UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSÉ JACKSON DA SILVA

O Estudo da Geometria Analítica através da Resolução de Problemas

MONTEIRO – PB
2022

JOSÉ JACKSON DA SILVA

O Estudo da Geometria Analítica através da Resolução de Problemas

Trabalho Acadêmico de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas, da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO – PB
2022

S586e Silva, José Jackson da.
O estudo da geometria analítica através da resolução de problemas [manuscrito] / Jose Jackson da Silva. - 2022.
80 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Ensino de geometria analítica. 2. Resolução de problemas. 3. Tecnologias digitais. I. Título

21. ed. CDD 516.3

Elaborada por Elesbao S. Neto - CRB - 15/347 BSC5/UEPB

JOSÉ JACKSON DA SILVA

O Estudo da Geometria Analítica através da Resolução de Problemas

Trabalho Acadêmico de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, do Centro de Ciências Humanas e Exatas, da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovado em: 14/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (CCHE/UEPB)

Prof. Me. Tiago Marques Madureira (Examinador interno)
Universidade Estadual da Paraíba (CCHE/UEPB)

Raquel Priscila Ibiapino

Profa. Ma. Raquel Priscila Ibiapino (Examinador externo)
Instituto Federal da Paraíba – Campus Monteiro/PB (IFPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar e me proteger em todo o meu percurso, pois sem a minha fé em sua existência nada seria possível em minha vida.

Aos meus pais, José Lau e Maria Josenice que sempre me ajudaram nessa longa caminhada, e pelos bons exemplos de coragem e superação, sempre se preocupando e dando toda assistência para finalizar esta etapa da minha vida.

As minhas irmãs Joisielly e Jessica, pelo apoio, incentivo e preocupação, os seus conselhos foram fundamentais em minhas escolhas profissionais.

A minha família, em especial minha Tia Rosileide, que me apoiou e me incentivou nos estudos desde o primeiro dia em que resolvi cursar Matemática.

Agradeço ao meu Orientador e amigo, Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca que esteve presente em toda minha formação acadêmica, seus conselhos e incentivos, me tornaram um profissional melhor e responsável, agradeço pelo acolhimento e confiança para realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Me. Tiago Marques Madureira e Ma. Raquel Priscila Ibiapino, por aceitarem fazer parte da banca de defesa. Obrigado pelas grandes contribuições neste trabalho.

Aos meus amigos, Elvis, Eduarda, Felipe, Kelton, Lavinia e Maria de Lourdes que fizeram parte durante toda minha jornada no curso e sempre me incentivaram e aconselharam nos momentos difíceis.

Agradeço a todos os professores do curso de Matemática do CCHE/UEPB, que me proporcionaram ótimas experiências ao longo das disciplinas. Agradeço também aos funcionários do CCHE por sempre me acolherem tão bem.

Ao professor Elexandre, que deu toda assistência durante a realização desta pesquisa e me ajudou nas regências realizadas no Programa Residência Pedagógica.

Agradeço a todos os meus colegas do Programa Residência Pedagógica em especial a amiga/residente Larissa, que me ajudou tirando *prints* nos encontros desta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar quais as contribuições e as dificuldades enfrentadas ao ensinar a Geometria Analítica através da Resolução de Problemas utilizando algumas ferramentas digitais no Ensino Remoto. Esta pesquisa é bibliográfica e de cunho qualitativo, e os dados foram recolhidos de forma descritiva e interpretativa. A pesquisa de campo aconteceu através de encontros remotos no período de 24 de fevereiro a 11 de março de 2022, realizados na Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, localizada no município de Monteiro/PB. Neste trabalho, como fundamentação teórica, destacamos a Resolução de Problemas e o Estudo e ensino da Geometria Analítica: plano cartesiano, distância entre dois pontos no plano, coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta, alinhamento de três pontos no plano, perímetro e área. O estudo bibliográfico foi fundamental para o aprofundamento do conhecimento metodológico no que tange ao processo de ensino e aprendizagem da matemática e a pesquisa sobre a Geometria Analítica, também contribuiu para o crescimento do futuro professor de matemática. Como resultado deste trabalho, a pesquisa de campo possibilitou experimentar a Resolução de Problemas como uma metodologia que tornou os alunos autônomos e criativos na construção do seu próprio conhecimento, ocasionando em um desenvolvimento construtivo e adequado que os levou a pensar como a matemática é interessante. Percebemos então, que o nosso trabalho criou um elo entre a Resolução de Problemas, a Geometria Analítica, e o pesquisador no contexto da formação inicial de professores, proporcionando outra visão e reflexão em relação ao Ensino da Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Geometria Analítica. Resolução de Problemas. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This present work aims to analyze the contributions and difficulties faced when teaching Analytic Geometry through Problem Solving using some digital tools in Remote Learning. This research is bibliographic and qualitative in nature, and the data was collected collected in a descriptive and interpretative manner. The field research took place through remote meetings in the period from February 24 to March 11, 2022, held at the Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, located in the city of Monteiro/PB. In this work, as a theoretical foundation, we highlight Problem Solving and the Study and Teaching of Analytic Geometry: Cartesian plane, distance between two points in the plane, coordinates of the divisor point of a line segment, alignment of three points in the plane, perimeter and area. The bibliographic study was fundamental for the deepening of methodological knowledge regarding the teaching and learning process of mathematics, and the research on Analytic Geometry also contributed to the growth of the future mathematics teacher. As a result of this work, the field research made it possible to experience Problem Solving as a methodology that made students autonomous and creative in the construction of their own knoledge, resulting in a constructive and appropriate development that led them to think about how interesting mathematics is. We realized then, that our work created a link between Problem Solving, Analytic Geometry, and the researcher in the context of initial teacher education, providing another vision and reflection in relation to the Teaching of Mathematics.

Keywords: Teaching Analytical Geometry. Problem Solving. Digital Technologies.

FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria tem uma particular e excepcional importância como disciplina da Educação Básica, seja pelo fato de constituir-se em um dos mais notáveis e vigorosos exemplos de ciência dedutiva; seja por oferecer excelente oportunidade de estabelecer relações entre o mundo exterior e o mundo real formado pelos entes geométricos e os juízos que expressam as suas propriedades e os relacionam entre si; seja pela riqueza e variedade de suas aplicações práticas; seja, enfim, pelo fascínio que os seus temas podem exercer sobre a inteligência dos alunos e desenvolvimento que podem propiciar à sua capacidade inventiva.

O ensino da Geometria tem sido, no entanto, uma das maiores se não a maior dificuldade que os professores de matemática tem encontrado no exercício de sua função, principalmente no que se refere ao início do estudo da Geometria Dedutiva que os antigos currículos da Educação Básica sempre deixavam para o final e quase nunca era ensinado.

A Geometria Analítica, também conhecida como coordenadas geométricas, baseia-se nos estudos da Geometria por meio da utilização da Álgebra. Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês René Descartes (1596-1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas. Neste sistema, ao associar números reais com pontos no plano e equações com figuras geométricas fica claro o entendimento desse tema.

Este trabalho discute a Geometria Analítica no contexto da Resolução de Problemas e a utilização de algumas ferramentas digitais. Na Metodologia de Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução do problema, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. “Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Essa confiança desenvolvida graças à Resolução de Problemas, proporciona um grande incentivo para os alunos, tanto os que querem seguir carreira relacionada às ciências exatas, quanto aqueles que não se identificam com essa área. A implementação dessa metodologia com a Geometria Analítica, busca incentivar os alunos a gostarem da matemática proporcionando uma abertura de olhares para o seu futuro profissional.

Implementar a Metodologia de Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir, ou seja, o professor precisa deixar de ser o centro das atenções, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem construir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

No ano de 2020, o Brasil e demais países, foram afetados pela pandemia da Covid-19, e a estratégia que as escolas usaram para continuar com as aulas foi o Ensino Remoto, mas algumas dificuldades surgiram nesse ensino, como a falta de materiais de qualidade para os professores e alunos, e a grande ausência dos alunos nas aulas. Nesse período, realizei uma entrevista e fui selecionado como bolsista do Programa Residência Pedagógica (PRP), onde surgiu a preocupação com o Ensino-Aprendizagem da Matemática. Por esse motivo desenvolvemos esta pesquisa buscando entender e melhorar a qualidade das aulas remotas.

É importante que haja a preocupação dos profissionais da Educação Matemática em utilizar uma Metodologia de Ensino que propulsione uma melhor compreensão da Matemática por parte dos alunos. Dessa forma, este trabalho mostrará a realidade que o Ensino vem enfrentando em decorrência da pandemia da Covid-19 e como podemos melhorar o estudo da Geometria Analítica utilizando a Resolução de Problemas.

Como a pesquisa de campo foi desenvolvida na pandemia da Covid-19, precisávamos utilizar ferramentas e plataformas digitais para ensinar alguns conceitos da Geometria Analítica. Essas ferramentas e plataformas nos auxiliaram durante as aulas remotas, possibilitando acompanhar todo o processo de construção do conhecimento.

A seguir, apresentamos o objetivo geral, os específicos, e a estrutura deste trabalho.

OBJETIVO GERAL

Analisar quais as contribuições e as dificuldades enfrentadas ao ensinar a Geometria Analítica através da Resolução de Problemas utilizando algumas ferramentas digitais no Ensino Remoto.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar o aplicativo WhatsApp, as plataformas Desmos, Jamboard e o Google Meet como ferramentas que auxiliem no processo de resolução e aplicação das atividades em meio ao Ensino Remoto;
- Construir o conhecimento sobre Geometria Analítica com os alunos-participantes utilizando a metodologia de Resolução de Problemas para uma melhor compreensão;
- Analisar as dificuldades e contribuições ao se trabalhar com a Resolução de Problemas em encontros que aconteceram remotamente na pandemia da Covid-19.

A estrutura deste Trabalho, está dividida da seguinte forma:

No capítulo 1 – Introdução – Falamos um pouco sobre o Estudo e Ensino da Geometria analítica; Resolução de Problemas e Tecnologias Digitais. Também, apresentamos o objetivo geral e específicos da pesquisa, e por último a estrutura do trabalho.

Capítulo 2 – Resolução de Problemas – Iniciamos mostrando um pouco da parte histórica da metodologia de Resolução de Problemas e as reformas no Ensino de Matemática. Em seguida, se encontra o roteiro para aplicar a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e também a importância de trabalhar com essa metodologia no Ensino de Matemática.

Capítulo 3 – Geometria Analítica – Começamos com um breve histórico da Geometria Analítica e a necessidade de trabalhar esse conteúdo no Ensino de Matemática. Temos também, a definição dos conteúdos ensinados nos encontros remotos desta pesquisa: plano cartesiano, distância entre dois pontos no plano, coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta, alinhamento de três pontos no plano e três propostas de problemas sobre perímetro e área de figuras geométricas, para uma futura continuação da pesquisa.

Capítulo 4 – Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática – Mostramos a importância das Tecnologias Digitais no ensino de matemática e o seu uso na pandemia, em seguida, temos discussões sobre o ensino remoto da matemática. Para finalizar, apresentamos algumas plataformas digitais para o ensino de matemática como o Desmos e o GeoGebra para ensinar e aprender em um ambiente virtual.

Capítulo 5 – Metodologia da Pesquisa – Apresentamos a definição da metodologia usada no trabalho, e os materiais utilizados durante a pesquisa juntamente com os métodos para a coleta de dados. Temos também, a adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), para ser aplicado no Ensino Remoto e os problemas geradores dos encontros.

Capítulo 6 – Encontros Remotos – Temos o desenvolvimento de 4 (quatro) encontros com 6 (seis) alunos do 3º ano do Ensino Médio. O tema utilizado nos encontros foi a Geometria Analítica, em que realizamos com os alunos-participantes um trabalho de entendimento dos seus conceitos, utilizamos a metodologia de Resolução de Problemas (RP) e o auxílio das Tecnologias Digitais (TD) como aplicativo WhatsApp e as plataformas Desmos, Jamboard e o Google Meet, que propulsionaram uma aprendizagem em aulas que aconteceram de forma remota. Logo após, fizemos uma análise desses encontros.

Por fim, temos as considerações finais deste trabalho e as referências bibliográficas.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, inicialmente, trazemos algumas reflexões sobre a História e as Reformas da Resolução de Problemas no século XX como contexto, capacidade e a Resolução de Problemas como arte. Em seguida, discutiremos sobre a metodologia de Resolução de Problemas e o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e por fim, descreveremos a dinâmica para sala de aula, ou seja, o Roteiro da metodologia de Resolução de Problemas.

2.1 HISTÓRIA E REFORMAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO SÉCULO XX

As iniciativas de se trabalhar com problemas no ensino partiram de Polya (1944), e essa forma de se ensinar veio ganhando força durante a década de 1980, quando educadores matemáticos ao invés de retornar às práticas anteriores à Matemática Moderna que surgiu nos Estados Unidos da América (EUA), na fase intitulada "volta às bases", optaram por acreditar no potencial de trabalhar com Resolução de Problemas, e continuaram estudando seus benefícios e buscando entendê-la melhor (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

> No início do século XX o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através de repetição, com a aplicação de testes em que, se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia. É bem verdade que alguns desses alunos chegavam a compreender o que faziam. Conseguiam "pensar" sobre o que trabalhavam e isso os fazia especiais. A maioria, contudo, se esquecia do que havia memorizado em pouco tempo. Nessa época, o currículo ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria (ONUCHIC, 1999, p.201).

É fácil identificar como esse ensino não possibilitava aos alunos um aprendizado com qualidade na construção do conhecimento, já que os alunos memorizavam os conteúdos e consequentemente se esqueciam. Outra reforma do ensino da matemática foi "o ensino de matemática com compreensão":

> Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender matemática com compreensão. Esta reforma descartava a anterior. As tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia "entender" o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participava da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender algum conteúdo novo (ONUCHIC, 1999, p.201).

Essa reforma teve uma boa proposta, mas a falta de olhares para a capacitação de professores na época era precária. Isso fez com que esse método de ensino não despertasse sua real intenção. “[...] Em 1964, no Brasil, o Professor Luis Alberto S. Brasil defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos” (ONUCHIC, 1999, p.202). A ideia deste professor estava certa, mas, infelizmente, em 1950 foi estruturado um currículo com uma sequência de tópicos organizados e separados em séries, desligados da matemática de fora da escola, ou seja, durante as décadas de 1960 e 1970 veio com força o Movimento da Matemática Moderna.

Na década de 1980, inicia-se, então,

> A fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. O foco, nessa fase, foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.78).

Essa fase despertou a atenção voltada para o aluno e não o professor, as análises realizadas visavam o desempenho dos alunos, mas para verificar, foi utilizado métodos de avaliação no processo de aprendizagem. Assim começaram a repensar o conceito de avaliação nos ambientes de ensino, como sendo uma avaliação contínua, onde se avalia todo o processo de aprendizagem, deixando de lado os resultados obtidos e avaliando o desenvolvimento desses processos na totalidade (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Na nossa compreensão, a importância dada à Resolução de Problemas, depois de Jorge Polya, voltou com força na década de 1970 e 1980. Nesse período, os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas era possível.

> No fim dos anos 70, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM - National Council of Teachers of Mathematics - An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's, que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo maciço, buscar uma melhor educação matemática para todos (ONUCHIC, 1999, p.204).

Essa publicação possuía informações interessantes e uma delas dizia: “[...] é preciso preparar os indivíduos para tratar com problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras” (ONUCHIC, 1999, p.204). Entendemos que, ao trabalhar com problemas voltados para o futuro profissional dos alunos, possibilitava avanços significativos para uma educação melhor.

Um dos problemas que surge quando se pretende mudar o ensino com compreensão é com relação a formação de professores e se eles irão trabalhar buscando a aprendizagem na sala de aula. Assim,

> Como levar os professores de matemática a incluírem numerosas experiências com Resolução de Problemas, em suas salas de aula, de modo que seus alunos possam aprender matemática com compreensão e de forma significativa? Resolver problemas é um bom caminho para se ensinar matemática. Entretanto, os problemas não têm desempenhado bem seu papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como uma forma de aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos pelos alunos. Quem deve trabalhar todas essas ideias? Quem deve ser responsável por essa mudança que se pretende para a sala de aula de matemática? Quem deve promover um ensino-aprendizagem capaz de formar um cidadão participativo, reflexivo e autônomo, útil à sociedade quando deixar a escola? (ONUCHIC, 1999, p.211).

Esses questionamentos feitos podem ser respondidos com convicção, o professor é o principal responsável por despertar todas essas possibilidades de desenvolvimento nos alunos através da Resolução de Problemas.

Usar a Resolução de Problemas no século XX era dar sentido ao propósito de ajudar as pessoas, tornando o saber matemático em algo a ser investigado e aprendido, mas nem sempre se pensava dessa forma, como fala Onuchic (2013), em uma época recente, ensinar resolução de problemas significava apresentar situações-problema e, talvez implementar uma técnica de resolução específica. Já em uma versão mais moderna, pode ser observado nos livros que os problemas, aparecem coloridos, com desenhos, que chamam a atenção para coisas da vida real, porém o professor sempre apresenta um exemplo e deixa uma lista de exercícios com questões parecidas para serem solucionadas pelos alunos provocando o ato de repetição e decoração.

A Resolução de Problemas tem em sua história do currículo escolar vários significados. Stanic e Kilpatrick (1989) observam que, se olharmos para a resolução de problemas nos currículos de matemática nas escolas, desde o antigo Egito até o presente, três diferentes temas gerais a caracterizam: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte.

2.1.1 Resolução de Problemas como Contexto

Stanic e Kilpatrick (1989) explicam que a Resolução de Problemas nesse tema é dividida em pelo menos cinco subtemas:

- <u>Resolução de problemas como justificação</u>: Os autores expõem que pelo menos alguns problemas relacionados de alguma forma com experiências do mundo real foram implicados no currículo para convencer os alunos e professores do valor da Matemática. Esse subtema foi feito como forma de justificativa para ensinar a Matemática.

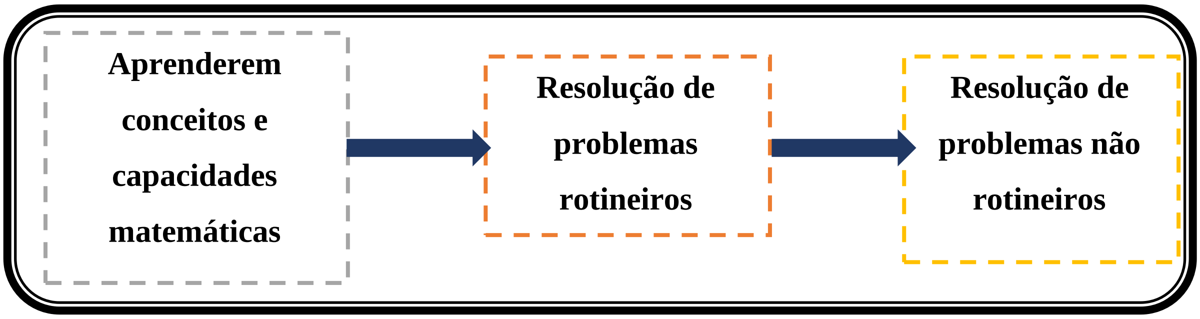
- Resolução de problemas como motivação: Esse subtema está relacionado com o subtema anterior da justificação, porém além de usar a resolução de problemas como justificativa para ensinar Matemática, o objetivo deste subtema era de atrair o interesse dos alunos. Usados como incentivo para os alunos continuarem suas atividades com Resolução de Problemas.
- Resolução de problemas como atividade lúdica: Os problemas desse subtema estão relacionados com os do subtema da motivação. Deste modo, na atividade lúdica os problemas são fornecidos não tanto para motivar os alunos a aprender, mas para permitir que eles tenham algum divertimento com a Matemática que eles já aprenderam. Foge um pouco dos outros subtemas justamente por não ficar no começo do processo de aprendizagem e sim quando o aluno já tem aprendido, e também os problemas podem ser variados, não necessariamente do mundo real.
- Resolução de problemas como veículo: Os autores dizem que os problemas são fornecidos como veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Ou seja, a resolução de problemas como um veículo, um condutor, para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas, é responsável por proporcionar descobertas.
- Resolução de problemas como prática: Os autores referem-se à resolução de problemas como prática tendo tido a maior influência no currículo da Matemática. Neste caso, os problemas apresentados demonstram mais do que as características particulares de todos os outros subtemas. A prática é necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente.

Na nossa compreensão, historicamente, a resolução de problemas como contexto ganhou o seu espaço, prevaleceu e teve sua importância, até diagnosticarem a Resolução de Problemas como capacidade, tendo um domínio mais considerável pelo menos para os que tinham por ela uma atenção diferenciada.

2.1.2 Resolução de Problemas como Capacidade

Para Stanic e Kilpatrick (1989) colocar a Resolução de Problemas na hierarquia das capacidades que os alunos adquirem, conduz à certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma dessas consequências é que, dentro das capacidades gerais da resolução de problemas, são feitas distinções hierárquicas entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros.

Figura 1 – A hierarquia de como os alunos resolviam os problemas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa transição da Resolução de Problemas rotineiros para não rotineiros é desenvolvida pela capacidade que é adquirida. Nesse caso, de acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), conseguir essa resolução de problemas não rotineiros significava ter uma capacidade elevada, mas o problema que era mencionado é que para chegar nesse nível era preciso passar pelos problemas rotineiros que são precedidos pelo aprendizado de conceitos e capacidades básicas da matemática. Todos esses passos retardavam um pouco o contato com a resolução de problemas não rotineiros e também acabavam selecionando os que podiam resolver ou não, pois apenas alguns passavam por todos esses pré-requisitos.

2.1.3 Resolução de Problemas como Arte

A Resolução de Problema como arte, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), surgiu da necessidade de trabalhar no sentido da arte justamente porque sentiram que a Matemática que estava sendo apresentada era uma Matemática acabada. Neste sentido, os autores afirmam que a Matemática acabada solicitava o raciocínio demonstrativo, enquanto fazer Matemática requeria raciocínio plausível. Se os alunos deviam usar raciocínio plausível, precisavam ser ensinados como poderiam e deveriam fazer isso.

George Polya via a Resolução de problemas como uma arte prática, aprendida por imitação, nem a resolução de problemas caminharia por si só, pois precisaria de orientações e nem a Matemática pela própria essência elevaria o nível de inteligência de alguém. Stanic e Kilpatrick dizem que, em vez disso Polya reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisavam ser demonstradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas pela compreensão e não mecanização. Também, George Polya observou que, embora os problemas de rotina pudessem ser usados para cumprir certas funções pedagógicas do ensino dos alunos, para seguir um procedimento específico ou usar uma definição corretamente, só através do uso prudente de problemas não rotineiros os alunos poderiam desenvolver a sua capacidade de resolver problemas (STANIC; KILPATRICK,1989).

Analisando essas diferentes mudanças da Resolução de Problemas seja não rotineiros foi ganhando cada vez mais o seu espaço, ou seja, dar significado, provocar o aluno, fazer ele se sentir desafiado a desenvolver problemas do seu dia a dia parecia ser sim um impulso para a aprendizagem de Matemática, era uma tentativa de ligar a abstração matemática à realidade do aluno. Mas sabemos que nem tudo tem só um lado positivo, e quando falamos no uso prudente de problemas não rotineiros e nos seus benefícios temos que pegar como exemplo o que eles podem causar se forem utilizados de forma inadequada, ou se não forem utilizados.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA

Durante muito tempo, vem sendo realizado estudos sobre a metodologia de Resolução de Problemas e vários pesquisadores têm buscado mostrar como implementar, quais as perspectivas e como está o andamento dessas pesquisas sobre a Resolução de Problemas. Onuchic e Allevato (2011), deixam claro a importância da Resolução de Problemas para o ensino-aprendizagem da matemática e falam sobre as novas tendências mundiais que surgem para esse ensino. Onuchic (1999) ainda destaca que na época de Felix Klein, já era sentida uma preocupação com um ensino de matemática com professores melhor preparados.

A Resolução de Problemas provoca nos alunos o interesse de investigar, mas o papel do professor em problematizar situações que acontecem na sala de aula sendo o mediador entre o saber matemático e o aluno, o torna necessário em todas as etapas da metodologia.

> Será que as coisas mudaram ao longo do tempo? Não é assim que, na maioria das escolas, ainda hoje, se trabalha resolução de problemas? Há, atualmente, educadores matemáticos preocupados com um ensino-aprendizagem de melhor qualidade? Resolução de Problemas se apresenta como um bom caminho para isso? (ONUCHIC, 1999, p.200).

Através desses questionamentos, podemos pensar como o Ensino-Aprendizagem de Matemática está sendo utilizado nas escolas e como tornará os alunos mais preparados para a vida adulta. Na nossa opinião, a Resolução de Problemas, pode melhorar a aprendizagem da matemática, dependendo se os educadores querem se qualificar e levar essa metodologia para a prática.

> Os objetivos gerais da área de Matemática, nos PCNs, buscam contemplar várias linhas para trabalhar o ensino de Matemática. Esses objetivos têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias Matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever

> sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da Matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.218).

A Resolução de Problemas, incentiva os alunos a construírem com os seus conhecimentos prévios determinado conteúdo matemático, para isso é dado um problema onde o aluno buscará meios para se chegar à resolução. É importante lembrar que não importa se os alunos chegaram a mesma resposta por caminhos distintos, na RP não existe um caminho correto, o importante é a compreensão do conteúdo estudado. Quando o professor a partir das resoluções dos alunos começar a realizar as conexões com o conteúdo, os alunos terão uma maior facilidade na compreensão.

Não podemos esquecer que na metodologia de Resolução de Problemas, os alunos trabalham em grupo e a interação entre eles promove uma troca rica de experiências e de conhecimentos, ajudando no processo de resolução e na sua construção individual sobre o conteúdo estudado. Assim, Andreatta e Allevato (2020), relatam a importância de interação entre os alunos:

> As atitudes de colaboração e parceria entre os alunos também foram significativas durante as etapas de resoluções dos problemas, principalmente quando percebemos que quase a totalidade dos alunos demonstrava interesse em ir à lousa apresentar sua resolução. Esse interesse revela mais autonomia e autoconfiança, e atitudes de colaboração construídas no processo de resolução dos problemas (ANDREATTA; ALLEVATO, 2020, p.22).

Segundo Onuchic (1999), os estudos e pesquisas em Resolução de Problemas possuem influências de teorias construtivistas, onde o aluno é quem deve participar ativamente na construção de seu próprio conhecimento. Essa autora ainda diz que o construtivismo recentemente teve uma aceitação ótima na Educação Matemática. Essa forma de desenvolver a aula traz uma visão futurística do que o aluno enfrentará fora da escola. Na experiência vivenciada pelo pesquisador deste trabalho, procurou-se deixar os alunos descobrirem como solucionar o problema, sem dar a resposta de imediato, desenvolvendo a habilidade de construção.

Van de Walle (2001) diz que, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor deve ser responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois.

Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase dois os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Na terceira, etapa, depois, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Após isso, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos (VAN DE WALLE, 2001).

2.3 ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Onuchic e Allevato (2011), ao analisar o ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática, pode ser compreendido como três coisas completamente diferentes que não acontecem em simultâneo, mas as autoras falam que no século XX, onde aconteceu várias reformas no Ensino de Matemática, começaram a repensar sobre essas três coisas poderem acontecer simultaneamente, o que torna a aula mais interessante de se trabalhar. Com isso, as autoras falam sobre essa metodologia que usa ensino, aprendizagem e avaliação com a Resolução de Problemas:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.81).

Entendemos que não é simples trabalhar com essa metodologia, ela exige bastante do professor que precisa administrar bem a sala de aula, para que tudo funcione como o planejado ele precisa saber intervir na resolução quando necessário, ou seja, quando o aluno não conseguir mais desenvolver o raciocínio e precisar de algum estímulo seja uma dica ou um incentivo. Nesse processo, onde o aluno é peça fundamental na construção de seu próprio conhecimento é possível observar como os alunos a partir daquele problema gerador, conseguem ligar vários saberes matemáticos implicando no surgimento de um ensino que mostra a matemática com outros olhares.

De acordo com Andreatta e Allevato (2020), percebemos que trabalhar com essa metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, traz um benefício tanto para os alunos que irão estar como principal construtor do seu conhecimento tornando-os autônomos, quanto para o professor que irá sempre estar inovando e ampliando a sua área de conhecimento, para se comunicar melhor com seus alunos. Isso possibilita ao professor não ministrar suas aulas mecanicamente, pois a todo momento ele estará observando o processo e analisando como os alunos estão desenvolvendo o interesse em investigar e construir os conceitos matemáticos.

> Pode-se observar que não é tarefa fácil a de desenvolver o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas. Tal metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso, pois precisam selecionar cuidadosamente os problemas; observar os alunos na busca de soluções para esses problemas, incentivá-los e ouvi-los, mantendo-os confiantes na própria capacidade para resolvê-los. Nas salas de aula onde essa metodologia foi adotada, os alunos se sentiram aptos a dar sentido à matemática que constroem. Professor e alunos, depois dessa experiência, não querem voltar a trabalhar com o método de ensino tradicional (ONUCHIC, 2013, p.103).

Observando o cenário da sala de aula, o aluno precisa ser interativo com o problema e o professor atencioso e observador em todo o processo. Para isso, “Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Allevato e Onuchic (2021) dizem que, as ideias socioconstrutivistas de aprendizagem, pressupõem que a aprendizagem se dá por meio do desenvolvimento de ideias pelo próprio aluno, quando este se posiciona para resolver problemas, ou seja, o aluno é a peça-chave para ocorrer a construção de conhecimento. Nesse sentido, a Resolução de Problemas faz parte do processo de ensino, aprendizagem e avaliação da matemática que se quer construir.

Sendo assim, os professores devem buscar desenvolver o interesse dos alunos para investigar o problema e encontrar estratégias para resolvê-lo. Partindo das resoluções e discussões na sala de aula, é possível obter conclusões a respeito das respostas e do caminho correto para a interpretação do problema, essas conclusões são importantes para a compressão do conteúdo (ANDREATTA; ALLEVATO, 2020).

Na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é importante a interação e participação ativa dos alunos para que o professor possa identificar quando será necessário intervir na resolução, criando possibilidades para melhorar o aprendizado e que na formalização do conteúdo tenha como mostrar por outros olhares a presença daquele conceito matemático.

Segundo Allevato e Onuchic (2021), a Resolução de Problemas está presente, seja de forma explícita ou implícita, o que nos leva a acreditar na importância de uma compreensão mais profunda de suas implicações e formas de implementação no Ensino de Matemática. Nesse intuito, a presença da RP na sala de aula de Matemática mostra como podemos melhorar e aprofundar ainda mais os conteúdos estudados.

Também é importante o acompanhamento do professor em toda construção do conhecimento, assim ele irá incentivando e usando suas próprias estratégias para que aquele problema atinja todos e seja um ponto de partida para outros conhecimentos que veem a acontecer. Sendo assim, o problema que o aluno vai encarar será importante para a compreensão de um conceito matemático. Assim, a Resolução de Problemas começa sempre onde estão os alunos, ao contrário de outras formas em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando o que os alunos trazem consigo para a sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Na nossa opinião, um dos caminhos para aprender Matemática é a Resolução de Problemas, já que toda nossa vida está baseada na arte de resolver problemas, então, por que não fazer os alunos ajudarem na resolução de problemas matemáticos? Allevato e Onuchic (2021), dialogam sobre resultados que essa metodologia tem mostrado.

> Considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, tal Metodologia tem mostrado que a Resolução de Problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula de Matemática, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no decurso dessas atividades (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p.54).

Os resultados que essa metodologia propulsiona é gratificante, pois mostra que os alunos conseguem aprender com autonomia e o professor é um orientador para se alcançar os objetivos desejados através da Resolução de Problemas.

Segundo Schroeder e Lester (1989) os problemas são avaliados não apenas como um meio para aprender matemática, mas como o principal meio de aprender. Significa começar o ensino com um problema gerador, que deve de fato incorporar aspectos do tema que se deseja apresentar aos alunos posteriormente, será partir desse problema para a abstração da matemática e não o contrário como é feito normalmente.

A aprendizagem da matemática desta forma pode ser vista consoante Schroeder e Lester (1989) como um movimento do concreto, um problema do mundo real que serve como uma instância do conceito matemático ou técnica para o abstrato, uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operação com esses símbolos.

> Ao se ensinar matemática através da Resolução de Problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um conceito matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse conceito e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Essa abordagem envolve os alunos e também o professor, isso nos chama atenção no fato de que não existe preocupação em só como está sendo ensinado ou como está sendo aprendido, existe um envolvimento entre essa relação do professor e do aluno com a matemática e essa interação acontece através da Resolução de Problemas, envolvendo também o mundo real, o cenário do aluno, tudo isso partindo de um problema proposto.

Assim, para Onuchic e Allevato (2004), é fundamental reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, isto é, que tarefas que envolvem problemas ou atividades são como veículos pelos quais um currículo deve ser desenvolvido. Dessa forma, a aprendizagem será uma consequência.

2.3.1 Dinâmica para sala de aula – Roteiro da metodologia de Resolução de Problemas

Ao se imaginar uma sala de aula e como utilizar a metodologia de Resolução de Problemas, devemos nos questionar primeiramente, o que é um problema?

> Para Van de Walle (2001), muitas vezes se fala em trabalhar com problemas para se ensinar Matemática sem se ter uma ideia clara do que é um problema. Há muitas diferentes concepções de problema. Para nós, é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Para ele, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.221).

Onuchic (1999, p.215), explica o que ela compreende como sendo um problema: "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver". Desse modo, não é tão simples saber o que é um problema para outra pessoa, por isso cabe ao professor analisar e ver a capacidade dos alunos em resolver problemas, para não ser apenas um exercício, o problema tem que despertar novas habilidades e ajudar na construção de um novo conhecimento.

Se a resolução vem de imediato e já se sabe o que fazer para resolver, isso irá se enquadrar como exercício, mas como saber diferenciar exercício de problema? É simples, "um problema se diferencia de um exercício, na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata à solução" (ECHEVERRÍA; POZO, 1988 apud MASTROIANNI; OLIVEIRA, 2019, p.235).

Assim, um problema pode representar dificuldades para um aluno, mas para o outro ser simplesmente um exercício dependendo do seu entendimento prévio do conteúdo estudado. Uma das principais estratégias para aplicar a metodologia de Resolução de Problemas é o compromisso do professor em buscar um problema que seja eficaz para todos os seus alunos.

Para que todo o esforço na busca pelo problema ideal não seja desperdiçado, não devemos dar as respostas de imediato, pois acabaria com todo o processo da Resolução de Problemas.

> [...] Desta forma, o professor deve evitar a apresentação precoce de resultados envolvendo conceitos formalizados e, sempre que possível, promover a simulação de um ambiente de pesquisa que permita aos alunos vivenciarem momentos de investigação, simulação e elaboração de hipóteses (MASTROIANNI; OLIVEIRA, 2019, p.237).

Na Resolução de Problemas, o professor precisa observar os alunos em toda aula, e com isso observar a necessidade que cada um está precisando para elaborar a resolução. Andreatta e Allevato (2020, p.21) falam que, “[...] é importante pontuar que cada aluno é singular e possui características peculiares no contexto da sala de aula”.

Percebemos que cada aluno possui habilidades e necessidades distintas, ou seja, quem deverá filtrar e realizar a intervenção é o professor, porém ele não poderá facilitar demais, o que precisa ser desenvolvido é o incentivo e se necessário o fornecimento de ferramentas que ajudem na resolução, dessa maneira, o aluno será o construtor de seu próprio conhecimento.

Não basta o professor escolher qualquer problema e aplicá-lo, ele tem que ser seletivo escolhendo um problema que se enquadre no conteúdo matemático pretendido. O professor tem que pensar como o aluno vai desenvolver seu conhecimento através do problema, e quais os mecanismos que precisam ter para que essa construção seja facilitada, assim o questionamento que fica é quais problemas seriam mais favoráveis na construção do conhecimento para os alunos. Na nossa concepção, o problema é o gerador dos conhecimentos fazendo com que se tenha mais afinidade com a matemática para melhor compreender sua necessidade no desenvolvimento humano.

A seguir compilamos na íntegra o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) como dinâmica para sala de aula. Essas autoras criaram esse roteiro com o intuito de auxiliar os professores em sala aula durante o processo de ensino-aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas. Esse roteiro está dividido nas seguintes etapas: (1) Preparação do problema; (2) Leitura individual; (3) Leitura em conjunto; (4) Resolução do problema; (5) Observar e incentivar; (6) Registros das resoluções na lousa; (7) Plenária; (8) Busca do consenso; e (9) Formalização do conteúdo.

(1) Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

(2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

(3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

• Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

• Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

(4) Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

(5) Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

• O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

(6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

(7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

(8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
(9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Finalmente, destacamos que na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se encontra explícito o trabalho do professor, ou seja, o professor deve estar preparado para o casual e, também, para situações adversas que podem surgir durante a procura das soluções para os problemas apresentados.

No entanto, o desenvolvimento deste roteiro pode não acontecer em uma só aula, pode ser que o problema se estenda e dure mais de uma aula ou pode ser que seja solucionado antes do previsto, caberá ao professor ter um segundo plano para os dois casos, pois não existe um tempo determinado para resolução de problemas, isso pode ser considerado um dos empecilhos que alguns professores colocam para não implementar a metodologia de Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

3 GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo temos o objetivo de apresentar os conceitos básicos da Geometria Analítica e o ensino da Geometria. Incialmente, trazemos um breve olhar histórico sobre a Geometria Analítica, em seguida, são postos com as devidas definições, o Plano cartesiano, Distância entre dois pontos no plano, Coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta, Alinhamento de três pontos no plano, e apresentamos algumas aplicações para a sala de aula envolvendo Perímetro e Área. Por fim, fazemos uma reflexão sobre o ensino da Geometria.

3.1 UM BREVE OLHAR HISTÓRICO SOBRE A GEOMETRIA ANALÍTICA

Nos livros e artigos, há várias colocações sobre a origem da Geometria Analítica e seu surgimento, existindo indícios que ela teve início na Grécia. “Os gregos antigos dedicavam-se de forma considerável à Álgebra Geométrica. A ideia de coordenadas foi usada pelos gregos na confecção de mapas e pelos egípcios e romanos na agrimensura” (NASCIMENTO, 2017, p.4). No passado, Nicolas Oresme (1323-1380) foi o primeiro estudioso a apresentar gráficos antes de Descartes, ou seja, ele,

> Antecipou a Geometria Analítica ao localizar pontos por coordenadas e propôs o uso de um gráfico para representar uma grandeza variável que dependesse de outra. A função era representada graficamente associando a variável dependente com a independente, à medida que esta última sofresse variações. Essa foi a primeira aparição clara da equação da reta. Assim, pode-se considerar Oresme como inventor da Geometria de coordenadas antes de Descartes. No entanto, as técnicas algébricas e geométricas não permitiram que ele fosse mais longe nesse estudo, sendo necessário esperar mais de 200 anos por Viète, Descartes e Fermat, que retomaram e desenvolveram os ensaios naquelas áreas (NASCIMENTO, 2017, p.5).

Dessa forma, percebemos que os estudos de Oresme, não eram tão profundos pela falta de conhecimento da época, então a Geometria Analítica desde seus primeiros indícios, demorou muito tempo até que fosse aprimorada e chegasse ao que conhecemos hoje.

Neto (2014), fala que as pesquisas relacionadas à Geometria Analítica remontam ao século XVII, quando Descartes conectou Álgebra com Geometria, ele criou princípios matemáticos capazes de analisar geometricamente as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando suas distâncias, localizações e pontos de coordenadas. Desse modo, entendemos que a Geometria Analítica, propulsionou uma simplificação das propriedades básicas da Geometria.

Segundo Nascimento (2017),

> [...] A Geometria Analítica parece nos confundir, mas, na realidade, o argumento principal sobre esta área da Matemática consiste em transferir uma análise geométrica para uma análise algébrica correspondente e vice-versa. Antes de a Geometria Analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes (1596−1650) e Pierre de Fermat (1601 − 1665) como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à Geometria Analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados nos dias de hoje (NASCIMENTO, 2017, p.6).

Por volta do século XIX, iniciou uma busca de métodos simples, para obter as informações geométricas partindo de equações algébricas, e obter essas equações através de conceitos geométricos, de maneira que esse processo fosse mais direto. Sendo assim, é essencial o desenvolvimento da noção de vetor. Com isso percebemos, que estava acontecendo grandes avanços para se concretizar a Geometria Analítica (NETO, 2014).

Para Nascimento (2017), a Matemática de Descartes possuía ligações com obras passadas e na tentativa de resgatar algumas dessas obras, foi quando aconteceu o surgimento da Geometria Analítica. O autor ainda fala que esse acontecimento, se deve ao fato de que na Matemática os conhecimentos se acumularam, portanto, não se perdendo nada, apenas acrescentando. Entretanto, nessa mesma época que Descartes contribuía com a descoberta da Geometria Analítica, outro grande gênio matemático francês, Pierre de Fermat fazia suas contribuições.

> A Geometria Analítica se encontra num pequeno texto intitulado Isagoge ad locus planos et sólidos, que só foi publicado, posteriormente, junto com sua obra completa. Fermat era bastante modesto e contrário à publicação de seus trabalhos. Descartes também não tinha o costume de publicar suas obras, mas manteve correspondência científica com muitos dos principais matemáticos de seu tempo, exercendo, dessa maneira, considerável influência sobre seus contemporâneos. Talvez por causa disso é mais comum lembrar de Descartes como sendo criador da Geometria Analítica. Fermat usou a notação de Viète para escrever seu trabalho que, assim, tinha uma aparência antiga em termos de simbolismo quando comparado ao de Descartes (NASCIMENTO, 2017, p.7).

Neto (2014) fala que, um aspecto importante da Geometria Analítica é a definição numérica da geometria, retirando dados informativos da representação. Ele disse ainda que baseado nesses estudos, a Matemática passa a ser considerada uma disciplina moderna, capaz de explicar e apresentar situações relacionadas ao espaço. Nesse sentido, nós entendemos que a Geometria Analítica contribuiu para que a Matemática fosse reconhecida no avanço tecnológico.

3.2 CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

3.2.1 Plano cartesiano

O aprendizado do plano cartesiano é útil para a interpretação gráfica, na utilização de instrumentos de localização e no cálculo de áreas e perímetros. Dentro do campo da Geometria Analítica, o plano cartesiano ajudará a representar seções cônicas, como a circunferência, a parábola, a elipse, a hipérbole, entre outros.

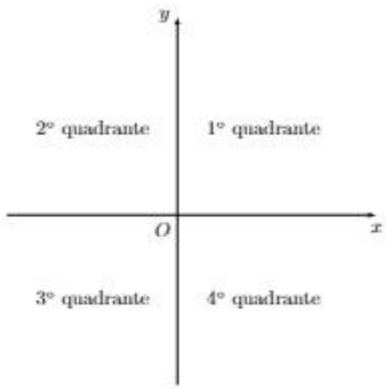
Definição: Considere duas retas perpendiculares no ponto **O**, que denominaremos eixo **x** e eixo **y**. O plano definido por estes eixos é chamado plano cartesiano. Cada uma das quatro partes em que o plano fica dividido pelos eixos **x** e **y** será chamado de quadrante. Os quadrantes são enumerados no sentido anti-horário, como apresentado na figura 2.

• O eixo **x** é chamado de eixo das abscissas.

• O eixo **y** é chamado de eixo das ordenadas.

• O ponto **O** é chamado de origem

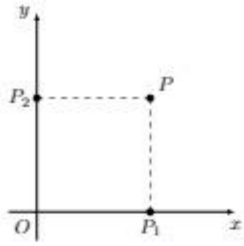
Figura 2 – Numeração dos quadrantes



Fonte: Elaborado pelo autor

Seja um ponto P qualquer do plano cartesiano, traçamos por esse ponto duas retas, uma paralela ao eixo **x** e outra paralela ao eixo **y**. Sendo P_1 e P_2 os pontos de interseção das retas com os eixos **x** e **y**, respectivamente, como mostra na figura 3:

Figura 3 – Coordenadas do ponto $\boldsymbol{P}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Falamos que:

• a abscissa x_P é a medida algébrica do segmento OP_1;

• a ordenada y_P é a medida algébrica do segmento OP_2;

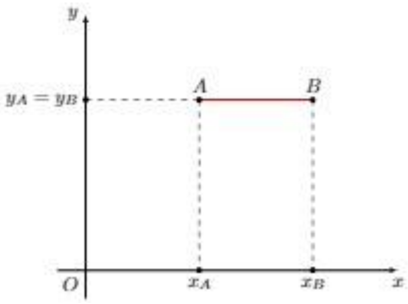
• as coordenadas de P são os números reais x_P e y_P, que são indicados, da seguinte forma (x_P, y_P).

3.2.2 Distância entre dois pontos no plano

Sejam $A = (x_{A,}\ y_A)$ e $B = (x_{B,}\ y_B)$ dois pontos distintos no plano cartesiano. A distância entre A e B, indicada por $d_{(A,B)}$, é a medida do segmento de reta que tem esses dois pontos por extremidades. Mostraremos como calcular essa distância nos três casos a seguir:

1º caso: O segmento $\boldsymbol{AB}$ é paralelo ao eixo das abcissas (x):

Figura 4 – Segmento $\boldsymbol{AB}$ paralelo ao eixo das abcissas



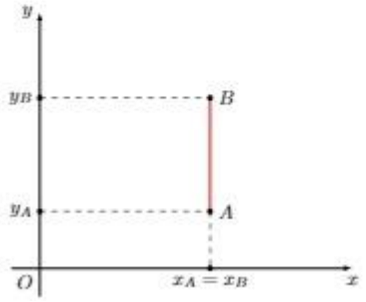
Fonte: Elaborado pelo autor

A distância entre $A\ e\ B$ é o módulo da diferença de suas abscissas:

$$d_{(A,B)} = |x_A - x_B|$$

2º caso: O segmento $\boldsymbol{AB}$ é paralelo ao eixo das ordenadas (y):

Figura 5 – Segmento $\boldsymbol{AB}$ paralelo ao eixo das ordenadas



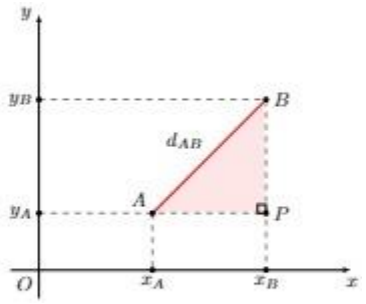
Fonte: Elaborado pelo autor

A distância entre $A\ e\ B$ é o módulo da diferença de suas ordenadas:

$$d_{(A,B)} = |y_A - y_B|$$

3º caso: O segmento $\boldsymbol{AB}$, não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados:

Figura 6 – Segmento $\boldsymbol{AB}$, não paralelo aos eixos coordenados



Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, a distância entre $A\, e\, B$ é a medida da hipotenusa AB do triângulo retângulo $\triangle ABP$, de catetos AP e BP.

Como visto nos casos 1 e 2, a distância entre dois pontos de um eixo é medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $d_{(A,P)} = |x_B - x_A|$ e $d_{(B,P)} = |y_B - y_A|$. Aplicando o **Teorema de Pitágoras**, obtemos,

$$d_{(A,B)}{}^2 = d_{(A,P)}{}^2 + d_{(B,P)}{}^2$$

$$d_{(A,B)}{}^2 = (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2$$

Sabemos que para todo $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$, então podemos reescrever:

$$d_{(A,B)}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ou

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(\triangle\, x)^2 + (\triangle\, y)^2}$$

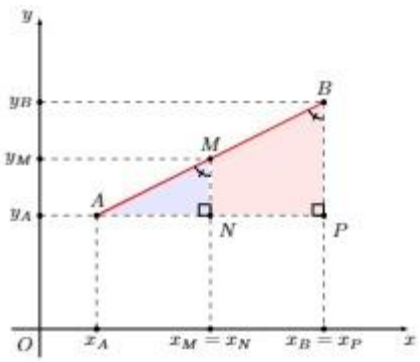
Sendo $\triangle\, x$ a diferença das abscissas, e $\triangle\, y$ a diferença das ordenadas.

3.2.3 Coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta

As coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta ou ponto médio de um segmento é aquele ponto que está a mesma distância de suas duas extremidades, então ele divide o segmento em dois segmentos com comprimentos iguais. Se M é um ponto médio do segmento $\overline{AB}$ tal que $d_{(M,B)} = d_{(M,A)}$, diremos que M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

A generalização da distância entre dois pontos permite obter imediatamente as coordenadas do ponto que divide um segmento $\overline{AB}$ numa razão dada. Seja M o ponto médio do segmento com extremidades $A = (x_{A,}\, y_A)$ e $B = (x_{B,}\, y_B)$. Notemos, na Figura 7, que os triângulos $\triangle\, AMN$ e $\triangle\, ABP$ são semelhantes, pois possuem os três ângulos congruentes:

Figura 7 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}}$$

Porém, $\overline{AB} = 2.(\overline{AM})$, porque M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Logo,

$$\frac{\overline{AM}}{2(\overline{AM})} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AP} = 2.(\overline{AN}).$$

Assim, temos que:

$$|x_P - x_A| = 2.|x_N - x_A|$$

Como $x_P > x_A$ e $x_N > x_A$, escrevemos:

$$x_P - x_A = 2(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

De forma análoga, provamos que

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

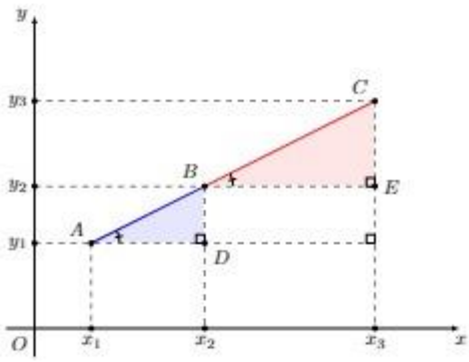
Logo, se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, então

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

3.2.4 Alinhamento de três pontos no plano

Dizemos que três pontos distintos estão alinhados, quando existe uma reta que passa pelos três pontos. Para verificarmos se os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ estão alinhados, basta verificar a condição que esses três pontos pertencem a mesma reta, como mostra a figura 8:

Figura 8 – Pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ colineares



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar que os triângulos $\triangle BCE$ e $\triangle ABD$ são semelhantes.

Assim, podemos escrever,

$$\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{BD}}} \Rightarrow \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} \Rightarrow (x_3 - x_2).(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1).(y_3 - y_2) = 0$$

Desenvolvendo as multiplicações,

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0$$

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

Com isso, podemos escrever a última igualdade na forma de determinante,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, para saber se os três pontos estão alinhados, basta verificar se a matriz formada pelas coordenadas dos pontos possui determinante igual a zero.

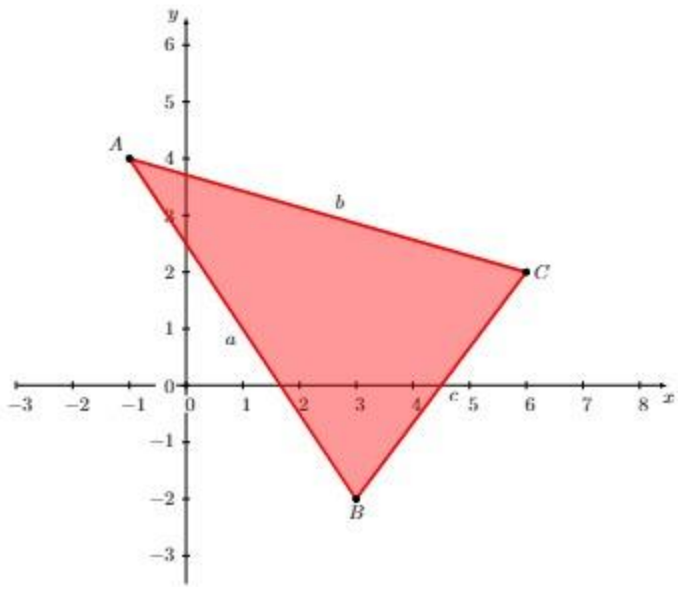
3.2.5 Perímetro e Área

A seguir, apresentamos três aplicações com suas possíveis estratégias para resolução dos problemas em sala de aula envolvendo Área e Perímetro.

Problema 1. Obtenha o perímetro de um triângulo cujos vértices são os pontos $A = (-1,4), B = (3,-2)\ e\ C = (6,2)$.

Possível resolução do problema: Como o perímetro de uma figura plana é a soma do comprimento de seus lados, precisamos obter o comprimento de cada um dos lados do triângulo dado. Vamos representar a figura graficamente, antes de calcular o comprimento dos seus lados:

Figura 9 – Triângulo de vértices $\boldsymbol{A, B\ e\ C}$



Fonte: Elaborado pelo autor

O comprimento de cada um dos lados do triângulo, será a $d_{(A,B)}$, $d_{(B,C)}$ e $d_{(C,A)}$:

Distância do lado $\overline{AB}$:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{16+36}$$
$$= \sqrt{52}$$
$$= \sqrt{4 \times 13}$$
$$= 2\sqrt{13}$$

Distância do lado $\overline{BC}$:

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(3-6)^2 + (-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= \sqrt{5}$$

Distância do lado $\overline{CA}$:

$$d_{(C,A)} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (2-4)^2}$$
$$= \sqrt{7^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{49+4}$$
$$= \sqrt{53}$$

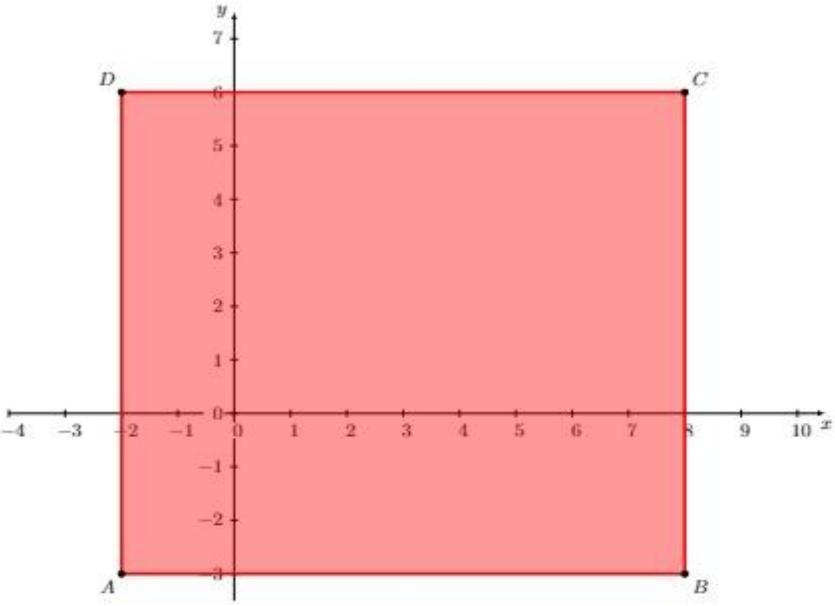
Logo, o perímetro do triângulo é,

$$\mathrm{P} = 2\sqrt{13} + 5 + \sqrt{53}$$
$$\mathrm{P} = 7.21 + 5 + 7.28$$
$$\mathrm{P} = 19.49\mathrm{u} \ \blacksquare$$

Problema 2. Calcule a área de um retângulo cujos vértices são os pontos $A = (-2,-3), D = (-2,6), C = (8,6)\ e\ B = (8,-3)$.

Possível resolução do problema: Vamos localizar os pontos dados no plano cartesiano e desenhar o retângulo indicado:

Figura 10 – Retângulo de vértices $\boldsymbol{A, D, C\ e\ B}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a área de um retângulo é o produto do comprimento de sua base pelo comprimento de sua altura, basta obter o produto de um dos pares de lados perpendiculares para calcular a área procurada.

Calculamos o comprimento da base (b) do retângulo:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(-2-8)^2 + (-3-(-3))^2}$$
$$= \sqrt{(-10)^2 + (-3+3)^2}$$
$$= \sqrt{100+0}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

Como podemos ver na figura 10, os pontos estão alinhados, então o comprimento da altura (h) também pode ser calculado da mesma forma:

$$d_{(A,D)} = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-3-6)^2}$$
$$= \sqrt{(-2+2)^2 + (-3-6)^2}$$
$$= \sqrt{0+(-9)^2}$$
$$= \sqrt{0+81}$$
$$= \sqrt{81}$$
$$= 9$$

Calculando a área do retângulo temos,

$$A = b \times h$$

$$A = 10 \times 9$$

$$A = 90u^2 \ \blacksquare$$

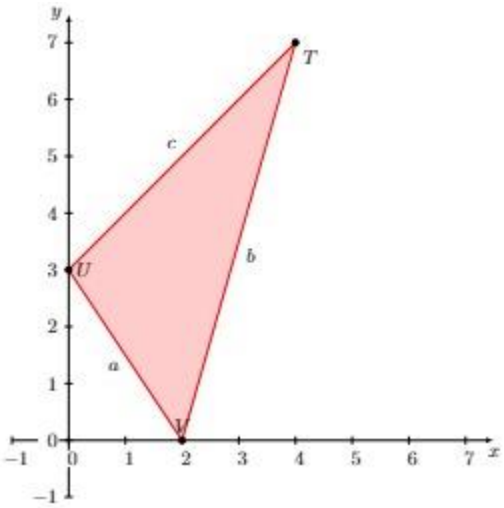
Antes de lermos o próximo problema, vale ressaltar, que uma forma de calcular a área de um triângulo é multiplicando $\frac{1}{2}$ do determinante que se forma com as coordenadas dos vértices ordenando-os no sentido anti-horário.

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3. Encontre a área do triângulo cujos vértices são os pontos $T = (4,7), U = (0,3)\ e\ V = (2,0)$.

Possível resolução do problema: Representamos graficamente os pontos em um plano cartesiano, como mostra a figura 11:

Figura 11 – Triângulo de vértices $\boldsymbol{T, U\ e\ V}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Para determinar o ponto inicial e a direção dos subsequentes, sempre notamos no sentido anti-horário.

Neste caso, vamos começar com o vértice T, então:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter o determinante repetimos as duas primeiras colunas no lado direito da matriz, obtemos os produtos de três fatores em ordem decrescente (diagonais principais) e subtraímos os produtos de três fatores em ascendente (diagonais secundárias):

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 & 7 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}[(12 + 14 + 0) - (6 + 0 + 0)]$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}[26 - 6] = \frac{1}{2}[20]$$

$$A_\Delta = 10u^2 \blacksquare$$

3.3 ENSINO DA GEOMETRIA

O ensino da Geometria tem importância como qualquer outra área da matemática, são muitos os obstáculos encontrados para não inseri-la no ensino e são diversas as causas dos erros cometidos pelos professores. Tendo em vista que a Geometria é ampla e tem aplicações em diversos campos do conhecimento “falar, ensinar e aprender Geometria, hoje, vai muito além do que foi feito nos tempos de Euclides, Arquimedes, Gauss, Descartes e assim por diante” (LEIVAS, 2021, p.18).

Quando se busca fazer qualquer atividade que envolva a Geometria, essa atividade se torna complexa, pois aconteceu um grande avanço tecnológico nas últimas décadas. Para se ensinar e aprender Geometria não é simples, ainda mais a Geometria Analítica. Mas, com o uso das Tecnologias Digitais, podemos fazer uma ligação com determinada metodologia e aplicar os conceitos geométricos tornando a aula interativa, facilitando o processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática.

Para Nascimento (2017), por exemplo, um problema pode ter solução por caminhos diferentes, seja “geometricamente”, “algebricamente” ou “analiticamente”. Qual dessas utilizar, depende da natureza do problema e da preferência de quem o resolve. Entretanto, esses caminhos podem se entrelaçar e não ser percebidos quando ministrados no Ensino Básico. Dessa forma, colocando os alunos para serem os protagonistas no processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática, propulsionamos que eles mostrem vários caminhos para solucionar um problema e assim construir o entendimento sobre esses caminhos.

Muito se tem discutido, recentemente, acerca de como assusta trabalhar com a Geometria Analítica e a dificuldade que professor e aluno possuem para compreende-la. “[...] A questão do mundo euclidiano, real e perceptível, ainda subsiste, e cada indivíduo tem sua forma própria de perceber o universo, havendo dificuldades na compreensão de qualquer dimensão além desse mundo euclidiano" (LEIVAS, 2021, p.18). Assim, mostrar a Geometria não sendo a euclidiana é um papel desafiador para os professores, mas não impossível quando bem explorada através das ferramentas tecnológicas e da Resolução de Problemas.

Lacerda (2015), fala que a Geometria Analítica geralmente aparece no último ano do Ensino Médio após o aluno ter tido contato suficiente com a Geometria Plana tradicional. Esse autor, ainda fala que essa mudança de geometria, quase sempre causa uma quebra nas expectativas do aluno e do professor. Vemos que, os alunos geralmente possuem essas dificuldades na Geometria Analítica, por não ser abordado seus conceitos no Ensino Fundamental, assim ficando presos ao ensino e aprendizagem da Geometria Plana.

Nascimento, Castro e Lima (2015) em sua pesquisa relatam uma experiência em que os alunos falam sobre a falta de interesse em Geometria Analítica:

> Ao iniciar a atividade, percebemos que a abordagem introdutória do estudo geométrico de cunho analítico, como componente curricular do Ensino Médio, representava um momento de angústias e reclamações por parte dos estudantes, pois eles afirmavam que o assunto não despertava interesse, considerando-o como algo meramente teórico, sem uso prático em suas vidas (NASCIMENTO; CASTRO; LIMA, 2015, p. 44).

Ensinar os conteúdos geométricos das coisas que os alunos compreendam, por exemplo, do mundo real, para o abstrato se torna mais fácil quando utilizamos a metodologia de Resolução de Problemas e ferramentas digitais. Sabemos que, o mundo de hoje tem facilidade ao acesso tecnológico, isto deveria ou deve ser utilizado a favor do ensino de Matemática com compreensão e autonomia.

Para nós, acrescentar a Resolução de Problemas ao ensino da Geometria Analítica, ligando ainda às Tecnologias Digitais é uma alternativa para fazer com que ela se torne mais atrativa, que o futuro professor se torne mais reflexivo e que perceba mais os seus alunos na sala de aula. Isso não quer dizer que todos os obstáculos serão abolidos, sabemos que as dificuldades do ensino não se concentram apenas na forma como o professor ensina, mas podemos aos poucos ir buscando soluções e uma formação mais adequada.

4 TECNOLOGIA DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, o ensino de matemática e o uso das tecnologias na pandemia, em seguida, discutiremos sobre o ensino remoto da matemática. Para finalizar, apresentamos algumas plataformas digitais para o ensino de matemática como o Desmos e o GeoGebra para ensinar e aprender em um ambiente virtual.

4.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA E O USO DAS TECNOLOGIAS NA PANDEMIA

Com a pandemia da Covid-19, percebemos como o ensino foi afetado, obrigando os professores e alunos a saberem pelo menos o básico sobre o uso das Tecnologias Digitais, para dar continuidade às aulas. O mundo de hoje exige muito mais matemática do que antigamente com o avanço da tecnologia, por essa razão o ensino e a aprendizagem precisam estar voltados para uma qualificação de professores que possibilitem aos alunos serem os responsáveis pela sua própria construção do conhecimento. Assim, para Onuchic (1999), discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo já mostravam a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) que, se acreditava, poder levar a melhores formas de se ensinar e se aprender matemática.

> Ao utilizar o computador na Resolução de Problemas que visam à introdução de um novo conceito, o processo subsequente de formalização dos conteúdos matemáticos, conforme tem sido mostrado nas pesquisas atuais, apresenta-se amplamente facilitado devido a esta abordagem empírica e experimental que o computador possibilita (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.225).

As tecnologias utilizadas em séculos passados não eram tão acessíveis ao público como as atuais que são as Tecnologias Digitais. Agora, é possível notar que esse avanço tecnológico está possibilitando uma melhora na rapidez da informação e comunicação na sociedade, assim como no ensino de Matemática e outras áreas do conhecimento.

> Estamos imersos em um momento que as informações e comunicações estão disponíveis e divulgadas numa rápida velocidade, período esse reconhecido como a era tecnológica, em que mediante ao uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), vários ambientes, instituições promotoras de educação e práticas sociais, acadêmicas e outras, vêm sendo facilitadas e expandidas (OLIVEIRA; PEREIRA, 2021, p.3).

Assim, Oliveira e Pereira (2021), afirmam que por mais que o uso e a presença dessas tecnologias estejam inseridas na sociedade, ainda existe um ponto contrário a esse avanço, que seria uma fragilidade na formação de professores e que isso ocorre em vários níveis de ensino.

Porém na formação de professores, o uso das Tecnologias Digitais não é totalmente usufruído, ocasionando um ensino precário de Matemática nas escolas.

Segundo Antunes e Cambrainha (2020), não fica nenhuma dúvida quando observamos a tecnologia sendo um poderoso atuante na transformação, basta observar como a internet causa alterações na comunicação e no consumo de produtos e conteúdo. Ainda conforme os autores, vemos também que a internet está causando uma mudança na forma como as pessoas aprendem, então deve haver também uma mudança para serem fornecidos materiais educacionais bem desenvolvidos para os alunos. Assim, vemos o impacto que as Tecnologias Digitais causam em nós e podemos usar esse impacto para causar o mesmo no ensino de Matemática.

Para o profissional da educação com o início do Ensino Remoto, apareceu novas exigências que precisam ser enfrentadas. Sendo assim, as Tecnologias Ditais, se bem utilizadas, servem como ferramentas principais no processo de ensino-aprendizagem, dependendo de como forem utilizadas. “Antes da pandemia, as tecnologias digitais eram usualmente utilizadas, por muitos professores, como recursos de apoio aos processos de ensino e de aprendizagem, mas durante o ensino remoto, elas passaram a ser, possivelmente, os recursos principais” (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.22).

Ainda de acordo com esses autores, se na formação inicial dos professores de matemática fosse mais trabalhado o uso de tecnologia, provavelmente o impacto da pandemia na educação teria sido reduzido, essa descoberta mostrou a lacuna na formação inicial que foi percebida em um momento onde a educação estava fragilizada, e essa lacuna deverá ser suprida ao longo da carreira dos professores em seu desenvolvimento profissional.

Na maioria das vezes quando se ensina matemática, nota-se uma dificuldade e um trauma por parte dos alunos. Nesse sentido, utilizar ferramentas tecnológicas tem por finalidade ajudar a reduzir essas dificuldades e consequentemente o trauma dos alunos, mostrando a necessidade da Matemática na sociedade que eles vivem.

O pouco uso das tecnologias por parte dos professores, também traz impactos nos alunos, “[...] há uma aversão por parte de alguns ao uso das ferramentas digitais no ensino, seja pela falta de hábito de uso de tais tecnologias ou pela dificuldade natural que a falta de familiaridade com recursos digitais traz, [...]” (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.37).

O ensino e a aprendizagem da Matemática, são apontados por alguns professores e alunos como difícil, mas que na maioria das vezes, através da Resolução de Problemas e utilizando as ferramentas digitais podemos desmistificar tais percepções.

> Tem-se visto, a partir da observação do cenário da educação brasileira, a ausência de assertividade quanto ao tratamento didático atribuído à tais ferramentas, desperdiçando assim, possibilidades de nessa trajetória direcionada, vislumbrar a execução de significativas práxis docentes, que poderiam se concretizar, contribuindo com a aprendizagem de alunos, caso fossem realizadas iniciativas, rumo a formação destes professores, em relação ao planejamento de ações com a inserção de tais recursos e a constituição de perspectivas de usabilidade das TDIC no ensino de Matemática (OLIVEIRA; PEREIRA, 2021, p.4).

Como visto, se o olhar dos educadores voltasse para a formação de professores, isso iria proporcionar uma exploração melhor das Tecnologias Digitais, incentivando em uma possibilidade positiva nas aulas de matemática, quando os futuros professores fossem exercer sua profissão de maneira autônoma. Na experiência relatada neste trabalho, tivemos a liberdade para usar a Resolução de Problemas e ferramentas tecnológicas que despertassem nos alunos a autonomia.

Com os impactos causados pela pandemia, vários setores foram prejudicados tendo que se adaptar para o convívio com a Covid-19. Um dos setores mais afetados foi o Ensino, a adaptação utilizada na maioria das instituições foi o Ensino Remoto, onde precisava fundamentalmente do uso das tecnologias e da internet. Marques, Carvalho e Esquincalha (2021), falam sobre como ocorreu esse impacto na sociedade:

> O ano de 2020 está marcado pelo contexto da Pandemia de COVID-19. Em um momento tão complicado quanto o de uma pandemia, tudo fica prejudicado de alguma forma: a economia desacelera, as desigualdades ficam mais evidentes do que nunca, negócios e seus postos de trabalho são fechados ou suspensos. Não é diferente com as instituições de ensino. Por conta da segurança sanitária e da preservação de vidas, aulas foram suspensas e as escolas, fechadas. Pelo menos fisicamente (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.20).

Podemos observar que a sociedade como um todo foi afetada, ocasionando no fechamento provisório de basicamente tudo. O que chama atenção nessa citação acima é que as escolas foram fechadas pelo menos fisicamente, dando início ao Ensino Remoto, onde a desigualdade social também citada e ficou mais evidente para os professores e alunos.

> De qualquer forma, seja na rede pública ou na rede privada, estudantes podem acabar encontrando algum tipo de dificuldade. Desde a falta de um contato mais direto com professores e colegas, passando pela dificuldade natural trazida pela transição de modalidade de ensino (presencial para remota), até a impossibilidade de acessar os recursos e atividades, seja pela falta de dispositivos ou de conexão à internet que sejam adequadas a tais demandas (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.20).

4.2 O ENSINO REMOTO DE MATEMÁTICA

O Ensino Remoto de matemática veio para ajudar, porém não funciona para todos, pois nem sempre os professores e alunos dispõem de uma boa internet e tem equipamentos de qualidade para assistir ou ministrar as aulas, isso ainda pode piorar com a falta de experiência do professor com as tecnologias.

Além dessas dificuldades o professor de matemática também possui outras dificuldades nesse ambiente virtual, seja com as dificuldades de aprendizagem dos alunos, os pais dos alunos que cobram um ensino de qualidade e a direção da escola que tem suas exigências. Toda essa cobrança ocorreu ao mesmo tempo que o professor procurou se adequar ao ensino remoto (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021).

As Tecnologias da Digitais são capazes de facilitar todo o processo de ensino da matemática, sendo assim buscar implementa-las na educação é extremamente necessário e com a pandemia da Covid-19 essas ferramentas tecnológicas ficaram com uma visibilidade ainda maior na sua utilização no ambiente escolar. Na verdade,

> Ensinar matemática já nos apresenta um sem-número de desafios quando se trata de ensino presencial. Mas o que acontece quando se faz necessário migrar para a modalidade remota/on-line de maneira súbita e em caráter emergencial, sem formação para isso, sem planejamento adequado e desafiando a programação letiva em vigência, pensada para a modalidade presencial? (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p. 22).

Isso é exatamente o que aconteceu no período das aulas remotas, onde professores não tinham se preparado na formação inicial para fazerem uso das tecnologias em suas aulas. “Se presencialmente já é difícil dar conta da dinâmica da prática docente em matemática, descobrir em tempo real como essas práticas precisam ser redefinidas no ensino remoto”. Isso pode acabar deixando professores ainda mais aflitos sem fazer ideia de como agir (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p. 23).

Diante deste cenário em que precisa utilizar a tecnologia no processo de ensino é necessário repensar se os alunos estão podendo ter a oportunidade de usar as Tecnologias Digitais. Marques, Carvalho e Esquincalha (2021) em sua pesquisa realizada com 300 professores de diferentes níveis de ensino e redes de todo o Brasil através de um curso no período da pandemia, apontam que:

> Naturalmente, muitos alunos não dispõem de condições de acesso às TDIC que correspondem com as necessidades impostas por um ensino remoto, seja por falta de uma conexão com a internet adequada, seja pela falta de um dispositivo por meio do qual a participação nas atividades propostas seja viável. Assim sendo, a solução encontrada por algumas instituições de ensino, conforme relataram alguns dos cursistas, foi disponibilizar, além das atividades remotas, atividades impressas, a serem entregues aos alunos que têm dificuldades de acesso (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.31).

Nas regências do Programa Residência Pedagógica, observamos que a escola por ser localizada em uma cidade do interior da Paraíba, existem muitos alunos da zona rural que não possuem acesso à internet, então a solução encontrada pela equipe e professores da instituição, foi a mesma citada a cima, trabalhar com atividades impressas para alcançar todos os alunos.

Nesse contexto, a principal dificuldade encontrada pelos docentes foi o acesso à internet. Marques, Carvalho e Esquincalha (2021), falam que a internet é um dos principais recursos para que as aulas ocorram de forma remota, assim gerando bastante dificuldade para os professores trabalharem, pois nem sempre o professor ou aluno vai ter disponível uma internet de qualidade, seja pelo local ou pelo alto custo. Ainda de acordo com os autores,

> Embora os professores também sofram com problemas de conexão que atrapalham os momentos de interação com os alunos, sejam em atividades síncronas ou assíncronas, o que já mencionamos estar associado à falta de recursos adequados no ambiente de trabalho, quem sofre mais é o aluno, em especial o da rede pública (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.33).

Enfim, é notório, em meio a tantas dificuldades, o esforço que os professores têm feito para alcançar seus alunos e buscar promover sua aprendizagem. Por exemplo, muitos dos meus colegas residentes relataram ter todo um trabalho e cuidado para planejar as atividades. Sabemos que os recursos que a instituição não disponibiliza para o professor, ocasiona uma dificuldade no ensino não só de matemática. Assim, o professor é quem precisa buscar estratégias para diminuir os impactos causados pela pandemia.

4.3 ALGUMAS PLATAFORMAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

4.3.1 A plataforma Desmos para ensinar e aprender em um ambiente virtual

A plataforma Desmos foi criada nos Estados Unidos por Luberoff. Um dos motivos para tal criação foi que, os alunos não tinham acesso gratuito a calculadoras gráficas. Tendo em vista isso,

> A motivação para desenvolver tal projeto veio da percepção de Luberoff de que os estudantes não deveriam ter que pagar para ter acesso a uma calculadora gráfica. No início dos anos 2000, nos Estados Unidos, quase todos os estudantes de escolas públicas e privadas que estavam acima do nível da aritmética simples eram obrigados a comprar uma calculadora científica que custava cerca de cem dólares (US $100). Os benefícios da calculadora gráfica que Luberoff estava apresentando eram muito evidentes: interface colorida, feedback gráfico em tempo real, acessibilidade de qualquer computador ou smartphone conectado à Internet e, o mais importante, custo zero para o usuário (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p. 6).

Nesse sentido, a plataforma Desmos além de ser uma calculadora gráfica que ajuda com cálculos matemáticos, fez com que qualquer pessoa através de um computador ou celular pudesse acessá-la, isso chamou a atenção para investidores contribuindo para o avanço da plataforma.

Essa plataforma, ajuda na qualidade do desenvolvimento das atividades, pois existe um painel do professor que possibilita, que este possa ver, em tempo real, o andamento das atividades observando qual aluno possui mais dificuldades. Esse painel faz o mesmo trabalho que o professor faria no ensino presencial, que seria o de sair de mesa em mesa para ver as dificuldades dos seus alunos.

> O painel de controle é uma excelente ferramenta de feedback para o professor, na medida em que é possível ver, sem necessariamente circular pela sala de aula, o andamento e o ritmo dos estudantes de maneira individualizada. Se um determinado estudante apresenta erros consecutivos nas atividades, é possível ao professor ir até ele e orientá-lo. Se um estudante está muito mais adiantado que o restante da turma, é possível ajustar o ritmo (pacing) de maneira a restringir as atividades que podem ser feitas naquele momento, de forma a ir permitindo a turma avançar gradativa e coletivamente. Por outro lado, também é válido em certas situações permitir que os próprios estudantes estabeleçam seus ritmos (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p. 25).

Esse painel tem várias possibilidades para tornar a aula da maneira que o professor responsável achar melhor, pois cada turma tem suas particularidades de se trabalhar. “Um recurso bastante interessante é o recurso de pausa. Com ele ativado, todos ficam impossibilitados de prosseguir na atividade, e o professor tem a atenção total da turma para uma determinada instrução ou discussão” (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p.25). Esse recurso é importante, pois sem ele os alunos vão querer terminar logo a atividade e não vão prestar atenção ao que o professor está falando.

Também existe um Modo Anônimo no painel de controle que impossibilita ver qual é o aluno que está respondendo as atividades, sendo exibido no painel nomes fictícios no lugar do nome dos alunos. Durante a nossa pesquisa de campo sempre buscamos utilizar esse recurso, pois achamos correto que os alunos conseguissem trabalhar de forma mais tranquila sem a impressão que o colega está mais à frente ou atrás nas atividades. O interessante dessa plataforma é que podemos modificar essas ferramentas a qualquer momento, dando liberdade para o professor ministrar sua aula remotamente.

Para o Ensino Remoto, esse painel foi fundamental, ajudando bastante o professor para ver qual aluno estava sentindo dificuldade e em qual questão essa dificuldade era maior. Além disso, o professor pode intervir no processo de resolução a qualquer momento. “[...] Isso permite que cada aluno faça as atividades no seu próprio ritmo enquanto permite ao professor dar feedbacks de maneira mais rápida e precisa” (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p.9).

Trabalhar com a plataforma Desmos durante a pesquisa de campo, possibilitou uma mudança positiva de como os alunos veem a Geometria Analítica. E que, nesta compreensão, percebe-se que:

> As discussões sobre o uso das calculadoras vêm amadurecendo ao longo das últimas décadas. Hoje já está praticamente superada a ideia de que as calculadoras atrapalham o ensino da matemática; em lugar disso, as problematizações estão no sentido de como tornar seu uso efetivo para a aprendizagem. Da mesma maneira que as calculadoras tradicionais (quatro operações) transformaram as aulas de aritmética ao longo dos anos, as calculadoras gráficas têm potencial de transformar as aulas que envolvem visualização de gráficos (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p.11).

Assim, o Desmos facilitou a compreensão do gráfico de equações geométricas, o que era muito interessante quando se fazia a ligação entre o conteúdo da parte algébrica e colocava a mesma equação para mostrar a parte geométrica no gráfico. Os alunos fizeram a ligação mais rápido e gostaram bastante, provando assim que as calculadoras gráficas ajudam no ensino de matemática.

O Desmos foi essencial na nossa pesquisa de campo pela sua facilidade de criar e passar as atividades, além do professor ter total liberdade na elaboração de atividade envolvendo problemas. Como diz Antunes e Cambrainha (2020),

> Ninguém conhece melhor a sala de aula do que quem está nela todos os dias. O professor, como parte integrante dela, tem a possibilidade de, a partir das vivências, repensar suas práticas pedagógicas, criar suas próprias estratégias didáticas e inclusive ser autor de seu próprio material didático. Nessa direção, a funcionalidade de construção de atividades da plataforma Desmos coloca-se como um grande aliado. Ela disponibiliza um conjunto de ferramentas que permitem ao professor criar atividades personalizadas (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020, p.31).

Essa ferramenta possibilita o professor ver quais questões são melhores para trabalhar com os alunos. Na plataforma, utilizamos em todas preparações das atividades as ferramentas mídia (MEDIA) e anotações (NOTE) que funcionaram como um espaço para o professor colocar o enunciado das questões, imagens, animações entre outros (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020). Nesse espaço era interessante colocar fórmulas ou dicas para os alunos terem uma base do que fazer.

Trabalhando com a Geometria Analítica, colocávamos gráficos em algumas questões que precisavam dessa análise, para dar liberdade aos alunos em pensarem de várias formas diferentes naquela resolução. Então, essa ferramenta possibilitou implementar os gráficos nas questões e para fazer isso era bastante simples, selecionando a opção gráfico (GRAPH) você verá uma interface quase idêntica à calculadora gráfica do Desmos. Você pode adicionar as expressões e construções que você desejar, inclusive usando as opções de notas da calculadora para dar instruções aos estudantes.

4.3.2 O software GeoGebra para ensinar e aprender em um ambiente virtual

O GeoGebra foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, ele é um software com alto potencial visual e pedagógico que reúne ferramentas para Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, podendo ser utilizado nos sistemas operacionais Windows, Linux ou Mac OS, abrangendo desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior.

Sua interface dispõe de um campo de entrada, de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio software algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída; a partir daí, é possível manipular objetos construídos e movê-los sem alterar suas propriedades.

O GeoGebra também é conhecido como um software de geometria dinâmica, em que o professor e alunos assumem o controle das representações a partir da execução de cada uma das etapas necessárias para uma determinada construção geométrica.

Para Farias e Rêgo (2016), o manuseio do GeoGebra possibilita ao aluno a apresentação de diversos conteúdos da Matemática e permite a construção dinâmica de diversas formas geométricas em ambientes 2D e 3D, das mais simples às mais sofisticadas, além de várias representações gráficas de diversos tipos de funções.

Ainda para essas autoras, outra vantagem desse software é a possibilidade de construção de atividades que podem ser salvas como arquivos, ou de figuras que poderão ser utilizadas em outras atividades.

> Uma das principais características dos desenhos dinâmicos é a sua manipulação. A capacidade de modificarmos representações através de um conjunto de

> procedimentos orientados de seus componentes assegura que as propriedades geométricas desses objetos sejam preservadas, o que pode auxiliar o estudante em relação às características invariantes das figuras. Deste modo, as propriedades geométricas podem ser traduzidas como um fenômeno visual que se produz ao arrastar objetos, de maneira que, ao arrastá-los, os elementos se convertem em um meio de reconhecimento e de verificação das propriedades através do desenho dinâmico (FARIAS; RÊGO, 2016, p. 115-116).

Além disso, o GeoGebra facilita a compreensão dos conteúdos matemáticos, pois os alunos podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, relacionando os conteúdos algébricos e geométricos, o que torna algo extremamente valioso no ensino de Geometria Analítica.

Para Farias e Rêgo (2016):

> (...) trabalhar o conhecimento geométrico a partir de um software dinâmico abre um grande leque de possibilidades didáticas, na medida em que suas ferramentas potencializam a geração de situações que podem se configurar como ponto de partida para a investigação, inclusive de pontos de vista distintos do originalmente proposto, ampliando a aprendizagem matemática (FARIAS; RÊGO, 2016, p.123).

Nesse sentido, a Geometria Analítica fica mais fácil de compreender quando se consegue visualizar as figuras e associar com a parte algébrica. Esse software possibilita várias alternativas para o ensino da Geometria Analítica, e os alunos se sentem mais interessados em aprender com mais cooperação na aula, como visto na citação a seguir:

> Perfilhando a perspectiva de que o conhecimento não é algo pronto e acabado, mas que se (re)constrói mediante o confronto entre a teoria e a prática, através do uso de softwares no ensino matemático, possibilitamos a incorporação de elementos interativos ao processo de ensino/aprendizagem, pautando-nos na cooperação e sistematização coletiva dos saberes matemáticos (NASCIMENTO; CASTRO; LIMA, 2015, p.42).

Os autores frisam que usar essas tecnologias iram contribui para uma aprendizagem com mais interação, assim quando ocorre discussões e debates no ambiente escolar onde o aluno associa a teoria e prática com os recursos disponibilizados pelo professor a construção do conhecimento passa a ser coletiva e os educandos tornasse protagonista na construção dos saberes matemáticos (NASCIMENTO; CASTRO; LIMA, 2015).

Os autores ainda falam da importância que tem o professor quando ele adota um método que está voltado as dificuldades e capacidades de seus alunos:

> Essa postura docente mostra a importância do conhecimento qualificado como fator relevante na busca pela efetivação da aprendizagem. Portanto, é necessário que o professor reflita sobre as angústias dos educandos, atrelando a isso a reflexão sobre as transformações do contexto contemporâneo e a adoção de estratégias didático/pedagógicas que reflitam na aprendizagem matemática dos seus educandos (NASCIMENTO; CASTRO; LIMA, 2015, p.45).

Ainda segundo esses autores, o processo de ensino-aprendizagem em que o professor trabalha a matemática relacionado a memorização de conceitos e fórmulas, que possui como base uma repetição mecânica dessas informações, torna essa ciência vazia de significados, o que é um problema para os alunos que não conseguiram associá-la no seu cotidiano pessoal e social, ficando lacunas nessa aprendizagem e implicando em dificuldades futuras para aprender novos conceitos.

Sendo assim, consideramos que a Matemática precisa deixar de ser uma disciplina que cause medo nos alunos. Para isso, o caminho mais promissor será dar significado aos conceitos que são trabalhados em sala de aula, então como a matemática é abstrata, precisamos mostrar a interação que ela faz, para isso o melhor caminho é o uso dos softwares.

> Nessa direção, consideramos que as atividades desenvolvidas pelo professor, e mediadas pelo uso de softwares matemáticos, possibilitam novos aportes exploratórios no processo de ensino-aprendizagem, contribuindo na busca pelo conhecimento qualificado, ultrapassando uma visão reducionista do ensino, pautada na memorização de regras e conceitos estáticos, sem vínculos com o contexto escolar e social, provocando desestímulo e desinteresse, culminando em sentimentos de apatia e rejeição aos saberes matemáticos (NASCIMENTO; CASTRO; LIMA, 2015, p.46).

Dessa maneira, podemos observar que utilizando as plataformas digitais no ensino de matemática, o desinteresse dos alunos, em especial pela Geometria Analítica, passa a ser menor, possibilitando a associação dos conceitos com a realidade dos alunos, para só assim fazer com que eles cresçam intelectualmente e possam enfrentar desafios de forma autônoma, ajudando no seu crescimento pessoal. Pretendemos, em conjunto com os futuros professores refletir sobre as potencialidades do ensino da Geometria Analítica através da Resolução de Problemas aliada às Tecnologias Digitais.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa e os instrumentos usados para coleta de dados com os materiais utilizados para a aplicação dos encontros remotos, com a adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011) para o Ensino Remoto. Também discutimos alguns critérios para análise dos dados. Por fim, temos os problemas geradores da pesquisa.

Esta pesquisa é bibliográfica, de cunho qualitativo e os dados são descritos de forma descritiva e interpretativa, onde observamos o comportamento/aprendizado dos alunos em todo o processo de aplicação das atividades nos encontros, considerando as dificuldades enfrentadas no ensino remoto em relação à aprendizagem da Geometria Analítica. Para a seleção dos alunos-participantes, o primeiro passo foi repassar para o professor responsável, neste caso o preceptor da Residência Pedagógica, o objetivo deste experimento. Então, solicitamos seis alunos que estivessem dispostos a participar de quatro encontros, e por questões éticas, nenhum destes serão identificados neste texto. Colocaremos letras apenas para que possamos recuperar algumas frases ao longo das análises.

Os encontros aconteceram na Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, através do Programa Residência Pedagógica com os 3º anos do Ensino Médio, no período de 24 de fevereiro a 11 de março de 2022, com a finalidade de observar quais os pontos positivos e negativos de se trabalhar com a metodologia Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais no ensino remoto, procurando despertar nos alunos-participantes o interesse pelo estudo da Geometria Analítica.

Quanto aos materiais utilizados para a aplicação dos encontros remotos, foram utilizadas as Tecnologias Digitais: WhatsApp; Desmos; Jamboard e Google Meet, funcionando como ferramentas de apoio para uma melhor compreensão do conteúdo. Tudo foi registrado por *prints* retirados por uma residente do Programa de Residência Pedagógica, gravações de áudio e diário de bordo do pesquisador para produção de relatórios e análise detalhada dos encontros. Ao final da pesquisa aplicamos um questionário para verificarmos as contribuições e dificuldades ocorridas nos encontros, onde os alunos-participantes expuseram suas opiniões e posicionamentos.

Para aplicação da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, fizemos uma adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), pois por se tratar do ensino remoto, tudo ocorreu por meio das Tecnologias Digitas, então algumas etapas precisaram ser adaptadas. A seguir, temos a adaptação do roteiro dividido em oito etapas:

Figura 12 – Roteiro da Resolução de Problemas para o Ensino Remoto

Fonte: Elaborado pelo autor

(1) Preparação do problema – Selecionar um problema, o qual será chamado problema gerador.

(2) Leitura individual – Solicitar aos alunos que seja feita a leitura do problema na plataforma Desmos.

(3) Leitura em conjunto – Fazer a leitura para os alunos e verificar se houveram dúvidas quanto ao enunciado do problema.

(4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos do WhatsApp, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

- Nesta etapa como estávamos no ensino remoto, observei e incentivei os alunos em todo o processo da aula que seria o próximo passo do roteiro original.

(5) Registro das resoluções no Jamboard – Os alunos são convidados a compartilhar nos grupos de WhatsApp suas resoluções, para que o professor exponha na plataforma Jamboard. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

(6) Plenária – São convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas no Jamboard pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor será o mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos.

(7) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

(8) Formalização do conteúdo – O professor registra uma apresentação formal através do Jamboard – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

Os resultados esperados com esta pesquisa são: que a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o uso das Tecnologias Digitais, consigam despertar nos alunos o interesse pela matemática em especial a Geometria Analítica, tornando a aula interativa e melhorando o Ensino Remoto.

Em síntese, as etapas aqui foram divididas em quatro partes:

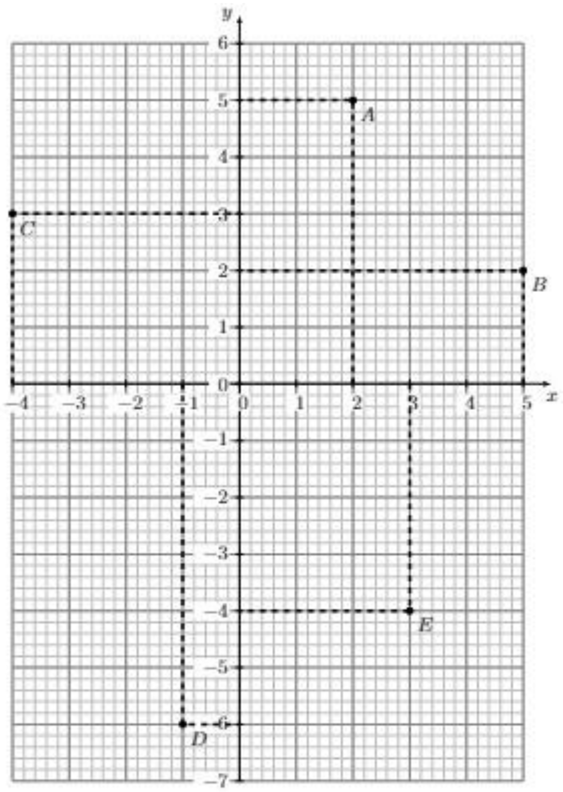
- 1° Revisão bibliográfica;
- 2° Análise e elaboração de aulas para o Ensino Remoto;
- 3° Aplicação das aulas e construção de relatórios;
- 4° Análise e discussão dos resultados obtidos.

5.1 PROBLEMAS GERADORES DA PESQUISA

Este trabalho procura estabelecer a ligação integradora de álgebra e geometria, apresentando diferentes problemas matemáticos, enfatizando a utilidade de aprender matemática e também de poder aplicar esse conhecimento na resolução de problemas que possam surgir. A seguir, temos os problemas geradores da pesquisa e os seus respectivos objetivos:

Problema 1. Observe a figura ao lado e determine os pontos $A; B; C; D\ e\ E$, ou seja, dê suas coordenadas:

Figura 13 – Plano cartesiano com coordenadas dos pontos



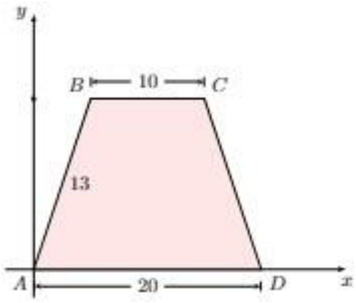
Fonte: Elaborado pelo autor

Objetivo do problema:

- Localizar as coordenadas de um ponto no plano.

Problema 2. Determine as coordenadas dos vértices $A, B, C\ e\ D$ do trapézio isósceles abaixo.

Figura 14 – Trapézio isósceles



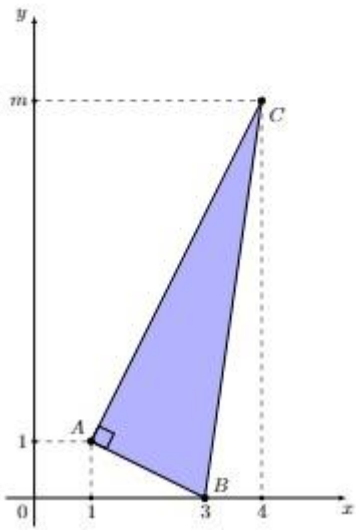
Fonte: Elaborado pelo autor

Objetivos do problema:

- Saber traçar uma reta perpendicular;
- Utilizar o Teorema de Pitágoras;
- Identificar a congruência de Triângulos.

Problema 3. Com base na figura seguinte, determine **m**.

Figura 15 – Triângulo retângulo formado pelos pontos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Objetivos do problema:

- Compreender a distância entre dois pontos;
- Utilizar o Teorema de Pitágoras.

Problema 4. Em um paralelogramo $ABCD$, $M(1,-2)$ é o ponto de encontro das diagonais $AC\ e\ BD$. Sabe-se que $A(2,3)$ e $B(6,4)$ são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determine as coordenadas dos vértices $C\ e\ D$.

Objetivos do problema:

- Compreender o ponto médio de um segmento;
- Saber o que é um paralelogramo.

Problema 5. Em um jogo de computador, idealizado na tela por um plano cartesiano, o herói encontra-se no ponto (-3, 2) e precisa salvar a princesa no castelo, representado pelo ponto (2, 5), do outro lado de um estreito rio, de trajetória retilínea, representado pelo eixo das ordenadas. O objetivo do jogo é fazer esse caminho o mais rápido possível. Nessas condições, em que ponto do plano ele deverá cruzar o rio a fim de minimizar o tempo de viagem? Admita que a velocidade do herói seja igual para qualquer movimento.

Objetivos do problema:

- Identificar quando três pontos estão alinhados;
- Saber calcular o determinante de uma matriz 3x3.

6 ENCONTROS REMOTOS

Devido a pandemia do Covid-19, os encontros aconteceram virtualmente, pelo Google Meet. Esses encontros foram realizados semanalmente com os alunos-participantes. Para descrever os dados coletados, foram utilizadas gravações de áudio durante os encontros. A seguir, apresentaremos em detalhes como ocorreu esses encontros com os alunos envolvidos na pesquisa.

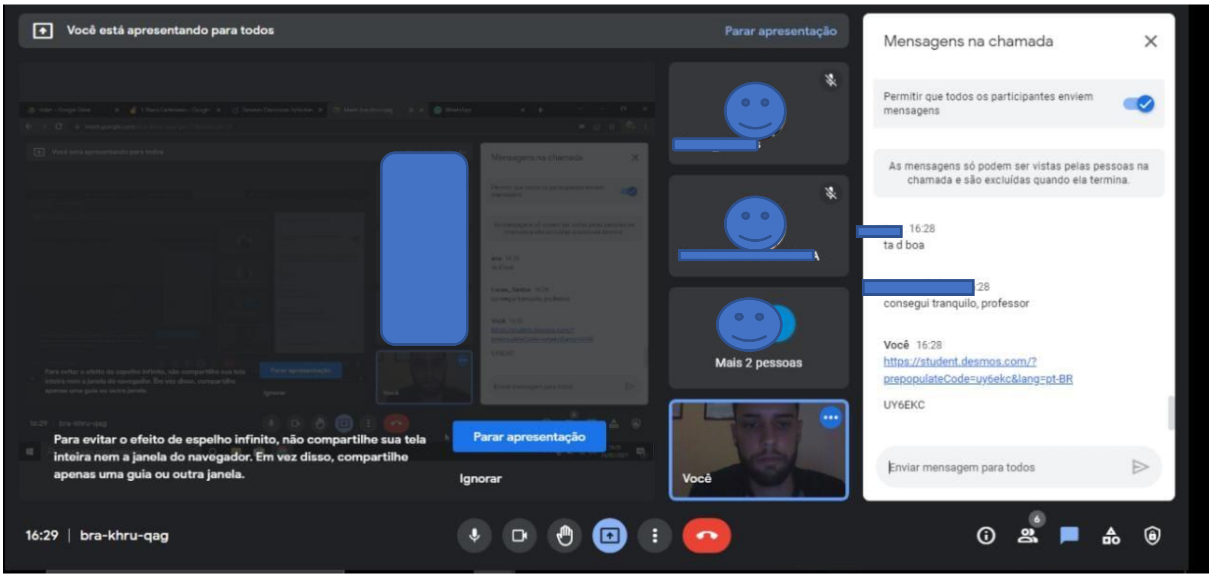
6.1 PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro aconteceu no dia 24 de fevereiro de 2022, das 16h10min às 17h10min, totalizando 1 hora aula, em uma sala de aula virtual no Google Meet. Estavam presentes cinco pessoas, eu e quatro alunos-participantes, os outros dois alunos não participaram por motivos pessoais. O conteúdo abordado nesse encontro foi **Plano cartesiano**.

A aula iniciou com a minha apresentação, onde falei que sou estudante do curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), campus VI em Monteiro-PB e faço parte do Programa de Residência Pedagógica oferecido pelo curso. Expliquei que teríamos quatro encontros, preservando os nomes dos alunos-participantes, e que trabalharíamos os mesmos conteúdos que estariam sendo abordados em outra sala virtual pelo professor de Matemática da escola-campo. Reconhecendo que o ensino remoto não estava sendo muito fácil para os alunos nem para os professores, utilizei ferramentas tecnológicas para auxiliar no desenvolvimento dos encontros juntamente com a metodologia Resolução de Problemas, tornando as aulas mais dinâmicas com o intuito de amenizar os danos causados pela pandemia da Covid-19.

Perguntei aos alunos se eles conheciam a plataforma Desmos e todos responderam que não. Então apresentei a tela do computador através do Google Meet, e acessei a plataforma com o intuito de mostrar como funcionava. Os alunos gostaram bastante da facilidade de acesso da plataforma. Logo, passei o link para acessar a sala de aula no Desmos através do Google Meet, no qual eles iriam encontrar dois Problemas e fariam a leitura individual.

Figura 16 – Link para acessar a sala de aula no Desmos



Fonte: Dados da pesquisa

Como não houveram dúvidas sobre a funcionalidade do Desmos, apliquei a adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), nas etapas a seguir:

(2) Leitura individual dos Problemas 1 e 2 na Plataforma Desmos – Na segunda etapa do roteiro, os alunos se cadastraram no Desmos conseguindo fazer a leitura dos problemas. Nessas condições, deveriam apenas ler e confirmarem quando terminassem.

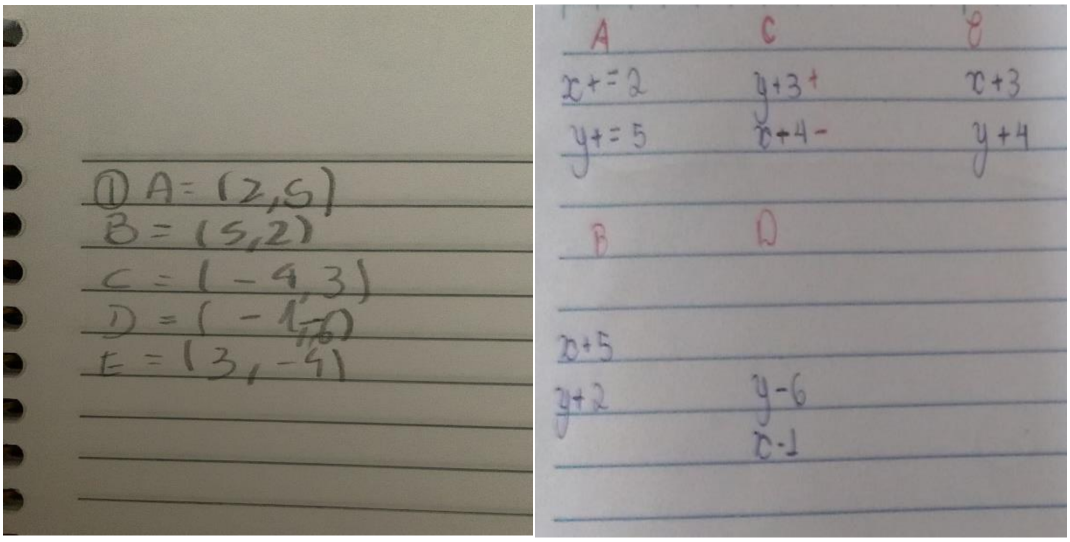
(3) Leitura em conjunto – Como estávamos no ensino remoto, adaptamos essa etapa do roteiro, no qual o professor quem faz a leitura dos problemas para os alunos, verificando se houveram dúvidas em relação aos enunciados dos problemas que neste caso não houve. Então, foram formadas duplas através de grupos no WhatsApp.

(4) Resolução do problema – Foram estabelecidos 15 minutos para as duplas resolverem os problemas e interagirem nos grupos com o intuito de se ajudarem. Nesse momento, observei que os alunos não interagiam uns com os outros, quando questionados eles falaram que estavam tentando resolver os problemas, então como eles não estavam sentindo dificuldades para perguntar no grupo, continuei incentivando-os nas resoluções pelo WhatsApp.

(5) Registro das resoluções no Jamboarad – Nessa etapa as duplas foram terminando e postando as resoluções nos grupos 1 e 2. Selecionei as resoluções e postei no Jamboard para que houvesse discussões sobre como eles haviam resolvido os problemas.

(6) Plenária – Os alunos interagiram pouco nessa etapa, o que não era o esperado, então busquei fazer com que eles participassem da seguinte forma: no Problema 1, a forma como eles representam as coordenadas dos pontos chamou atenção, como podemos ver a seguir:

Figura 17 – Resolução feita pelos alunos do Problema 1



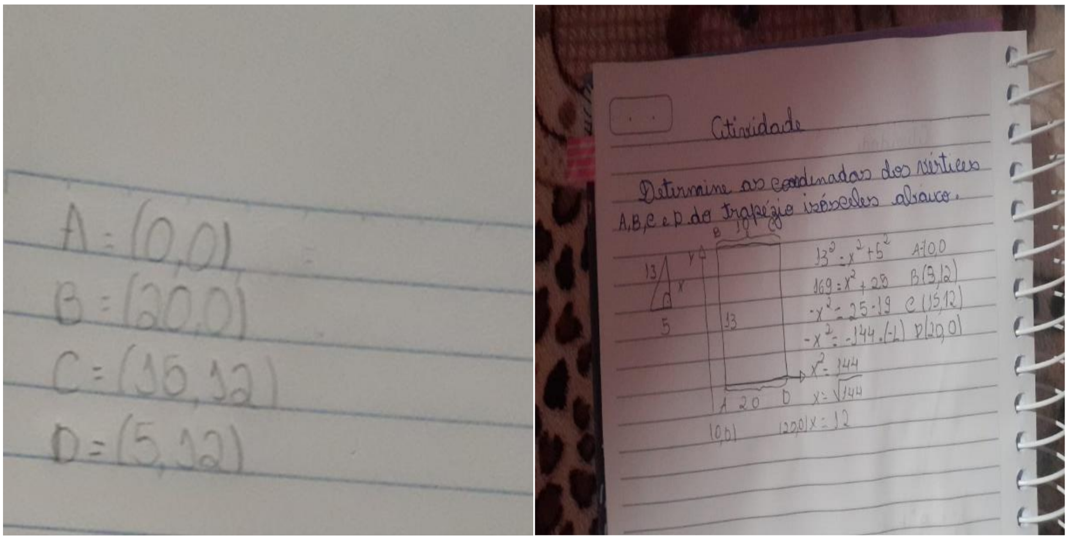
Fonte: Dados da pesquisa

A primeira dupla conseguiu representar os pares ordenados sem problemas, então acrescentei uma observação: que é opcional colocar a igualdade entre a letra que representa o ponto e o parêntese. Então a *Aluna C* disse: “Consegui compreender professor, achei tranquilo esse primeiro problema, senti dificuldades no segundo problema”.

Para a segunda dupla falei que o par ordenado é representado da seguinte forma: (x, y), então mostrei por exemplo no ponto B, que os valores da abscissa (x) e ordenada (y), estão corretos, mas, temos um padrão para representá-los, logo perguntei o raciocínio da dupla 2, quando o *Aluno D* acrescentou: “Eu observei os pontos e vi que eles estavam ligados a números de x e y, então coloquei esses números”. Respondi então*:* “Isso mesmo, você seguiu o raciocínio correto, mas existe um padrão para representar esses valores, faltou apenas colocar nesse padrão”.

Assim, mostrei o padrão que se utiliza para representar os pontos no plano cartesiano, em seguida, olhamos as resoluções do Problema 2:

Figura 18 – Resolução feita pelos alunos do Problema 2



Fonte: Dados da pesquisa

Perguntei como as duplas resolveram o Problema 2, os alunos estavam sem querer responder, então passei confiança, falando que só estavam presentes no encontro eu e os quatro alunos, então não precisavam ficar envergonhados ao interagir, assim, a *Aluna F* se sentiu confiante em compartilhar sua resolução:

Aluna F: “Bom, professor, eu usei o Teorema de Pitágoras, aí primeiro eu determinei cada lado, para depois usar Pitágoras”. Respondi: “Muito bem! Gostei da maneira como pensou, você usou um conhecimento prévio que foi utilizar o Teorema de Pitágoras, por construir o triângulo retângulo na figura. Os demais concordam com a colega, ou pensaram de alguma forma diferente?”. *Aluna B*: “Eu também pensei da mesma forma que minha colega, professor”.

Os demais alunos concordaram e entenderam como aquele conhecimento prévio foi necessário para a resolução, então segui para a sétima etapa do roteiro. **(7) Busca do consenso** – Buscamos resolver o Problema 2, lembrando que não existe um único caminho para se chegar a uma resposta. Assim, analisando o trapézio isósceles, já conseguimos achar as coordenadas dos pontos A que está localizado na origem do plano cartesiano, sendo suas coordenadas $A(0,0)$ e o ponto D que está sobre o eixo das abscissas e a distância que ele está dá origem é 20, por tanto $D(20,0)$.

Sobrou os pontos B e C que estão localizados na parte de cima do trapézio, então perguntei aos alunos: “O que é um trapézio isósceles?”

Aluna B: “Acho que ele possui os lados que não são paralelos, congruentes”. Como estava correto o respectivo raciocínio, mostrei que para solucionar o problema poderíamos traçar uma perpendicular que passa pelo ponto D e outra que passe pelos pontos B e C interceptando o eixo das ordenadas e a outra perpendicular, então, observamos que se formou dois triângulos retângulos.

Os alunos não lembravam o que é uma perpendicular, então relembrei: “Uma perpendicular é uma reta que corta outra reta formando um ângulo de $90°$ entre elas”. A partir isto os alunos lembraram, assim descobrimos que os triângulos formados são congruentes, possuindo as mesmas medidas dos lados e ângulos.

Para descobrir o cateto menor aplicamos: $2x + 10 = 20$, pois o lado oposto formado pelas perpendiculares é igual ao lado que mede 20. Logo $x = 5$ (I). Como tínhamos o valor do cateto menor $x = 5$ e da hipotenusa $h = 13$ (II), basta aplicar o Teorema de Pitágoras: $a^2 + x^2 = h^2$ (III), em que “a” representa a altura do trapézio.

Aluna F: “Professor eu fiz pelo mesmo raciocínio, percebi que dava para usar Pitágoras, nessa parte".

Substituindo (I) e (II) em (III) teríamos:

$$a^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$$

$$a^2 + 25 = 169 \Rightarrow$$

$$a^2 = 169 - 25 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{144} \Rightarrow$$

$$a = 12$$

Logo, marcamos os valores no desenho do trapézio, descobrindo as coordenadas dos pontos B$(5,12)$ e $C(15,12)$.

Para finalizar a aula, aconteceu a formalização do conteúdo, onde tinha a informação, que o Plano cartesiano é um método criado pelo filósofo e matemático francês René Descartes e como se constrói o plano cartesiano, definindo cada parte que o constitui como mostrado no Capítulo 3.

6.2 SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro aconteceu no dia 03 de março de 2022, das 16h10min às 17h10min, totalizando 1 hora aula, esse encontro aconteceu através do Google Meet. Estavam presentes três alunos-participantes, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica (para ajudar na coleta de dados da pesquisa, tirando *prints*), os demais alunos não participaram por motivos pessoais, e o conteúdo abordado foi **Distância entre dois pontos**.

Dando início ao encontro, separei os alunos em uma dupla formada pelas Alunas *F* e *E*, e o *Aluno A* fez individual. Como os alunos *A* e *E* haviam faltado no primeiro encontro, mostrei como acessar a plataforma Desmos, e falei suas funcionalidades. Sem dúvidas em relação a esta plataforma, apliquei a adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), com as seguintes etapas:

(2) Leitura individual do Problema 3 na Plataforma Desmos – Passado o *link* para acesso da Plataforma, os alunos realizaram a leitura individual do problema. Perguntei se haviam concluído a leitura, logo as respostas foram que sim, então seguimos para a próxima etapa.

(3) Leitura em conjunto – Nesse momento, fiz a leitura do problema para os alunos e perguntei se haviam dúvidas quanto ao enunciado, quando o *Aluno A* questionou: “Como é que eu vou determinar esse m?” Respondi: “Então, baseado nessa figura aqui, consegue visualizar essa figura, presente no gráfico?” *Aluno A*: “Pronto, com essa figura aí, consigo determinar quem é m?” -“Sim, não precisa ter medo de errar, o importante é dar seu melhor, e as dúvidas que surgirem, vocês mandem no grupo do WhatsApp que procuro ajudar vocês”.

Aluno A: “Tudo bem, professor. Como eu não estou em casa, tem problema se eu editar através do celular e enviar a resolução?” - “Não tem problema, fique à vontade para fazer do seu jeito”. Por fim, perguntei aos outros alunos se haviam dúvidas e todos responderam que não.

(4) Resolução do problema – Assim, como não havia dúvidas, foram estabelecidos 10 minutos para os alunos resolverem o problema. No grupo 1 e 2 do WhatsApp, perguntei como estava o andamento da resolução e se precisavam de ajuda.

Conversa do grupo 1 do WhatsApp (me referenciarei como “*Professor-residente*”):

Professor-residente: “Como está a resolução?”

Aluno A: “Estou conseguindo, professor”.

Professor-residente: “Muito bem! Continue assim, e depois envie sua resolução”.

Conversa do grupo 2 do WhatsApp:

Professor-residente: “Vocês podem interagir por esse grupo e tirar suas dúvidas, estão conseguindo?”

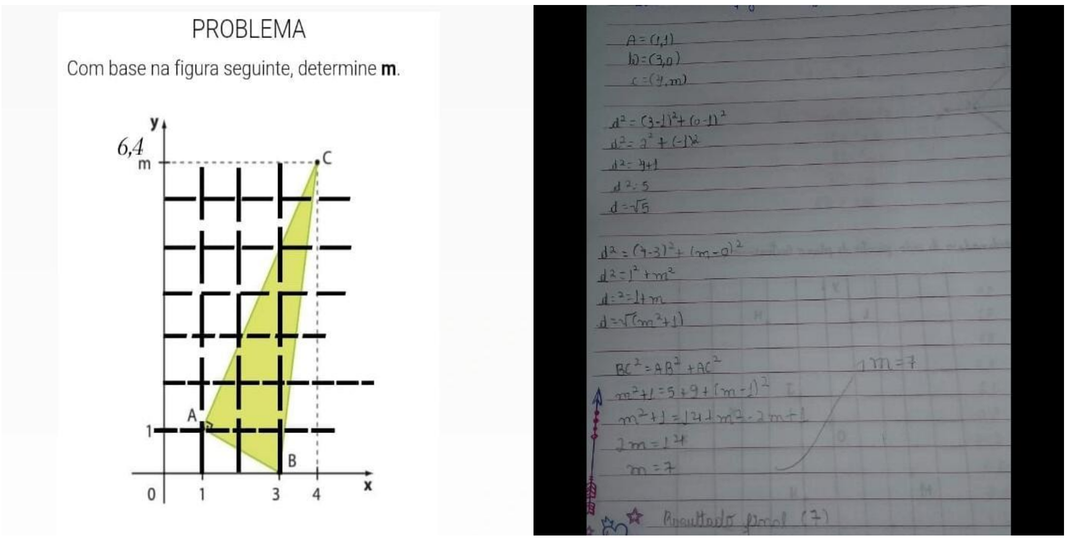
Aluna E: “Estou quase acabando”.

Professor-residente: “Isso aí! Ótimo".

(5) Registro das resoluções no Jamboard – Nessa etapa os alunos terminaram e enviaram a resolução do problema nos grupos 1 e 2. Selecionei as resoluções e postei no Jamboard para que houvesse discussões sobre como eles haviam resolvido o problema.

(6) Plenária – Aqui os alunos discutiram sobre como haviam desenvolvido o raciocínio para determinar **m**.

Figura 19 – Resolução feita pelos alunos do Problema 3



Fonte: Dados da pesquisa

O *Aluno A*, utilizando o celular, teve um raciocínio bastante interessante, pois dividiu o plano cartesiano, onde estava a figura em pequenas áreas quadriculadas.

Professor-residente: “Como foi seu raciocínio, *aluno A*?”

Aluno A: “Aqui no plano cartesiano, eu fiz traços até o número 4 no eixo das abscissas, então tentei fazer o mesmo no eixo das ordenadas até o número m, e chegar a um valor aproximado de m.”

Professor-residente: “Gostei bastante do seu raciocínio, você usou as ferramentas que você tinha no momento e chegou a um valor bem interessante, e vocês meninas o que acharam desse método de resolução?”

Aluna F: “Achei mais rápido, mas o valor encontrado não é exato”.

Professor-residente: “Interessante, mostre o raciocínio da sua dupla”.

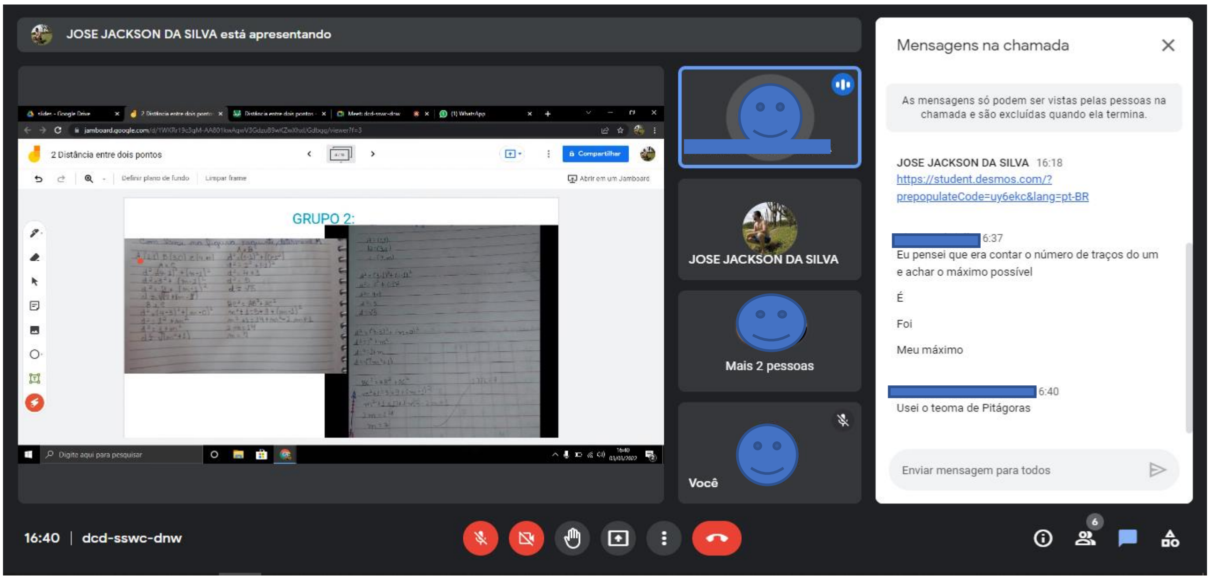
Aluna F: “Usamos o Teorema de Pitágoras”.

Professor-residente: "Como vocês chegaram à conclusão de usar esse Teorema?"

Aluna F: "Primeiro a gente encontrou as coordenadas dos pontos A, B e C da figura, aí procuramos a distância de cada um AB e BC, e depois aplicamos o Teorema de Pitágoras e achamos o valor de m".

Aluna E: "Exatamente, com base na imagem observamos que a figura se tratava de um triângulo retângulo e poderíamos usar o Teorema de Pitágoras, mas só no final usamos."

Figura 20 – Discussão das resoluções



Fonte: Dados da pesquisa

A discussão rendeu caminhos diferentes e os alunos fizeram parte da construção do conhecimento.

(7) Busca do consenso – Nessa etapa do roteiro, o professor busca um consenso entre a resolução dos alunos e sua resolução.

Professor-residente: "Achei bem interessante como o *aluno A* procurou achar o valor de m, mostra que existem vários caminhos para se pensar quando se resolve um problema, já a dupla conseguiu desenvolver de uma forma parecida com a qual vou buscar fazer utilizando um conhecimento prévio que é o Teorema de Pitágoras e o que me impressionou foi conseguirem usar a distância entre os pontos".

Como o triângulo ABC é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras e para determinar cada lado do triângulo basta usar a distância entre eles, obtemos:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow$$

$$[(3-1)^2 + (0-1)^2] + [(4-1)^2 + (m-1)^2] = [(4-3)^2 + (m-0)^2] \Rightarrow$$

$$(4 + 1) + (9 + m^2 - 2m + 1) = 1 + m^2 \Rightarrow$$
$$14 - 2m = 0 \Rightarrow$$
$$2m = 14 \Rightarrow$$
$$m = 7$$

Logo, determinamos o valor de $m = 7$.

Para finalizar a aula, aconteceu a formalização do conteúdo, onde tinha a definição do que é a Distância entre dois pontos e de como calcular os três casos que essas distâncias podem aparecer como mostrado no Capítulo 3.

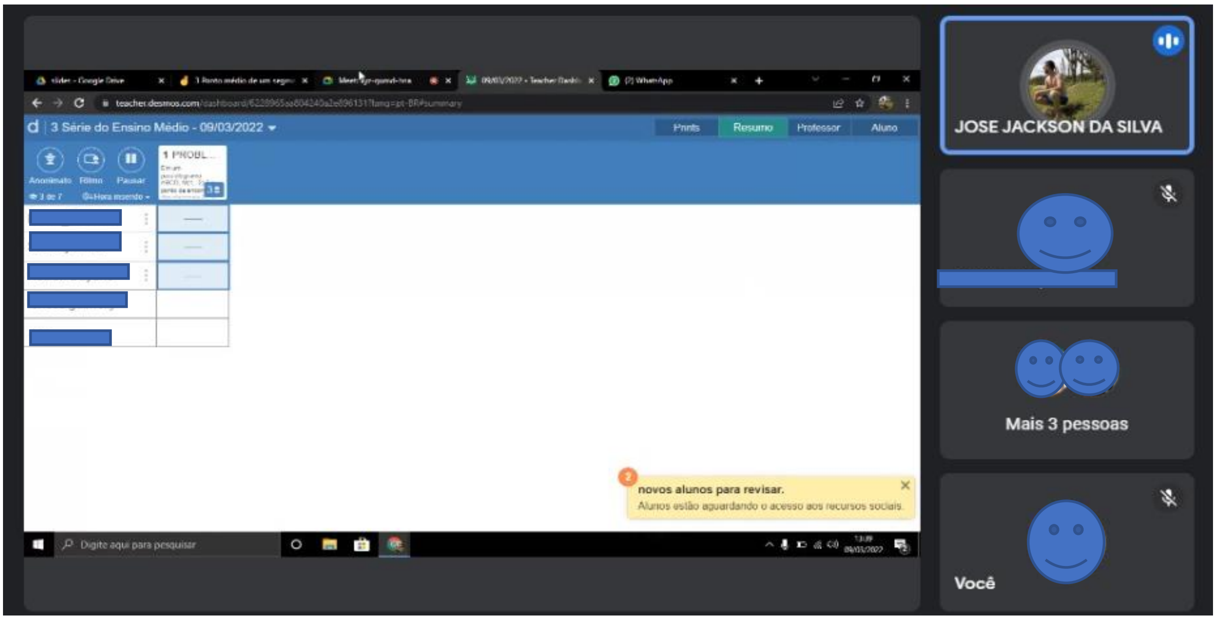
6.3 TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro aconteceu no dia 09 de março de 2022, das 13h30 min às 14h30min, totalizando 1 hora aula, esse encontro aconteceu através de uma sala de aula virtual do Google Meet. Estavam presentes os cinco alunos-participantes, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica, para ajudar na coleta de dados da pesquisa, tirando *prints*. Houve uma participação significativa dos alunos, mas a *Aluna B*, não participou por motivos pessoais. O conteúdo abordado foi **Ponto médio de um segmento**.

Começamos o encontro aplicando a adaptação do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), com as seguintes etapas:

(2) Leitura individual do Problema 4 na Plataforma Desmos – Passei o *link* para acesso da plataforma, e os alunos realizaram a leitura individual do problema. Após os alunos terminarem a leitura individual, iniciei a próxima etapa.

Figura 21 – Painel do professor na plataforma Desmos



Fonte: Dados da pesquisa

(3) Leitura em conjunto – Fiz a leitura do Problema e questionei os alunos: "Vocês têm alguma dúvida em relação ao enunciado?"

Aluno A: "Não, professor". Todos confirmaram que não havia dúvidas.

Professor-residente: "ok, vou determinar 10 minutos para vocês resolverem o problema, e falarem quando terminar, qualquer coisa estou aqui no Google Meet e nos grupos do WhatsApp".

(4) Resolução do problema – sugeri 10 minutos para a dupla e o trio de alunos resolverem o problema e interagirem nos grupos 1 e 2, para tirar dúvidas e postar as resoluções.

Professor-residente: "Uma dica pessoal, é interessante que vocês façam o plano cartesiano, para facilitar a resolução". *Aluno D*: "Tudo bem, vou tentar".

Conversa do grupo 1 do WhatsApp:

Aluna C: "O que é um paralelogramo?"

Aluno D: "É um quadrilátero que tem seus lados opostos paralelos"

Aluna C: "Entendi agora, obrigado!"

Conversa do grupo 2 do WhatsApp:

Professor-residente: “Estão conseguindo?”

Aluna F: “Sim!”

Aluna E: “Eu terminei, mas acho que errei”.

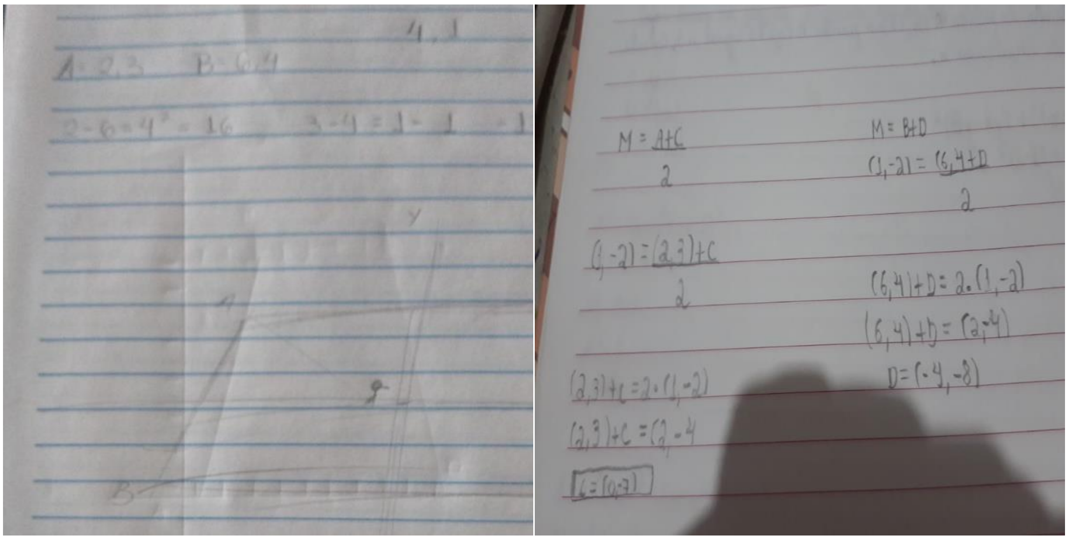
Professor-residente: “Não tem problema, o importante é tentar”.

Percebemos nas falas a cima, que os alunos estavam se ajudando através dos grupos do WhatsApp.

(5) Registro das resoluções no Jamboard – Nessa etapa os alunos terminaram e enviaram a resolução do problema nos grupos 1 e 2 do WhatsApp. Selecionei as resoluções e postei no Jamboard para que houvesse discussões sobre como eles haviam resolvido o problema.

(6) Plenária – Aqui houve a discussão dos alunos sobre suas resoluções.

Figura 22 – Resolução feita pelos alunos do Problema 4



Fonte: Dados da pesquisa

Professor-residente: “Como foi o raciocínio de vocês?”

Aluno D: “Eu não consegui achar a resposta, tentei desenhar o paralelogramo, mas não consegui usar algo para descobrir quais as coordenadas dos vértices C e D”.

Aluna C: “Também não consegui”.

Aluno A: “Eu não tentei”.

Professor-residente: “Tudo bem pessoal, vamos ver o raciocínio dos outros colegas. Como foi o raciocínio de vocês, alunos *E* e *F*?”

Aluna F: “O paralelogramo como é citado aí, as diagonais se cortam em seus pontos médios, AC e BD são as diagonais e M é o ponto médio desses dois segmentos.”

Aluna E: “Primeiro eu separei a diagonal AC, coloquei M como ponto médio, fiz ele igual a diagonal dividida por dois achando C. Depois eu passei para a diagonal BD, coloquei M como ponto médio, fiz ele igual a diagonal dividida por dois, achando D”.

Professor-residente: “Muito bom, agora vou tentar resolver o problema com vocês”.

(7) Busca do consenso – *Professor-residente*: “Vocês sabem o que é um paralelogramo?”

Aluna F: “É um polígono”.

Professor-residente: “Com quantos lados?”

Aluna F: “quatro lados”.

Professor-residente: “O que define esse polígono como sendo um paralelogramo?”

Aluna F: “Ele possui segmentos de reta opostos paralelos”

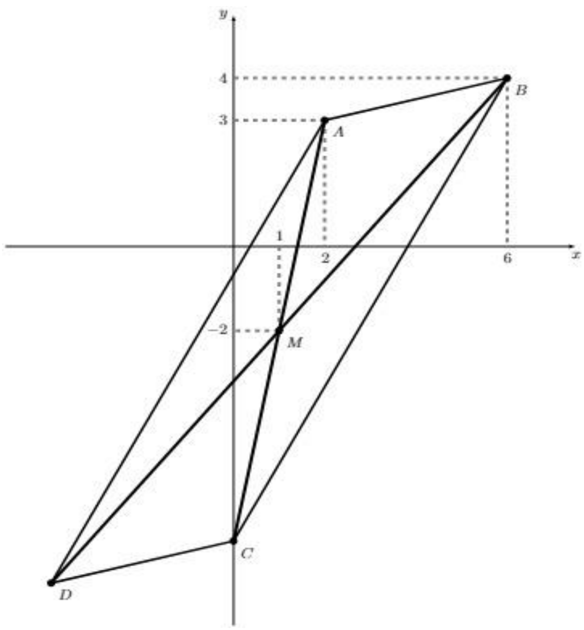
Professor-residente: “Todos concordam com o que a colega define como sendo um paralelogramo?”

Todos os alunos falaram que concordavam com a colega. É possível perceber como é interessante quando a *Aluna F* expõe seus conhecimentos matemáticos, ou seja, faz com que os outros alunos se lembrem de determinados conceitos.

Professor-residente: “Parabéns, é isso mesmo, como a gente sabe agora o que é um paralelogramo vamos desenha-lo”.

Primeiramente, deve-se desenhar no plano cartesiano o paralelogramo com as coordenadas dos pontos dados no Problema 4:

Figura 23 – Paralelogramo formado pelos pontos dados



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a figura, $M(1,-2)$ é ponto médio de AC, sendo $A(2,3)$ e $C(\mathrm{x_C},\mathrm{y_C})$.

Logo:

$$\mathrm{x_M} = \frac{2+\mathrm{x_c}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2+\mathrm{x_c}}{2} \Rightarrow 2 = 2 + \mathrm{x_c} \Rightarrow \mathrm{x_c} = 0$$

$$\mathrm{y_M} = \frac{3+\mathrm{y_c}}{2} \Rightarrow -2 = \frac{3+\mathrm{y_c}}{2} \Rightarrow -4 = 3 + \mathrm{y_c} \Rightarrow \mathrm{y_c} = -7$$

Assim, $C(0,-7)$.

$M(1,-2)$ também é o ponto médio de BD, sendo $B(6{,}4)$e $D(\mathrm{x_D},\mathrm{y_D})$.

Logo:

$$\mathrm{x_M} = \frac{6+\mathrm{x_D}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{6+\mathrm{x_D}}{2} \Rightarrow 2 = 6 + \mathrm{x_D} \Rightarrow \mathrm{x_D} = -4$$

$$\mathrm{y_M} = \frac{4+\mathrm{y_D}}{2} \Rightarrow -2 = \frac{4+\mathrm{y_D}}{2} \Rightarrow -4 = 4 + \mathrm{y_D} \Rightarrow \mathrm{y_D} = -8$$

Portanto, $D(-4,-8)$.

Concluímos que os pontos C e D possuem as seguintes coordenadas: $C(0,-7)$ e $D(-4,-8)$.

Para finalizar a aula aconteceu a formalização do conteúdo, com informações sobre as Coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta, onde tinha a sua definição e o modelo-fórmula para calcular como mostrado no Capítulo 3.

6.4 QUARTO ENCONTRO

O quarto e último encontro aconteceu no dia 11 de março de 2022, das 16h10min às 17h10min, totalizando 1 hora aula, estavam presentes dois alunos-participantes, eu e uma residente do Programa de Residência Pedagógica, para ajudar na coleta de dados da pesquisa, tirando *prints*. Os demais alunos, não participaram por motivos pessoais, tais como, trabalho, dificuldade no acesso ao Google Meet e os outros sem justificativa. O conteúdo abordado foi **Condição de alinhamento de três pontos**.

Iniciamos a aula com a aplicação do roteiro adaptado de Onuchic e Allevato (2011), com as seguintes etapas:

(2) Leitura individual do Problema 5 na Plataforma Desmos – Passei o *link* para acesso da plataforma, os alunos realizaram a leitura individual do problema.

(3) Leitura em conjunto – Como esperado, perguntei se ficou alguma dúvida em relação ao enunciado do problema. Os alunos responderam que não, assim, seguindo para a resolução.

(4) Resolução do problema – sugeri 10 minutos para a dupla resolver o problema e interagirem no grupo, para tirar as dúvidas e postar as resoluções.

Professor-residente: "Qualquer dúvida estou aqui, para ajudar vocês".

Aluno D: "Tudo bem".

Aluna C: "Certo".

Após o tempo de 10 minutos, verifiquei se haviam terminado.

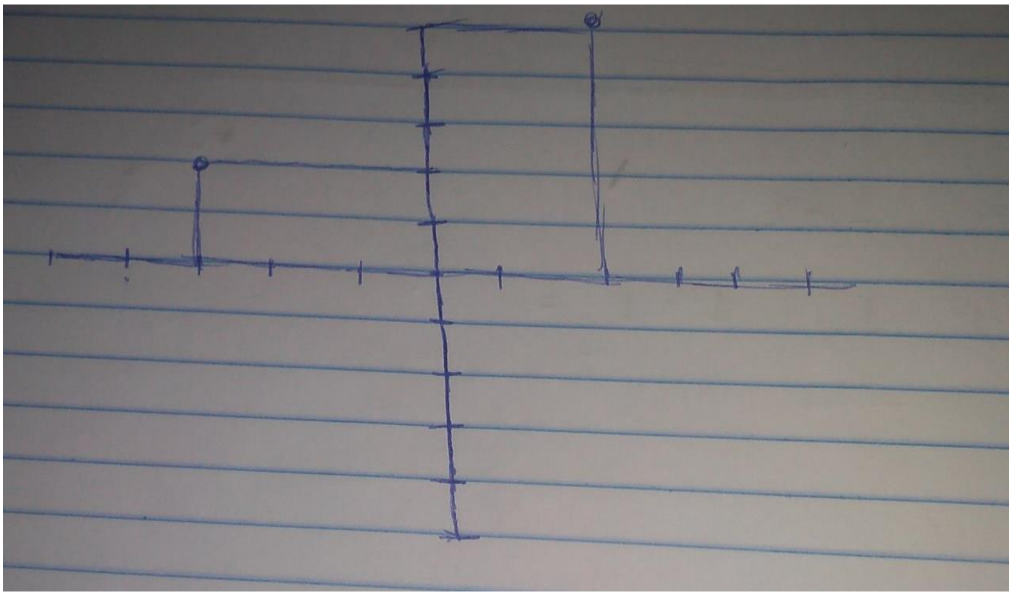
Professor-residente: "Conseguiram resolver?"

Aluno D: "A gente desenhou no plano, e achamos que ele deve seguir em linha reta".

(5) Registro das resoluções no Jamboard – Como nos outros encontros, assim que os alunos terminaram a resolução do problema. Selecionei a resolução e postei no Jamboard para que houvesse as discussões.

(6) Plenária – Os alunos seguiram o raciocínio correto mostrando que dominavam o conteúdo do primeiro encontro "Plano cartesiano", mas faltou explorar mais seus conhecimentos prévios, como podemos ver na figura 20:

Figura 24 – Resolução feita pelos alunos do Problema 5



Fonte: Dados da pesquisa

Professor-residente: "Qual foi o raciocínio de vocês?"

Aluna D: “Primeiro eu desenhei o plano cartesiano, mas não sei qual é o ponto que o herói vai cruzar no eixo das ordenas”.

Aluna C: “O herói deverá seguir em linha reta até a princesa, por que é o caminho mais perto”.

Professor-residente: “Muito bem pessoal, vocês seguiram o raciocínio correto, mas faltou determinar qual é o ponto que o herói vai ter que cruzar no rio, vamos descobrir juntos”.

(7) Busca do consenso – Na busca do consenso, desenhei o plano cartesiano e fiz algumas perguntas: “Pessoal, o Herói encontrado no ponto H representado no gráfico, se ele fizer uma curva até a Princesa, ele vai percorrer um caminho mais curto ou mais longo?”

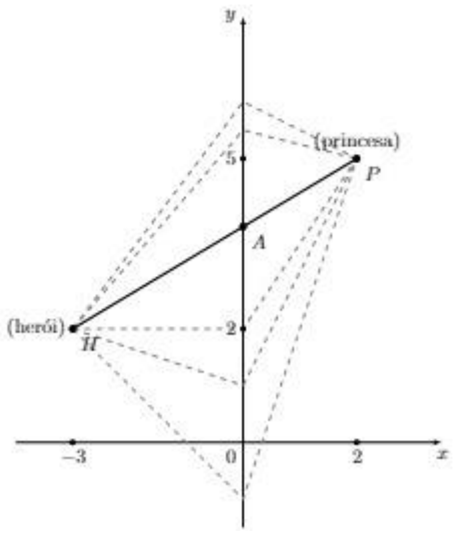
Aluna D: “Mais longo, o caminho mais curto é se ele for em linha reta”.

Professor-residente: “Isso mesmo, o que a gente pode observar é que ao traçar uma reta que contenha os três pontos consecutivos, esse será o caminho mais curto, logo os pontos devem ser colineares. Vocês sabem o que são pontos colineares?”

Aluna D: “É uma reta onde três pontos se ligam?”

Professor-residente: “Sim, pontos colineares pertencem a mesma reta. Então para descobrir em qual ponto o Herói devera cruzar para que os pontos sejam colineares, iremos utilizar a regra de Sarrus”.

Figura 25 – Segmento de reta limitado pelos pontos ***P*** e ***H***



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando a regra de Sarrus:

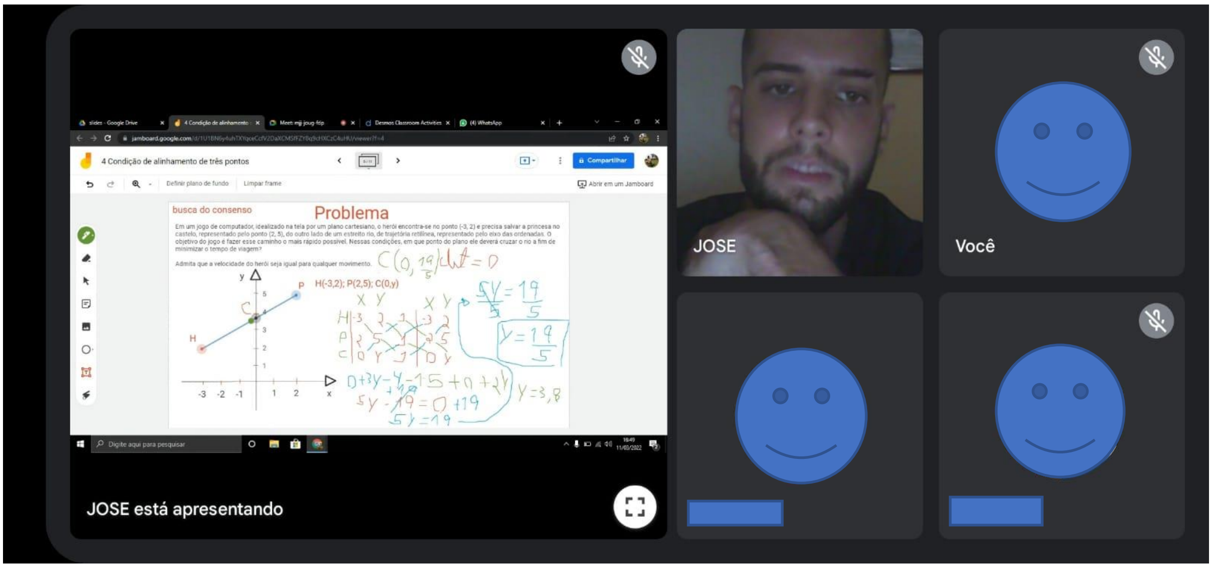
Seja $A(0, y)$ o ponto procurado sobre o rio. Há infinitos caminhos que unem H a P. O de menor tempo de viagem corresponde ao caso em que H, P e A estão alinhados, então basta montar uma matriz, com as coordenadas dos pontos e completar a última coluna da matriz com os números 1. Para que os pontos estejam alinhados o determinante precisa ser igual a zero, isto é:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & y & 1 & 0 & y \end{array}\right. = 0 \Rightarrow (-15 + 2y) - (-3y + 4) = 0 \Rightarrow \ y = \frac{19}{5}$$

Logo, o herói deve cruzar o rio no ponto $A\left(0, \frac{19}{5}\right)$

Nessa parte mostrei detalhadamente cada procedimento para calcular o determinante da matriz e descobrir o ponto procurado.

Figura 26 – Busca do consenso na plataforma Jamboard



Fonte: Dados da pesquisa

Para finalizar, a aula aconteceu a formalização do conteúdo, com informações sobre o Alinhamento de três pontos no plano, onde tinha a sua definição e o modelo-fórmula para calcular, como mostrado no Capítulo 3.

6.5 ANALISE DOS ENCONTROS

A experiência aqui relatada aconteceu remotamente em quatro encontros de uma hora cada, com alunos de 3° ano do Ensino Médio da Escola Cidadã Integral Técnica José Leite de Souza, localizada na cidade de Monteiro/PB. Antes de começar os encontros, no dia 22 de fevereiro de 2022, foram criados três grupos de WhatsApp:

- Grupo geral – Destinado para informações gerais da pesquisa e para passar o link da videochamada.
- Grupo 1 e Grupo 2 – Para discussão e resolução dos problemas passados nos encontros, onde os alunos-participantes dos grupos postam suas resoluções.

No Grupo geral, falamos a funcionalidade de cada grupo como mostrado acima, para não perdermos tempo nos encontros. Uma observação que não foi citada na descrição dos encontros, é que sempre que finalizava os encontros, passávamos dois exercícios sobre o conteúdo estudado e a formalização do conteúdo em PDF no “Grupo geral”. Para os alunos que participaram do encontro era solicitado apenas que resolvessem os dois exercícios, já os alunos que faltavam, era solicitado que fizessem a leitura do material em PDF e resolvessem os exercícios. Finalizando, lembrava-os que qualquer dúvida que houvesse eu estaria à disposição para ajudar.

No primeiro encontro, dos seis alunos envolvidos na pesquisa, participaram apenas quatro, e logo percebemos uma dificuldade desses alunos em acessar o link da videochamada, assim, notamos que a dificuldade era devido à internet e de seus aparelhos tecnológicos que não possuíam uma boa qualidade. Mas assim que conseguiram acessar a chamada, os quatro estavam escutando e visualizando bem, então continuamos com o encontro e desenvolvemos as atividades com os alunos presentes dando a assistência necessária.

Quando apresentamos o Desmos, observamos que os alunos gostaram dessa plataforma, pois ela era simples de usar e não era necessário baixar nenhum aplicativo conseguindo o acesso pelo Google. Como o primeiro encontro foi uma introdução a Geometria Analítica com o conteúdo **Plano cartesiano**, percebemos que os alunos no primeiro momento não se sentiram seguros em interagir, mas depois de transmitir a confiança de trabalhar através da Metodologia Resolução de Problemas, se sentiram mais à vontade e foram autônomos na construção do seu conhecimento, bem como efetuaram a resolução de maneira muito rápida e fizeram uma interação positiva.

No segundo encontro, a participação dos alunos foi menor, participando apenas três alunos e os demais não participaram por motivos pessoais. Então, demos continuidade ao encontro com o conteúdo **Distância entre dois pontos**. Nesse encontro, os alunos estavam interagindo mais que o primeiro, então podemos ver um pequeno avanço. Em geral, o que prejudicou a aplicação da pesquisa foi a ausência dos alunos que não estavam participando, pois, os conteúdos trabalhados nos encontros eram uma sequência, ou seja, tinham que dominar o conteúdo anterior para poder prosseguir para o próximo. Marques, Carvalho e Esquincalha (2021), falam sobre os problemas enfrentados no Ensino Remoto,

> Vale destacar também os problemas técnicos (conexão com a internet, problemas com computador ou celular e demais recursos), que podem atrapalhar tanto as práticas de ensino, quanto o aprendizado. Esses fatores têm evidenciado a importância da formação dos professores com e para o uso de tecnologias digitais desde a formação inicial que poderiam diminuir os impactos e as dificuldades sofridas, o que fez com que muitos professores recorressem a cursos de formação continuada (MARQUES; CARVALHO; ESQUINCALHA, 2021, p.38).

Logo, percebemos que não é simples trabalhar no Ensino Remoto, existem vários fatores que prejudicam o desenvolvimento da aula. Acrescentando o que os autores falam, a participação dos alunos depende também de suas condições, pois, mesmo o professor estando preparado para ensinar no Ensino Remoto, de nada adiantara se os alunos não estiverem com equipamentos adequados.

O encontro que houve uma participação significativa dos alunos foi o terceiro, participaram cinco alunos, e os mesmos estavam empolgados para começar. Isso foi um ponto positivo para a pesquisa, pois significava que mesmo com a falta de equipamentos e internet de qualidade, os alunos estavam querendo aprender. Após desenvolver a aula com o conteúdo **Ponto médio de um segmento** através da Metodologia Resolução de Problemas e o auxílio das Tecnologias Digitais, observamos que os alunos se ajudaram através dos grupos do WhatsApp, com uma interação muito boa quando seus colegas sentiram dificuldades para resolver o Problema. Um dos alunos-participantes mostrou conhecimentos prévios sobre as figuras geométricas enriquecendo o encontro, assim, na busca do consenso, ficou claro aquele conteúdo matemático.

No quarto e último encontro, a participação dos alunos caiu bastante, pois participaram apenas dois, e os demais não participaram por motivos pessoais, tais como trabalho, dificuldade no acesso ao Google Meet e sem justificativa. Os dois alunos que estavam participando fizeram dupla e aplicamos a Metodologia Resolução de Problemas com o auxílio das Tecnologias Digitais, o conteúdo ensinado foi **Condição de alinhamento de três pontos**. Embora os alunos dominassem os conteúdos passados nos outros encontros, eles não conseguiram resolver o

Problema, havendo bastante dificuldade, mas quando se trabalha com a Resolução de Problemas, não é necessário acertar a resolução, o importante é tentar e mostrar a tentativa para o professor conseguir desenvolver juntamente com os alunos a resolução, ou seja, com o decorrer do encontro os alunos conseguiram compreender e aprenderam.

Por fator do tempo e as dificuldades da grande maioria dos alunos em possuírem bons equipamentos e uma internet de qualidade, fez com que não aplicássemos o último conteúdo, que seria Perímetro e Área de figuras geométricas.

Após a aplicação dos encontros, no Grupo geral do WhatsApp agradecemos a participação de todos os envolvidos, primeiramente aos alunos que em meio as dificuldades do Ensino Remoto não desistiram de participar dos encontros, ao preceptor da Residência Pedagógica que disponibilizou das aulas com os seus alunos, também agradecemos a colega do Programa Residência Pedagógica que ajudou com os registros de *prints*.

Para finalizar a análise dos encontros, é importante que tenhamos a opinião dos participantes, então fizemos a aplicação de um questionário após os encontros remotos, onde todos os alunos responderam. A seguir, temos o questionário com as questões e respostas dos participantes:

6.5.1 Questionário

Questão 1. Você considera que a Matemática é importante? Por quê?

Aluno A: “Sim, considero. Em tudo se tem matemática, por que para fabricação de qualquer coisa se precisa calcular para ter um bom resultado”.

Aluna B: “Sim, porque ela está sempre presente no nosso dia a dia”.

Aluna C: “Sim, pois ela ajuda a desenvolver o raciocínio lógico”.

Aluno D: “Sim, considero. A matemática está em todos os lugares, sendo assim, uma matéria de grande importância em nossas vidas. Creio que se não fosse a matemática, não teríamos as coisas que temos hoje”.

Aluna E: “Sim, muito! pois a matemática desenvolve o nosso raciocínio, evolui nossa mente para ter respostas para alguns problemas, sem contar que a matemática está em todos os cantos! hoje em dia matemática é mais que preciso!”.

Aluna F: “Porque tudo hoje em dia envolve a matemática, também desenvolve o raciocínio lógico, a criatividade, a capacidade de investigação e solução de problemas, e também em algumas áreas profissionais exige ela, por exemplo: a computação; ecologia e ciências contábeis, eles utilizam a matemática como ferramenta”.

Questão 2. Os encontros realizados com o professor-residente contribuíram na forma como você aprende a matemática? Conte um pouco de como foi essa experiência.

Aluno A: “Contribuíram sim, e muito por sinal, foram aulas proveitosas, com um jeito antigo, mas atualizado, que tenho certeza que contribuíram de mais para gente”.

Aluna B: “Foi uma boa experiência”.

Aluna C: “Sim, sempre tive muita dificuldade em matemática, porém a metodologia de Resolução de Problemas e as atividades me ajudaram bastante”.

Aluno D: “Foi interessante, eu particularmente tenho dificuldade em aprender pelas aulas online. O professor foi muito prestativo e explicou muito bem, posso finalmente dizer que aprendi o plano cartesiano”.

Aluna E: “Sim! a forma que o professor-residente explicava era bem explicativa e clara, em todos os encontros consegui compreender as resoluções passadas por ele! Gostei de todas as aulas!”.

Aluna F: “Sim, muito. Eu não era tão boa em matemática e as vezes me perdia nos cálculos e nas fórmulas, e agora estou conseguindo resolver depois dos encontros e explicações”.

Questão 3. Você gostou da metodologia e das ferramentas digitais que utilizei para resolver problemas? Se gostou, conte um pouco sobre os pontos positivos.

Aluno A: “Sim, utilizado a parte digital sempre nos chamará mais atenção, do que só trabalhar com o caderno, e com certeza com os métodos usados conseguimos aprender.”

Aluna B: “Sim”.

Aluna C: “Sim, as atividades em dupla foram boas para os alunos se ajudarem, a explicação também foi bem feita”.

Aluno D: “Sim, gostei das atividades que eram passadas pelo link, achei mais vantajoso em comparação a copiar do quadro escolar”.

Aluna E: “Sim! A metodologia usada era bem legal, fora que a forma do método era bem explicativa, até chegarmos as conclusões dos cálculos!”

Aluna F: “Sim, gostei. Conheci a plataforma Desmos, e também as atividades e questões resolvem aqui no Aplicativo, o caderno é opcional”.

Analisando as respostas dos alunos, percebemos as contribuições que esta pesquisa propulsionou, ao trabalhar com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e as Tecnologias Digitais, amenizou as dificuldades impostas pela pandemia no Ensino Remoto. Vale ressaltar que no decorrer dos encontros não houve uma participação de muitos alunos, mas todos os que participaram estiveram presentes em pelo menos um dos encontros, com a oportunidade de trabalhar através de uma metodologia que propulsionou a liberdade de desenvolver seu conhecimento matemático.

Sabemos que um dos propósitos da educação é que a pessoa que dela se beneficia se aproprie dos elementos que serão úteis como ferramenta para a aquisição de informação e conhecimento, que poderá utilizar para resolver as situações que enfrentará em sua vida cotidiana, em sua promoção intelectual e na atividade social. Então, esperamos que os alunos levem essa experiência durante sua jornada de estudos, e que pratiquem com seus colegas o trabalho coletivo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar quais as contribuições e as dificuldades enfrentadas ao ensinar a Geometria Analítica através da Resolução de Problemas utilizando algumas ferramentas digitais no Ensino Remoto. A partir dos resultados obtidos, esperávamos que esta pesquisa proporcionasse aos alunos, uma aprendizagem melhor no Ensino Remoto, onde os mesmos fossem autônomos na construção dos conceitos da Geometria Analítica utilizando ferramentas digitais para amenizar os danos causados pela pandemia da Covid-19. Assim, por meio das descrições dos encontros, do questionário com as falas dos alunos-participantes, e da análise desses dados obtidos, podemos observar que o nosso objetivo foi alcançado, como apresentamos a seguir.

Durante o planejamento dos encontros, nos preocupamos em selecionar problemas que motivassem os alunos a participarem dos encontros remotos. A aplicação desses problemas aconteceu em quatro encontros com a metodologia de Resolução de Problema, segundo Onuchic e Allevato (2011), a qual fizemos algumas adaptações para ser aplicado no Ensino Remoto, proporcionando aos alunos-participantes a capacidade de serem ativos nos encontros e construírem afinidade com os conceitos da Geometria Analítica em meio as dificuldades impostas pela pandemia da Covid-19.

O uso das ferramentas tecnológicas como o aplicativo WhatsApp e as plataformas Desmos, Jamboard e o Google Meet nos encontros realizados, foram a base da pesquisa, pois não teria sido possível realizar nenhum encontro presencial, já que tudo estava acontecendo remotamente. Como no ensino presencial, o Ensino Remoto precisa da assistência do professor e essas ferramentas tecnológicas ajudaram na aproximação do professor ás necessidades dos alunos. Assim, a tecnologia fez parte em todo processo deste trabalho, facilitando toda a aplicação e análise das atividades, além de ajudar os alunos a entenderem melhor os conceitos matemáticos.

As dificuldades que os estudantes possuíam em relação á matemática foram desconstruídas, quando pudemos mostrar com o auxílio das Tecnologias Digitais uma abordagem significativa da Geometria Analítica realizando conexões entre a parte algébrica e geométrica dos conceitos estudados, colocando o aluno como participante ativo em todo o processo de aprendizagem, assim, percebemos que trabalhar dando significado a matemática foi importante, pois os alunos poderão levar os conhecimentos adquiridos nos encontros em futuras experiências.

O Programa Residência Pedagógica foi de grande importância no aprimoramento profissional, graças à possibilidade de um contato direto e detalhado do futuro ambiente de trabalho. Nesse programa conhecer e participar de palestras com grandes nomes da Educação Matemática, inclusive com uma das autoras mais citadas neste trabalho, que fez contribuições grandiosas a respeito da metodologia Resolução de Problemas, a Prof. Dr. Lourdes de La Rosa Onuchic, foi de grande significado, pois proporcionou um olhar crítico ao Ensino de Matemática.

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi muito importante para formação como futuro professor de matemática, pois pudemos analisar como estava a prática em sala de aula e se estava surtindo resultados positivos para com os alunos, além de poder ler artigos relacionados a Resolução de Problemas que trouxesse ainda mais contribuições sobre essa metodologia de ensino.

Esta pesquisa poderá ser aprimorada futuramente no mestrado, pois por fator do tempo e as dificuldades da grande maioria dos alunos em possuírem bons equipamentos e uma internet de qualidade, prejudicou em algumas partes a aplicação da pesquisa realizada de forma totalmente online. Fazendo com que não aplicássemos o último conteúdo, que seria Perímetro e Área de figuras geométricas.

REFERÊNCIA

ALLEVATO, N. S. G. ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Resolução de Problemas: Teoria e prática**. 2ª ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Aprendizagem discente através da Resolução de Problemas em uma Escola Comunitária Rural. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, p. 1-24, 2020. Disponível em: https://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/404/221. Acesso em: 30 set. 2021.

ANTUNES, G; CAMBRAINHA, M. **Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem**. In: IV Simpósio Nacional da Formação de Professores. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020. Disponível em: https://anpmat.org.br/wpcontent/uploads/2020/07/e-book_Desmos_final.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.

DANTE, L. R. Matemática: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: **Ática**, 2016. 3 v.

FARIAS, S. A. D.; RÊGO, R. G. Matemática e Educação à Distância: Resolução de Problemas no Ensino de Geometria com o uso do Geogebra. João Pessoa: **Editora Universitária da UFPB**, 2016.

IEZZI, G. *et al.* Matemática: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: **Saraiva**, 2016. 3 v.

LACERDA, A. C. T. **Aplicações da Geometria Analítica na Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal Da Paraíba. João Pessoa. Paraíba, p.97. 2015. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9466/2/arquivototal.pdf. Acesso em: 09 maio. 2022.

LEIVAS, J. C. P. Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma análise a priori de conhecimentos de um grupo de pós-graduandos. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n. 70, p. 17-30, 2021. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/2052/1935. Acesso em: 24 set. 2021.

MARQUES, P. P. M. R.; CARVALHO, T. R. S.; ESQUINCALHA, A. C. Impactos da Pandemia de COVID-19 na Rotina Profissional de Professores que Ensinam Matemática: Alguns Aspectos de Precarização do Trabalho Docente. **RIPEM - Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 11, n.3, p. 19-40, 2021. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2565/1944. Acesso em: 24 set. 2021.

MASTROIANNI, M. T. M. R.; OLIVEIRA, G. P. Resolução de Problemas nas Aulas de Matemática dos Anos Iniciais: Um Estudo Junto às Professoras Polivalentes. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 16, n. 22, p. 232-251, 2019. Disponível em:

https://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/119/pdf. Acesso em: 30 set. 2021.

NASCIMENTO, E. M. **Integração entre Álgebra e Geometria no Ensino da Matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal De Viçosa, Minas Gerais. p.127. 2017. Disponível em: https://locus.ufv.br//handle/123456789/11710. Acesso em: 09 maio. 2022.

NASCIMENTO, F. J.; CASTRO, E. R.; LIMA, I. P. O Uso do *Software* Geogebra no Ensino de Geometria Analítica: Experiências Vivenciadas no Contexto Escolar. **Educação Matemática em Revista**, [s.l], p. 40-47, 2015. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/458/pdf. Acesso em: 24 set. 2021.

NETO, F. F. S. **Aplicando as propriedades dos vetores a problemas da geometria clássica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal Da Paraíba. João Pessoa. Paraíba, p.80. 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7528/2/arquivototal.pdf. Acesso em: 09 maio. 2022.

OLIVEIRA, G. P.; PEREIRA, A. C. C. A aliança entre Tecnologias do passado e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação via Investigação Científica. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo SP, v. 18, p. 1-14, 2021. Disponível em: https://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/523/264. Acesso em: 30 set. 2021.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 212-231.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N.S. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, 2013. Disponível em: http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3509/2294. Acesso em: 03 nov. 2021.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap.12, p.199-218.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42. (Yearbook)

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1989, p. 1-22.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. New York: Longman, 2001. 478p.

VIGIL, E. C. Geometría analítica. San Juan Tlihuaca: **Grupo Editorial Patria**, 2016. 233 p.