  $x_0 = a$  e  $x_n = b$  e o eixo  $x$ , conforme ilustra a figura 1.1.



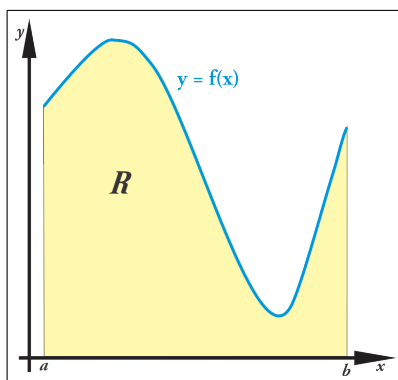


Figura 1.1: Região R

Uma partição do intervalo  $[a, b]$  com  $n$  subintervalos, é definida escolhendo  $n - 1$  pontos entre  $a$  e  $b$ , seguinte forma,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sejam  $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$ , o comprimento do subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $t_k$  um ponto em  $[x_{k-1}, x_k]$  e  $R_k$  o retângulo com altura  $f(t_k)$  e largura  $\Delta_k x$ . Dessa forma, encontramos um valor aproximado para a área que se deseja calcular, somando as áreas dos retângulos  $R_k$ , ou seja,

$$\text{Área de } R \approx f(t_1)\Delta_1 x + f(t_2)\Delta_2 x + \dots + f(t_{n-1})\Delta_{n-1} x + f(t_n)\Delta_n x = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta_k x$$

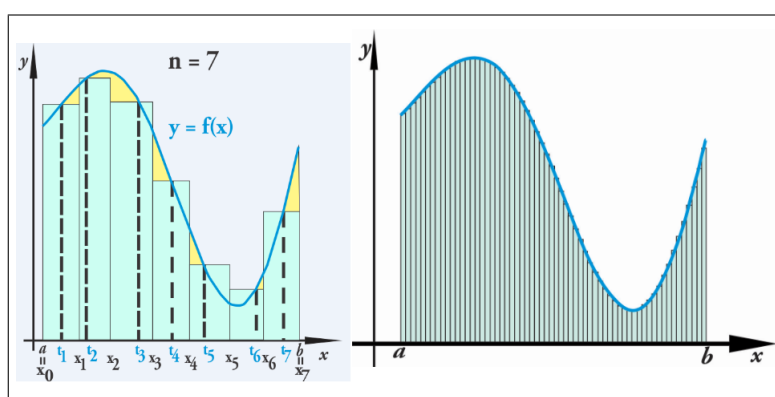


Figura 1.2: Aproximação da região R

Observe na Figura 1.2, que quanto maior for o valor de  $n$  na partição considerada, mais próximo da região R estará a soma das áreas dos retângulos. Seja  $\|P\|$  o comprimento do maior subintervalo da partição, isto é,

$$\| P \| = \max\{\Delta_k x, \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Quanto mais próximo  $\| P \|$  estiver de 0, mais próxima estará a soma das áreas dos retângulos da área da região R.

Logo,

$$\text{Área de } R = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x$$

**Definição 1.4** . Dada uma função  $f$  limitada num intervalo  $[a, b]$ , e uma partição  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  desse intervalo, uma Soma de Riemann é dado por:

$$\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x, \text{ onde } t_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ e } \Delta_k x = x_k - x_{k-1}.$$

**Definição 1.5** . Seja  $f(x)$  uma função definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Dizemos que um número  $I = \int_a^b f(x) dx$  é a integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  e que  $I$  é o limite das somas de Riemann  $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x$ , se a seguinte condição é satisfeita: Dado qualquer número  $\epsilon > 0$ , existe um número correspondente  $\delta > 0$ , tal que, para qualquer partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  de  $[a, b]$  com  $\|P\| < \delta$  e qualquer escolha de  $t_k$  em  $[x_{k-1}, x_k]$ , temos <sup>[6]</sup>

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x - I \right| < \epsilon.$$

Portanto, a área da região R é dada por:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

**Exemplo 1.2.** Seja R a região entre o eixo x e a curva  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$  (veja Figura 1.3).

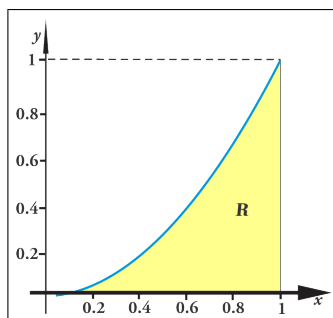


Figura 1.3: Região R

Devemos encontrar um valor aproximado da área desta região através de uma Soma de Riemann.

Para isto, faremos partições do subintervalo  $[0, 1]$  em  $n$  subintervalos iguais, isto é,

$$[x_{k-1}, x_k] = \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta_k x = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Escolhendo  $t_k$  como o ponto médio do subintervalo  $\left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ , isto é,

$$t_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2k-2+1}{2n} = \frac{2k-1}{2n}, k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Neste caso, a Soma de Riemann é

$$\sum_{k=1}^n t_k^2 \Delta_k x = \sum_{k=1}^n \left( \frac{2k-1}{2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)^2}{4n^3} = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

Seja  $A(R)$  a área da região  $R$ ,

$$A(R) = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

Portanto, a área da região  $R$  é,

$$A(R) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \simeq \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

Aumentando  $n$ , a Soma de Riemann desta partição fica mais próximo do valor da área da região  $R$ .

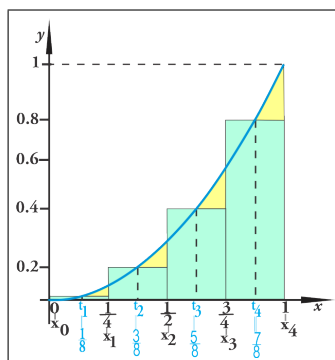


Figura 1.4: Subdivisão do intervalo

Tomando  $n = 2$ , temos

$$A(R) = \frac{1}{3} \simeq \frac{1}{4 \cdot 2^3} \sum_{k=1}^2 (2k-1)^2 = \frac{1}{4 \cdot 2^3} (1^2 + 3^2) = \frac{10}{2^5} = 0,3125$$

Tomando  $n = 4$ ,

$$A(R) = \frac{1}{3} \simeq \frac{1}{4 \cdot 4^3} \sum_{k=1}^4 (2k-1)^2 = \frac{1}{4^4} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = \frac{84}{4^4} = 0,328125$$

A seguir um importante teorema, cuja demonstração encontramos em livros de Análise Real.

**Teorema 1.1** Toda função contínua em um intervalo fechado é integrável.<sup>[2]</sup>

Vale salientar que a recíproca deste teorema é falsa, isto é, nem toda função integrável é contínua.

### 1.3 Relação entre Integração e Derivação

Derivar e integrar são operações inversas. Por exemplo, se  $f(x) = x^2$ , então a integral indefinida de  $f$  é a família de funções

$$A(x) = \int_c^x f(t) dt = \int_c^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{C^3}{3},$$

sendo  $C$  uma constante. Derivando obtemos  $A'(x) = x^2 = f(x)$ . Este exemplo muito simples ilustra um resultado geral, chamado o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo. Nesta seção abordaremos o Teorema Fundamental do Cálculo.<sup>[5]</sup>

Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  uma função integrável. Logo fixado qualquer  $x \in [a, b]$  existe  $\int_a^x f(t) dt$ , assim podemos definir uma função  $G : [a, b] \rightarrow R$ , isto é,  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Note que  $G(a) = 0$  e se  $f$  é positiva e contínua,  $G(x)$  é o valor da área limitada pelo eixo  $x$  e o gráfico de  $f$ , entre as retas  $t = a$  e  $t = x$ , conforme figura a seguir:

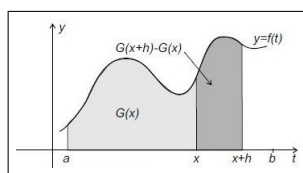


Figura 1.5:  $y=f(t)$

**Teorema 1.2** (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  uma função contínua e definimos  $G : [a, b] \rightarrow R$  como sendo a função:  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ , Então  $G$  é uma função diferenciável e vale:

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t)dt \right] = f(x).$$

**Prova:** Se  $x$  e  $x + h \in [a, b]$  temos:

$$G(x + h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt,$$

ou seja:

$$G(x + h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt. \quad (1.1)$$

Fazendo  $f(t) = f(x) + [f(t) - f(x)]$  em (1.1), obtemos:

$$\begin{aligned} G(x + h) - G(x) &= \int_x^{x+h} f(x)dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt \\ &= hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt, \end{aligned}$$

donde se conclui

$$\frac{G(x + h) - G(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt. \quad (1.2)$$

Para completar a demonstração vamos provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt = 0.$$

Nesta fase de demonstração faremos o uso de continuidade de  $f$  em  $x$ . Representando o segundo termo do segundo membro de (1.2) por  $A(h)$ , provaremos que  $A(h) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Logo, pela definição de limite, temos que para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$|A(h)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |h| < \delta. \quad (1.3)$$

Em virtude da continuidade de  $f$  em  $x$ , dado um  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta$  positivo tal que:

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon \quad (1.4).$$

sempre que

$$x - \delta < t < x + \delta \quad (1.5)$$

Se escolhermos  $h$  de maneira que  $0 < h < \delta$ , então cada  $t$  do intervalo  $[x, x+h]$  satisfaz (1.5) e por isso (1.4) é válida para cada  $t$  desse intervalo. Logo,

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{2} \epsilon dt = \frac{1}{2} h \epsilon < h \epsilon.$$

Dividindo por  $h$ , é visto que (1.3) é válida para  $0 < h < \delta$ . Se  $h < 0$ , um raciocínio análogo prova que (1.3) é válida sempre que  $0 < |h| < \delta$ , estando assim completa a demonstração.<sup>[5]</sup>

⊠

**Definição 1.6** . Dizemos que uma função  $F$  é uma Primitiva (ou antiderivada) de  $f$  em um intervalo  $I$ , se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  de  $I$ .<sup>[5]</sup>

Por exemplo, a função seno é uma primitiva da função cosseno em todo intervalo, porque a derivada da função seno é o cosseno. Fala-se de uma primitiva, em vez de a primitiva, porque se  $F$  é primitiva de  $f$ , então também  $F + k$  o é, qualquer que seja a constante  $k$ .<sup>[5]</sup>

**Proposição 1.7** . Duas primitivas diferem por uma constante.

**Prova:** Sejam  $F$  e  $G$  duas primitivas da função  $f$  e  $H$  a função definida por:

$$H(x) = F(x) - G(x), \forall x$$

Então, para todo  $x \in I$ , temos:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f - f = 0$$

$$H'(x) = 0.$$

Portanto,  $H$  é uma constante, logo temos:

$$F(x) - G(x) = C \text{ para todo } x,$$

donde:

$$F(x) = G(x) + C \text{ para todo } x.$$



**Teorema 1.3** (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo). Seja  $f : [a, b] \rightarrow R$  uma função contínua. Se  $F : [a, b] \rightarrow R$  é uma primitiva de  $f$ , implica que

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Prova:** Por hipótese temos que  $F$  é Primitiva de  $f$ , ou seja,  $F' = f$ . Definimos

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

do teorema 1.2 temos que  $G'(x) = f(x)$ , ou seja,  $G$  também é uma primitiva de  $f$ . Da proposição 2, sabemos que duas primitivas diferem por uma constante, logo:  $G(x) = F(x) + C$ . Daí temos que:

$$G(a) = F(a) + C, \text{ mas } G(a) = 0$$

Assim,

$$C = -F(a)$$

Portanto temos:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ e } G(x) = F(x) - F(a).$$

Consequentemente:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

E como o ponto  $x$  está no intervalo  $[a, b]$ , podemos substituir  $x$  por  $b$  e obteremos:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$



## Capítulo 2

# Interpolação Polinomial

Métodos de interpolação polinomial são utilizados para aproximar uma função  $f(x)$ , principalmente nas seguintes situações:

- \* Conhecemos apenas valores de  $f(x)$  em apenas pontos discretos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$
- \*  $f(x)$  é extremamente complicada e de difícil manejo e
- \*  $f(x)$  não é conhecida explicitamente.

## Polinômios Interpoladores

Considerando que os Polinômios são as funções mais simples, no sentido que a derivada ou uma primitiva de uma função polinomial é uma função polinomial, e portanto, são os mais utilizados. Um polinômio construído com o intuito de aproximar uma função é denominado Polinômio Interpolador, estes são fundamentais em diversos assuntos como, por exemplo, integração numérica que será abordada no próximo capítulo.<sup>[3]</sup>



## 2.1 Polinômios de Lagrange

Sejam dados  $n+1$  pontos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , sendo  $x_i \neq x_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , tais que  $y_i = f(x_i)$  e  $x_i \in (x_0, x_n)$ . Deseja-se construir um polinômio  $L_n(x)$  de grau não superior a  $n$  e possuindo nos pontos  $x_i$  o mesmo valor da função  $f(x)$ , isto é,

$$L_n = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Fórmula de Lagrange

Inicialmente, sejam os polinômios de grau  $n$ ,  $P_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , tais que

$$P_i(x_i) = 0 \text{ e } P_i(x_j) \neq 0, \quad \forall i \neq j.$$

Assim,

$$P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$\vdots$

$$P_k(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

$\vdots$

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

ou seja,

$$P_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad j \neq i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Considerando que  $L_n(x)$  é de grau não superior a  $n$ , ele pode ser escrito como uma combinação linear dos polinômios  $P_i(x)$ , isto é,

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_n P_n(x)$$

ou

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x). \quad (2.3)$$

Comparando (2.1) e (2.3) e em vista de (2.2)

$$L_n(x_i) = y_i = c_i P_i(x_i),$$

de onde

$$c_i = \frac{y_i}{P_i(x_i)}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), temos

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{P_i(x_i)} P_i(x_i).$$

Em vista de (2.2), tem-se, finalmente, a fórmula do polinômio interpolador de Lagrange de grau  $n$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.5)$$

Para facilitar o entendimento construiremos um polinômio com  $n = 2$ , no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1:** Encontre o polinômio que interpola os pontos da tabela a seguir:

x	-1	0	2
y	4	1	-1

$$L_2(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$L_2(x) = 4 \frac{(x - 0)}{(-1 - 0)} \frac{(x - 2)}{(-1 - 2)} + \frac{(x + 1)}{(0 + 1)} \frac{(x - 2)}{(0 - 2)} - \frac{(x + 1)}{(2 + 1)} \frac{(x - 0)}{(2 - 0)}$$

Daí,

$$P_2(x) = 4 \cdot \left( \frac{x^2 - 2x}{3} \right) - \left( \frac{x^2 - x - 2}{2} \right) - \left( \frac{x^2 + x}{6} \right)$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

## 2.2 Polinômios de Newton

### Diferenças divididas

Seja  $f$  a função que passa pelos pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Definimos Diferenças Divididas

a) ordem 0:  $f[x_i] = f(x_i)$ ,

b) ordem 1:  $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

c) ordem 2:  $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

d) ordem n:  $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$

**Exemplo 2.2** Verificar a tabela de diferenças divididas de  $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$  para alguns pontos  $x_i$  no intervalo  $[0; 0,9]$ .

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0	0,0	3,000	-1,20	0,5	5	0
1	0,2	2,760	-1,05	2,5	5	0
2	0,3	2,655	-0,55	5,0	5	
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

### 2.2.1 Fórmula de Newton

Sejam os  $n+1$  pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$ , com  $x_i$  distintos, tais que  $y_i = P(x_i)$ , sendo  $P(x)$  um polinômio de grau  $n$ . De acordo com o que foi definido sobre diferença dividida, fazendo  $y_i = f(x_i)$  e  $f(x_i) = P(x_i)$  temos,

$$f[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$P(x) = P(x_0) + f[x, x_0](x - x_0). \quad (2.7)$$

No entanto,  $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$ , logo,  $f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$

Substituindo a equação acima em (2.7), tem-se

$$P(x) = P(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1). \quad (2.8)$$

Como,

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2}, \text{ temos}$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2).$$

Substituindo a equação acima em (2.8), obtém-se

$$P(x) = P(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \quad (2.9)$$

Continuando o desenvolvimento de  $f[x, x_0, x_1, x_2]$ , chega-se a

$$P(x) = P(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\ + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) + \\ + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Como  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , a diferença dividida  $f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0, \forall x$ .

Fazendo  $y_0 = P(x_0)$  temos o polinômio de Newton de grau  $n$

$$P_n(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \quad (2.10)$$

**Exemplo 2.2**<sup>[3]</sup>: Determinar  $P_2(1, 2)$ , usando a tabela de diferença dividida a seguir:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0,9	3,211	-2,010	0,620
1	1,1	2,809	-1,328	
2	2,0	1,614	-	

Por (4) com  $n = 2$ , tem-se que

$$P_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1),$$

$$P(1, 2) = 3, 211 + (-2, 010)(1, 2 - 0, 9) + (0, 620)(1, 2 - 0, 9)(1, 2 - 1, 1) \Rightarrow$$

$$P(1, 2) = 2, 627.$$

## 2.3 Polinômios de Gregory-Newton

Quando os valores das abscissas  $x_i$  forem igualmente espaçados, a fórmula de Newton pode ser simplificada, resultando na fórmula de Gregory-Newton. Logo o Polinômio de Gregory-Newton é um caso particular do polinômio de Newton para pontos igualmente espaçados.<sup>[3]</sup>

## Diferença finita ascendente

Seja a função  $y = f(x)$  que passa pelos pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$ , sendo  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $\forall i$ . O operador de diferença finita ascendente  $\Delta$  é definido como sendo:

- a) ordem 0:  $\Delta^0 y_i = y_i$ ,
- b) ordem 1:  $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i = y_{i+1} - y_i$ ,
- c) ordem 2:  $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ ,
- d) ordem 3:  $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

**Exemplo 2.3**<sup>[3]</sup> Construir a tabela das diferenças finitas para a função dada pela tabela a seguir:

$x_i$	$y_i$
3,5	9,82
4,0	10,91
4,5	12,05
5,0	13,14
5,5	16,19

A tabela das diferenças finitas ficará da seguinte forma:

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
3,5	9,82	1,09	0,05	-0,1	2,11
4,0	10,91	1,14	-0,05	2,01	
4,5	12,05	1,09	1,96		
5,0	13,14	3,05			
5,5	16,19				

Usando indução finita, mostra-se que diferenças finitas ascendentes e divididas é dada pela expressão,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n} \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Fórmula de Gregory-Newton

Seja a fórmula do polinômio interpolador de Newton (2.10) na forma

$$P_n(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

e uma variável auxiliar

$$z = \frac{x-x_0}{h}, \text{ da qual verifica-se que}$$

$$x = x_0 + hz,$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = zh - h = h(z - 1)$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = zh - 2h = h(z - 2)$$

⋮

$$x - x_{n-1} = x - (x_0 + (n-1)h) = x - x_0 - (n-1)h = h(z - n + 1).$$

Substituindo estes valores na fórmula de Newton e aplicando a relação (2.11) entre operadores, tem-se:<sup>[3]</sup>

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} hz + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} hzh(z-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} hzh(z-1)\dots h(z-n+1).$$

Assim temos a fórmula do polinômio interpolador de Gregory-Newton de grau  $n$ ,

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 z + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} z(z-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} z(z-1)\dots(z-n+1)}. \quad (2.12)$$

**Exemplo 2.3:** Calcular  $P_2(115)$ , a parti da tabela:

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	-0,003
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114	-	

A variável  $z = \frac{x-x_0}{h} = \frac{115-110}{10} = 0,5$ . usando (2.12) com  $n = 2$ , tem-se

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 z + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} z(z-1),$$

$$P_2(115) = 2,041 + (0,038)(0,5) + \frac{(-0,003)}{2}(0,5)(0,5-1) \Rightarrow$$

$$P_2(115) = 2,060.$$

## 2.4 Erro de truncamento da interpolação polinomial

Para estimar a diferença  $|f(x) - P_n(x)|$ , isto é, o erro com que o polinômio interpolador  $P_n(x)$  aproxima  $f(x)$  em  $x \in I$ , com  $I$  o menor intervalo que contém  $x, x_0, \dots, x_n$ , não é suficiente conhecer o domínio de  $f(x)$  e os nós de interpolação  $x_0, \dots, x_n$ . Basta lembrar que a qualquer função que assuma os mesmos valores tabelados está associado

o mesmo polinômio interpolador, podendo a diferença  $|f(x) - P_n(x)|$  tornar-se arbitrariamente diferente em qualquer  $x \in I$ . Todavia o conhecimento da derivada de ordem  $n+1$  de  $f(x)$  pode levar-nos a uma estimativa do erro. No seguinte teorema é apresentada uma fórmula explícita para o cálculo do erro de interpolação.

**Teorema 2.1** Seja  $P_n(x)$  o polinômio de grau menor ou igual a  $n$  interpolador da função  $f(x)$  nos nós de interpolação distintos  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ . Se  $f(x)$  tiver derivadas contínuas até a ordem  $n + 1$  em  $[a, b]$  então, para cada  $x \in [a, b]$  existe  $\xi \in I$  (com  $I$  o menor intervalo que contém  $x, x_0, \dots, x_n$ ), tal que

$$f(x) - P_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

**Prova:** O resultado é imediato se  $x = x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e nesse caso o erro obviamente nulo.

Seja então  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Considerando

$$\theta(t) = \prod_{j=0}^n (t - x_j)$$

Defina-se a função

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - c\theta(t), \quad (2.13)$$

onde,

$$c = \frac{f(x) - P_n(x)}{\theta(x)}. \quad (2.14)$$

A função  $F(t)$  está definida em  $I$  e é tal que

$$F(x) = 0 \text{ e } F(x_i) = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n,$$

isto é,  $F(t) = 0$  tem pelo menos  $n + 2$  zeros em  $I$ . Pelo teorema de Rolle,  $F'(t)$  tem pelo menos  $n + 1$  zeros em  $I$ ,  $F''(t)$  tem pelo menos  $n$  zeros em  $I$ ,  $F^{(n+1)}(t)$  tem pelo menos 1 zero em  $I$ . Sendo  $\xi$  esse zero de  $F^{(n+1)}(t)$ , derivando (2.13)  $n + 1$  vezes obtemos

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - c\theta^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Mas  $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$ , pois o polinômio  $P_n(t)$  é de grau menor ou igual a  $n$ . Como o coeficiente do termo de maior grau do produto  $\theta(t)$  é igual a 1 temos  $\theta^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$ . Então

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\theta^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

e, atendendo a (2.14), vem

$$f(x) - p_n(x) = \theta(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

⊠

sendo  $f(x)$  definida no intervalo  $[a, b]$  que contém os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , e supondo que a derivada  $f^{n+1}(x)$  existe e é contínua no intervalo  $(a, b)$ , então devido a dificuldade de localizar  $\xi$ , na prática ele é tomado como o ponto no intervalo  $[x_o, x] \subset (a, b)$ , onde  $f^{n+1}(x)$  apresenta o maior valor em módulo.

Qualquer um dos polinômios citados neste capítulo, poderão ser utilizados na construção das técnicas de integração numérica que serão conceituadas no capítulo a seguir.



# Capítulo 3

## Integração Numérica

### 3.1 Motivação

Vimos no capítulo 1, uma forma de obter o valor exato de uma integral definida,  $\int_a^b f(x)dx$ , é encontrar uma fórmula  $F(x)$  para uma das primitivas de  $f(x)$  e calcular o número  $F(b) - F(a)$  utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo. Antes de tratar de métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas, é relevante atentar para as razões da importância dos mesmos. Sendo assim, a seguir, apresentaremos alguns exemplos nos quais a utilização de métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas, por algum motivo, se faz necessária.

As aplicações mais imediatas das integrais definidas se encontram no cálculo de comprimentos, áreas, volumes, massa, centro de massa, distância percorrida, tempo decorrido, etc. Por exemplo o problema de calcular o comprimento de uma curva  $f$  de equação  $y = f(x)$ , com  $x$  de  $a$  até  $b$ , se a função  $f$  for diferenciável, esse problema remete a uma integral do tipo  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$  que, geralmente é uma integral de difícil resolução e em muitos casos para resolvê-las se faz necessário o uso de métodos numéricos. Seja, por exemplo, calcular o perímetro de uma região elíptica, que exige a avaliação da expressão,

$$P = 4 \cdot b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)} dt.$$

Ocorre que a integral

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)} dt$$

é conhecida como integral elíptica do primeiro tipo, e não admite uma primitiva que resulte da combinação finita de funções elementares. Em outras palavras, não há uma fórmula fechada para o perímetro de uma região elíptica. Outro exemplo vem da Teoria das Probabilidades, onde para determinar a probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo  $[a, b]$  é necessário calcular a integral

$$\beta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Acontece que  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  é uma função cuja primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares.

Mais um exemplo é encontrado no caso em que há a necessidade de se trabalhar com dados experimentais. Nesta situação, não há funções matemáticas que descrevem um determinado fenômeno físico, mas apenas tabelas de dados que devem ser integrados para se analisar o problema. O tratamento é feito, essencialmente, de forma numérica.

Os exemplos apresentados ilustram a necessidade de conhecermos métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas. Por razões históricas, as fórmulas de integração numérica também são denominadas “quadratura numérica”, pois foi com o problema da quadratura do círculo que Arquimedes fez os primeiros cálculos usando a noção de integral.

Conforme ilustrado nos exemplos apresentados anteriormente, na resolução de uma integral definida várias situações podem ocorrer:

- (i) a determinação da primitiva  $F$  pode ser difícil;
- (ii) a função a integrar pode não admitir uma primitiva  $F$  que possa ser escrita como uma combinação finita de funções elementares;
- (iii) a função a ser integrada pode não ser conhecida na sua forma analítica, mas apenas, em um conjunto de pontos  $(x_i, y_i), \forall i = 0, 1, \dots, n$ .

A chave para a solução do problema é, essencialmente, aproximar a função a ser integrada  $f$ , por outra função cuja integral seja fácil de calcular, ou seja, um polinômio. Este objetivo pode ser alcançado subdividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de mesmo comprimento,  $h = \frac{b-a}{n}$ , substituindo  $f$  pelo polinômio interpolador de Gregory-Newton de grau  $n$ . Poderia se usar qualquer um dos polinômios citados no capítulo anterior, mas devido a facilidade de manipulação neste trabalho utilizaremos apenas o Polinômio de Gregory-Newton. Ou seja,

$$P_n(z) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \dots + \frac{z(z-1)\dots(z-(n-1))\Delta^n y_0}{n!} \text{ em que } z = \frac{x-x_0}{h} \quad (3.1)$$

A Figura 3.1, ilustra o comportamento do polinômio interpolador  $p_n$ .

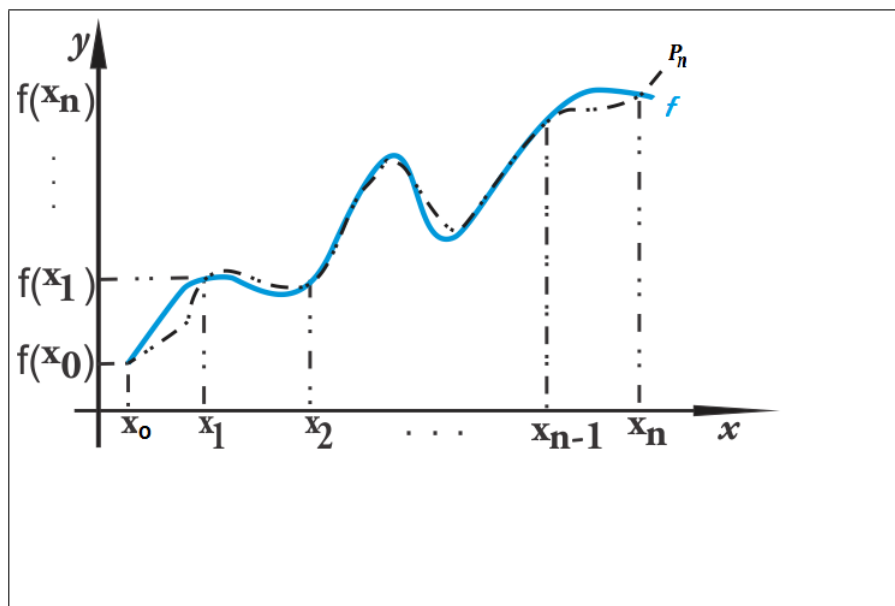


Figura 3.1: Polinômio interpolador  $P_n(x)$  de uma função  $f$

Para calcular o erro cometido na integração ( $E_i$ ) basta integrar o erro da interpolação  $E(x)$ .

De fato, como  $E(x) = f(x) - P_n(x)$  então  $f(x) = P_n(x) + E(x)$ , dessa forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E(x)dx$$

Logo, o erro cometido na integração é dado por:

$$E_i = \int_a^b E(x)dx$$

O erro de truncamento de um polinômio de Gregory-Newton de grau  $n$ , é dado por:

$$\boxed{E(x_0 + nz) = h^{n+1}z(z-1)(z-2)\dots(z-n)\frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1}} \text{ para } z = \frac{x-x_0}{h} \quad (3.2)$$

## 3.2 Fórmulas de Newton-Cotes

As fórmulas de Newton-Cotes podem ser:

(a) Do tipo Fechado: tais fórmulas são aquelas em que todos os pontos estão no intervalo de integração  $[a, b]$ ,  $x_0 = a$  e  $x_n = b$  são os extremos.

(b) Do tipo Aberto: nestas fórmulas todos os pontos estão no intervalo  $[a, b]$  de integração, porém a função integranda  $y = f(x)$ , não é avaliada em ambas extremidades do intervalo, mas em pontos próximos. Utilizamos quando a função integranda apresenta descontinuidades nos extremos do intervalo de integração, têm utilidade na análise de integrais impróprias.

Serão analisadas apenas as Fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado (**Regra do Trapézio e as Regras de Simpson**) devido a facilidade de interpretação e aplicação das fórmulas. Estas permitem calcular, por aproximação, uma integral definida substituindo a função a ser integrada pelo polinômio interpolador de Gregory-Newton.<sup>[3]</sup>

### 3.2.1 Regra do Trapézio

#### Fórmula Simples

A ideia desse procedimento é substituir a função  $f$  a integrar em  $[a, b]$  pelo polinômio interpolador de Gregory-Newton de grau  $n = 1$ , nos pontos,  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$  logo,  $P_1(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0$ .

$$T = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx$$

Fazendo a mudança e variável:

$z = \frac{x-x_0}{h}$   $dz = \frac{1}{h} dx$ , isto é,  $dx = h dz$  e adequando os limites de integração em  $z$  temos:

Para  $x = x_0 \implies z = 0$

Para  $x = x_1 \implies z = \frac{x_1-x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1$ .

Daí,

$$\begin{aligned} T_s &= \int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx \\ &= \int_0^1 (y_0 + z \Delta y_0) h dz = h(y_0 z + \frac{z^2}{2} \Delta y_0) \Big|_0^1 \\ &= h(y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0) = h[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)] \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \end{aligned}$$

Portanto, ao se substituir  $f(x)$  por  $P_1(x)$ , em  $[a, b]$ , obtemos aproximação:

$$T_s = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \quad (3.3)$$

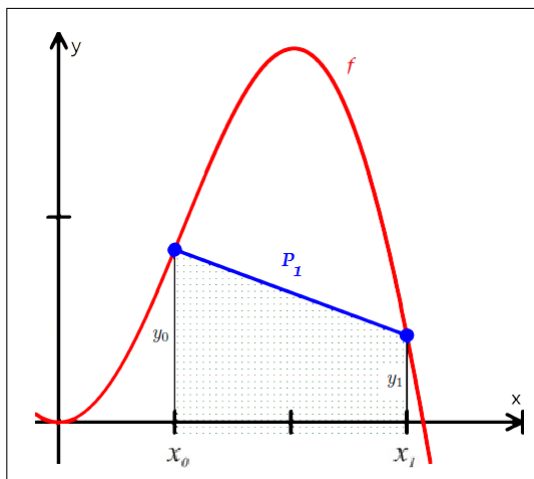


Figura 3.2: Aproximação de  $f$  pelo polinômio  $P_1$

Geometricamente, a fórmula (3.3) indica a área da Figura (3.2) compreendida entre as retas  $a = x_0$ ,  $b = x_1$ , o eixo  $OX$  e o polinômio interpolador  $P_1(x)$ , isto é, a área de um Trapézio. Como sabemos a área de um trapézio vale a metade do produto da altura pela soma da base menor (no nosso caso,  $y_1$ ) com a base maior (no nosso caso,  $y_0$ ).<sup>[4]</sup>

**Exemplo 3.1** Calcular  $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$  pela regra do trapézio.

O polinômio de grau 1 passa pelos pontos com abscissas  $a = x_0 = 1$  e  $b = x_1 = 4$ , assim

$$h = 4 - 1 = 3$$

$$T_1 = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \right) = 1,875.$$

## Erro da fórmula Simples

Fazendo  $n = 1$  na fórmula do erro dada por (3.2), temos

$$\begin{aligned} E_T &= \int_a^b E(x) dx = \int_a^b h^2 z(z-1) \frac{f''(\xi)}{2!} dx = \\ &= \int_0^1 h^2 z(z-1) \frac{f''(\xi)}{2!} h dz = h^3 \frac{f''(\xi)}{2} \int_0^1 (z^2 - z) dz = \\ &= h^3 \frac{f''(\xi)}{2} \left[ \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = h^3 \frac{f''(\xi)}{2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] = -h^3 \frac{f''(\xi)}{12}. \end{aligned}$$

Logo, o erro cometido ao substituir  $f$  por um polinômio interpolador de grau 1 é

dado pela seguinte fórmula:

$$E_T = -h^3 \frac{f''(\xi)}{12}, \quad (3.4)$$

para algum  $\xi \in [a, b]$ .

A fórmula (3.4) tem aplicabilidade prática restrita, uma vez que a determinação de  $\xi$  não é tarefa trivial. Em virtude disso, na prática é comum obtermos um limitante para o erro da integração, isto é:

$$|E_i| = \left| -h^3 \frac{f''(\xi)}{12} \right| \leq \frac{h^3 M}{12} \quad (3.5)$$

sendo  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(\xi)|$ .

Observamos que se o intervalo  $[a, b]$  é pequeno, a aproximação é razoável, mas se  $[a, b]$  é grande, o erro também pode ser grande. Na Figura 3.3, a área hachurada é o erro cometido ao calcularmos a integral de  $a$  até  $b$  usando (3.3).<sup>[4]</sup>

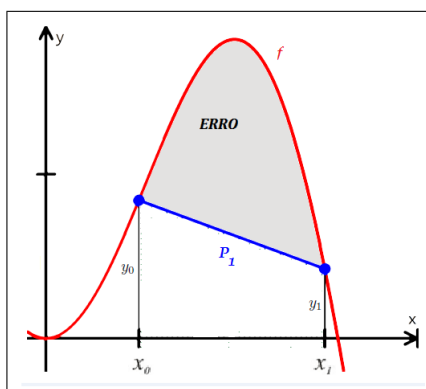


Figura 3.3: Gráfico salientando o erro cometido

## Fórmula Composta

A ideia desse procedimento é dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de mesmo espaçamento  $h = \frac{(b-a)}{n}$  e aplicar a cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  para todo  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  a Fórmula Simples da Regra do Trapézio. Daí a fórmula composta consiste numa maneira de obter aproximações com menor erro.

Considerando a fórmula (3.3) em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , obtemos

$$T_c = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \dots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

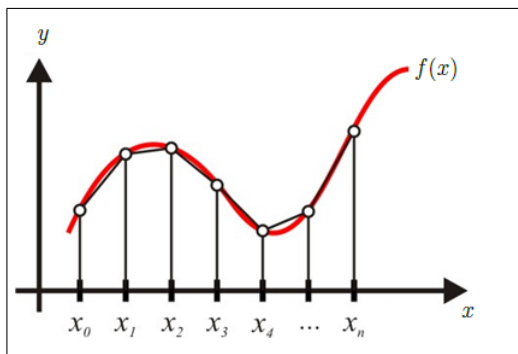


Figura 3.4: Aproximação de  $f$  usando a fórmula composta da Regra do Trapézio

A fórmula composta da Regra dos Trapézios é, portanto:

$$T_c = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (3.6)$$

### Erro da Fórmula Composta

O erro  $E_{T_c}$  da fórmula composta da Regra do Trapézios é a soma dos erros  $E_i$  cometidos em cada um dos subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$ , isto é:

$$E_{T_c} = E_1 + E_2 + \cdots + E_n,$$

onde  $E_i = -h^3 \frac{f''(\xi)}{12}$ ,  $\forall \xi \in [x_i, x_{i+1}]$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Um limitante do erro pode ser determinado considerando que:

$$|E_{T_c}| \leq |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_n|,$$

sendo  $|E_i| \leq \left| \frac{h^3 M_i}{12} \right|$  e  $M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|$ .

Seja  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ . Logo  $|E_i| \leq \left| \frac{h^3 M_i}{12} \right| \leq \left| \frac{h^3 M}{12} \right|$  e  $|E_{T_c}| \leq n \frac{h^3 M}{12}$ .

Como  $h = \frac{b-a}{n}$ , temos:

$$|E_{T_c}| \leq n \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

Finalmente, tem-se a fórmula para o erro máximo cometido pela aplicação da fórmula composta da Regra dos Trapézios:

$$|E_{T_c}| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}, \quad (3.7)$$

sendo  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

**Exemplo 3.2** Determine um limitante superior para o erro cometido na estimativa  $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \, dx$  ao usar a fórmula composta da regra do trapézio com  $n = 10$  passos.

Solução:

Com  $a = 0$ ,  $b = \pi$  e  $n = 10$ , a estimativa de erro  $E_T$ , é dada por

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{\pi^3}{1200}M.$$

O número  $M$  pode ser qualquer limitante superior para a magnitude da segunda derivada de  $f(x) = x \operatorname{sen} x$  ao longo de  $[0, \pi]$ . Calculando  $f''(x)$  obtemos

$$f''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2\cos x - x \operatorname{sen} x| \\ &\leq 2|\cos x| + |x| |\operatorname{sen} x| \\ &\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi \end{aligned}$$

Podemos com segurança considerar  $M = 2 + \pi$ . Portanto,

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200}M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133$$

O erro absoluto não é maior que 0,133. Para melhorar a aproximação podemos aumentar o número de passos do método, ou seja, aumentar  $n$ .<sup>[6]</sup>

**Exemplo 3.3** Calcular, usando a Regra do Trapézio,

$$\int_0^{1,2} e^x \cos x \, dx.$$

Solução: Temos que,

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$e^x$	1	1.221	1.492	1.822	2.226	2.718	3.320
$\cos x$	1	0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362
$e^x \cos x$	1	1.197	1.374	1.503	1.552	1.468	1.202



Aplicando, (3.6)

$$\begin{aligned}
 T_c = \int_0^{1,2} e^x \cos x dx &\approx \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6] \\
 &= \frac{0.2}{2} [1 + 2(1.197 + 1.374 + 1.503 + 1.552 + 1.468) + 1.202] \\
 &= 0.1 [1 + 2(7.094) + 1.202] \\
 &= 0.1 [1 + 14.188 + 1.202] = 0.1 [16.39] = 1.639.
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Primeira Regra de Simpson

#### Fórmula Simples

Para obtenção desta Regra basta substituir a função  $f$  a integrar em  $[a, b]$  pelo polinômio interpolador de Gregory-Newton de grau  $n = 2$ , ou seja, aproximar a função por um polinômio quadrático (parábola). Portanto, precisamos de três pontos,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  e  $x_2 = b$  para construir a fórmula simples da Primeira Regra de Simpson onde o polinômio se comporta da seguinte maneira:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.$$

Logo,

$$S_1 = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx.$$

Fazendo a mudança e variável:

$z = \frac{x-x_0}{h}$   $dz = \frac{1}{h} dx$ , isto é,  $dx = h dz$  e adequando os limites de integração em  $z$  temos:

Para  $x = x_0 \implies z = 0$

Para  $x = x_2 \implies z = \frac{x_2 - x_0}{h} = \frac{2h}{h} = 2$ .

Daí,

$$\begin{aligned}
 S_1 = \int_a^b f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \int_0^2 (y_0 + z\Delta y_0 + (z^2 - z)\frac{\Delta^2 y_0}{2!})hdz = \\
 &= h\left[y_0z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2}\right]_0^2 = \\
 &= h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\Delta^2 y_0\right] = \\
 &= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] = \\
 &= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2].
 \end{aligned}$$

Daí, ao se substituir  $f$  por  $P_2(x)$  obtemos para integral a seguinte expressão:

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]. \quad (3.8)$$

A interpretação geométrica desta regra é apresentada na Figura 3.5.

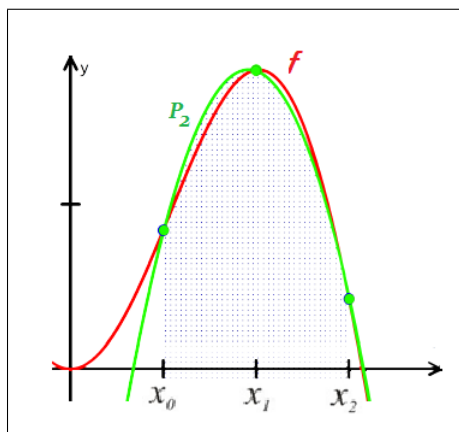


Figura 3.5: Aproximação de  $f$  pelo polinômio  $P_2$

## Erro da Fórmula Simples

Fazendo  $n = 2$  na fórmula do erro dado por (3.2), temos:

$$\begin{aligned}
 E_i = \int_a^b E(x)dx &= \int_0^2 h^3 z(z-1)(z-2)\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}dz = \\
 &= \int_0^2 h^3(z^3 - 3z^2 + 2z)\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}hdz = h^4\frac{f^{(3)}}{6}\cdot\left[\frac{z^4}{4} - z^3 + z^2\right]_0^2 = \\
 &= h^4\frac{f^{(3)}}{6}\cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, o valor do erro de truncamento para Primeira Regra de Simpson em sua fórmula simples não depende de  $E(x)$  quando  $n = 2$ .

Assim, tomando  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} E_{1S} &= \int_0^2 h^4 z(z-1)(z-2)(z-3) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} h dz = \\ &= h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left[ \frac{z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} + \frac{11z^3}{3} - 3z^2 \right]_0^2 = \\ &= h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left[ -\frac{4}{15} \right] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

Logo, a fórmula simples do erro será:

$$E_{1S} = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}, \quad (3.9)$$

para algum  $\xi \in [a, b]$ .

## Fórmula Composta

Para obter a fórmula composta da Primeira Regra de Simpson, deve-se dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de espaçamento  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  par, e aplicar a cada *par* de subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_i, x_{i+1}]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , a fórmula simples da Primeira Regra de Simpson. A figura a seguir ilustra o procedimento.<sup>[4]</sup>

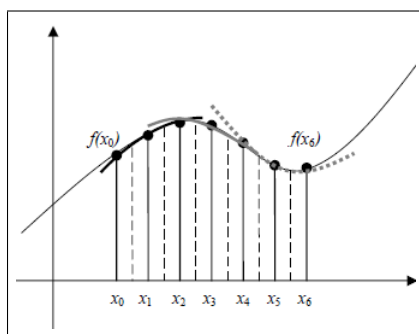


Figura 3.6: Regra de Simpson - Fórmula composta

$$S_c = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4] + \dots + \frac{h}{3} [y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n].$$

Daí,

$$S_c = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (3.10)$$

sendo  $n$  um número *par* de subintervalos.

## Erro da fórmula composta

O erro da fórmula é a soma dos erros cometidos em cada um dos  $\frac{n}{2}$  pares de subintervalos, um para cada conjunto de 3 pontos, isto é:

$$E_{1S} = E_1 + E_2 + \dots + E_{\frac{n}{2}},$$

sendo  $E_i = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$  para  $\xi_i \in [x_{2(i-1)}, x_{2i}]$   $i = 0, \dots, \frac{n}{2}$ .

Determinando um limitante para o erro, seja  $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ . Então

$$|E_i| \leq \frac{h^5 M_1}{90} \Rightarrow |E_{1S}| \leq \frac{n}{2} |E_i| \Rightarrow |E_{1S}| \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{h^5}{90} M_1$$

Como  $h = \frac{b-a}{n}$ , então  $|E_{1S}| \leq \frac{n}{180} \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)^5 M_1 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_1$ .

O limitante para o erro da fórmula composta da Primeira Regra de Simpson é,

$$|E_{1Sc}| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_1, \quad (3.11)$$

sendo  $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Uma vez que a Primeira Regra de Simpson foi obtida pela aproximação da função integranda por um polinômio de segundo grau, seria de esperar que tivesse grau de exatidão dois. No entanto, a expressão obtida para o erro mostra que esta regra tem grau de exatidão três, ou seja, é exata sempre que a função a integrar é um polinômio de grau menor ou igual a três.<sup>[3]</sup>

**Exemplo 3.4** Usando a Primeira Regra de Simpson, calcular a integral  $\int_0^{1,2} e^x \cos x \, dx$  a partir da tabela dada no exemplo 3.3.

Solução: Temos, usando (2.10), que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1,2} e^x \cos x dx &\approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6] \\
 &= \frac{0.2}{3} [1 + 4(1.197 + 1.503 + 1.468) + 2(1.374 + 1.552) + 1.202] \\
 &= \frac{0.2}{3} [1 + 4(4.168) + 2(2.926) + 1.202] \\
 &= \frac{0.2}{3} [1 + 16.672 + 5.852 + 1.202] \\
 &= \frac{0.2}{3} [24.726] = 1.6484.
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Segunda Regra de Simpson

#### Fórmula Simples

A ideia desse procedimento é substituir a função  $f$  a integrar, pelo polinômio interpolador de Gregory-Newton de grau  $n = 3$ , isto é, por

$$P_2(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 y_0}{3!}.$$

$$S_2 = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_3(x) dx.$$

De forma analoga a Primeira Regra de Simpson, fazendo  $a = x_0$ ,  $b = x_3$  e  $z = \frac{x - x_0}{h}$ ,  $0 \leq z \leq 3$ , temos

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_3} P_3(x) dx = \\
 &= \int_0^3 (y_0 + z \Delta y_0 + z(z-1) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2) \frac{\Delta^3 y_0}{3!}) h dz \\
 &= h \left[ y_0 z + \frac{z^2 \Delta y_0}{2} + \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \left( \frac{z^4}{4} - 3z^2 + z^2 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{6} \right]_0^3 \\
 &= h \left[ 3y_0 + \frac{9 \Delta y_0}{2} + \left( \frac{27}{3} - \frac{9}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \left( \frac{81}{4} - 27 + 9 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{6} \right] \\
 &= h \left[ 3y_0 + \frac{9}{2} (y_1 - y_0) + \frac{9}{4} (y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8} (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right] \\
 &= h \left[ \frac{3}{8} y_0 + \frac{9}{8} y_1 + \frac{9}{8} y_2 + \frac{3}{8} y_3 \right] = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3].
 \end{aligned}$$

Sendo assim, a fórmula simples da Segunda Regra de Simpson,

$$S_2 = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3] \quad (3.12)$$

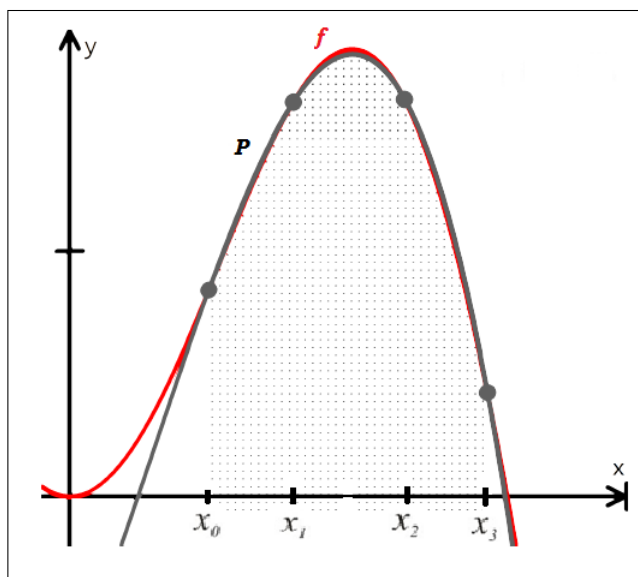


Figura 3.7: Representação gráfica da Segunda Regra de Simpson

### Erro da Fórmula de Simples

$$\begin{aligned} E_{S2} &= \int_0^3 h^4 z(z-1)(z-2)(z-3) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} h dz = \\ &= h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left[ \frac{z^5}{5} - \frac{3z^4}{2} + \frac{11z^3}{3} - 3z^2 \right]_0^3 = -\frac{3h^5 f^{(4)}(\xi)}{80}. \end{aligned}$$

Logo, a fórmula simples do erro será:

$$E_{S2} = -\frac{3h^5 f^{(4)}(\xi)}{80}, \quad (2.13)$$

para algum  $\xi \in [a, b]$ .

### Fórmula Composta

Para obter a fórmula composta da Segunda Regra de Simpson, devemos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de espaçamento  $h = \frac{b-a}{n}$ , com  $n$  múltiplo de 3, a cada conjunto de 4 pontos, isto é, a cada três subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $[x_{i+1}, x_{i+2}]$   $\forall i = 1, 2, \dots, n-2$ , aplicar a fórmula simples.<sup>[3]</sup> Desta forma, obtemos:

$$S_{2c} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[ y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 \right] +$$

$$+\frac{3h}{8} \left[ y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 \right] + \cdots + \frac{3h}{8} \left[ y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n \right]$$

Assim,

$$S_{2c} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left[ y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n \right] \quad (3.14)$$

com  $n$  múltiplo de 3, é a fórmula composta da Segunda Regra de Simpson.

## Erro da Fórmula Composta

De forma similar ao aplicado na determinação do erro da fórmula composta da Primeira Regra de Simpson, obtemos:

$$|E_{S2}| \leq \frac{(b-a)^5 M_2}{80n^4}, \quad (3.15)$$

sendo  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Este resultado mostra que a Segunda Regra de Simpson tem grau de exatidão igual a três.<sup>[3]</sup>

**Exemplo 3.5** Usando a Segunda Regra de Simpson, calcular a integral  $\int_0^{1.2} e^x \cos x dx$  a partir da tabela dada no exemplo 3.3.

Solução: Usando 3.14, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{1.2} e^x \cos x dx &\approx \frac{3h}{8} [y_0 + 3(y_1 + y_2) + 2y_3 + 3(y_4 + y_5) + y_6] \\ &= \frac{0.6}{8} [1 + 3(1.197 + 1.374) + 2(1.503) + 3(1.552 + 1.468) + 1.202] \\ &= \frac{0.6}{8} [1 + 3(2.571) + 3.006 + 3(3.020) + 1.202] \\ &= \frac{0.6}{8} [1 + 7.713 + 3.006 + 9.060 + 1.202] \\ &= \frac{0.6}{8} [21.981] = 1.648575 \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Aplicações das Regras de Newton-Cotes tipo Fechada

Neste Capítulo apresentaremos alguns exemplos do uso de Fórmulas de Integração Numérica na resolução de problemas envolvendo Física, Geometria e Teoria das Probabilidades.

### 4.1 Aplicação 1

#### Força efetiva no mastro de um Veleiro de corrida<sup>[7]</sup>

Fundamentos. Uma seção transversal de um veleiro de corrida é mostrado na figura 4.1a. A força do vento ( $f$ ) exercida pelo pé do mastro da vela varia como uma função da distância acima do convés do barco ( $z$ ), como na Figura 4.1b. Calcular a força de tensão  $T$  no cabo de suporte esquerdo do mastro supondo que o cabo de suporte direito está completamente frouxo e que o mastro está ligado ao convés de modo que transmite forças horizontais e verticais mas não transmite torques. Suponha que o mastro permaneça vertical.

**Solução:** Para prosseguir com esse problema, é necessário que a força distribuída  $f$  seja convertida em uma força total equivalente  $F$  e que sua posição efetiva  $d$  acima do convés seja calculada (Figura 4.2). Esse cálculo é complicado pelo fato de que a força exercida pelo pé do mastro varia com a distância acima do mastro. A força total exercida no mastro pode ser expressa como a integral de uma função contínua:<sup>[7]</sup>



$$f(z) = \int_0^{30} 200 \left( \frac{z}{5+z} \right) e^{-\frac{2z}{30}} dz \quad (4.1)$$

Essa integral não-linear é difícil de calcular analiticamente. Portanto, é conveniente empregar abordagens numéricas como a Regra de Simpson e a Regra do Trapézio para esse problema. Pode-se fazê-lo calculando  $f(z)$  para diversos valores de  $z$  e então usar a equação (3.6) ou (3.10). Por exemplo, a tabela 4.1 tem valores de  $f(z)$  para um tamanho de passo de 3 pés fornecendo dados para a Primeira Regra de Simpson ou para Regra do Trapézio. Resultados para diversos tamanhos de passo são dados na Tabela 4.2. Observa-se que ambos os métodos dão um valor de  $F = 1.480, 6 Ib$  quando o tamanho do passo se torna pequeno. Nesse caso, tamanhos de passo de 0,05 pé para Regra do Trapézio e 0,5 pé para a Primeira Regra de Simpson fornecem bons resultados.

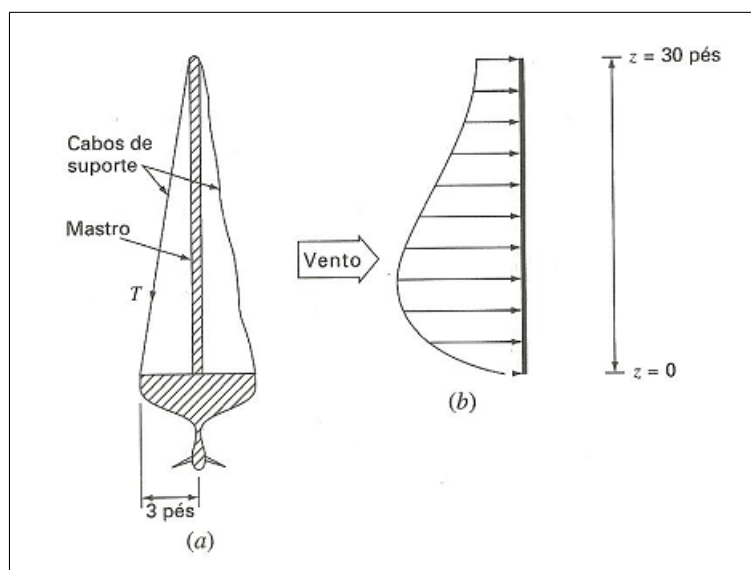


Figura 4.1: (a) Seção transversal de um veleiro de corrida. (b) força do vento  $f$  exercida por pé do mastro como uma função da distância  $z$  acima do convés do barco

Tabela 4.1 Valores de  $f(z)$  para um tamanho de passo de 3 pés.

z, pés	$f(z)$ , lb/pés
0	0
3	61,40
6	73,13
9	70,56
12	63,43
15	55,18
18	47,14
21	39,83
24	33,42
27	27,89
30	23,20

Tabela 4.2 Valores de F calculados com base em diversas versões da Regra do Trapézio e da Primeira Regra de Simpson.

Técnica	tamanho do passo, pés	Segmentos	F, lb
Regra do Trapézio	15	2	1.001,7
	1	3	1.222,3
	6	5	1.372,3
	3	10	1.450,8
	1	30	1.477,1
	0,5	60	1.479,7
	0,25	120	1.480,3
	0,1	300	1.480,5
	0,05	600	1.480,6
Primeira Regra de Simpson	15	2	1.219,6
	5	6	1.462,9
	3	10	1.476,9
	1	30	1.480,5
	0,5	60	1.480,6

A posição de ação efetiva de  $F$  (Figura 4.2) pode ser obtida pelo cálculo da integral<sup>[7]</sup>

$$d = \frac{\int_0^{30} z f(z) dz}{\int_0^{30} f(z) dz}. \quad (4.2)$$

ou

$$d = \frac{\int_0^{30} 200z[z/(5+z)]e^{-2z/30} dz}{1.480,6} \quad (4.3)$$

Essa integral pode ser calculada usando métodos similares aos usados acima. Por exemplo, a Primeira Regra de Simpson com um tamanho de passo de 0,5 fornece  $d = \frac{19.326,9}{1.480,6} = 13,05$  pés. Com  $F$  e  $d$  determinados a partir de métodos numéricos, é usado um diagrama de corpo livre para desenvolver as equações de balanço de força e balanço de torque. Esse diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 4.2.

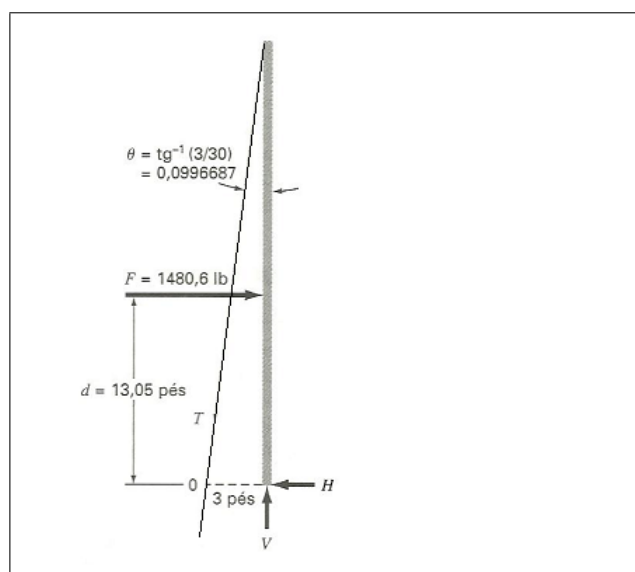


Figura 4.2: Diagrama de corpo livre das forças exercidas no mastro de um veleiro

Somando as forças na direção horizontal e na vertical e tomando os torques em relação ao ponto 0, obtemos

$$\sum F_H = 0 = F - T \sin \theta - H \quad (4.4)$$

$$\sum F_V = 0 = V - T \cos \theta \quad (4.5)$$

$$\sum M_0 = 0 = 3V - Fd \quad (4.6)$$

em que  $T$  é a tensão no cabo e  $H$  e  $V$  são as reações desconhecidas no mastro transmitidas pelo convés. O sentido e o módulo de  $H$  e  $V$  são desconhecidos. A equação (4.6) pode ser resolvida diretamente para determinar  $V$ , pois  $F$  e  $d$  são conhecidos.

$$V = \frac{Fd}{3} = \frac{(1.480,6)(13,05)}{3} = 6.440,6 Ib$$

Portanto, da Equação (4.5),

$$T = \frac{V}{\cos\theta} = \frac{6.440,6}{0,995} = 6.473 Ib$$

e da Equação (4.4),

$$H = F - T\sin\theta = 1.480,6 - (6.473)(0,0995) = 836,54 Ib$$

O conhecimento dessas forças permitem prosseguir para outros aspectos do projeto estrutural do barco, como os cabos e o sistema de suporte do mastro no convés.

Esse problema ilustra bem duas utilidades da integração numérica que podem ser encontradas durante o projeto de estruturas em engenharia. É visto que a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson são fáceis de aplicar e que são ferramentas práticas para a resolução de problemas. A Primeira Regra de Simpson é mais acurada do que a Regra do Trapézio para o mesmo tamanho de passo, e assim, em geral, é a mais indicada.

## 4.2 Aplicação 2

### O Perímetro da região delimitada por uma elipse

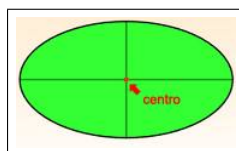


Figura 4.3: Região Elíptica

O perímetro de uma região elíptica depende de  $a$  e  $b$ , que são os comprimentos dos semi-eixos da elipse que a contorna. Como  $a$  e  $b$  são positivos e assumindo que  $a < b$ , e ainda que o semi-eixo maior da elipse está na vertical, uma parametrização da

equação da elipse é dada por  $\gamma(t) = (acost, bsent)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $\gamma'(t) = (-asent, bcost)$ , de forma que o perímetro P da região é dada pelo comprimento da elipse por  $\gamma(t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , ou seja,

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \text{sen}^2 t + b^2 \text{cos}^2 t} dt.$$

Por razões de simetria, podemos integrar somente de 0 a  $\frac{\pi}{2}$  e multiplicar por quatro. Além disso podemos substituir  $\text{cos}^2 t$  por  $1 - \text{sen}^2 t$ , e colocar b em evidência na integral, obtendo:

$$P = 4b \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t} dt,$$

onde  $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ , é um número positivo e menor do que 1 (ele vale 1 quando a elipse é um círculo, e 0 quando a elipse degenera num segmento de reta vertical). O número k é chamado de excentricidade da elipse.

A integral

$$\int \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t} dt$$

é conhecida como integral elíptica do primeiro tipo, e não admite uma expressão via combinação finita de funções elementares. Em outras palavras, não há uma fórmula fechada para o perímetro de uma região elíptica.

Para ilustrar a aplicação, será mostrado a situação problema a seguir.

Um engenheiro é contratado para construir um canteiro numa praça na Cidade de Campina Grande no formato de uma "Elipse" de eixos iguais a 40m e 50m. Para delimitá-lo o engenheiro construirá uma cerca com estacas e 3 voltas de arame. Quantos metros de arame necessário para este projeto?

**Solução:** Sabe-se que o cálculo do Perímetro de uma região elíptica é feito através da integral a seguir:

$$P = 4 \cdot b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2(t)} dt$$

Vimos que o Perímetro está em função de b, que é o eixo maior, e k sua excentricidade definido como,  $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ .

$$P = 4 \cdot 25 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,36 \text{sen}^2(t)} dt$$

O cálculo do valor aproximado do Perímetro P e da quantidade Q de arame será realizado através de métodos numéricos, mais precisamente, utilizando a Regra

do Trapézio, Primeira e Segunda Regra de Simpson. Em um dos 3 casos, substituindo  $b = 25$  e  $k = 0,36$  ( $a = 20$  e  $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ ) obtemos,

A integral a ser aproximada será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,36 \operatorname{sen}^2(t)} dt$$

**1º Caso: Regra do Trapézio:**

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) \text{ e } h = \frac{\pi}{2} - 0 = 1,57$$

$i$	0	1
$t_i$	0	1,57
$y_i$	1	0,8

$$T = \frac{1,57}{2} (1 + 0,8) \Rightarrow T = 1,413$$

Logo,

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,413 = 141,3$$

$$Q = 423,9m$$

Calculando o Erro de truncamento na fórmula temos que,

$$|E_T| \leq \frac{h^3 M}{12}$$

sendo  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(\xi)|$ .

Sabendo que  $M = 0,45$ , o erro cometido na fórmula simples do Trapézio será:

$$|E_T| \leq \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^3 0,45}{12}$$

$$|E_T| \leq 0,145$$

Subdividindo o intervalo em 6 partes, ou seja,  $n = 6$ , e sabendo que  $h = \frac{b-a}{n}$ , temos:

$$T_c = \frac{h}{2} \left[ y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 \right] \text{ e } h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} = 0,2618$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$t_i$	0	0,2618	0,5236	0,7854	1,0472	1,3090	1,5708
$y_i$	1	0,9878	0,9539	0,9055	0,8543	0,8149	0,8

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{0,2618}{2} \left[ 1 + 2(0,9878) + 2(0,9539) + 2(0,9055) + 2(0,8543) + 2(0,8149) + 0,8 \right] \\ &= 0,1309(10,8328) \\ &= 1,418 \end{aligned}$$

Quando o intervalo é subdividido em 6 partes a um outro valor para o perímetro:

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,418 = 141,8$$

$$Q = 3 \cdot 141,8 = 425,4m$$

O erro de truncamento cometido é dado pela fórmula:

$$|E_{Tc}| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

sendo  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

Com  $M = 0,45$  o erro será:

$$|E_{Tc}| \leq \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^3 0,45}{12(6)^2}$$

$$|E_{Tc}| \leq 0,004$$

**2º Caso: Primeira Regra de simpson:**

$$S = \frac{h}{3} \left[ y_0 + 4y_1 + y_2 \right] \text{ e } h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = 0,785$$

$i$	0	1	2
$t_i$	0	0,785	1,570
$y_i$	1	0,9056	0,8

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{0,785}{3} \left[ 1 + 4(0,9056) + 0,8 \right] \\
 &= 0,2616(5,4224) \\
 &= 1,4185
 \end{aligned}$$

Logo,

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,4185 = 141,85,$$

$$Q = 425,55.$$

O erro de truncamento cometido é dado pela fórmula:

$$|E_{1S}| \leq \frac{h^5 M_1}{90}$$

sendo  $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Com  $M_1 = 178,82$ , o erro cometido na fórmula simples da Primeira Regra de Simpson:

$$|E_{1S}| \leq \frac{(0,785)^5 178,82}{90}$$

$$|E_{1S}| \leq 0,59$$

Agora subdividindo o intervalo em 6 partes, ou seja,  $n = 6$ , e  $h = \frac{b-a}{6}$ , daí temos:

$$S_{1c} = \frac{h}{3} \left[ y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6 \right] \quad h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} = 0,2618$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$t_i$	0	0,2618	0,5236	0,7854	1,0472	1,3090	1,5708
$y_i$	1	0,9878	0,9539	0,9055	0,8543	0,8149	0,8

$$\begin{aligned}
 S_{1c} &= \frac{0,2618}{3} \left[ 1 + 4(0,9878) + 2(0,9539) + 4(0,9055) + 2(0,8543) + 4(0,8149) + 0,8 \right] \\
 &= 0,0872(16,2492) \\
 &= 1,4169
 \end{aligned}$$



Com a subdivisão do intervalo temos,

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,4169 = 141,69,$$

$$Q = 425,07.$$

O erro de truncamento cometido é dado pela fórmula:

$$\left| E_{1Sc} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_1$$

sendo  $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Com  $M_1 = 178,82$ , o erro da fórmula composta:

$$\left| E_{1Sc} \right| \leq \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^5}{180(6)^4} 178,82,$$

$$\left| E_{1Sc} \right| \leq 0,0073.$$

**3º Caso: Segunda Regra de Simpson:**

$$S_2 = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3] \text{ e } h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{3} = 0,5236$$

$i$	0	1	2	3
$t_i$	0	0,5236	1,0472	1,5708
$y_i$	1	0,9539	0,8544	0,8

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{3 \cdot 0,5236}{8} [1 + 3(0,9539) + 3(0,8544) + 0,8] \\ &= 0,1963(7,2349) \\ &= 1,4182 \end{aligned}$$

Então,

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,4182 = 141,82m,$$

$$Q = 425,46m.$$

O erro de truncamento cometido é dado pela fórmula:

$$|E_{S2}| \leq \frac{3h^5 M_2}{80}$$

sendo  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Com  $M_2 = 178,82$  o erro cometido na fórmula simples da Segunda Regra de Simpson:

$$|E_{S2}| \leq \frac{3(0,5236)^5 178,82}{80},$$

$$|E_{S2}| \leq 0,263.$$

Subdividindo o intervalo em 6 partes, ou seja,  $n = 6$  e  $h = \frac{b-a}{6}$ . temos:

$$S_2 = \frac{3h}{8} \left[ y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 \right] \text{ e } h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} = 0,2618$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$t_i$	0	0,2618	0,5236	0,7854	1,0472	1,3090	1,5708
$y_i$	1	0,9878	0,9539	0,9055	0,8543	0,8149	0,8

$$\begin{aligned} S_{2c} &= \frac{3 \cdot 0,2618}{8} \left[ 1 + 3(0,9878) + 3(0,9539) + 2(0,9055) + 3(0,8543) + 3(0,8149) + 0,8 \right] \\ &= 0,0981(14,4437) \\ &= 1,4169 \end{aligned}$$

$$P = 4 \cdot 25 \cdot 1,4169 = 141,69,$$

$$Q = 425,07.$$

O erro de truncamento cometido é dado pela fórmula:

$$|E_{S2}| \leq \frac{(b-a)^5 M_2}{80n^4},$$

sendo  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ .

Com  $M_2 = 178,82$  temos que o erro cometido na fórmula composta da Segunda Regra de Simpson:

$$|E_{S2}| \leq \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^5 178,82}{80(6)^4},$$

$$|E_{S2}| \leq 0,01643.$$

A seguir mostraremos uma tabela com os resultados para facilitar a comparação entre as Regras de Newton-Cotes usadas nesta aplicação.

Tabela 4.3. Comparação dos resultados

Técnica	fórmula	Perímetro	Quant. Arame	Erros
Regra do Trapézio	Simples	141,3	423,9	0,145
	Composta	141,8	425,4	0,004
Primeira Regra de Simpson	Simples	141,85	425,55	0,59
	Composta	141,69	425,07	0,007
Segunda Regra de Simpson	Simples	141,82	425,46	0,263
	Composta	141,69	425,07	0,016

Obsevando a tabela, em especial os erros cometidos em cada fórmula, percebe-se que para esta aplicação o melhor resultado será dado pela Regra do Trapézio na sua fórmula composta, devido o erro ter sido o menor dentre todos. Concluindo que seria necessário 425,4m de arame para esse projeto.

### 4.3 Aplicação 3

#### Probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo<sup>[8]</sup>

O PROCON de uma cidade tem recebido reclamações com relação ao peso dos pacotes de açúcar de 5kg. Com a finalidade de verificar a validade das reclamações, foi coletada uma amostra de 100 pacotes. Com isto, chegou-se a conclusão de que para determinar a probabilidade dos pacotes de açúcar pesar menos que 5kg deve ser avaliada a expressão a

seguir. Essa expressão mostra a distribuição de probabilidade mais comum da natureza,

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Para determinar a probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo  $[a, b]$  é necessário antes, obtermos o valor da integral,

$$I = \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Como a integral não tem solução analítica, visto que  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  é uma função cuja primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares, usaremos algumas técnicas de integração numérica, para estimar o valor dessa integral.

Sendo assim, podemos estimar a probabilidade e o erro de truncamento máximo cometido utilizando a Regra do Trapézio e as Regras de Simpson. Dividindo o intervalo de integração em 6 partes e considerar o arredondamento para 4 casas decimais.

#### Solução:

Com o intervalo de integração dividido em 6 partes, então

$$h = \frac{1,8 - 0}{6} = 0,3.$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
$y_i$	1	0,9560	0,8353	0,6670	0,4868	0,3247	0,1979

Aplicando a **Regra do Trapézio**:

$$T_c = \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6]$$

$$T_c = 0,15[1 + 2(0,9560) + 2(0,8353) + 2(0,6670) + 2(0,4868) + 2(0,3247) + 0,1979]$$

$$T_c = 1,1606$$

Obtido o valor da integral, pode-se calcular  $\beta$ .

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1,1606,$$

$$\beta = 0,9630.$$

O erro de truncamento máximo cometido é dado pela fórmula:

$$|E_{Tc}| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} \text{ para } M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Como  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1).$$

Logo,  $|f''(x)| \leq M = 0,4433$ .

Sendo assim, vem que:

$$|E_{Tc}| \leq \frac{(1,8 - 0)^3 0,4433}{12(6)^2},$$

$$E_{Tc} \leq 0,0059.$$

Aplicando a **Primeira Regra de Simpson**:

$$S_c = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$S_c = 0,15[1 + 4(0,9560) + 2(0,8353) + 4(0,6670) + 2(0,4868) + 4(0,3247) + 0,1979]$$

$$S_c = 1,1633$$

Logo, o valor de  $\beta$  é,

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1,1633$$

$$\beta = 0,9640$$

O erro de truncamento máximo cometido no cálculo da integral é dado por

$$|E_{1S}| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_2$$

Verifica-se que:

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)$$

$$f^{(3)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(3 - x^3)$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4 - 6x^2 + 3)$$

$$|f^{(4)}(x)| \leq f^{(4)}(0) = 3 = M.$$

Sendo assim,

$$\left| E_{1S} \right| \leq \frac{(1,8 - 0)^5}{180(6)^4} (3),$$

$$E_{1S} \leq 0,000243.$$

Aplicando a **Segunda Regra de Simpson**:

$$S_{2c} = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 + y_5 + y_6]$$

$$S_c = 0,1125[1+3(0,9560)+3(0,8353)+2(0,6670)+3(0,4868)+3(0,3247)+0,1979]$$

$$S_c = 1,1633$$

Logo, o valor de  $\beta$  é,

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1,1633,$$

$$\beta = 0,9640.$$

O erro de truncamento máximo cometido na Segunda Regra de Simpson é dado por:

$$|E_{S2}| \leq \frac{(b-a)^5 M_2}{80n^4} \text{ para } M = 3$$

Verifica-se que:

$$|E_{S2}| \leq \frac{(1,8-0)^5(3)}{80(6)^4},$$

$$E_{S2} \leq 0,0005467.$$

Tabela de comparação dos resultados.

Tecnica	Valor $\int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$	Valor de F	Erro
Regra do Trapezio	1,1606	0,9630	0,0059
Primeira Regra de Simpson	1,1633	0,9640	0,000243
Segunda Regra de Simpson	1,1633	0,9640	0,0005467

Depois de analisar todas as possibilidades de se calcular o valor de  $\beta$ , comparando os erros cometidos em cada regra, percebe-se que a Primeira Regra de Simpson é a melhor a ser utilizada, uma vez que fornece o menor erro dentre as três. Com isso o PROCON concluiu que 96,4% dos pacotes de açúcar estão abaixo de 5kg se concretizando as reclamações.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Tendo em vista a aplicabilidade dos métodos numéricos nos diversos problemas da vida real, este trabalho de forma simples, conseguiu apresentar alguns modelos conhecidos, obtendo resultados coerentes com aproximações ideais, sendo o modelo numérico muitas vezes a única maneira de descrever sistemas reais em diversas áreas como na engenharia civil, na construção de um veleiro de corrida, na matemática no cálculo do perímetro de uma região elíptica e na teoria das probabilidades no cálculo da probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo.

Fica claro a importância do conhecimento de técnicas de integração numérica, assim como outras técnicas numérica, e o cuidado com o erro na sua utilização. Vale salientar que os resultados obtidos são aproximações, que dentro de uma tolerância dada, podem ser bastante coerentes e aceitos para a tomada das decisões.

Analisando as fórmulas simples e compostas e as expressões dos erros da Regra do Trapézio, Primeira e Segunda Regras de Simpson, percebemos que quanto mais subdividir o intervalo, ou seja, aumentar o valor de  $n$ , melhor será o resultado e menor o erro, isso é perceptível nas aplicações citadas neste trabalho. As funções consideradas não elementares ou de difícil determinação da primitiva, se tornam fáceis de se calcular por aproximação utilizando as Regras estudadas.

As Regras do Trapézio e Simpson podem ter seus algoritmos implementados em muitos ambientes de cálculo numérico, alguns deles são: Matlab, Maple, Octave e Máxima, sendo os dois últimos software livres.

Fazendo comparações entre as expressões dos erros, foi visto que as fórmulas de Simpson são da ordem de  $h^4$ , em símbolo,  $O(h^4)$ , enquanto que a Regra dos Trapézios é da  $O(h^2)$ . Assim, as regras de Simpson possuem a mesma ordem de convergência, portanto ambas convergem para o resultado exato com a mesma velocidade, e mais rapidamente do que a Regra dos Trapézios, quando  $h \rightarrow 0$ .

Para obter o resultado de uma integral com uma determinada precisão, podemos impor que o erro, em módulo, seja menor que  $0,5 \cdot 10^{-k}$ , onde  $k$  é o número de casas decimais corretas que se deseja e, assim, determinar em quantas partes deverá ser dividido o intervalo de integração. Outra alternativa é ir aumentando o número de pontos e comparando dois resultados consecutivos até que seja obtida a precisão desejada. Este segundo procedimento é o mais comumente utilizado.

Portanto, uma regra de integração diz-se de grau de exatidão  $n$  se integrar, exatamente, todos os polinômios de grau menor ou igual a  $n$  e existir pelo menos um polinômio de grau  $n + 1$  que não é integrado exatamente por esta regra. Teoricamente, existe um número infinito de regras de integração, considerando o polinômio interpolador de grau  $n$ , uma vez que é possível atribuir a  $n$  qualquer valor inteiro positivo maior ou igual a um, mas normalmente, são mais frequentes apenas os casos em que  $n$  é igual a um, dois e três, visto que se  $f(x)$  não for um polinômio, o aumento do grau do polinômio interpolador pode causar oscilações (número elevado de raízes reais e distintas), no método em torno de  $f(x)$ , gerando um erro cada vez maior, por isso é recomendável usar fórmulas compostas de grau baixo para diminuir o passo e assim atingir maior precisão.



# Bibliografia

- [1] SWOKOWSKI, Earl W., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1, 2ª Edição. Makron Books (1994).
- [2] LIMA, Elon L., Curso de Análise, Volume 1, 12ª edição. IMPA (2006).
- [3] CAMPOS, Frederico Ferreira, Algoritmos Numéricos, 1ª Edição. LTC (2001).
- [4] CLAUDIO, D. M.; MARINS, J, M. Cálculo numérico computacional: teoria e prática. 3ª edição São Paulo: Atlas, (2000).
- [5] APOSTOL, Tom M., Cálculo com funções de uma variável, Volume 1, Edição. REVERTÉ (1979).
- [6] THOMAS, George B., Cálculo, Volume 1, 11ª Edição. Pearson (2009).
- [7] CHAPRA, C. S.; CANALE, R. P., Métodos numéricos para engenharia, 5ª edição. McGraw-Hill, São Paulo (2008)
- [8] BARROSO, C. Leônidas Numéricos:(com aplicações). 2ª edição. São Paulo. Harbra(1987)