



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA

INTRODUÇÃO À EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA E AO CONTROLE  
EXATO

CAMPINA GRANDE  
2022

**JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA**

**INTRODUÇÃO À EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA E AO CONTROLE  
EXATO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática aplicada

**Orientador:** Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

**CAMPINA GRANDE**

**2022**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

B574i Bezerra, Jefferson Henriques.  
Introdução à epidemiologia matemática e ao controle exato  
[manuscrito] / Jefferson Henriques Bezerra. - 2022.  
77 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo ,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Modelo epidemiológico. 2. Controle ótimo. 3. Modelo estruturado por faixa etária. I. Título

21. ed. CDD 614.4

**JEFFERSON HENRIQUES BEZERRA**

**INTRODUÇÃO À EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA E AO CONTROLE  
EXATO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática aplicada.

Aprovado em: *11/07/2022*

**BANCA EXAMINADORA**

*Aldo trajano lourêdo*

---

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

---

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

*Roberto de Almeida Capistrano Filho*

---

Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

À minha mãe, pelo incentivo,  
companheirismo e força, dedico.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus que me deu o dom da vida e por me abençoar todos os dias com o seu amor infinito.

A minha amada mãe, Maria do Socorro Otaviano Bezerra, por ser minha base, por todo o amor, pelos ensinamentos, pelas lições de vida e pelas palavras sinceras e sábias. Agradeço sua paciência e compreensão referente à minha dedicação exclusiva aos estudos, me possibilitando continuar firme e forte nessa jornada acadêmica.

A minha irmã, Maria Jéssica, pelo apoio e ensinamento repassado, os quais me ajudaram a chegar nessa etapa da minha vida.

Ao meu professor e orientador, Aldo Trajano Lourêdo, pela confiança em mim depositada para realização desse e outros projetos, bom como pelos seus ensinamentos, companheirismo, paciência, dedicação e excelente orientação.

A todos os professores da minha instituição de origem, assim como todos os outros que tive a honra de ser aluno.

Ao Prof. Severino Horacio da Silva, pelos seus conhecimentos repassados acerca da epidemiologia matemática, assim como sua paciência e confiança transmitida.

Ao Prof. Adriano Albuquerque Batista, pela ajuda com respeito à linguagem de programação Python.

A todos os amigos que fiz durante minha graduação, especialmente à Caio Vinícius, Daniel Martins e Matheus Marques pelo apoio, amizade sincera, conhecimento repassado e risadas. Todos foram indispensáveis para torna esta jornada mais satisfatória.

Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora, Prof. Gustavo da Silva Araújo e Prof. Roberto de Almeida Capistrano Filho, agradeço a leitura e as contribuições ao meu trabalho.

Ao CNPq e a CAPES, pelo apoio financeiro.

“A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.”

Rodney Carlos Bassanezi

## RESUMO

A busca por métodos que viabilizem melhores conclusões sobre os casos referentes à uma dada enfermidade torna-se trivial para sociedade. A análise acerca do comportamento dos envolvidos permite não só obtermos resultados sobre o atual cenário, mas também planejarmos estratégias que corroborem para o controle ou erradicação. Nesta perspectiva, realizamos um estudo introdutório do modelo McKendrick-Von Foerster e do Modelo SIR estruturado por faixa etária, com foco no uso do método das características e método computacional para obtenção das soluções, assim como o comportamento das soluções de equilíbrio. Ademais, estudamos um problema de controle ótimo associado ao modelo McKendrick quanto incluímos uma função de influxo. Para tanto, propusemos uma abordagem didática acerca do décimo segundo capítulo do livro “An Introduction to Mathematical Epidemiology” de Maia Martcheva e do quarto capítulo do livro “An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics” de Sebastian Anita, Viorel Arnăutu e Vincenzo Capasso.

**Palavras-chave:** Modelo epidemiológico. Modelo estruturado por faixa etária. Controle ótimo.

## ABSTRACT

The search for methods that enable better conclusions about cases referring to a given disease to become trivial for society. The analysis of the behavior of those involved allows us not only to obtain results on the current scenario, but it also to plan strategies that corroborate for control or eradication. In this perspective, we carried out an introductory study of the McKendrick-Von Foerster model and the SIR Model structured by age group, focusing on the use of the characteristics method and computational method to obtain solutions, as well as the behavior of equilibrium solutions. Furthermore, we study an optimal control problem associated with the McKendrick model when we include an inflow function. Therefore, we proposed a didactic approach to the twelfth chapter of the book “An Introduction to Mathematical Epidemiology” by Maia Martcheva and the fourth chapter of the book “An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics” by Sebastian Anita, Viorel Arnăutu and Vincenzo Capasso.

**Keywords:** Epidemiological model. Model structured by age. Optimal control.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1.	Função $u(a, t)$ obtida pelo método das características. . . . .	22
Figura 2.2.	Modelo SIR . . . . .	31
Figura 5.1.	Discretização do domínio $\mathcal{D}$ . . . . .	65
Figura 5.2.	Taxas . . . . .	67
Figura 5.3.	Densidade . . . . .	68
Figura 5.4.	Estado adjunto $y$ . . . . .	70
Figura 5.5.	Controle ótimo . . . . .	71
Figura 5.6.	Controle ótimo em $t = 0.4$ . . . . .	71

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\frac{\partial y}{\partial \sigma}$	Derivada parcial da função $y$ com relação à variável $\sigma$
$Dy$	Derivada direcional da função $y$ na direção do vetor $(1, 1)$
$f^+$	Parte positiva da função $f$
$L^p(\Omega)$ , $1 \leq p < +\infty$	Espaço das funções $p$ - somáveis em $\Omega$
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções essencialmente limitadas em $\Omega$
$L^1_{loc}([0, A) \times [0, T])$	Espaço das funções localmente $p$ - somáveis de $[0, A) \times [0, T]$ em $\mathbb{R}$ pertencentes ao $L^1((0, \tilde{A}) \times (0, T))$ , para qualquer $\tilde{A} \in (0, A)$
$N_K(u)$	Cone normal a $K$ em $u$

## LISTA DE ABREVIACOES E SIGLAS

CAPES	Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior
CNPq	Conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico
EDO	Equações diferenciais ordinárias
EDP	Equações diferenciais parciais
Modelo SIR	Modelo compartimental que categoriza os envolvidos entre suscetíveis, infectados e recuperados
PCO	Problema de controle timo
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
q.s	Quase sempre

## SUMÁRIO

	Página
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> <span style="float: right;"><b>12</b></span>
<b>2</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO ESTRUTURADO POR FAIXA ETÁ- RIA</b> <span style="float: right;"><b>13</b></span>
<b>2.1</b>	<b>Modelo Linear de População Estruturada por Idade . . . . .</b> <span style="float: right;"><b>13</b></span>
2.1.1	Construção do modelo de faixa etária de McKendrick . . . . . <span style="float: right;">13</span>
2.1.2	Reformulação do modelo de Mckendrick através do método das características <span style="float: right;">18</span>
2.1.3	Solução separável: Comportamento assintótico . . . . . <span style="float: right;">23</span>
<b>2.2</b>	<b>Modelo epidemiológico SIS estruturado por faixa etária . . . . .</b> <span style="float: right;"><b>29</b></span>
2.2.1	Introdução ao modelo epidêmico SIR estruturado por idade . . . . . <span style="float: right;">29</span>
2.2.2	Equilíbrio e número de reprodução . . . . . <span style="float: right;">32</span>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DA SOLUÇÃO DE EQUILÍBRIO LIVRE DA DOENÇA</b> <span style="float: right;"><b>38</b></span>
<b>4</b>	<b>PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO APLICADO AO MO- DELO DE MCKENDRICK COM INFUSÃO</b> <span style="float: right;"><b>47</b></span>
4.1	Problema de Controle Ótimo . . . . . <span style="float: right;">49</span>
<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA</b> <span style="float: right;"><b>64</b></span>
5.1	Método numérico para o modelo McKendrick–von Foerster . . . <span style="float: right;">64</span>
5.2	Método numérico para o modelo estruturado por idade . . . . . <span style="float: right;">68</span>
5.3	Método numérico para o controle ótimo . . . . . <span style="float: right;">69</span>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> <span style="float: right;"><b>72</b></span>
	<b>REFERÊNCIAS</b> <span style="float: right;"><b>73</b></span>
	<b>APÊNDICE</b> <span style="float: right;"><b>74</b></span>

## 1 INTRODUÇÃO

Estudos epidemiológicos através de modelos matemáticos possibilitam não apenas entender o desenvolvimento de epidemias, mas também buscar medidas eficientes para a prevenção ou mesmo erradicação de determinada enfermidade. Diante disso, faz-se necessário o estudo e aplicação desta área, considerando que já surgiram doenças significantes, por exemplo, a Peste Bubônica no século XIV, a Varíola, a Cólera em 1817, a gripe Espanhola(H1N1) em 1918, a Gripe Suína em 2009 e a Covid-19 em 2019.

Atualmente na literatura há diversos modelos para estudo do âmbito em questão, entre eles, o modelo elaborado por Kermack e McKendrick conhecido por SIR, que recebe este nome em decorrência da classificação dos indivíduos em três estados: suscetíveis, infectados e recuperados e, o modelo estruturado por idade McKendrick–von Foerster.

Assim como o modelo McKendrick–von Foerster, o SIR também possibilita fazermos o estudo por faixa etária. A idade é, possivelmente, um dos fatores mais relevantes para distinguirmos os indivíduos em uma população que precisa ser observada para análise de uma doença, tal afirmação está relacionada ao fato que em muitas doenças o número de casos diferencia notavelmente em relação à idade.

Este texto é o resultado de parte de um trabalho desenvolvido por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), o qual viabiliza aos alunos de graduação a oportunidade de ampliar a formação acadêmica mediante a participação em projetos de pesquisa. Assim, o projeto intitulado “Introdução à epidemiologia”, teve como objetivo central estudar o modelo estruturado por faixa etária de McKendrick–von Foerster e o modelo SIR. Para tanto, utilizamos, principalmente, o livro intitulado “An Introduction to Mathematical Epidemiology” de Maia Martcheva.

Em consonância, o referente trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 aborda a construção dos modelos já citados, seguido da sua solução analítica, assim como o comportamento das soluções de equilíbrio, o qual está descrito no capítulo 3, no capítulo 4 discutimos um problema de controle ótimo relacionado ao modelo de McKendrick quando consideramos um influxo na dinâmica e, por fim, no capítulo 5 está a aplicação do método numérico denominado diferenças finitas para obtenção da solução numérica.

## 2 MODELO MATEMÁTICO ESTRUTURADO POR FAIXA ETÁRIA

Nesta seção estudaremos os modelos matemáticos estruturados por faixa etária e suas principais propriedades. Para isso, seguiremos, em particular, as referências [11] e [2].

### 2.1 Modelo Linear de População Estruturada por Idade

Os modelos aqui estudados são constituídos com base em duas variáveis independentes, a saber, o tempo  $t$  e a idade  $a$ . Inicialmente destacamos que todas as derivadas parciais envolvidas nos modelos que estudamos são de primeiro grau, conseqüentemente, estamos diante de equações diferenciais parciais lineares.

#### 2.1.1 Construção do modelo de faixa etária de McKendrick

Nosso objetivo inicial é compreender a construção da equação de McKendrick, também conhecida por Equação McKendrick–von Foerster, sendo esta composta por duas variáveis independentes, a saber, idade e tempo.

Denotemos por  $a$  e  $t$ , respectivamente, a idade e o tempo, desta forma, consideramos a função  $u(a, t)$  como sendo a densidade de indivíduos com idade  $a$  no tempo  $t$ . Note que nos é conveniente considerarmos  $a \in [0, A]$  e  $t \geq 0$ , onde  $A$  representa a idade máxima, ou seja, a longevidade. Quando  $A = \infty$ , então assumimos  $u(a, t) = 0$  para valores suficientemente grandes de  $a$ .

Se  $\Delta a$  representa um pequeno incremento, então o número de indivíduos com idade entre  $a$  e  $a + \Delta a$  no tempo  $t$  é aproximadamente  $u(a, t)\Delta a$ , de tal forma que no intervalo  $[a_1, a_2]$  teremos

$$\int_{a_1}^{a_2} u(a, t) da,$$

que representa o número total de indivíduos com idade compreendida no intervalo  $[a_1, a_2]$  no tempo  $t$ . De forma geral, podemos calcular o número total de indivíduos de uma população por

$$P(t) = \int_0^A u(a, t) da.$$

Se analisarmos um grupo de indivíduos com a característica de suas idades pertencerem ao intervalo  $\Delta a^1$ , segue que a cardinalidade deste conjunto também será calculado por  $u(a, t)da$ . Se houver uma pequena alteração  $\Delta t$  no tempo, então a idade, assim como o tempo, terão um acréscimo de  $\Delta t$ , ou seja,  $a$  torna-se  $a + \Delta t$  e  $t$  torna-se  $t + \Delta t$ , além

---

<sup>1</sup>Em estatística dizemos que este grupo/conjunto é um Coorte, pois é composto de pessoas que compartilham uma mesma característica

disso,  $u(a + \Delta t, t + \Delta t)\Delta a$  representa o número de indivíduos após o tempo transcorrido. Note que continuamos com o mesmo coorte, porém, podemos ter menos indivíduos que o anterior, visto que eventualmente algum membro pode falecer no decorrer do tempo, consideramos tal exclusão como sendo a única forma de um membro ser removido do grupo.

Denotemos por  $\mu(a)$  a taxa de mortalidade per capita referente à idade  $a$ , com isso, o número de indivíduos que faleceram com idade entre  $a$  e  $a + \Delta a$  no tempo  $t$  é  $\mu(a)u(a, t)\Delta a$ , conseqüentemente, no decorrer do tempo  $\Delta t$ ,  $\mu(a)u(a, t)\Delta a\Delta t$ . Com base nas conclusões anteriores, podemos escrever a **lei de equilíbrio** da seguinte forma

$$u(a + \Delta t, t + \Delta t)\Delta a - u(a, t)\Delta a = -\mu(a)\Delta t \cdot u(a, t)\Delta a.$$

Em ambos os membros, façamos a divisão por  $\Delta a\Delta t$

$$\begin{aligned} \frac{u(a + \Delta t, t + \Delta t)\Delta a - u(a, t)\Delta a}{\Delta a\Delta t} &= -\frac{\mu(a)\Delta t \cdot u(a, t)\Delta a}{\Delta a\Delta t} \\ \Rightarrow \frac{u(a + \Delta t, t + \Delta t) - u(a, t)}{\Delta t} &= -\mu(a)u(a, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Com respeito ao lado esquerdo de (2.1), somemos e subtraímos  $u(a, t + \Delta t)$  ao numerador

$$\frac{u(a + \Delta t, t + \Delta t) - u(a, t + \Delta t) + u(a, t + \Delta t) - u(a, t)}{\Delta t},$$

daí, desde que a função  $u$  seja continua com respeito às duas variáveis, então podemos calcular o limite para  $\Delta t \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(a + \Delta t, t + \Delta t) - u(a, t + \Delta t) + u(a, t + \Delta t) - u(a, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(a + \Delta t, t + \Delta t) - u(a, t + \Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(a, t + \Delta t) - u(a, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial u(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial u(a, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

O mesmo limite em questão quando aplicado à função do lado direito de (2.1) resulta em  $-\mu(a)u(a, t)$ . Portanto, chegamos na seguinte igualdade

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial u(a, t)}{\partial t} = -\mu(a)u(a, t), \quad (2.2)$$

que é a equação de **McKendrick** que nos engajamos em compreender.

Neste contexto, uma importante probabilidade é a de sobrevivência, a qual denotaremos por  $\pi(a)$ , que representa a probabilidade de sobreviver até a idade  $a$ . O primeiro coorte que consideraremos é o de recém-nascidos, denotemos por  $P$  o número de indiví-

duos deste. Desta forma, o número de sobrevivente do grupo com idade  $a$  é calculado por  $\pi(a)P$  e, para uma pequena variação  $\Delta a$ ,  $\pi(a + \Delta a)P$  representa o número de indivíduos vivos com idade  $a + \Delta a$ . Com isso,  $\pi(a + \Delta a)P - \pi(a)P$  nos fornece o total de indivíduos que vieram a óbito no intervalo de idade  $\Delta a$ . Consequentemente,

$$\pi(a + \Delta a)P - \pi(a)P = -\mu(a)\pi(a)P\Delta a.$$

Sendo  $P \neq 0$ , assim como  $\Delta a \neq 0$ , então

$$\frac{\pi(a + \Delta a) - \pi(a)}{\Delta a} = -\mu(a)\pi(a).$$

Se tomarmos o limite com  $\Delta a \rightarrow 0$  e considerarmos  $\pi(a)$  uma função diferenciável, vem

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\pi(a + \Delta a) - \pi(a)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\mu(a)\pi(a),$$

ou seja, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\pi'(a) = -\mu(a)\pi(a), \quad (2.3)$$

dividindo ambos os lados por  $\pi(a)$ , resulta

$$\frac{\pi'(a)}{\pi(a)} = -\mu(a) \Rightarrow \frac{d \ln(\pi(a))}{da} = -\mu(a).$$

Integrando em ambos os lados de 0 até  $a$ ,

$$\ln(\pi(a)) = \int_0^a -\mu(\sigma) d\sigma + C_1.$$

Por fim, aplicando a exponencial, obtemos

$$\pi(a) = e^{\int_0^a -\mu(\sigma) d\sigma + C_1} = e^{\int_0^a -\mu(\sigma) d\sigma} \cdot e^{C_1}.$$

Com isso,

$$\pi(a) = C e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma}$$

é a solução geral da equação (2.3). Note que, pela essência de  $\pi(a)$ , é conveniente considerarmos  $\pi(0) = 1$ . Desta forma, conseguimos resolver o problema de valor inicial gerado. Para isso, na igualdade anterior consideremos  $a = 0$

$$\pi(0) = C e^{-\int_0^0 \mu(\sigma) d\sigma} = C e^0 = C \cdot 1 = C.$$

Mas  $\pi(0) = 1$ , logo,  $C = 1$  e a solução condicionada à  $\pi(0) = 1$  é

$$\pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma}. \quad (2.4)$$

Com respeito à probabilidade de sobrevivência, assumimos que  $\pi(a_1)$  é independente de  $\pi(a_2)$  para  $a_1 \neq a_2$ , ou seja, a probabilidade de sobrevivência com idade  $a_1$  independe da probabilidade de sobrevivência com idade  $a_2$ .

Considerando  $a_2 > a_1$ . Note que

$$\pi(a_1) = e^{-\int_0^{a_1} \mu(a) da} \quad (2.5)$$

e

$$\pi(a_2) = e^{-\int_0^{a_2} \mu(a) da}.$$

Mas  $a_2 > a_1$ , logo,  $[0, a_2] = [0, a_1] \cup [a_1, a_2]$ , com isso, pelas propriedades de integrais,

$$\pi(a_2) = e^{-(\int_0^{a_1} \mu(a) da + \int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da)} = e^{-\int_0^{a_1} \mu(a) da} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da},$$

Por conseguinte, de (2.5)

$$\pi(a_2) = \pi(a_1) e^{-\int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da}.$$

Agora, multiplicando por  $e^{\int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da}$  e dividindo por  $\pi(a_2)$  em ambos os lados, obtemos

$$e^{\int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da} = \frac{\pi(a_1)}{\pi(a_2)}, \quad (2.6)$$

considerando ln em ambos os membros de (2.6), resulta em

$$\int_{a_1}^{a_2} \mu(a) da = \ln \left( \frac{\pi(a_1)}{\pi(a_2)} \right),$$

pela aproximação descrita em [1],

$$\mu(a_1) = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \left( \frac{\pi(a_1)}{\pi(a_2)} \right). \quad (2.7)$$

**Observação 2.1.** Se  $A < \infty$ , como  $\pi(a)$  descreve a probabilidade de sobrevivência até a idade  $a$ , então nos é conveniente que

$$\lim_{a \rightarrow A} \pi(a) = 0.$$

Isso significa que não haverá sobreviventes na idade máxima. Diante disso, a partir de

(2.4), ou seja,

$$\pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma},$$

para  $a \rightarrow A$

$$\lim_{a \rightarrow A} e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} = 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow A} -\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma = 0 \Rightarrow e^{-\lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} = 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma = \infty.$$

Pela aproximação (2.7), para  $a_1 < a_2 < A$ , temos que  $\mu(a_1)$  é um valor finito, isto implica que

$$\lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma = \infty$$

desde que

$$\lim_{a \rightarrow A} \mu(a) = \infty.$$

Com respeito à equação (2.2), temos que ela é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem definida no domínio

$$\mathcal{D} = \{(a, t) : a \geq 0, t \geq 0\},$$

ou seja, no primeiro quadrante do plano  $at$ . Para complementarmos a equação (2.2) precisamos de condições de fronteira. Em nossa realidade, precisamos da função densidade no tempo  $t = 0$ , qual seja

$$u(a, 0) = u_0(a),$$

onde  $u_0(a)$  é uma função dada conhecida por **densidade populacional inicial**.

Sendo  $u_0(a) \geq 0$ , então

$$P_0 = \int_0^A u_0(a) da < \infty \quad (2.8)$$

onde  $P_0$  representa o tamanho total da população inicial. Além disso, consideremos  $u(0, t)$ , que denota o número de nascidos no tempo  $t$ . Desta forma, para modelar o processo de nascimento, introduzimos a **taxa de natalidade per capita específica por idade** (taxa de fecundidade)  $\beta(a)$ . Se existirem  $u(a, t)\Delta a$  mulheres na população com idade entre  $a$  e  $a + \Delta a$ , então

$$\beta(a)u(a, t)\Delta a$$

representa o número de nascidos em que sua mãe tenha idade no intervalo  $[a, a + \Delta a]$  no tempo  $t$ . Com isso, se somarmos todas as quantidades de nascidos com relação a cada idade no tempo  $t$ , ou seja,  $\sum_i \beta(a_i)u(a_i, t)\Delta a$ , teremos o número total de nascidos no

tempo  $t$ . Portanto, considerando  $\Delta a \rightarrow 0$ , obtemos a seguinte integral

$$B(t) = \int_0^A \beta(a)u(a, t) da \quad (2.9)$$

que representa a taxa de natalidade total no tempo  $t$ . Note que a igualdade acima também nos dá o número total de nascidos no tempo  $t$ , ou seja,

$$u(0, t) = \int_0^A \beta(a)u(a, t) da. \quad (2.10)$$

Portanto, de (2.2), (2.8) e (2.10) deduzimos o modelo de populacional estruturado por idade de Mckendrick-von Foerster, como segue

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = -\mu(a)u(a, t), & \text{em } \mathcal{D}; \\ u(0, t) = \int_0^A \beta(a)u(a, t) da, & t \in (0, T); \\ u(a, 0) = u_0(a), & a \in (0, A). \end{cases} \quad (2.11)$$

A condição especificada na fronteira  $a = 0$ , isto é,  $u(0, t)$ , damos o nome de **condição de contorno**, porém se ela não for expressa através de uma função ( $u_0(t)$ ), mas de uma equação que depende da função desconhecida  $u(a, t)$ , então dizemos ser uma **condição de fronteira não local**. No mesmo contexto, nos referimos à  $u(a, 0)$  por **condição inicial**.

### 2.1.2 Reformulação do modelo de Mckendrick através do método das características

Nosso objetivo agora concentra-se em reformular a equação (2.2) em uma equação integral, em nosso caso, a forma derivada inicialmente por Sharpe e Lotka. Para tanto, usaremos o método das características. O método consiste em identificar curvas, denominadas características, de tal forma que ao longo delas a equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária (EDO). Então, a EDO pode ser integrada a partir de alguns dados iniciais associados a uma curva conveniente. Finalmente, a solução da equação diferencial ordinária pode ser transformada em uma solução para a equação diferencial parcial (EDP) original.

Para o nosso objetivo, consideremos EDP's da seguinte forma

$$c_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c_0(x, y, u).$$

Em nosso estudo consideraremos, na forma parametrizada, as características dadas por

$$\frac{dx}{ds} = c_1(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{ds} = c_2(x, y).$$

Sendo

$$\frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = -\mu(a)u(a, t),$$

obtemos

$$\frac{da}{ds} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dt}{ds} = 1.$$

Daí, considerando o quociente entre as duas últimas igualdades

$$\frac{dt}{da} = \frac{da}{dt} = 1,$$

por conseguinte, após integrarmos, por exemplo,  $\frac{dt}{da} = 1$  de 0 até  $t$ , vem

$$t = a + c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante arbitrária.}$$

Com isso, as características são retas de inclinação 1. Geometricamente, isso significa que o valor de  $u(a, t)$  é determinado pelos valores anteriores de  $u(a, t)$  ao longo das curvas características e, em particular, pelo valor de  $u(a)$ , onde a curva característica cruza a fronteira de  $\mathcal{D}$ .

Para obtenção da forma integral, usaremos um procedimento chamado integração ao longo das curvas características, ao qual falaremos melhor a seguir.

Para o procedimento citado, consideremos um ponto fixado  $(a_0, t_0)$  no primeiro quadrante e parametrizemos as curvas características que passam pelo ponto considerado. Se denotarmos por  $s$  o parâmetro para o ponto fixo  $(a_0, t_0)$  e a variação de  $s$ , então a função definida como  $v(s) = u(a_0 + s, t_0 + s)$  retorna o valor de  $u(a_0, t_0)$  ao longo das curvas características.

Desta forma, a variação de  $v(s)$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{d(a_0 + s)}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{d(t_0 + s)}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial a} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 1 \\ &= \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Considerando  $\bar{\mu}(s) = \mu(a_0 + s)$ , com isso, conseguimos formular a EDP (2.2) na equação diferencial ordinária

$$\frac{dv}{ds} = -\bar{\mu}(s)v(s).$$

Dividindo ambos os lados por  $v(s)$ , obtemos

$$\frac{dv}{v(s)} = -\bar{\mu}(s) \Rightarrow \frac{d \ln(v(s))}{ds} = -\bar{\mu}(s).$$

Integrando de 0 a  $s$  em ambos os lados desta última equação, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{d \ln(v(\tau))}{d\tau} d\tau &= \int_0^s -\bar{\mu}(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \ln v(s) - \ln v(0) &= \int_0^s -\bar{\mu}(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{v(s)}{v(0)} \right) &= \int_0^s -\bar{\mu}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados, temos:

$$\frac{v(s)}{v(0)} = e^{\int_0^s -\bar{\mu}(\tau) d\tau}.$$

Portanto,

$$v(s) = v(0)e^{\int_0^s -\bar{\mu}(\tau) d\tau}. \quad (2.12)$$

Dada a solução na variável  $s$ , precisamos interpretar tal solução com respeito à  $u$  e as variáveis independentes  $a$  e  $t$ . Para isso, consideremos os dois casos a seguir:

i) Para  $a_0 \geq t_0$ , a solução (2.12) em  $u$  e  $s$  torna-se

$$u(a_0 + s, t_0 + s) = u(a_0, t_0) e^{-\int_0^s \mu(a_0 + \tau) d\tau}.$$

Recordemos que o ponto fixado foi considerado em uma das fronteiras. Desta forma, sendo  $a_0 \geq t_0$ , então consideramos  $t_0 = 0$ . Logo

$$u(a_0 + s, s) = u(a_0, 0) e^{-\int_0^s \mu(a_0 + \tau) d\tau}.$$

Agora, note que para  $u(a_0 + as, s)$  ficar em função de  $a$  e  $t$  basta considerar  $s = t$  e  $a_0 = a - t$ , com estes ajustes, obtemos

$$u(a, t) = u(a - t, 0) e^{-\int_0^t \mu(a - t + \tau) d\tau}. \quad (2.13)$$

Chamando  $\sigma = a - t + \tau$ , temos  $\sigma = a - t$  se  $\tau = 0$  e  $\sigma = a$  se  $\tau = t$ . Além disso, usando (2.6) com  $a_1 = a - t$ ,  $a_2 = a$  e a variável da função  $\mu$  sendo  $\sigma$ , tem-se

$$e^{\int_{a-t}^a \mu(\sigma) d\sigma} = \frac{\pi(a-t)}{\pi(a)},$$

ou ainda,

$$e^{-\int_{a-t}^a \mu(\sigma) d\sigma} = \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}.$$

Desta forma, da igualdade (2.13), temos

$$u(a, t) = u(a-t, 0) e^{-\int_{a-t}^a u(\sigma) d\sigma} = u(a-t, 0) \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} = u_0(a-t) \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}.$$

Portanto,

$$u(a, t) = u_0(a-t) \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}. \quad (2.14)$$

ii) Se  $a_0 < t_0$ . De forma análoga, de (2.12)

$$u(a_0 + s, t_0 + s) = u(a_0, t_0) e^{-\int_0^s \mu(a_0 + \tau) d\tau}.$$

Como  $a_0 < t_0$ , consideremos  $a_0 = 0$ . Daí,

$$u(s, t_0 + s) = u(0, t_0) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau}.$$

Substituindo  $s = a$  e  $t_0 = t - a$ , vem

$$u(a, t) = u(0, t-a) e^{-\int_0^a \mu(\tau) d\tau}.$$

Por fim, de (2.6)

$$u(a, t) = u(0, t-a) e^{-\int_0^a \mu(\tau) d\tau} = B(t-a) \frac{\pi(a)}{\pi(0)} = B(a-t)\pi(a).$$

Logo,

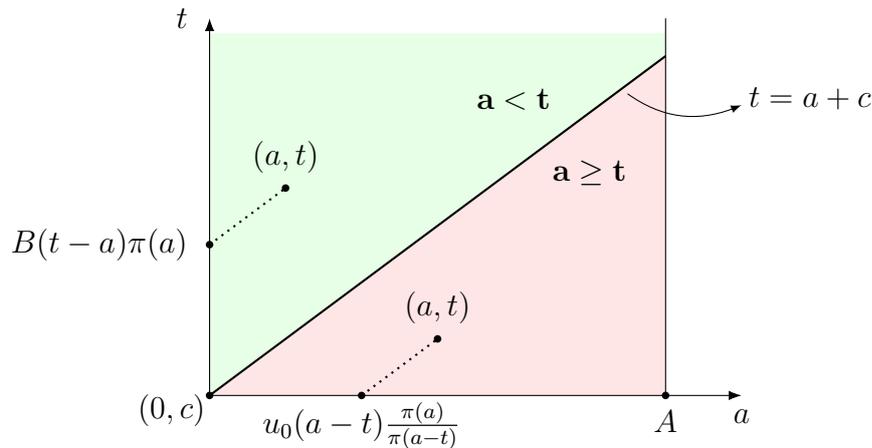
$$u(a, t) = B(a-t)\pi(a). \quad (2.15)$$

Desta forma, em vista de (2.14) e (2.15), a solução fica expressa da seguinte maneira

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a-t) \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}, & \text{se } a \geq t \\ B(t-a)\pi(a), & \text{se } a < t \end{cases}. \quad (2.16)$$

Com base nas informações obtidas, temos geometricamente que a função  $u(a, t)$  está distribuída como segue

**Figura 2.1** – Função  $u(a, t)$  obtida pelo método das características.



**Fonte:** Autor

A solução (2.16) depende da função  $B$ , que pode ser uma função dada, logo, a solução segue normalmente, ou pode estar expressa em termos da função  $u$ , nesta condição, precisamos reescrever  $B$ . Para isso, substituindo em (2.9) a função  $u$  descrita em (2.16) e considerando os dois casos a seguir:

**1° Caso.**  $A < \infty$ . Nesta condição, de (2.9)

$$B(t) = \int_0^A \beta(a)u(a, t) da,$$

onde analisamos duas possibilidades:

*i)* Para  $t \leq A$ , pela forma que  $u$  está descrita em (2.16), obtemos

$$\underbrace{\int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a) da}_{\text{Para } a < t} + \underbrace{\int_t^A \beta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}u_0(a-t) da}_{\text{Para } a \geq t}$$

*ii)* Para  $t > A$ , de (2.16), temos apenas uma possibilidade, a saber,

$$\int_0^A \beta(a)\pi(a)B(t-a) da.$$

Portanto, de (i) e (ii),

$$B(t) = \begin{cases} \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a) da + \int_t^A \beta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}u_0(a-t) da & t \leq A \\ \int_0^A \beta(a)\pi(a)B(t-a) da & t > A. \end{cases}$$

**2° Caso.**  $A = \infty$ . Neste caso temos apenas  $t < \infty$ . Daí, substituindo  $u$  como está

definida em (2.16), para  $a < t$  e  $a \geq t$ , na forma de  $B(t)$  definida em (2.9), obtemos

$$B(t) = \underbrace{\int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a) da}_{\text{Para } a < t} + \underbrace{\int_t^\infty \beta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}u_0(a-t) da}_{\text{Para } a \geq t},$$

ou ainda, se na segunda integral fizermos uma mudança de variável,

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a) da + \int_0^\infty \beta(a+t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}u_0(a) da.$$

Denotando

$$F(t) = \int_t^\infty \beta(a)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}u_0(a-t) da = \int_0^\infty \beta(a+t)\frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}u_0(a) da,$$

chegamos na seguinte expressão

$$B(t) = \int_0^t \beta(a)\pi(a)B(t-a) da + F(t), \quad (2.17)$$

que é uma **equação linear integral de Volterra do tipo convolução com kernel**  $K(a) = \beta(a)\pi(a)$ . A função  $K(a)$  é frequentemente denominada **função maternidade** e a equação (2.17) é conhecida por equação da renovação ou **equação Lotka**.

### 2.1.3 Solução separável: Comportamento assintótico

Como já observado, o modelo de McKendrick (2.11) é linear, desta forma, sua solução pode não ser limitada e, conseqüentemente, crescer ou decrescer exponencialmente no decorrer do tempo. Além disso, pode-se mostrar que qualquer solução se aproxima de uma solução separável (ver [6]).

Uma solução para uma EDP é dita **separável** quando pudermos reescrevê-la como produto de funções que dependem unicamente de uma das variáveis independentes envolvidas. Para o nosso caso, é dizer que a solução  $u(a, t)$  pode ser escrita como produto de uma função  $T(t)$  com outra função  $\phi(a)$ , ou seja,

$$u(a, t) = T(t) \cdot \phi(a).$$

É possível mostrar que a função  $T(t)$  é, na verdade, uma exponencial  $e^{\lambda t}$ , resultando em

$$u(a, t) = e^{\lambda t}\phi(a). \quad (2.18)$$

Assumindo que (2.18) seja solução de (2.11), então ela satisfaz a primeira equação, ou

seja,

$$\frac{\partial u}{\partial a}(a, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = -\mu(a)u(a, t)$$

torna-se

$$e^{\lambda t} \frac{d\phi(a)}{da} + \lambda e^{\lambda t} \phi(a) = -\mu(a)e^{\lambda t} \phi(a),$$

sendo  $e^{\lambda t} \neq 0$ , então

$$\frac{d\phi(a)}{da} + \lambda \phi(a) = -\mu(a)\phi(a),$$

dividindo ambos os lados por  $\phi(a)$

$$\frac{\frac{d\phi(a)}{da}}{\phi(a)} + \lambda = -\mu(a) \Rightarrow \frac{d \ln(\phi(a))}{da} = -\mu(a) - \lambda.$$

Integrando ambos os membros desta última igualdade de 0 até  $a$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{d \ln(\phi(\sigma))}{d\sigma} d\sigma &= - \int_0^a \mu(\sigma) - \lambda d\sigma \\ \Rightarrow \int_0^a \frac{d \ln(\phi(\sigma))}{d\sigma} d\sigma &= - \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma - \int_0^a \lambda d\sigma \\ \Rightarrow \ln(\phi(a)) - \ln(\phi(0)) &= - \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma - \lambda a \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{\phi(a)}{\phi(0)}\right) &= - \int_0^a \mu(\sigma) d\sigma - \lambda a. \end{aligned}$$

Considerando a exponencial, vem

$$\frac{\phi(a)}{\phi(0)} = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma - \lambda a} \Rightarrow \frac{\phi(a)}{\phi(0)} = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} e^{-\lambda a}.$$

De (2.6), para  $a_1 = 0$  e  $a_2 = a$ , tem-se  $\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma = \frac{\pi(a)}{\pi(0)}$ , logo

$$\frac{\phi(a)}{\phi(0)} = \frac{\pi(a)}{\pi(0)} e^{-\lambda a},$$

ou seja,

$$\phi(a) = \phi(0) \frac{\pi(a)}{\pi(0)} e^{-\lambda a}.$$

Portanto, como estamos com a hipótese que  $\pi(0) = 1$  e, denotando  $\phi(0)$  por  $\phi_0$ , chegamos em

$$\phi(a) = \phi_0 e^{-\lambda a} \pi(a).$$

Deste modo, a forma da solução  $u(a, t)$  com  $\phi(a)$  escrita da maneira encontrada anterior-

mente se torna

$$u(a, t) = \phi_0 e^{\lambda t} e^{-\lambda a} \pi(a). \quad (2.19)$$

Agora, para condição de contorno em (2.11), ou seja,  $u(0, t) = \int_0^A \beta(a) u(a, t) da$ , temos

$$\phi_0 e^{\lambda t} e^{-\lambda 0} \pi(0) = \int_0^A \beta(a) \phi_0 e^{\lambda t} e^{-\lambda a} \pi(a) da,$$

ou ainda,

$$\phi_0 e^{\lambda t} = \phi_0 e^{\lambda t} \int_0^A \beta(a) e^{-\lambda a} \pi(a) da.$$

Considerando que  $\phi_0 e^{\lambda t}$  é não nulo, a partir desta última igualdade, obtemos

$$\int_0^A \beta(a) e^{-\lambda a} \pi(a) da = 1 \quad (2.20)$$

com isso, a constante  $\lambda$  é considerada de tal forma que satisfaça (2.20).

A equação (2.20) é conhecida como **Equação Característica do modelo de McKendrick-Von Foerster** e é do tipo transcendental, isto é, não possui uma solução exata expressa através de funções conhecidas. Entretanto, pode ter mais de uma solução  $\lambda$  real ou complexa.

Mostremos agora que existe uma única solução real para (2.20) desde que  $\beta(a)$  seja positiva em algum intervalo positivo.

**Lema 2.2.** Seja  $\beta(a) \geq \hat{\beta} > 0$  para  $a \in [a_1, a_2]$ . Então, existe uma única solução real para (2.20).

*Demonstração.* Defina

$$f(\lambda) := \int_0^A \beta(a) e^{-\lambda a} \pi(a) da.$$

Inicialmente, note que dados  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  com  $\lambda_1 > \lambda_2$  e como  $a \geq 0$ , ou seja,  $-a \leq 0$ , então

$$-a\lambda_1 < -a\lambda_2,$$

Considerando a exponencial, resulta em

$$e^{-a\lambda_1} < e^{-a\lambda_2},$$

como  $\beta(a) \geq \hat{\beta} > 0$  e  $\pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(a) da} > 0$ , obtemos

$$\beta(a) e^{-a\lambda_1} \pi(a) < \beta(a) e^{-a\lambda_2} \pi(a).$$

Por fim, integrando de 0 até  $A$  com relação à variável  $a$ , segue que

$$\int_0^A \beta(a)e^{-a\lambda_1}\pi(a) da < \int_0^A \beta(a)e^{-a\lambda_2}\pi(a) da.$$

Portanto,  $f(\lambda_1) < f(\lambda_2)$ , ou seja, a função  $f$  é estritamente decrescente.

A priori,  $f$  pode não estar definida em todos os valores de  $\lambda$ , por exemplo, isso acontecerá se  $A = \infty$ , pois  $\lim_{a \rightarrow A} \pi(a) = 0$  e  $e^{-A\lambda} \rightarrow \infty$  quando  $\lambda \rightarrow -\infty$ , então teríamos  $e^{-A\lambda}\pi(A) = \infty \cdot 0$  que é uma indeterminação. Desta forma, consideremos  $\lambda$  em um intervalo  $(-L, \infty)$  que permita  $f$  estar bem definida e seja contínua. Com isso,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -L} f(\lambda) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = 0.$$

Desta forma, como  $f$  é estritamente decrescente e contínua, então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um único valor  $\lambda^* \in (-L, \infty)$  tal que  $f(\lambda^*) = 1$ , o que prova o Lema. ■

**Definição 2.3.** O parâmetro  $\lambda^*$  é conhecido como parâmetro malthusiano ou taxa de crescimento populacional.

**Definição 2.4.** A taxa de reprodução líquida é definida como

$$\mathcal{R} = \int_0^A \beta(a)\pi(a) da.$$

Note que

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} > 1 \\ \Leftrightarrow & \int_0^A \beta(a)\pi(a) da > 1 \Leftrightarrow \int_0^A \beta(a)\pi(a) da > \int_0^A \beta(a)e^{-\lambda^*a}\pi(a) da \\ \Leftrightarrow & \int_0^A \beta(a)\pi(a) da - \int_0^A \beta(a)e^{-\lambda^*a}\pi(a) da > 0 \Leftrightarrow \int_0^A \beta(a)\pi(a)(1 - e^{-\lambda^*a}) da > 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - e^{-\lambda^*a} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-\lambda^*a} \Leftrightarrow 0 > -\lambda^*a \Leftrightarrow \lambda^*a > 0 \Leftrightarrow \lambda^* > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{R} > 1 \Leftrightarrow \lambda^* > 0. \tag{2.21}$$

Além da relação anterior, também temos

$$\mathcal{R} = 1 \Leftrightarrow \lambda^* = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R} < 1 \Leftrightarrow \lambda^* < 0,$$

onde a verificação ocorre de forma análoga. A taxa de reprodução líquida expressa o

número de filhos que uma mulher tem durante sua vida fértil, desta forma, a relação (2.21) indica que se o número de filhos é superior a 1 ( $\mathcal{R} > 1$ ), então a população está crescendo, pois  $\lambda^* > 0$ .

Acabamos de discutir como obter o valor de  $\lambda$  necessário para solução separável (2.19), resta-nos compreender como podemos calcular o valor de  $\phi_0$ . Recordemos que a população inicial é determinada por

$$P_0 = \int_0^A u_0(a) da.$$

Além disso, de (2.19), como  $\lambda^*$  já foi calculado, temos

$$u(a, t) = \phi_0 e^{\lambda^* t} e^{-\lambda^* a} \pi(a).$$

Como  $P_0 = u(a, 0) = u_0(a)$ , então

$$u_0(a) = \phi_0 e^{\lambda^* \cdot 0} e^{-\lambda^* a} \pi(a) = \phi_0 e^{-\lambda^* a} \pi(a).$$

Pela igualdade  $P_0(a) = u_0(a)$ , resulta em

$$\int_0^A u_0(a) da = \int_0^A \phi_0 e^{-\lambda^* a} \pi(a) da.$$

Por fim, isolando  $\phi_0$

$$\int_0^A u_0(a) da = \phi_0 \int_0^A e^{-\lambda^* a} \pi(a) da$$

o que implica

$$\phi_0 = \frac{\int_0^A u_0(a) da}{\int_0^A e^{-\lambda^* a} \pi(a) da}. \quad (2.22)$$

Que é a forma para determinarmos  $\phi_0$ .

O exemplo a seguir indica como devemos proceder para computarmos as taxas  $\lambda^*$  e  $\mathcal{R}$ .

**Exemplo 2.5.** Suponha

$$\begin{aligned} \beta(a) &= \bar{\beta} a e^{-ca} \\ \mu(a) &= \bar{\mu} \end{aligned}$$

onde  $a$ ,  $\bar{\beta}$  e  $\bar{\mu}$  são constantes dadas e considere  $A = \infty$ . Nestas condições determine a taxa de crescimento e taxa de reprodução líquida.

**Solução.** Para encontrarmos a taxa de crescimento é suficiente acharmos uma solução

da equação característica (2.20), ou seja,

$$\int_0^{\infty} \beta(a) e^{-\mu a} e^{-\lambda a} da = 1.$$

Substituindo  $\beta(a)$  e  $\mu(a)$ ,

$$\bar{\beta} \int_0^{\infty} a e^{-ca} e^{-\bar{\mu}a} e^{-\lambda a} da = 1. \quad (2.23)$$

Calculemos agora o valor de

$$\int_0^{\infty} a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da.$$

Pelo método de integração por partes, façamos

$$u = a \Rightarrow du = da \quad e \quad dv = e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} \Rightarrow v = \frac{-e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a}}{c + \bar{\mu} + \lambda}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da &= \frac{-a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a}}{c + \bar{\mu} + \lambda} - \int \frac{-e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a}}{c + \bar{\mu} + \lambda} da \\ \Rightarrow \int a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da &= \frac{-a}{(c + \bar{\mu} + \lambda) e^{(c+\bar{\mu}+\lambda)a}} - \frac{e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a}}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2}. \end{aligned}$$

No intervalo de 0 até  $\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da &= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{(c + \bar{\mu} + \lambda) e^{(c+\bar{\mu}+\lambda)t}} \right] + \frac{1}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2} \\ \int_0^{\infty} a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da &= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2 e^{(c+\bar{\mu}+\lambda)t}} \right] + \frac{1}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} a e^{-(c+\bar{\mu}+\lambda)a} da = \frac{1}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2}.$$

Desta forma, de (2.23), obtemos

$$\frac{\bar{\beta}}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2} = 1.$$

Em consonância com o Lema (2.2), nos é conveniente considerar  $\lambda \in (-(\bar{\mu}+c), \infty)$ , donde teremos continuidade no referente intervalo para função

$$f(\lambda) = \frac{\bar{\beta}}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2}$$

e, além disso,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -(\bar{\mu}+c)} f(\lambda) = \infty \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0.$$

Com isso, há uma única solução no intervalo  $\lambda \in (-(\bar{\mu} + c), \infty)$ , para isso basta isolarmos  $\lambda$

$$\frac{\bar{\beta}}{(c + \bar{\mu} + \lambda)^2} = 1 \Rightarrow \bar{\beta} = (c + \bar{\mu} + \lambda)^2 \Rightarrow c + \bar{\mu} + \lambda = \sqrt{\bar{\beta}}.$$

Logo,  $\lambda^* = \sqrt{\bar{\beta}} - (\bar{\mu} + c)$ .

Para taxa de reprodução líquida, basta considerarmos  $\lambda = 0$  em  $f$ , visto que  $\mathcal{R} = f(0)$ .

$$\mathcal{R} = f(0) = \frac{\bar{\beta}}{(c + \mu + 0)^2} = \frac{\bar{\beta}}{(c + \mu)^2}.$$

Portanto,

$$\lambda^* = \sqrt{\bar{\beta}} - (\bar{\mu} + c) \quad \text{e} \quad \mathcal{R} = \frac{\bar{\beta}}{(c + \bar{\mu})^2}.$$

## 2.2 Modelo epidemiológico SIS estruturado por faixa etária

Em geral, os modelos que estudam os envolvidos organizando eles por um conjunto de características, isto é, os modelos compartimentais, são formulados com base no Modelo Linear de Mc-Kendrick Von Foerster. Para o que segue, consideramos a população constante, tal consideração implica que  $\mathcal{R} = 1$ , ou ainda, que a taxa de nascimento e óbitos são consideradas de tal forma que a população se mantém constante, ou seja, sua taxa de crescimento é  $\lambda^* = 0$ . Em suma,

$$\int_0^A \beta(a)\pi(a) da = 1. \tag{2.24}$$

Iniciemos nossa explanação através do modelo SIR.

### 2.2.1 Introdução ao modelo epidêmico SIR estruturado por idade

Temos as seguintes variáveis:

- $S(a, t)$  denota a densidade de indivíduos suscetíveis com idade  $a$  no tempo  $t$ ;
- $I(a, t)$  denota a densidade de indivíduos infectados/infecciosos com idade  $a$  no tempo  $t$ ;
- $R(a, t)$  denota a densidade de indivíduos recuperados com idade  $a$  no tempo  $t$ .

De forma análoga ao que foi descrito na subseção (2.1.1), para uma pequena variação  $\Delta a$ , temos que:

- $S(a, t)\Delta a$  representa o número de indivíduos suscetíveis com idade compreendida no intervalo  $[a, \Delta a]$  no tempo  $t$ ;

- $I(a, t)\Delta a$  representa o número de indivíduos infectados com idade compreendida no intervalo  $[a, \Delta a]$  no tempo  $t$ ;
- $R(a, t)\Delta a$  representa o número de indivíduos Recuperados com idade compreendida no intervalo  $[a, \Delta a]$  no tempo  $t$ .

Desta forma, para cada tempo  $t$  o total de suscetíveis, infectados e recuperados é expresso, respectivamente, por:

$$S(t) = \int_0^A s(a, t) da, \quad I(t) = \int_0^A i(a, t) da \quad e \quad R(t) = \int_0^A r(a, t) da.$$

Com isso, o tamanho total da população no tempo  $t$  é

$$P(t) = S(t) + I(t) + R(t) = \int_0^A u(a, t) da.$$

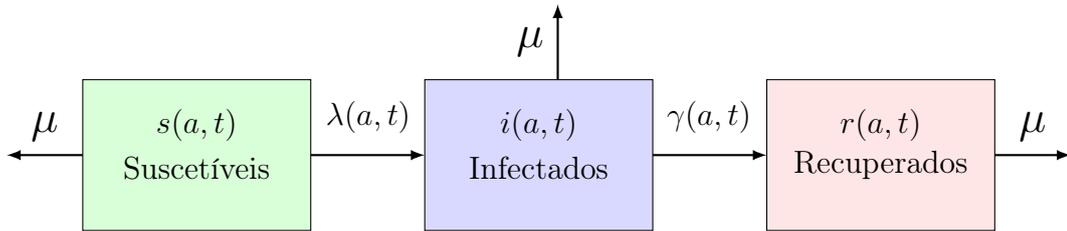
Neste modelo, o fluxo de indivíduos entre as classes se dá de forma similar ao ocorrido para  $u(a, t)$  no modelo de McKendrick-Von Foerster, no sentido que haverá variação na idade e no tempo. Todas as taxas envolvidas são dependentes da idade e os novos indivíduos se caracterizam como condição de fronteira, dado que ocorre apenas com nascimento, ou seja,  $a = 0$ .

As seguintes equações descrevem o que foi discutido acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial t} &= -\lambda(a, t)s(a, t) - \mu(a)s(a, t) \\ \frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial i}{\partial t} &= \lambda(a, t)s(a, t) - (\mu(a) + \gamma(a))i(a, t) \\ \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial r}{\partial t} &= \gamma(a)i(a, t) - \mu(a)r(a, t) \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde  $\lambda(a, t)$  é a força de infecção específica por idade,  $\mu(a)$  é taxa de mortalidade natural específica por idade e  $\gamma(a)$  é taxa de recuperação. Podemos compreender melhor através do fluxograma abaixo.

**Figura 2.2** – Modelo SIR



**Fonte:** Autor

A forma geral da força de infecção é descrita por

$$\lambda(a, t) = \rho(a)i(a, t) + \int_0^A k(a, \tau)i(\tau, t) d\tau, \quad (2.26)$$

onde  $\rho(a)$  representa a taxa de transmissão entre um indivíduo suscetível de idade  $a$  e um indivíduo infectado de idade  $a$  e  $k(a, \tau)$  é a taxa de transmissão entre um indivíduo suscetível de idade  $\tau$  e um indivíduo infectado de idade  $a$ .

Vários casos especiais de força de infecção têm sido considerados na literatura, falaremos um pouco sobre dois.

1) Mistura intracoorte - Neste caso assumimos que os indivíduos de idade  $a$  apenas serão contaminados por indivíduos de idade  $a$ , ou seja,  $k(a, \tau) = 0$ . Desta forma, de (2.26),

$$\lambda(a, t) = \rho(a)i(a, t).$$

Este caso pode ser apropriado para doenças infantis.

2) Mistura intercoorte - Neste caso assumimos que um indivíduo pode ser infectado por outro indivíduo de qualquer outra classe, ou seja,  $\rho(a) = 0$ . Desta forma, de (2.26), obtemos

$$\lambda(a, t) = \int_0^A k(a, \tau)i(\tau, t) d\tau.$$

Uma observação é que  $k(a, t)$  não permite o cálculo explícito do número de reprodução, por isso, frequentemente assumimos que ela seja separável, de tal forma que

$$k(a, t) = k_1(a)k_2(\tau).$$

Dadas as equações que descrevem a variação de  $s, i$  e  $r$ , assim como para o modelo referente à população total, também temos as condições de fronteiras e as condições iniciais.

Uma primeira consideração é ter os novos nascidos todos suscetíveis, nesta condição

temos

$$s(0, t) = \int_0^A \beta(a)u(a, t) da,$$

$$i(0, t) = 0,$$

$$r(0, t) = 0,$$

onde  $\beta(t)$  representa a taxa de nascimento.

Outra possível consideração é assumir que alguns dos novos nascidos estejam infectados, que ocorre quando a doença tem transmissão vertical. Nesta condição,

$$s(0, t) = \int_0^A \beta(a)[s(a, t) + r(a, t) + (1 - q)i(a, t)] da,$$

$$i(0, t) = q \int_0^A \beta(a)i(a, t) da,$$

$$r(0, t) = 0,$$

onde  $0 \leq q \leq 1$  é conhecido como **parâmetro de transmissão vertical**.

Para concluirmos, temos as condições iniciais, que geralmente são funções dadas, são elas

$$s(a, 0) = s_0(a), \quad i(a, 0) = i_0(a) \quad \text{e} \quad r(a, 0) = r_0(a).$$

### 2.2.2 Equilíbrio e número de reprodução

Soluções de equilíbrio são solução do modelo que não dependem do tempo e também satisfazem as condições de fronteira. Considerando  $A = \infty$ , obtemos

$$\frac{\partial s}{\partial a} = -\lambda(a)s(a) - \mu(a)s(a), \tag{2.27a}$$

$$\frac{\partial i}{\partial a} = \lambda(a)s(a) - (\mu(a) + \gamma(a))i(a), \tag{2.27b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \gamma(a)i(a) - \mu(a)r(a), \tag{2.27c}$$

$$s(0) = \int_0^\infty \beta(a)u(a) da, \tag{2.27d}$$

$$i(0) = 0, \tag{2.27e}$$

$$r(0) = 0, \tag{2.27f}$$

onde a força de infecção é dada por

$$\lambda(a) = \int_0^\infty k_1(a)k_2(\tau)i(\tau) d\tau = k_1(a) \int_0^\infty k_2(\tau)i(\tau) d\tau,$$

por conseguinte, denotando

$$\hat{\lambda} = \int_0^{\infty} k_2(\tau) i(\tau) d\tau, \quad (2.28)$$

resulta em

$$\lambda(a) = \hat{\lambda} k_1(a). \quad (2.29)$$

Uma primeira observação referente ao sistema (2.27a)-(2.27f) é que  $i(a) = r(0) = \hat{\lambda} = 0$  e  $s(a) = s(0)\pi(a)$ , onde  $s(0)$  é uma constante, é solução. De fato, as equações (2.27c), (2.27d) e (2.27f) são automaticamente satisfeitas. Sendo  $\hat{\lambda} = 0$ , então, de (2.29),  $\lambda(a) = 0$ . Desta forma, da primeira equação (2.27a), do lado direito, temos

$$-\lambda(a) \cdot s(0)\pi(a) - \mu(a) \cdot s(0)\pi(a) = -\mu(a)s(0)\pi(a) = s(0) \cdot [-\mu(a)\pi(a)],$$

mas de (2.3)

$$\frac{d \pi(a)}{da} = -\mu(a)\pi(a),$$

daí,

$$s(0) \cdot [-\mu(a)\pi(a)] = s(0) \frac{d \pi(a)}{da} = \frac{\partial s}{\partial a}.$$

Logo, a primeira equação (2.27a) também está satisfeita.

Agora, nos resta verificar a 4ª equação (2.27d), mas se  $i(a) = r(a) = 0$ , então

$$u(a) = s(a) + r(a) + i(a) = s(a) = s(0)\pi(a),$$

com isso, do lado direito de (2.27d),

$$\int_0^A \beta(a)u(a) da = \int_0^A \beta(a)s(0)\pi(a) da = s(0) \int_0^A \beta(a)\pi(a) da,$$

pelas nossas considerações, de (2.24),

$$\int_0^A \beta(a)u(a) da = s(0) \int_0^A \beta(a)\pi(a) da = s(0) \cdot 1 = s(0).$$

Portanto,

$$s(0) = \int_0^A \beta(a)u(a) da.$$

Com isso, a equação (2.27d) fica verificada, conseqüentemente, está verificado que  $i(a) = r(0) = \hat{\lambda} = 0$  e  $s(a) = s(0)\pi(a)$  é solução do sistema (2.27a)-(2.27f), tal solução é o equilíbrio livre da doença.

Para solução de equilíbrio endêmico podemos assumir  $\hat{\lambda} \neq 0$ . Com isso, iniciemos

calculando a densidade de suscetíveis. Da equação (2.27a),

$$\begin{aligned} s_a &= (-\lambda(a) - \mu(a))s(a) \Rightarrow \frac{s_a}{s(a)} = -\lambda(a) - \mu(a) \\ &\Rightarrow \frac{d \ln(s(a))}{da} = -\lambda(a) - \mu(a), \end{aligned}$$

integrando em ambos os lados de 0 até  $a$ ,

$$\ln(s(a)) - \ln(s(0)) = \int_0^a -\lambda(s) - \mu(s) ds \Rightarrow \ln\left(\frac{s(a)}{s(0)}\right) = -\int_0^a \lambda(s) + \mu(s) ds,$$

considerando a exponencial em ambos os lados,

$$s(a) = s(0)e^{-\int_0^a \lambda(s) + \mu(s) ds} = s(0)e^{-\int_0^a \hat{\lambda}k_1(s) + \mu(s) ds}.$$

Agora, somando (2.27a), (2.27b) e (2.27c), encontramos

$$s_a + i_a + r_a = -\mu(a)s(a) - \mu(a)i(a) - \mu(a)r(a),$$

isto é,

$$s_a + i_a + r_a = -\mu(a)[s(a) + i(a) + r(a)],$$

como  $u(a) = s(a) + i(a) + r(a)$ , vem

$$u_a = -\mu(a)u(a).$$

Com um raciocínio análogo ao feito anteriormente para  $s(a)$ , obtemos

$$u(a) = u(0)e^{-\int_0^a \mu(s) ds}.$$

Por (2.4), temos  $\pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(s) ds}$ , logo

$$u(a) = u(0)\pi(a),$$

sendo  $u(0)$  uma constante arbitrária.

Pela forma de  $\phi_0$  formulada em (2.22), se  $\lambda^* = 0$ , então

$$\phi_0 = \frac{\int_0^A u_0(a) da}{\int_0^A \pi(a) da}.$$

**Observação 2.6.** Neste contexto, estamos analisando o modelo independente do tempo, com isso,  $u(a)$  é igual ao termo  $u_0(a)$  da igualdade (2.22).

Como  $u(a) = u(0)\pi(a)$ , resulta

$$\phi_0 = \frac{\int_0^A u(0)\pi(a) da}{\int_0^A \pi(a) da}.$$

Sendo  $u(0)$  constante,

$$\phi_0 = u(0) \frac{\int_0^A \pi(a) da}{\int_0^A \pi(a) da},$$

logo,

$$\phi_0 = u(0).$$

Com isso,

$$u(a) = \phi_0\pi(a).$$

Retornando a solução para  $s(a)$ , substituindo o valor  $u(a)$  em (2.27d), temos

$$s(0) = \int_0^\infty \beta(a)\phi_0\pi(a) da = \phi_0 \int_0^\infty \beta(a)\pi(a) da = \phi_0 \quad (2.30)$$

visto que, de (2.24),  $\int_0^A \beta(a)\pi(a) da = 1$  e estamos considerando  $A = \infty$ . Portanto,

$$s(a) = \phi_0 e^{-\int_0^a \lambda(s) + \mu(s) ds}.$$

Nosso próximo passo é encontrar  $i(a)$ , como já sabemos a solução de  $s(a)$ , então iniciaremos isolando, em (2.27b), as parcelas que dependem de  $i(a)$  ou  $i_a(a)$ , ou seja,

$$i_a + (\mu(a) + \gamma(a))i(a) = \hat{\lambda}k_1(a)s(a). \quad (2.31)$$

Note que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{da} \left[ i(a) e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \right] \\ &= i_a(a) e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} + e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \frac{d}{da} \left[ \int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma \right] i(a) \\ &= i_a(a) e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} + e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} [\mu(a) + \gamma(a)] i(a) \\ &= e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} [i_a(a) + (\mu(a) + \gamma(a))i(a)]. \end{aligned}$$

Com isso, multiplicando ambos os lados de (2.31) por  $e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma}$ , vem

$$\begin{aligned} e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} [i_a + (\mu(a) + \gamma(a))i(a)] &= \hat{\lambda}k_1(a)s(a)e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \\ \Rightarrow \frac{d}{da} \left[ i(a) e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \right] &= \hat{\lambda}k_1(a)s(a)e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma}, \end{aligned}$$

denotando a variável  $a$  por  $\eta$ , obtemos

$$\frac{d}{da} \left[ i(\eta) e^{\int_0^\eta \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \right] = \hat{\lambda} k_1(\eta) s(\eta) e^{\int_0^\eta \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma}.$$

Integrando de 0 até  $a$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{d}{da} \left[ i(\eta) e^{\int_0^\eta \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \right] &= \int_0^a \hat{\lambda} k_1(\eta) s(\eta) e^{\int_0^\eta \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} \\ \Rightarrow i(a) e^{\int_0^a \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma} - i(0) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) s(\eta) e^{\int_0^\eta \mu(\sigma) + \gamma(\sigma) d\sigma}. \end{aligned}$$

Reiteramos o fato que  $\hat{\lambda}$  representa uma integral, porém em outra variável, desta forma, a última igualdade segue normalmente.

Retornando à procura da solução de  $i(a)$ , de (2.27d),  $i(0) = 0$ , logo

$$\begin{aligned} i(a) e^{\int_0^a (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) s(\eta) e^{\int_0^\eta (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} d\eta \\ \Rightarrow i(a) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) s(\eta) e^{\int_0^\eta (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} d\eta \cdot e^{-\int_0^a (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} \\ \Rightarrow i(a) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) s(\eta) e^{-\int_\mu^0 (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} e^{-\int_0^a (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} d\eta \\ \Rightarrow i(a) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) s(\eta) e^{-\int_\eta^a (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} d\eta. \end{aligned}$$

Como  $s(\eta) = \phi_0 e^{-\int_0^\eta \lambda(\sigma) + \mu(\sigma) d\sigma}$ , segue que

$$\begin{aligned} i(a) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) \phi_0 e^{-\int_0^\eta \lambda(\sigma) + \mu(\sigma) d\sigma} e^{-\int_\eta^a (\mu(\sigma) + \gamma(\sigma)) d\sigma} d\eta \\ \Rightarrow i(a) &= \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) \phi_0 e^{-\int_0^\eta \lambda d\sigma} e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta. \end{aligned}$$

De (2.29) e (2.4), encontramos

$$i(a) = \hat{\lambda} \int_0^a k_1(\eta) \phi_0 e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(\sigma) d\sigma} \pi(a) e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta.$$

Desta forma,

$$i(a) = \phi_0 \hat{\lambda} \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(\sigma) d\sigma} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta.$$

Porém, não é uma forma fechada, visto que, com a devida alteração de variável, de (2.28),  $\hat{\lambda} = \int_0^\infty k_2(a) i(a) da$ , ou seja, a integral denotada por  $\hat{\lambda}$  ainda depende de  $i(a)$ . Para contornarmos este impasse basta substituímos em (2.28) o valor  $i(a)$  encontrado

anteriormente, donde obtemos

$$\hat{\lambda} = \int_0^\infty k_2(a) \left( \phi_0 \hat{\lambda} \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(s) ds} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta \right) da,$$

ou ainda,

$$\hat{\lambda} = \phi_0 \hat{\lambda} \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(s) ds} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta da.$$

Com isso, desde que  $\hat{\lambda} \neq 0$ , então

$$1 = \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(s) ds} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta da.$$

Agora, definamos o lado direito da última igualdade como uma função de  $\hat{\lambda}$

$$\mathcal{G}(\hat{\lambda}) := \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_0^\eta \hat{\lambda} k_1(s) ds} e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta da.$$

Note que se  $k_1(a)$  é não nula em algum intervalo, então  $\mathcal{G}(\hat{\lambda})$  é estritamente decrescente neste intervalo. Portanto, se a equação  $\mathcal{G}(\hat{\lambda}) = 1$  tem uma solução positiva, esta solução é única. Além disso,

$$\lim_{\hat{\lambda} \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\hat{\lambda}) = 0.$$

Com isso, a existência da solução positiva da equação  $\mathcal{G}(\hat{\lambda}) = 1$  depende do valor de  $\mathcal{G}(0)$ . Definimos este valor como sendo o número de reprodução básica da doença:

$$\mathcal{R}_0 = \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \gamma(\sigma) d\sigma} d\eta da. \quad (2.32)$$

Com isso, concluímos que se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , então existe uma única solução positiva  $\hat{\lambda}^* > 0$  para equação  $\mathcal{G}(\hat{\lambda}) = 1$ . Para esta solução  $\hat{\lambda}^*$ , associasse um único valor não nulo  $s^*(a)$  e  $i^*(a)$ . O valor de  $r(a)$  pode ser calculado de  $r^*(a) = u(a) - s^*(a) - i^*(a)$ .

Diante disso, com base na discussão feita até este momento, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.7.** O modelo (2.25) admite um único equilíbrio livre da doença  $\mathcal{E}_0 = (\phi_0 \pi(a), 0, 0)$ . Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , o modelo também admite um único equilíbrio endêmico  $\mathcal{E}^* = (s^*(a), i^*(a), r^*(a))$ .

### 3 ANÁLISE DA SOLUÇÃO DE EQUILÍBRIO LIVRE DA DOENÇA

Entre os tópicos discutidos no capítulo anterior tivemos por último a existência e unicidade do equilíbrio livre da doença e o equilíbrio endêmico sintetizado no Teorema 2.7. Neste capítulo discutimos a estabilidade local do equilíbrio livre da doença.

Inicialmente, precisamos linearizar em torno de um equilíbrio. Ao sistema (2.25) associamos o sistema linear para as perturbações em torno de um equilíbrio. Para tanto, consideramos apenas as duas primeiras equações associadas ao sistema (2.25). Para isso, substituindo a equação de  $r$  pela equação do tamanho total da população. Desta forma, sejam

$$\begin{aligned} s(a, t) &= s^*(a) + x(a, t), \\ i(a, t) &= i^*(a) + y(a, t), \\ u(a, t) &= u^*(a) + p(a, t), \end{aligned}$$

onde  $x(a, t)$ ,  $y(a, t)$  e  $p(a, t)$  são as perturbações do equilíbrio. Por ora,  $s^*$  e  $i^*$  denotam um equilíbrio genérico que pode ser o equilíbrio livre da doença ou endêmico. Definidas as expressões para  $s(a, t)$  e  $i(a, t)$ , de (2.25), obtemos:

$$\begin{aligned} s_a^* + x_a + x_t &= -(\lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a, t))(s^*(a) + x(a, t)) \\ &\quad - \mu(a)(s^*(a) + x(a, t)), \\ i_a^* + y_a + y_t &= (\lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a, t))(s^*(a) + x(a, t)) \\ &\quad - (\mu(a) + \gamma(a))(i^*(a) + y(a, t)), \\ u_a^* + p_a + p_t &= -\mu(a)(u^*(a) + p(a, t)), \\ s^*(0) + x(0, t) &= \int_0^\infty \beta(a)(u^*(a) + p(a, t)) da, \\ i^*(0) + y(0, t) &= 0, \\ u^*(0) + p(0, t) &= \int_0^\infty \beta(a)(u^*(a) + p(a, t)) da, \end{aligned}$$

em que

$$\lambda^*(a) = k_1(a) \int_0^\infty k_2(a) i^*(a) da \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}(a, t) = k_1(a) \int_0^\infty k_2(a) y(a, t) da.$$

Usando as equações de equilíbrio de (2.27a)-(2.27f), segue que:

1° equação,

$$\overbrace{-\lambda^*(a) s^*(a) - \mu(a) s^*(a)}^{s_a^*} + x_a + x_t = -(\lambda^*(a) + \tilde{\lambda}(a, t))(s^*(a) + x(a, t)) - \mu(a)(s^*(a) + x(a, t))$$

$$\Rightarrow \cancel{-\lambda^*(a)s^*(a)} - \cancel{\mu(a)s^*(a)} + x_a + x_t = \cancel{-\lambda^*(a)s^*(a)} - \lambda^*(a)x(a, t) - \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) - \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) - \cancel{\mu(a)s^*(a)} - \mu(a)x(a, t)$$

$$\Rightarrow x_a + x_t = -\lambda^*(a)x(a, t) - \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) - \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) - \mu(a)x(a, t);$$

2° equação,

$$i_a^* + y_a + y_t = \lambda^*(a)s^*(a) + \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) + \lambda^*(a)x(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) - \left(\mu(a)i^*(a) + \gamma(a)\right)i^*(a) - \left(\mu(a) + \gamma(a)\right)y(a, t)$$

$$\Rightarrow \cancel{y_a^*} + y_a + y_t = -(\mu(a) + \gamma(a))y(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) + \lambda^*(a)x(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) + \underbrace{+\lambda^*(a)s^*(a) - (\mu(a)i^*(a) + \gamma(a))i^*(a)}_{=i_a^*}$$

$$\Rightarrow y_a + y_t = -\left(\mu(a) + \gamma(a)\right)y(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) + \lambda^*(a)x(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t);$$

3° equação,

$$u_a^* + p_a + p_t = -\mu(a)(u^*(a) + p(a, t))$$

$$\Rightarrow u_a^* + p_a + p_t = -\mu(a)u^*(a) - \mu(a)p(a, t),$$

porém, somando  $s_a^*$ ,  $i_a^*$  e  $r_a^*$ , obtemos

$$s_a^* + i_a^* + r_a^* = -\mu(a)(s^* + i^* + r^*),$$

sendo  $u^* = s^* + i^* + r^*$ , vem

$$u_a^* = -\mu(a)u^*(a),$$

desta forma,

$$\cancel{y_a^*} + p_a + p_t = \cancel{y_a^*} - \mu(a)p(a, t),$$

logo,

$$p_a + p_t = -\mu(a)p(a, t),$$

isto é,

$$\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(a)p(a, t);$$

4° Equação,

$$s^*(0) + x(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) (u^*(a) + p(a, t)) da$$

$$\Rightarrow s^*(0) + x(0, t) = \int_0^\infty \beta(a)u^*(a) + \beta(a)p(a, t) da$$

$$\Rightarrow \cancel{s^*(0)} + x(0, t) = \underbrace{\int_0^\infty \beta(a) \cancel{u^*(a)} da}_{= s^*(0)} + \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da,$$

com isso,

$$x(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da;$$

5° equação,

$$i^*(0) + y(0, t) = 0$$

de (2.27e),  $i^*(0) = 0$ , desta forma,

$$y(0, t) = 0;$$

6° equação,

$$u^*(0) + p(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) (u^*(a) + p(a, t)) da$$

$$u^*(0) + p(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) u^*(a) + \beta(a) p(a, t) da,$$

$$u_a^*(0) + p(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) u^*(a) da + \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da,$$

porém, somando (2.27d), (2.27e) e (2.27f) e sendo  $s^*(0) + i^*(0) + r^*(0) = u^*(0)$ , segue

$$u_a^* = \int_0^\infty \beta(a) u^*(a) da,$$

ou seja,

$$\cancel{u_a^*(0)} + p(0, t) = \cancel{u_a^*(0)} + \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da,$$

consequentemente,

$$p(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da.$$

Em suma, após as substituições das equações de equilíbrio, chegamos no sistema abaixo

$$x_a + x_t = -\lambda^*(a)x(a, t) - \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) - \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) - \mu(a)x(a, t),$$

$$y_a + y_t = \lambda^*(a)x(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) + \tilde{\lambda}(a, t)x(a, t) - (\mu(a) + \gamma(a))y(a, t),$$

$$p_a + p_t = -\mu(a)p(a, t),$$

$$x(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da,$$

$$y(0, t) = 0,$$

$$u(0, t) = \int_0^\infty \beta(a) p(a, t) da.$$

Por fim, para obtermos um sistema linear do sistema acima, descartamos os termos quadráticos não lineares, ou seja :

$$\begin{aligned}
x_a + x_t &= -\lambda^*(a)x(a, t) - \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) - \mu(a)x(a, t), \\
y_a + y_t &= \lambda^*(a)x(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t)s^*(a) - (\mu(a) + \gamma(a))y(a, t), \\
p_a + p_t &= -\mu(a)p(a, t), \\
x(0, t) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a, t)da, \\
y(0, t) &= 0, \\
p(0, t) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a, t)da.
\end{aligned}$$

Este é o sistema linearizado para a perturbação de um equilíbrio. Por ser um sistema linear, então tem soluções separáveis, onde a função dependente do tempo é uma exponencial, assim como o modelo Mckendrick-von Foerster. Procuramos essas soluções na forma  $x(a, t) = e^{\rho t}x(a)$ ,  $y(a, t) = e^{\rho t}y(a)$  e  $p(a, t) = e^{\rho t}p(a)$ . Substituindo as soluções dependentes de tempo pelas separáveis e, após cancelar  $e^{\rho t}$ , chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial a} + \rho x(a) &= -\lambda^*(a)x(a) - \tilde{\lambda}(a)s^*(a) - \mu(a)x(a), \\
\frac{\partial y}{\partial a} + \rho y(a) &= \lambda^*(a)x(a) + \tilde{\lambda}(a)s^*(a) - (\mu(a) + \gamma(a))y(a), \\
\frac{\partial p}{\partial a} + \rho p(a) &= -\mu(a)p(a), \\
x(0) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a) da, \\
y(0) &= 0, \\
p(0) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a) da,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

que é um problema de autovalor. Nosso objetivo é encontrarmos o valor de  $\rho$  e as funções  $x(a)$ ,  $y(a)$  e  $p(a)$ . Para tanto, podemos obter a equação característica eliminando gradualmente  $x(a)$ ,  $y(a)$  e  $p(a)$ .

Derivamos a equação característica do equilíbrio livre da doença, o sistema do equilíbrio livre da doença (3.1) assume a forma

$$\begin{aligned}
x_a + \rho x &= -\tilde{\lambda}(a)\phi_0\pi(a) - \mu(a)x(a), \\
y_a + \rho y &= \tilde{\lambda}(a)\phi_0\pi(a) - (\mu(a) + \gamma(a))y(a), \\
p_a + \rho p &= -\mu(a)p(a), \\
x(0) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a) da, \\
y(0) &= 0, \\
u(0) &= \int_0^\infty \beta(a)p(a) da,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

pois  $s^*(a) = s(0)\pi(a)$  e  $i^*(a) = 0$  compõem a solução de equilíbrio (solução já verificada), desta forma, como de (2.30)  $s(0) = \phi_0$ , então  $s^*(a) = \phi_0\pi(a)$  e, além disso, estamos considerando que  $\lambda^*(a) = k_1(a) \int_0^\infty k_2(a)i^*(a)da$ , conseqüentemente,  $\lambda^*(a) = 0$ .

Uma última observação é que

$$\tilde{\lambda}(a) = k_1(a) \int_0^\infty k_2(a)y(a)da = \tilde{\lambda}k_1(a), \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{\lambda}$  denota uma integral envolvendo a variável  $y(a)$ . Para resolvermos este impasse, na segunda equação de (3.2) deixemos do lado esquerdo os termos que aparecem  $y$  e sua derivada, isto é,

$$y_a + (\rho + \mu(a) + \gamma(a))y(a) = \tilde{\lambda}(a)\phi_0\pi(a),$$

ou ainda, pela forma de  $\tilde{\lambda}(a)$ ,

$$y_a + (\rho + \mu(a) + \gamma(a))y(a) = \tilde{\lambda}k_1(a)\phi_0\pi(a). \quad (3.4)$$

Note que

$$\frac{d}{da} \left[ y(a)e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} \right] = y_a(a)e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} + (\rho + \mu(a) + \gamma(a))e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} y(a).$$

Desta forma, após multiplicarmos ambos os lados de (3.4) por  $e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds}$ , obtemos

$$\frac{d}{da} \left[ y(a)e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} \right] = \tilde{\lambda}\phi_0k_1(a)\pi(a),$$

integrando no intervalo de 0 até  $a$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{d}{da} \left[ y(\eta)e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} \right] d\eta = \int_0^a \tilde{\lambda}\phi_0k_1(\eta)\pi(\eta) d\eta \\ \Rightarrow & y(a)e^{\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} = \tilde{\lambda}\phi_0 \int_0^a k_1(\eta)\pi(\eta) d\eta \\ \Rightarrow & y(a) = \tilde{\lambda}\phi_0 \left( \int_\eta^a k_1(\eta)\pi(\eta) d\eta \right) e^{-\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} \\ \Rightarrow & y(a) = \tilde{\lambda}\phi_0 \int_\eta^a k_1(\eta)\pi(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \mu(s) + \gamma(s) ds} d\eta \\ \Rightarrow & y(a) = \tilde{\lambda}\phi_0 \int_\eta^a k_1(\eta)\pi(\eta) e^{-\int_\eta^a \mu(s) ds} e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta. \end{aligned}$$

De (2.6), considerando  $a_1 = a$  e  $a_2 = \eta$ , chegamos em

$$e^{\int_a^\eta \mu(s) ds} = \frac{\pi(a)}{\pi(\eta)} \Rightarrow e^{-\int_\eta^a \mu(s) ds} = \frac{\pi(a)}{\pi(\eta)} \Rightarrow e^{-\int_\eta^a \mu(s) ds} \pi(\eta) = \pi(a),$$

substituindo na última igualdade de  $y(a)$ , vem

$$y(a) = \tilde{\lambda} \phi_0 \int_\eta^a k_1(\eta) \pi(a) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta,$$

consequentemente,

$$y(a) = \tilde{\lambda} \phi_0 \pi(a) \int_\eta^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta.$$

Determinada a forma de  $y(a)$ , então para o fator  $\tilde{\lambda}$  de (3.3) tem-se

$$\tilde{\lambda} = \int_0^\infty k_2(a) \tilde{\lambda} \phi_0 \pi(a) \int_\eta^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta da,$$

ou melhor,

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_\eta^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta da,$$

desde que  $\tilde{\lambda}$  seja não nulo, então podemos cancelá-lo na última igualdade, obtendo a seguinte equação característica para  $\rho$

$$1 = \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta da.$$

Definamos o lado direito da última igualdade como uma função  $\mathcal{H}$  na variável  $\rho$ , com segue:

$$\mathcal{H}(\rho) = \phi_0 \int_0^\infty k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta) e^{-\int_\eta^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta da.$$

Observe que decorrente da definição em (2.32),

$$\mathcal{H}(0) = \mathcal{B}_0.$$

Para  $\rho$  real,  $\mathcal{H}(\rho)$  é uma função decrescente de  $\rho$  se tivermos  $k_1(\eta) \geq 0$  não identicamente nula. De fato, para  $\rho_1 \geq \rho_2$  temos que

$$\rho_1 \geq \rho_2 \Rightarrow \rho_1 + \gamma(s) \geq \rho_2 + \gamma(s),$$

para  $\eta < a$ ,

$$\begin{aligned}\rho_1 \geq \rho_2 &\Rightarrow \int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds \geq \int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds \\ &\Rightarrow -\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds \leq -\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds,\end{aligned}$$

sendo  $e > 0$ ,

$$\begin{aligned}\rho_1 \geq \rho_2 &\Rightarrow e^{-\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds} \leq e^{-\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds} \\ &\Rightarrow k_1(a)e^{-\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds} \leq k_1(a)e^{-\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds},\end{aligned}$$

como estamos considerando  $a > 0$ , então

$$\rho_1 \geq \rho_2 \Rightarrow \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds} d\eta \leq \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds} d\eta.$$

Agora, recordemos que  $k(a, \tau) = k_1(a)k_2(\tau) \leq 0$ , como estamos considerando  $k_1(a) \geq 0$ , então  $k_2(\tau) \geq 0$ , desta forma, para o nosso contexto,  $\phi_0$ ,  $\pi(a)$  e  $k_2(a)$  são ambos não negativos, de tal forma que

$$\phi_0 \pi(a) k_2(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds} d\eta \leq \phi_0 \pi(a) k_2(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds} d\eta,$$

como  $0 < \infty$  e  $\phi_0$  é uma constante, chegamos que se  $\rho_1 \geq \rho_2$ , então

$$\begin{aligned}\phi_0 \int_0^{\infty} k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_1 + \gamma(s) ds} d\eta da &\leq \phi_0 \int_0^{\infty} k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho_2 + \gamma(s) ds} d\eta da \\ &\Rightarrow \mathcal{H}(\rho_1) \leq \mathcal{H}(\rho_2),\end{aligned}$$

ou seja, a função  $\mathcal{H}(\rho)$  é decrescente.

Juntamente com a última discussão, note que em um primeiro caso  $\mathcal{R}_1 > 1$  implica  $\mathcal{H}(0) > 0$ , além disso,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-\int_{\eta}^a \rho + \gamma(s) ds} = 0,$$

consequentemente,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[ \phi_0 \int_0^{\infty} k_2(a) \pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_{\eta}^a \rho + \gamma(s) ds} d\eta da \right] = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{H}$  é decrescente e, no intervalo  $[0, \infty)$ ,  $\mathcal{H}(0) > 1$  e, além disso,  $\mathcal{H}(\rho) \rightarrow 0$

quando  $\rho \rightarrow 0$ , desta forma, existe uma única solução real  $\rho^*$  positiva que satisfaz

$$\mathcal{H}(\rho) = 1.$$

E, neste caso, o equilíbrio livre da doença é instável, visto que  $x(a, t) = e^{\rho t}x(a)$ ,  $y(a, t) = e^{\rho t}y(a)$  e  $p(a, t) = e^{\rho t}p(a)$ , por conseguinte,  $|x(a, t)|$ ,  $|y(a, t)|$  e  $|p(a, t)|$  tendem ao infinito, em virtude de  $t > 0$ . Consequentemente, se afastam do equilíbrio livre da doença, pois em nosso estudo representam uma perturbação do equilíbrio.

Outro caso é se  $\mathcal{R}_0 < 1$ , ou melhor,  $\mathcal{H}(0) < 1$ . De forma análoga, chegaremos ao fato que a equação  $\mathcal{H}(0) = 1$  tem única solução  $\rho^*$ , porém negativa.

Por fim, mostremos que todas as soluções restantes, que são complexas, pois já verificamos as soluções reais, têm parte real negativa. Para isso, suponha que exista uma solução complexa  $\rho = \nu_1 + i\nu_2$ , tal que  $\nu_1 \geq 0$ . Desta forma, usando a fórmula de Euler para números complexos e o fato que para uma função integrável  $f$  tem-se  $|\int f(x) dx| \leq \int |f(x)| dx$ , obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(\rho)| &\leq \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} |e^{-\rho(a-\eta)}| d\eta da \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(a-\eta)} e^{-i\nu_2(a-\eta)} d\eta da \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(\eta-a)} e^{i\nu_2(\eta-a)} d\eta da \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(a-\eta)} \cdot |\cos(\nu_2(\eta-a)) + i \operatorname{sen}(\nu_2(\eta-a))| d\eta da \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(a-\eta)} \cdot |\cos(\nu_2(a-\eta)) - i \operatorname{sen}(\nu_2(a-\eta))| d\eta da, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} &|\cos(\nu_2(a-\eta)) - i \operatorname{sen}(\nu_2(a-\eta))| \\ &= \sqrt{[\cos(\nu_2(a-\eta))]^2 + [-\operatorname{sen}(\nu_2(a-\eta))]^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\nu_2(a-\eta)) + \operatorname{sen}^2(\nu_2(a-\eta))} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} &|\mathcal{H}(\rho)| \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(a-\eta)} \cdot |\cos(\nu_2(a-\eta)) - i \operatorname{sen}(\nu_2(a-\eta))| d\eta da \\ &= \phi_0 \int_0^\infty k_2(a)\pi(a) \int_0^a k_1(\eta)e^{-\int_\eta^a \gamma(s)ds} e^{-\nu_1(a-\eta)} \cdot 1 d\eta da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{H}(\nu_1) \\
&\leq \mathcal{H}(0) \quad (\text{pois } \nu_1 \geq 0) \\
&= \mathcal{R}_0 < 1,
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\mathcal{H}(\rho)| < 1,$$

consequentemente, não existiria  $\rho$  tal que  $\mathcal{H}(\rho) = 1$ . Por conseguinte,  $\mathcal{H}(\rho) = 1$  tem soluções complexas apenas com parte real negativa.

Destas últimas análises, o equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável, visto que  $x(a, t) = e^{\rho t}x(a)$ ,  $y(a, t) = e^{\rho t}y(a)$  e  $p(a, t) = e^{\rho t}p(a)$ , logo,  $|x(a, t)|$ ,  $|y(a, t)|$  e  $|p(a, t)|$  tendem a zero, em virtude de  $t > 0$ . Consequentemente, estão sempre próximas do equilíbrio livre da doença, pois em nosso estudo representam uma perturbação do equilíbrio.

Em consonância da explicação feita neste capítulo, temos estabelecido o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.** Se  $\mathcal{R}_0 < 1$ , o equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável. Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , o equilíbrio livre da doença é instável.

#### 4 PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO APLICADO AO MODELO DE MCKENDRICK COM INFUSÃO

A equação de McKendrick (2.2) em sua expressão temos apenas a taxa de mortalidade  $\mu(a)$  e, baseada nesta equação, são derivadas outras equações que envolvem taxas externas, isto é, diferentes da taxa de mortalidade. Uma equação decorrente dela é quando consideramos uma infusão da população (influxo)  $f(a, t)$ , nesta condição, a dinâmica populacional é descrita pela equação

$$Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t), \quad (a, t) \in Q_T, \quad (4.1)$$

onde  $Dy$  representa a derivada direcional de  $y$  na direção do vetor  $(1, 1)$ , isto é

$$Dy(a, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(a+h, t+h) - y(a, t)}{h}.$$

Se  $y$  é suficientemente suave, então

$$Dy(a, t) = \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Isto justifica o fato que em muitos textos a equação de McKendrick-Lotka-Sharpe é introduzida como

$$\frac{\partial y}{\partial a}(a, t) + \frac{\partial y}{\partial t}(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t).$$

Aqui o processo de nascimento também é descrito pela lei da renovação, assim como foi abordada anteriormente,

$$y(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da, \quad t \in (0, T) \quad (4.2)$$

e a distribuição da população inicial por

$$y(a, 0) = y_0(a), \quad a \in (0, A), \quad (4.3)$$

onde  $y_0$  é uma função conhecida.

Nosso objetivo nesta seção diz respeito ao problema de controle ótimo e, em parte, o princípio do máximo, desta forma, algumas demonstrações serão omitidas. Além disso, neste capítulo trabalharemos com as seguintes hipóteses:

**(H1)**  $\beta \in L^\infty(Q_T)$ ,  $\beta(a, t) \geq 0$  q.s.  $(a, t) \in Q_T$ ;

**(H2)**  $\mu \in L^1_{loc}([0, A] \times [0, T])$ ,  $\mu(a, t) \geq 0$  q.s.  $(a, t) \in Q_T$ ;

**(H3)**  $y_0 \in L^1(0, A)$ ,  $y_0(a) \geq 0$  q.s.  $a \in (0, A)$ ,

$f \in L^1(Q_T)$ ,  $f(a, t) \geq 0$  q.s.  $(a, t) \in Q_T$ .

Diante disso, entendemos como solução de (4.1)-(4.3) uma função  $y \in L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  que é uniformemente contínua ao longo de quase todas as curvas características e, além disso, satisfaça

$$\begin{cases} Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t) & \text{q.s. em } Q_T \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(\varepsilon, t + \varepsilon) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t)da & \text{q.s. } t \in (0, T) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(a + \varepsilon, \varepsilon) = y_0(a) & \text{q.s. } a \in (0, A) \end{cases} \quad (4.4)$$

**Teorema 4.1.** O problema (4.1)-(4.3) admite uma única solução. Esta solução é não negativa.

*Demonstração.* Ver SEBASTIAN, VIORELI e VINCENZO (2010) página 147. ■

**Teorema 4.2.** Se a taxa de mortalidade, além das condições citadas, satisfaz

$$(H4) \quad \int_0^A \mu(a, t - A + a)da = +\infty \text{ q.s. } t \in (0, T)$$

onde  $\mu$  é estendido por 0 em  $(0, A) \times (-\infty, 0)$ , então a solução  $y$  para (4.1)-(4.3) satisfaz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(A - \varepsilon, t - \varepsilon) = 0 \text{ q.s. } t \in (0, T),$$

isto é,  $y(A, t) = 0$  q.s.  $t \in (0, T)$ .

*Demonstração.* Ver SEBASTIAN, VIORELI e VINCENZO (2010) página 150. ■

**Teorema 4.3.** Se (H1)-(H4) são satisfeitas, então (4.4) tem solução fraca única.

*Demonstração.* Ver SEBASTIAN (2011) página 27. ■

**Teorema 4.4.** Seja  $y$  uma solução de (4.1)-(4.3).

(i) Se  $f(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$ , então  $y(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$ .

(ii) Se  $\beta_i, \mu_i, y_{0i}, f_i$  satisfazem (H1)-(H3) ( $i \in \{1, 2\}$ ) e

$$\begin{aligned} \beta_1(a, t) &\geq \beta_2(a, t), \quad \mu_1(a, t) \leq \mu_2(a, t) && \text{q.s. em } Q_T; \\ y_{01}(a) &\geq y_{02}(a) && \text{q.s. em } (0, A); \\ f_1(a, t) &\geq f_2(a, t) && \text{q.s. em } Q_T. \end{aligned}$$

Então,  $y^1(a, t) \geq y^2(a, t)$  q.s. em  $Q_T$ , onde  $y^i$  é a solução para (4.1)-(4.3) correspondente à  $\beta := \beta_i$ ,  $\mu := \mu_i$ ,  $y_0 := y_{0i}$  e  $f := f_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Além disso, se  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(Q_T)$  e  $f_n$  satisfaz **(H3)**, então

$$y_n \longrightarrow y$$

em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , onde  $y_n$  são as soluções de (4.1)-(4.3) correspondentes à  $f := f_n$ , respectivamente.

*Demonstração.* Ver SEBASTIAN, VIORELI e VINCENZO (2010) página 151. ■

Os resultados acima indicam que a solução  $y \in L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  de (4.1)-(4.3) é uma solução fraca, no sentido que satisfaz a igual abaixo

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^A [-D\varphi(a, t) + \mu(a, t)\varphi(a, t) - \beta(a, t)\varphi(0, t)] y(a, t) \, dadt \\ &= \int_0^A \varphi(a, 0)y_0(a) \, da + \int_0^T \int_0^A f(a, t)\varphi(a, t) \, dadt, \end{aligned}$$

onde  $\varphi$  é qualquer função absolutamente contínua ao longo de qualquer curva característica é tal que

$$\begin{cases} \varphi \in L^\infty(Q_T), \\ D\varphi \in L^1(Q_T), \\ D\varphi - \mu\varphi + \beta\varphi(0, \cdot) \in L^\infty(Q_T), \\ \varphi(A, t) = 0 \quad \text{q.s. } t \in (0, T), \\ \varphi(a, T) = 0 \quad \text{q.s. } a \in (0, A). \end{cases}$$

Para o que segue, denotemos por  $\Phi$  o conjunto de todas as funções  $\varphi$  com as propriedades citadas acima.

#### 4.1 Problema de Controle Ótimo

Nesta seção, estudaremos agora o problema de controle ótimo (**PCO**), isto é

$$\text{Maximizar } \int_0^T \int_0^A u(a, t)y^u(a, t) \, dadt \quad (4.5)$$

sujeito à  $u \in K = \{w \in L^\infty(Q_T); 0 \leq w(a, t) \leq L \text{ q.s. em } Q_T\}$ , onde  $y^u$  é a solução para

$$\begin{cases} Dy(a, t) + \mu(a, t)y(a, t) = f(a, t) - u(a, t)y(a, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y(a, t) \, da, & t \in (0, T) \\ y(a, 0) = y_0(a), & a \in (0, A) \end{cases} \quad (4.6)$$

Neste contexto,  $L > 0$ ,  $K$  é o conjunto de controles admissíveis e  $u \in K$  é o controle. Salientamos que  $u$  desempenha o papel de uma taxa de mortalidade adicional. A integral  $\int_0^T \int_0^A u(a, t) y^u(a, t) da dt$  representa a colheita total. Nosso objetivo é encontrar o controle que retorne a colheita máxima, tal controle é denominado “controle ótimo”. Nosso primeiro passo é discutir a existência de tal controle, como segue no teorema abaixo.

**Teorema 4.5.** O PCO admite pelo menos um controle ótimo.

*Demonstração.* Defina

$$\Psi(u) = \int_0^T \int_0^A u(a, t) y^u(a, t) da dt, \quad u \in K$$

e seja

$$d = \sup_{u \in K} \Psi(u).$$

Verifiquemos que  $d$  existe. Como  $u \in K$ , então  $u \geq 0$  e  $\mu_1 := \mu + u \geq \mu \geq 0$ , além disso,  $f(a, t)$ ,  $\beta(a)$  e  $y_0(a)$  são as mesmas para  $\mu_1$  e  $\mu$ , conseqüentemente, pelo Teorema 4.4,

$$y^u(a, t) \leq y^0(a, t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Psi(u) &= \int_0^T \int_0^A u(a, t) y^u(a, t) da dt \\ &\leq \int_0^T \int_0^A L \cdot y^u(a, t) da dt \\ &= L \int_0^T \int_0^A y^u(a, t) da dt. \\ &\leq L \int_0^T \int_0^A y^0(a, t) da dt \\ &< +\infty, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} u(a, t) \in K \\ \\ y^u(a, t) \leq y^0(a, t) \end{array}$$

( $y^0(a, t)$  é a solução correspondente à  $u \equiv 0$ ), para qualquer  $u \in K$ . Desta forma,  $d \in [0, \infty)$ .

Agora, seja  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset K$  uma seqüência de controles satisfazendo

$$d - \frac{1}{n} < \Psi(u_n) \leq d. \quad (4.7)$$

Com isso, realizando uma análise análoga à feita acima, concluímos

$$0 \leq y^{u_n}(a, t) \leq y^0(a, t) \quad \text{q.s. em } Q_T.$$

Logo, a sequência  $(y^{u_n})$  é limitada em  $L^2(Q_T)$ . E assim, obtemos uma subsequência de  $(y^{u_n})$ , que por simplicidade ainda denotaremos por  $(y^{u_n})$ , de tal forma que

$$y^{u_n} \longrightarrow y^* \quad \text{fraco em } L^2(Q_T).$$

Recordemos o teorema e corolário de Mazur, os quais usaremos para conclusão deste teorema.

**Teorema 4.6** (Mazur). Um subconjunto convexo em um espaço de Banach real é fracamente fechado se, e somente se, ele é fortemente convexo.

**Corolário 4.7** (Mazur). Seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de um espaço de Banach real  $X$ , o qual é fracamente convergente para  $x \in X$ . Então, existe uma sequência  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $y_n \in \text{conv}\{x_k; k \geq n+1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que converge fortemente para  $x$ .

Usando agora o corolário de Mazur, para sequência  $(y)^{u_n}$  obtemos uma sequência  $\{\tilde{y}_n\}$  satisfazendo

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}, \quad \lambda_i^n \geq 0, \quad \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n = 1 \quad (4.8)$$

com  $k_n \geq n+1$ , que segue da definição de convexidade do conjunto e, além disso,

$$\tilde{y}_n \longrightarrow y^* \quad (\text{forte}) \text{ em } L^2(Q_T). \quad (4.9)$$

Para o que segue, consideremos os controles  $\tilde{u}_n$  da seguinte forma:

$$\tilde{u}_n(a, t) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) u_i(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)}, & \text{se } \tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) = 0 \end{cases}.$$

**Afirmção:** Estes controles são tais que  $\tilde{u}_n \in K$  e

$$\tilde{y}_n(a, t) = y^{\tilde{u}_n}(a, t) \quad \text{q.s. em } Q_T.$$

De fato, mostremos primeiro que  $\tilde{u}_n \in K$ . Para isso, note que:

i) Se

$$\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) \neq 0,$$

então, como em particular para  $i \in \{n+1, \dots, k_n\}$  com  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_i(a, t) \leq L,$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) u_i(a, t) \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} L \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) u_i(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \leq L \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \\ \Rightarrow 0 &\leq \tilde{u}_n(a, t) \leq L; \end{aligned}$$

ii) Se

$$\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) = 0.$$

Então,

$$0 = \tilde{u}_n(a, t) \leq L.$$

Portanto, em qualquer caso,

$$0 \leq \tilde{u}_n(a, t) \leq L \quad \text{q.s em } Q_T.$$

Agora verifiquemos que  $\tilde{u}_n(a, t) \in L^\infty(Q_T)$ .

i) Se

$$\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) \neq 0.$$

Então,

$$|\tilde{u}_n(a, t)| = \left| \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) u_i(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \right| \leq \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} |\lambda_i^n y^{u_i}(a, t) u_i(a, t)|}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n |y^{u_i}(a, t)|},$$

de (4.8),  $\lambda_i^n \geq 0$  e pelo Teorema 4.1,  $y^{u_i}$  são não negativas. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_n(a, t)| &\leq \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) |u_i(a, t)|}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \\ &\leq \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) L}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \\ &= L \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \\ &= L \leq \infty. \end{aligned}$$

Logo,  $\tilde{u}_n(a, t) \in L^\infty(Q_T)$ ;

ii) Se

$$\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) = 0,$$

então,

$$|\tilde{u}_n(a, t)| = 0 \leq L \leq \infty.$$

Ou seja,  $\tilde{u}_n \in L^\infty(Q_T)$ .

Portanto, em qualquer caso,  $\tilde{u}_n \in L^\infty(Q_T)$ . Consequentemente, das duas últimas verificações,  $\tilde{u}_n \in K$ .

Verifiquemos agora que  $\tilde{y}_n(a, t) = y^{\tilde{u}_n}(a, t)$  q.s em  $Q_T$ . Ora, sabemos que  $y^{\tilde{u}_n}(a, t)$  satisfaz

$$Dy^{\tilde{u}_n}(a, t) + \mu(a, t)y^{\tilde{u}_n}(a, t) = f(a, t) - \tilde{u}_n y^{\tilde{u}_n}(a, t), \quad (*)$$

visto que  $\tilde{u}_n \in K$ . Por outro lado, seja  $y^{u_i}$  a solução do problema

$$Dy^{u_i}(a, t) + \mu(a, t)y^{u_i}(a, t) = f(a, t) - u_i(a, t)y^{u_i}(a, t).$$

Daí, multiplicando ambos os lados por  $\lambda_i^n$ , vem

$$\begin{aligned} Dy^{u_i}(a, t)\lambda_i^n + \mu(a, t)y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n &= f(a, t)\lambda_i^n - u_i(a, t)y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n \\ \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{k_n} Dy^{u_i}(a, t)\lambda_i^n + \sum_{i=n+1}^{k_n} \mu(a, t)y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n &= \sum_{i=n+1}^{k_n} f(a, t)\lambda_i^n - \sum_{i=n+1}^{k_n} u_i(a, t)y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$D\left(\sum_{i=n+1}^{k_n} y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n\right) + \mu(a, t)\left(\sum_{i=n+1}^{k_n} y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n\right) = f(a, t)\left(\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n\right) - \sum_{i=n+1}^{k_n} u_i(a, t)y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n. \quad (4.10)$$

Decorrente do corolário de Mazur

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} y^{u_i}(a, t)\lambda_i^n \quad \text{e} \quad \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n = 1.$$

Além disso, para  $\tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t) \neq 0$  estamos considerando

$$\tilde{u}_n = \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)u_i(a, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)} \Rightarrow \tilde{u}_n \tilde{y}_n = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i}(a, t)u_i(a, t).$$

Desta forma, (4.10) torna-se

$$D\tilde{y}_n + \mu\tilde{y}_n = f(a, t) - \tilde{u}_n \tilde{y}_n. \quad (**)$$

Mas estamos considerando as hipóteses requeridas no Teorema 4.1, por conseguinte, há unicidade do problema (\*) e (\*\*), isto é

$$\tilde{y}_n(a, t) = y^{\tilde{u}_n}(a, t) \text{ q.s em } Q_T. \quad (4.11)$$

Como  $(\tilde{u}_n)$  é limitada em  $L^\infty(Q_T)$ , então ela é limitada em  $L^2(Q_T)$ . Desta forma,  $(\tilde{u}_n)$  possui uma subsequência, a qual ainda será denotada  $(\tilde{u}_n)$ , tal que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightarrow u^* & \text{fracamente em } L^2(Q_T), \\ \Psi(\tilde{u}_n) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Psi(u_i) \rightarrow d & \text{quando } n \rightarrow +\infty \end{cases}. \quad (4.12)$$

Note que pela igualdade (4.11)

$$\Psi(\tilde{u}_n) = \int_0^T \int_0^A \tilde{u}_n(a, t) y^{\tilde{u}_n}(a, t) \, dadt = \int_0^T \int_0^A \tilde{u}_n(a, t) \tilde{y}_n(a, t) \, dadt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{u}_n) &= \int_0^T \int_0^A \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i} u_i}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i y^{u_i}} \tilde{y}_n(a, t) \, dadt = \int_0^T \int_0^A \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n y^{u_i} u_i}{\tilde{y}_n(a, t)} \tilde{y}_n(a, t) \, dadt \\ &= \sum_{i=n+1}^{k_n} \int_0^T \int_0^A \lambda_i^n y^{u_i} u_i \, dadt = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \int_0^T \int_0^A y^{u_i} u_i \, dadt \\ &= \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Psi(u_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Psi(\tilde{u}_n) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Psi(u_i).$$

Assim, considerando o limite em (4.7) e pelas convergências (4.9) e (4.12), inferimos que

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(\tilde{u}_n) = \int_0^T \int_0^A u^*(a, t) y^*(a, t) \, dadt.$$

Nos resta provar a seguinte igualdade:

$$y^*(a, t) = y^{u^*}(a, t) \text{ q.s. em } Q_T. \quad (4.13)$$

Para tanto, recordemos que  $y^{\tilde{u}_n}$  é uma solução fraca de (4.6) correspondente à  $u := \tilde{u}_n$ , isto é:

$$\int_0^T \int_0^A -[D\varphi(a, t) + (\mu(a, t) + \tilde{u}_n(a, t))\varphi(a, t) - \beta(a, t)\varphi(a, t)] y^{\tilde{u}_n}(a, t) \, dadt$$

$$= \int_0^T \int_0^A f(a, t) \varphi(a, t) \, da dt \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Passando o limite e usando o fato que  $\tilde{u}_n \rightarrow u^*$  fraco em  $L^2$ , segue que  $y^{\tilde{u}_n} \rightarrow y^*$  em  $L^2(Q_T)$ , com isso, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^A -[D\varphi(a, t) + (\mu(a, t) + u^*(a, t))\varphi(a, t) - \beta(a, t)\varphi(a, t)]y^*(a, t) \, da dt \quad (4.14) \\ & = \int_0^T \int_0^A f(a, t)\varphi(a, t) \, da dt \quad \forall \varphi \in \Phi. \end{aligned}$$

E, pelo Teorema 4.1, segue a igualdade (4.13), pois este problema tem solução única e  $y^{u^*}$  é solução de (4.14), ou seja,

$$y^*(a, t) = y^{u^*}(a, t) \quad \text{q.s. em } Q_T.$$

Desta forma,

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(\tilde{u}_n) = \int_0^T \int_0^A u^*(a, t)y^*(a, t) \, da dt = \int_0^T \int_0^A u^*(a, t)y^{u^*}(a, t) \, da dt.$$

Logo,

$$d = \Psi(u^*).$$

Portanto,  $u^*$  é um controle ótimo. ■

### O princípio do máximo

**Lema 4.8.** Seja  $g \in L^\infty(Q_T)$ . Então, o problema

$$\begin{cases} D\varphi - \mu(a, t)\varphi = g(a, t) - \beta(a, t)\varphi(0, t), & (a, t) \in Q_T, \\ \varphi(A, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \varphi(a, T) = 0, & a \in (0, A) \end{cases}$$

tem uma única solução  $\varphi$ . Ademais, se tivermos  $g(a, t) \geq 0$  q.s em  $Q_T$ , então  $\varphi(a, t) \leq 0$  q.s em  $Q_T$ .

*Demonstração.* Ver SEBASTIAN (2011) página 28. ■

**Teorema 4.9.** Suponha que além de  $f(a, t) > 0$  q.s em  $Q_T$ . Se  $u^*$  é um controle ótimo

para o problema (PCO) e  $p$  é a solução de

$$\begin{cases} Dp - \mu y = u^*(1 + p) - \beta(a, t)y(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(a, T) = 0, & a \in (0, A) \end{cases}, \quad (4.15)$$

então

$$u^*(a, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 + y(a, t) < 0 \\ L, & \text{se } 1 + y(a, t) > 0 \end{cases}. \quad (4.16)$$

*Demonstração.* A existência e unicidade de  $p$  para (4.15) segue pelo Lema 4.8. De fato, temos da primeira equação de (4.15) que  $Dy - (\mu + u^*)y = u^* - \beta(a, t)y(0, t)$ . Daí, note que  $\mu + u^* \in L^\infty(Q_T)$ , pois  $\mu$  e  $u^* \in L^\infty(Q_T)$ . Desta forma, considerando  $g = u^* \in L^\infty(Q_T)$  temos, pelo Lema 4.8, a garantia da existência e unicidade.

Para qualquer  $v \in L^\infty(Q_T)$ , tal que  $u^* + \varepsilon v \in K$  para qualquer  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, obtemos

$$\int_0^T \int_0^A u^* y^{u^*} dadt \geq \int_0^T \int_0^A (u^* + \varepsilon v) y^{u^* + \varepsilon v} dadt,$$

visto que  $u^*$  é um controle ótimo para o PCO, mediante a isto

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^A (u^* + \varepsilon v) y^{u^* + \varepsilon v} dadt - \int_0^T \int_0^A u^* y^{u^*} dadt \leq 0 \\ \Rightarrow & \int_0^T \int_0^A (u^* + \varepsilon v) y^{u^* + \varepsilon v} dadt - \int_0^T \int_0^A u^* y^{u^*} dadt \leq 0 \\ & \Rightarrow \int_0^T \int_0^A (u^* + \varepsilon v) y^{u^* + \varepsilon v} - u^* y^{u^*} dadt \leq 0 \\ & \Rightarrow \int_0^T \int_0^A u^* (y^{u^* + \varepsilon v} - y^{u^*}) + \varepsilon v y^{u^* + \varepsilon v} dadt \leq 0 \\ & \Rightarrow \int_0^T \int_0^A u^* \frac{(y^{u^* + \varepsilon v} - y^{u^*})}{\varepsilon} + v y^{u^* + \varepsilon v} dadt \leq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_0^A u^* \frac{y^{u^* + \varepsilon v} - y^{u^*}}{\varepsilon} dadt + \int_0^T \int_0^A v y^{u^* + \varepsilon v} dadt \leq 0. \quad (4.17)$$

Note que a convergência  $y^{u^* + \varepsilon v} \rightarrow y^{u^*}$  em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  com  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  segue pelo Teorema 4.4. Com efeito,  $y^{u^* + \varepsilon v}$  é a solução referente à  $\mu_\varepsilon := \mu + (u^* + \varepsilon v)$  e  $y^{u^*}$  é a solução quando consideramos o problema com  $\mu_1 := \mu + u^*$ , ou seja,  $\mu_\varepsilon \leq \mu_1$ , as funções de influxo são as mesmas para  $\mu_1$  e cada  $\mu_\varepsilon$ , ou seja,  $f_\varepsilon \rightarrow f_1$  e as demais funções requeridas

no teorema também são as mesmas, conseqüentemente, a convergência está verificada.

**Lema 4.10.** A seguinte convergência está assegurada

$$\frac{1}{\varepsilon} [y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}] \longrightarrow z \text{ em } L^\infty(0, T; L^1(0, A)), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

onde  $z$  é a solução para

$$\begin{cases} Dz(a, t) + \mu(a, t)z(a, t) = -vy^{u^*} - u^*z, & (a, t) \in Q_T \\ z(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)z(a, t) da, & t \in (0, T) \\ z(a, 0) = 0, & a \in (0, A) \end{cases} \quad (4.18)$$

**Prova do lema.** A existência e unicidade de  $z$ , a solução de (4.18), segue pelo Teorema 4.1. Para tanto, de início, observe que  $f = -vy^{u^*} \in L^1(Q_T)$ , pois  $v$  e  $y^{u^*}$  pertencem ao  $L^\infty(Q_T)$  e com isso

$$|f| = |v| \cdot |y^{u^*}| \leq \|v\|_{L^\infty(Q_T)} \cdot \|y^{u^*}\|_{L^\infty(Q_T)}.$$

Logo,  $f \in L^\infty(Q_T)$  e, portanto,  $f \in L^1(Q_T)$ . Ademais,

$$Dz(a, t) + (\mu + u^*)z(a, t) = -vy^{u^*} \iff (4.18)_1,$$

de tal forma que  $\mu_1 := \mu + u^* \in L^\infty(Q_T)$ , visto que  $\mu$  e  $u^*$  pertencem ao  $L^\infty(Q_T)$ . Diante dessas conclusões, estamos nas hipóteses do Teorema 4.1, conseqüentemente, o problema (4.18) possui única solução.

Para o que segue, denotemos

$$w_\varepsilon(a, t) = \frac{1}{\varepsilon} [y^{u^*+\varepsilon v}(a, t) - y^{u^*}(a, t)] - z(a, t), \quad (a, t) \in Q_T.$$

Reiteramos que para o sistema (4.6)  $y^{u^*+\varepsilon v}$  é a solução para  $\mu := \mu + (u^* + \varepsilon v)$  e  $y^{u^*}$  para  $\mu := \mu + u^*$ , além disso,  $z$  é solução (4.18). Daí,

$$Dy^{u^*+\varepsilon v} + \mu(a, t)y^{u^*+\varepsilon v} = f(a, t) - (u^* + \varepsilon v)y^{u^*+\varepsilon v}, \quad (4.19a)$$

$$Dy^{u^*} + \mu(a, t)y^{u^*} = f(a, t) - u^*y^{u^*}, \quad (4.19b)$$

$$Dz + \mu(a, t)z = -vy^{u^*} - u^*z, \quad (4.19c)$$

donde, fazendo  $\frac{1}{\varepsilon}[(4.19a) - (4.19b)] - (4.19c)$ , tem-se que  $w_\varepsilon$  satisfaz

$$Dw_\varepsilon(a, t) + \mu(a, t)w_\varepsilon(a, t) = -u^*w_\varepsilon - v[y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}].$$

Além disso, é imediato que  $w_\varepsilon(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)w_\varepsilon(a, t)$ , pois

$$y^{u^*+\varepsilon v}(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y^{u^*+\varepsilon v}(a, t) da, \quad y^{u^*}(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)y^{u^*}(a, t) da$$

e

$$z(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)z(a, t) da.$$

Assim como  $w_\varepsilon(a, 0) = 0$ , visto que  $y^{u^*+\varepsilon v}(a, 0) = 0$ ,  $y^{u^*}(a, 0) = 0$  e  $z(a, 0) = 0$ . Por conseguinte,  $w_\varepsilon$  é solução de

$$\begin{cases} Dw(a, t) + \mu(a, t)w(a, t) = -u^*w - v[y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}], & (a, t) \in Q_T \\ w(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)w(a, t)da, & t \in (0, T) \\ w(a, 0) = 0, & a \in (0, A) \end{cases} \quad (4.20)$$

Diante disso, observe que  $f = -v[y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}] \in L^1(Q_T)$ . De fato, temos que

$$|f| = |v||y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}| \Rightarrow \int_0^T \int_0^A |f| dadt = \int_0^T \int_0^A |v||y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}| dadt.$$

Recordemos que  $v \in L^\infty(Q_T)$ , então  $|v| \leq \|v\|_{L^\infty(Q_T)}$ . Ademais, como estamos trabalhando com  $y^{u^*+\varepsilon v}$  e  $y^{u^*}$  sendo soluções para seus respectivos problemas, então ambos pertencem ao  $L^1(Q_T)$ , logo a diferença também pertence, daí

$$\int_0^T \int_0^A |y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}| dadt < C_1$$

com  $C_1$  constante. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^A |f| dadt &= \int_0^T \int_0^A |v||y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}| dadt \\ \Rightarrow \int_0^T \int_0^A |f| dadt &= \|v\|_{L^\infty(Q_T)} \int_0^T \int_0^A |y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}| dadt \\ \Rightarrow \int_0^T \int_0^A |f| dadt &\leq \|v\|_{L^\infty(Q_T)} C_1 = C. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $f \in L^1(Q_T)$ . Disto podemos inferir que

$$f_\varepsilon = -v[y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}] \longrightarrow f = 0.$$

Como já verificamos que  $y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*} \longrightarrow 0$  em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , então podemos concluir via Teorema 4.4 que  $w_\varepsilon \rightarrow 0$  em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e,

portanto, fica demonstrado o lema, pois

$$w_\varepsilon \longrightarrow 0 \iff \frac{1}{\varepsilon} [y^{u^*+\varepsilon v} - y^{u^*}] \longrightarrow z$$

em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

**Continuação da demonstração do Teorema 4.9:** Considerando o limite em (4.17) para  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e usando o lema anterior,

$$\int_0^T \int_0^A (u^* z + v y^{u^*}) \, dadt \leq 0. \quad (4.21)$$

Multiplicando (4.15)<sub>1</sub> por  $z$  e integrando sobre  $Q_T$ , encontramos

$$\int_0^T \int_0^A (Dy - \mu y)z \, dadt = \int_0^T \int_0^A [u^*(1+y)z - \beta(a, t)y(0, t)z] \, dadt. \quad (4.22)$$

Além disso,

$$D(yz) = (Dy)z + (Dz)y,$$

integrando sobre  $Q_T$

$$\int_0^T \int_0^A D(yz) \, dadt = \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt + \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt,$$

ou seja,

$$\int_0^T y(A, t)z(A, t) - y(0, t)z(0, t) \, dt = \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt + \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt.$$

Na segunda equação de (4.15) temos que a  $y(A, t) = 0$ , logo

$$\int_0^T -y(0, t)z(0, t) \, dt = \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt + \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt.$$

Usando a segunda equação de (4.18), a saber,  $z(0, t) = \int_0^A \beta(a, t)z(a, t) \, da$ , segue

$$\int_0^T -y(0, t) \int_0^A \beta(a, t)z(a, t) \, dadt = \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt + \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^A -y(0, t)\beta(a, t)z(a, t) \, dadt &= \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt + \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt. \\ \Rightarrow \int_0^T \int_0^A y(0, t)\beta(a, t)z(a, t) \, dadt &= - \int_0^T \int_0^A (Dy)z \, dadt - \int_0^T \int_0^A (Dz)y \, dadt. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $\int_0^T \int_0^A \mu zy \, dadt$  ao lado direito e organizando um em cada uma das parcelas já existentes, vem

$$\int_0^T \int_0^A y(0, t) \beta(a, t) z(a, t) \, dadt = - \int_0^T \int_0^A (Dy)z - \mu zy \, dadt - \int_0^T \int_0^A (Dz)y + \mu zy \, dadt,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^A y(0, t) \beta(a, t) z(a, t) \, dadt &= - \int_0^T \int_0^A z(Dy - \mu y) \, dadt - \int_0^T \int_0^A y(Dz + \mu z) \, dadt, \\ \Rightarrow - \int_0^T \int_0^A z(Dy - \mu y) \, dadt - \int_0^T \int_0^A y(Dz + \mu z) \, dadt &= \int_0^T \int_0^A y(0, t) \beta(a, t) z(a, t) \, dadt. \end{aligned}$$

Somando a última igualdade membro a membro com a igualdade (4.22), chegamos em

$$- \int_0^T \int_0^A y(Dz + \mu z) \, dadt = \int_0^T \int_0^A u^*(1 + y)z \, dadt.$$

Com isso, pela primeira equação de (4.18)

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^A y(-vy^{u^*} - u^*z) \, dadt &= \int_0^T \int_0^A u^*(1 + y)z \, dadt. \\ \Rightarrow \int_0^T \int_0^A yvy^{u^*} + u^*yz \, dadt &= \int_0^T \int_0^A u^*z + u^*yz \, dadt. \\ \Rightarrow \int_0^T \int_0^A yvy^{u^*} \, dadt &= \int_0^T \int_0^A u^*z \, dadt \end{aligned}$$

e, por (4.21),

$$\int_0^T \int_0^A yvy^{u^*} + vy^{u^*} \, dadt \leq 0.$$

Resultando em

$$\int_0^T \int_0^A v(a, t)(1 + y(a, t))y^{u^*}(a, t) \, dadt \leq 0$$

para qualquer  $v \in L^\infty(Q_T)$  tal que  $u^* + \varepsilon v \in K$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Denotemos por  $V$  o conjunto desses  $v$ 's, ou seja,

$$V = \{v \in L^\infty(Q_T); u^* + \varepsilon v \in K, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno}\}$$

Diante disso,

$$(1 + y(a, t))y^{u^*}(a, t) \in N_K(u^*),$$

ou seja,  $(1 + y(a, t))y^{u^*}(a, t)$  pertence ao cone normal de  $K$  em  $u^*$ , isto é,

$$N_K(u^*) = \{v \in V; \langle w - u^*, v \rangle \leq 0 \text{ para qualquer } w \in K\}$$

Consequentemente, como um elemento  $w \in K$  é tal que  $0 \leq w \leq L$ , obtemos

$$u^*(a, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } (1 + y(a, t))y^{u^*}(a, t) < 0 \\ L, & \text{se } (1 + y(a, t))y^{u^*}(a, t) > 0 \end{cases} .$$

Por fim, estamos considerando  $f(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$ , por conseguinte, concluimos pelo Teorema 4.1 que  $y^{u^*}(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$  e consequentemente (4.16) está verificada, ou seja,

$$u^*(a, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 + y(a, t) < 0 \\ L, & \text{se } 1 + y(a, t) > 0 \end{cases} .$$

■

**Corolário 4.11.** Como consequência do Teorema 4.9, obtemos que  $y$ , a solução de (4.15), é uma solução de

$$\begin{cases} Dy - \mu y = L(1 + y)^+ - \beta(a, t)y(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(a, T) = 0, & a \in (0, A) \end{cases} . \quad (4.23)$$

Além disso, o sistema (4.23) tem uma única solução.

*Demonstração.* Temos que

$$(1 + y)^+ = \max\{1 + y, 0\},$$

nos pontos  $(a, t) \in Q_T$  que  $1 + y(a, t) > 0$  temos pelo teorema anterior que  $u^* = L$ .

Agora suponhamos que  $y_1$  e  $y_2$  sejam duas soluções distintas de (4.23), desta forma,  $w := y_1 - y_2$  é solução para

$$\begin{cases} Dw - \mu w = L[(1 + y_1)^+ - (1 + y_2)^+] - \beta(a, t)w(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ w(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ w(a, T) = 0, & a \in (0, A) \end{cases} . \quad (4.24)$$

Note que  $|w|$  é solução de

$$\begin{cases} Dh - \mu h = l(a, t) - \beta(a, t)h(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ h(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ h(a, T) = 0, & a \in (0, A) \end{cases}$$

onde

$$l(a, t) = L [(1 + y_1)^+ - (1 + y_2)^+] \operatorname{sign}(y_1 - y_2) - \beta(a, t)w(0, t) \operatorname{sign}(y_1 - y_2) + \beta(a, t)|w(0, t)|.$$

Basta observar que se  $y_1 > y_2$ , então  $l(a, t) = L [(1 + y_1)^+ - (1 + y_2)^+]$  e no caso  $y_1 > y_2$ , tem-se  $(1 + y_1)^+ - (1 + y_2)^+ < 0$ , conseqüentemente,  $l(a, t) = L [(1 + y_1)^+ - (1 + y_2)^+]$ . Desta forma, desde que  $l \in L^\infty(Q_T)$  e  $l(a, t) \geq 0$  q.s. em  $Q_T$ , deduzimos pelo Lema 4.8 que  $|w(a, t)| \leq 0$  q.s. em  $Q_T$  e conseqüentemente  $w(a, t) = y_1(a, t) - y_2(a, t) = 0$ , ou seja,  $q_1(a, t) = q_2(a, t)$  q.s. em  $Q_T$ . ■

Até o momento, pelo Teorema 4.5, temos a existência do controle ótimo, entretanto, a unicidade é esclarecida pelo seguinte resultado:

**Teorema 4.12.** Seja  $u^*$  um controle ótimo para o PCO. Além disso, consideremos  $f(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$ , e que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(a, t) > 0 \text{ q.s. em } Q_T, \\ \frac{\beta}{\mu}(\cdot, t) \text{ não é uma constante estritamente positiva em qualquer} \\ \text{subconjunto de medida positiva para quase todo } t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Sobre estas condições, a equação  $(4.15)_1$  implica que o conjunto

$$\mathcal{D} = \{(a, t) \in Q_T; y(a, t) = -1\}$$

tem medida de Lebesgue zero ( $y$  é a solução de (4.15)), além disso,  $u^*$  é um controle bang-bang. Com isso, o controle ótimo é único.

*Demonstração.* Seja  $y$  a solução de (4.15). Para qualquer  $(a, t) \in \text{Int}(\mathcal{D})$ , tem-se

$$Dy = 0,$$

pois  $(a, t) \in \text{Int}(\mathcal{D})$  desde que exista uma vizinhança de  $(a, t)$  contida em  $\mathcal{D}$  e conseqüentemente existem pontos suficientemente próximos de  $(a, t)$  que estão no  $\text{Int}(\mathcal{D})$ . Diante disso, de  $(4.15)_1$

$$\mu(a, t) = -\beta(a, t)y(0, t) \Rightarrow -1 = \frac{\beta}{\mu}(a, t)y(0, t) \quad \text{q.s. } (a, t) \in \mathcal{D}.$$

Desde que (4.25) estejam satisfeitas, então  $\text{meas}(\mathcal{D}) = 0$ , desta forma,  $y(a, t) \neq -1$  q.s. em  $Q_T$ . Com isso, de (4.16) obtemos que  $u^*$  é um controle bang-bang, pois é 0 ( $y < -1$ ) ou  $L$  ( $y > -1$ ), em que  $0 < L$ . Mas  $y(a, t)$  é solução única de (4.24), por conseguinte, de (4.16) segue que o controle ótimo é único. ■

**Observação 4.13.** Se as hipóteses do teorema anterior se mantêm, então podemos concluir que o estado adjunto  $y$  (que também é a solução de (4.23) não depende de  $f$ , nem de  $y_0$ . Denote por  $u^*$  este controle ótimo.

A última observação permite-nos formular o seguinte resultado para o caso geral  $f(a, t) \geq 0$  q.s. em  $Q_T$  :

**Teorema 4.14.** Se (H1)-(H4) são satisfeitas, então o controle  $u^*$  é ótimo também para o PCO correspondente ao influxo não negativo  $f$ .

*Demonstração.* Considere  $f_n \in L^1(Q_T)$  tal que  $f_n(a, t) > 0$  q.s. em  $Q_T$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(Q_T)$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ ). Denote por  $\Psi_n(u)$  a função de custo correspondente à  $f := f_n$  no PCO e por  $y_n^u$  a solução para (4.6) correspondente à  $u$  e  $f := f_n$ . O Teorema 4.4 permite-nos concluirmos que para qualquer  $u \in K$ ,

$$y_n^u \rightarrow y^u$$

em  $L^\infty(0, T; L^1(0, A))$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Desta forma,

$$\Psi_n(u) \rightarrow \Psi(u) \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Visto que para qualquer  $u \in K$  temos  $\Psi_n(u^*) \geq \Psi_n(u)$  e, usando a última convergência, nós concluimos que  $u^*$  é um controle ótimo para o PCO. ■

**Observação 4.15.** Em suma, se (H1)-(H4) são satisfeitas, então o PCO admite um único controle ótimo  $u^*$ . Para encontrar  $u^*$ , primeiro determinamos a solução  $y$  de (4.23). Por conseguinte, pelos resultados aqui realizados, temos que o controle ótimo agora é dado por (4.16).

## 5 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Alguns modelos de equações diferenciais parciais, como os considerados anteriormente, são complexos de obter solução analiticamente ou mesmo diretamente por um sistema de álgebra computacional. Desta forma, precisamos de métodos numéricos para obtermos aproximações das soluções.

Entre os métodos conhecidos usaremos o método das diferenças finitas, cujo objetivo é aproximar a solução em uma série de pontos no domínio.

Em geral, os autores usam o programa MATLAB, visto que é bastante conhecido e usado para questões do tipo. Entretanto, usaremos a linguagem Python, devido à praticidade dela. Para obter os códigos usados aqui, acessar <https://github.com/Jeffhenri/Codigos-TCC>.

### 5.1 Método numérico para o modelo McKendrick–von Foerster

O primeiro passo para o método é discretizarmos o domínio, no nosso contexto:

$$\mathcal{D} = \{(a, t) : 0 \leq a \leq A \text{ e } t \geq 0\}.$$

Para isso, tanto na direção da idade  $a$  quanto na direção do tempo  $t$ , consideremos uma partição de tal forma que ela tenha o mesmo espaçamento entre dois pontos consecutivos e, além disso, a distância entre dois pontos da idade e do tempo seja a mesma, ou seja,

$$\Delta a = \Delta t.$$

Da forma que discretizamos o domínio, para uma posição  $i$  na direção da idade e para uma posição  $n$  na direção do tempo, tem-se:

$$a_i = i\Delta a \quad \text{e} \quad t_n = n\Delta t.$$

Um adendo a respeito de  $\mathcal{D}$  é que a idade máxima ( $A$ ) e o tempo máximo ( $T$ ) são valores finitos, visto que é algo necessário para conseguirmos aplicar o método computacional.

Em geral, os quocientes  $\frac{A}{\Delta a}$  e  $\frac{T}{\Delta t}$  podem não ser valores inteiros, entretanto, podemos considerar a parte inteira destes quocientes, denotemos estes respectivamente por  $M$  e  $N$ , ou seja:

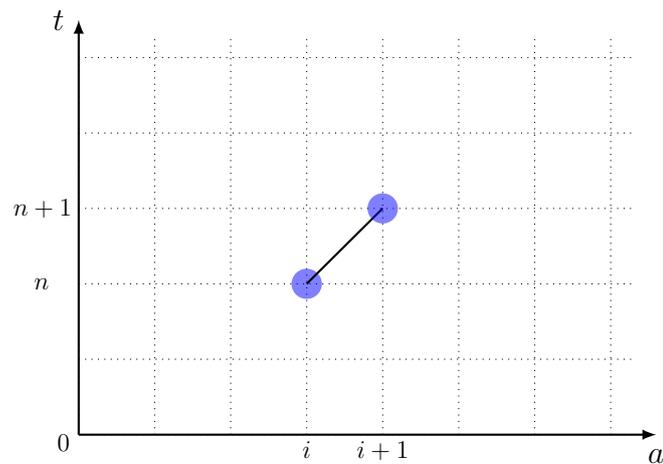
$$M = \left\lfloor \frac{A}{\Delta a} \right\rfloor \quad \text{e} \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor.$$

Como estamos considerando  $\Delta a = \Delta t$ , então as igualdades acima indicam que na direção da idade obtemos uma divisão de  $M$  partes com distância  $\Delta t$  e na direção do tempo  $N$  partes com distância  $\Delta t$ . Contudo, sem perda de essência, podemos realizar uma pequena alteração nos valores de  $A$  e  $T$  para que

$$A = M\Delta t \quad \text{e} \quad T = N\Delta t.$$

Tal consideração gera a seguinte malha quadriculada do domínio  $\mathcal{D}$

**Figura 5.1** – Discretização do domínio  $\mathcal{D}$ .



**Fonte:** Autor

O método numérico computa a aproximação da solução em cada ponto da malha, isto é,

$$y_i^n \approx y(a_i, t_n).$$

Feita a discretização do domínio, resta discretizar a equação diferencial, a condição de contorno e a condição inicial. Para computarmos a estimativa da equação diferencial consideramos  $a = a_{i+1}$  e  $t = t_n$ . Desta forma, a equação de McKendrick-von Foerster (2.2) é estudada como

$$\frac{\partial y}{\partial a}(a_{i+1}, t_n) + \frac{\partial y}{\partial t}(a_{i+1}, t_n) = -\mu(a_{i+1})y(a_{i+1}, t_n).$$

Em junção, substituímos as derivadas parciais por quocientes de diferenças, onde, respectivamente, para derivada em  $a$  e  $t$  substituímos pelo quociente de diferença progressivo (**Forward**) e pelo quociente de diferença regressivo (**Backward**), como segue

$$\frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{\Delta a} + \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i+1}^n}{\Delta t} = -\mu_{i+1} y_{i+1}^n.$$

Recordemos que em nosso estudo  $\Delta a = \Delta t$ . Logo,

$$\frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{\Delta t} + \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_{i+1}^n}{\Delta t} = -\mu_{i+1} y_{i+1}^n,$$

ou ainda,

$$\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} = -\mu_{i+1} y_{i+1}^n.$$

Isto nos dá uma discretização das derivadas parciais ao longo das curvas características. Assim, a soma das duas derivadas parciais é aproximada por um quociente de diferença ao longo das curvas características. Note que este método é explícito, ou seja, os valores de  $y$  no nível de tempo  $n$  são usados para calcular os valores no nível de tempo  $n + 1$ , mas o lado direito da equação é calculado no nível de tempo  $n$ . Diante disso, a expressão anterior será reformulada como método implícito. Isso nos permite avaliar o lado direito no nível  $n + 1$ . Isto é,

$$\frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} = -\mu_{i+1} y_{i+1}^{n+1}.$$

A equação acima é uma simples equação linear que pode ser resolvida para  $y_{i+1}^{n+1}$ ,

$$y_{i+1}^{n+1} - y_i^n = -\Delta t \mu_{i+1} y_{i+1}^{n+1} \Rightarrow y_{i+1}^{n+1} + \Delta t \mu_{i+1} y_{i+1}^{n+1} = y_i^n \Rightarrow y_{i+1}^{n+1} (1 + \Delta t \mu_{i+1}) = y_i^n,$$

daí,

$$y_{i+1}^{n+1} = \frac{y_i^n}{1 + \Delta t \mu_{i+1}}.$$

Portanto, se conhecemos todos os valores no nível de tempo  $n$ , podemos calcular todos os valores no nível de tempo  $n + 1$ , exceto o primeiro. Para iniciar o processo, devemos conhecer todos os valores ao nível de tempo zero. Podemos calcular todos os valores no nível de tempo zero a partir da condição inicial. Os valores de  $u$  no nível de tempo zero são inicializados por

$$u_i^0 = u_0(a_i), \quad i = 0, \dots, M.$$

Por fim, para aproximar o número de recém-nascidos, discretizamos a condição de contorno. Existem muitos métodos para discretizar integrais, no entanto, como a derivada é discretizada com um método não muito preciso, então o uso de um método preciso (como o método de Simpson) para a integral é desnecessário e demanda muito custo programacional. Desta forma, aproximamos a integral pela regra da extremidade direita. Após computar todos os outros valores no nível de tempo  $n$ , computamos os recém-nascidos no tempo de nível  $n$ :

$$u_0^n = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i^n \Delta t,$$

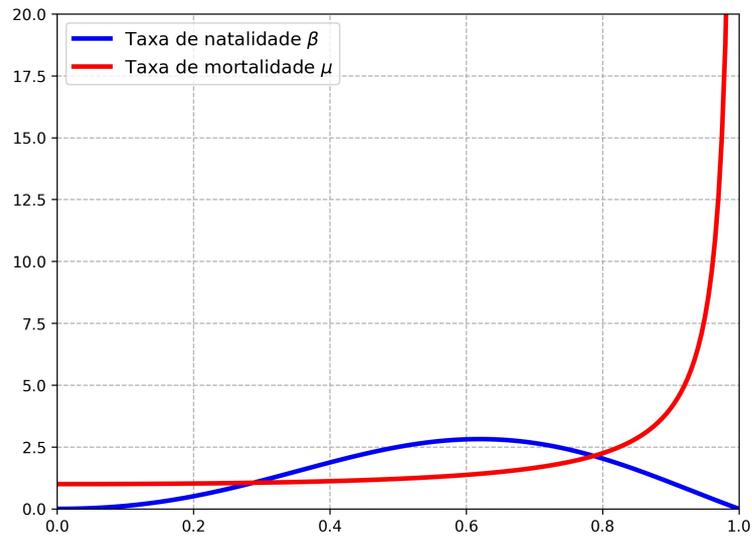
onde  $\beta(a_i) = \beta_i$ .

Em suma, o método numérico das diferenças finitas para o modelo McKendrick–von Foerster resulta em

$$\begin{cases} u_{i+1}^{n+1} = \frac{u_i^n}{1 + \mu_{i+1} \Delta t}, & i = 0, \dots, M-1; n = 0, \dots, N-1 \\ u_i^0 = u_0(a_i), & i = 0, \dots, M \\ u_0^n = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i^n \Delta t & n = 1, \dots, N \end{cases}$$

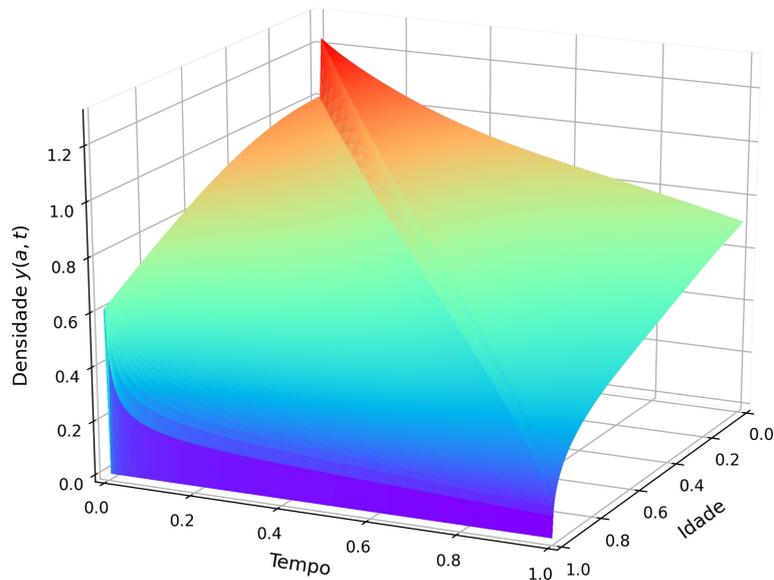
O exemplo abaixo foi retirado de SEBASTIAN (2007), o autor usou MATLAB no seu estudo, porém, usaremos a linguagem Python para obtenção da solução numérica. No exemplo, para  $A = 1$ ,  $T = 1$ ,  $h = 0.02$ ,  $\beta(a, t) = 10a^2(A - a)(1 + \text{sen}(\pi a/A))$ ,  $\mu(a, t) = e^{-a}/(A - a)$  e  $y_0(a) = e^{-a^2/2}$ , tem-se:

**Figura 5.2 – Taxas**



Fonte: Autor

Em vermelho está a plotagem da taxa mortalidade  $\mu$  e em azul a taxa de natalidade, a qual é determinada pela relação (2.4), a saber,  $\pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma}$ .

**Figura 5.3** – Densidade**Fonte:** Autor

A figura anterior descreve a densidade  $y(a, t)$  da população com a idade  $a$  no tempo  $t$ . Podemos observar que na figura 5.2 a taxa de mortalidade permanece próxima de 1 até a idade 0,5, posterior a isto ela cresce ilimitadamente, visto que  $x = 1$  é uma assíntota vertical da função taxa  $\mu$ . Por conseguinte, na figura 5.3 observamos uma diminuição mais lenta da densidade nas idades iniciais (vermelho/azul claro) e mais rápida nas idades finais (azul escuro). Além disso, a taxa de natalidade  $\beta$  tem máximo próximo da idade 0,61. Em junção, vemos que o valor da condição de contorno  $y(0, t)$  no nível  $n + 1$ , o qual é determinado por um somatório envolvendo a taxa  $\beta$  e a densidade no nível  $n$ , diminui mais rápido nos tempos iniciais (vermelho) e mais lento nos finais (azul claro), isto indica que com o passar do tempo (level), no tempo anterior (level) o número de nascidos referente à todas as idades foi decrescendo. O fato que o máximo da taxa  $\beta$  ocorre em 0,61 sugere que, para o somatório que determina cada  $y_0^n$ , as parcelas com maiores valores estão associadas as idades que estão em torno da idade 0,61, independente do tempo.

## 5.2 Método numérico para o modelo estruturado por idade

As hipóteses usadas na seção 5.1 são mantidas aqui para discretização do domínio, o mesmo analisado antes, a saber,

$$\mathcal{D} = \{(a, t) : 0 \leq a \leq A, t \geq 0\}.$$

Já as equações diferenciais substituiremos as derivadas parciais pelos quocientes de diferença ao longo das curvas características. Desta forma,

$$\begin{aligned} s_a + s_t &\approx \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^n}{\Delta t}; \\ i_a + i_t &\approx \frac{i_{i+1}^{n+1} - i_i^n}{\Delta t}; \\ r_a + r_t &\approx \frac{r_{i+1}^{n+1} - r_i^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Considerando  $a = a_{i+1}$  e  $t = t_n$ , segue que as equações do modelo estruturado por idade (2.25) tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} &= -\lambda_{i+1}^n s_{i+1}^n - \mu_{i+1} s_{i+1}^n, \\ \frac{i_{i+1}^{n+1} - i_i^n}{\Delta t} &= \lambda_{i+1}^n s_{i+1}^n - (\mu_{i+1} + \gamma_{i+1}) i_{i+1}^n, \\ \frac{r_{i+1}^{n+1} - r_i^n}{\Delta t} &= \gamma_{i+1} i_{i+1}^n - \mu_{i+1} r_{i+1}^n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Em (5.1),  $\lambda_{i+1}^n$  é a força de infecção avaliada no nível de tempo  $n$ . Aqui podemos facilmente resolver para o nível  $n + 1$ , mas a solução será não negativa e se aproximará a solução contínua apenas para um pequeno passo  $\Delta t$ . Assim, para tornar o método implícito, substituímos

$$s_{i+1}^n \approx s_{i+1}^{n+1}, \quad i_{i+1}^n \approx i_{i+1}^{n+1} \quad \text{e} \quad r_{i+1}^n \approx r_{i+1}^{n+1}.$$

Em consonância, mantemos  $\lambda_{i+1}^n$  calculado no nível  $n$ . Diante desta abordagem, obtemos o seguinte sistema de aproximação para as equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} = -\lambda_{i+1}^n s_{i+1}^{n+1} - \mu_{i+1} s_{i+1}^{n+1} \\ \frac{i_{i+1}^{n+1} - i_i^n}{\Delta t} = \lambda_{i+1}^n s_{i+1}^{n+1} - (\mu_{i+1} + \gamma_{i+1}) i_{i+1}^{n+1}, \text{ com } i = 0, \dots, M - 1 \text{ e } n = 0, \dots, N - 1 \\ \frac{r_{i+1}^{n+1} - r_i^n}{\Delta t} = \gamma_{i+1} i_{i+1}^{n+1} - \mu_{i+1} r_{i+1}^{n+1}. \end{array} \right.$$

### 5.3 Método numérico para o controle ótimo

Novamente, as hipóteses usadas na seção 5.1 são mantidas aqui para discretização do domínio. O Teorema 4.9 e sua consequência, ou seja, o corolário 4.11 oferecem uma simples forma de obter uma solução numérica para o problema de controle ótimo. Como segue:

**1° Passo** - Obter a solução  $y$  para

$$\left\{ \begin{array}{ll} Dy - \mu y = L(1 + y)^+ - \beta(a)y(0, t), & (a, t) \in Q_T \\ y(A, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(a, T) = 0. & a \in (0, A) \end{array} \right.$$

**2° Passo** - Obter o controle ótimo  $u^*$  de acordo com (4.16).

Novamente, usamos uma aproximação por diferenças finitas regressiva. Para discretizar a primeira equação utilizamos um método explícito, obtendo

$$\frac{y_i^j - y_{i-1}^{j-1}}{h} - \mu_i y_i^j = L\Pi(y_i^j) - \beta_i y_1^j, \quad (5.2)$$

em que

$$\Pi(y) = (1 + y)^+.$$

Multiplicando (5.2) por  $h$ ,

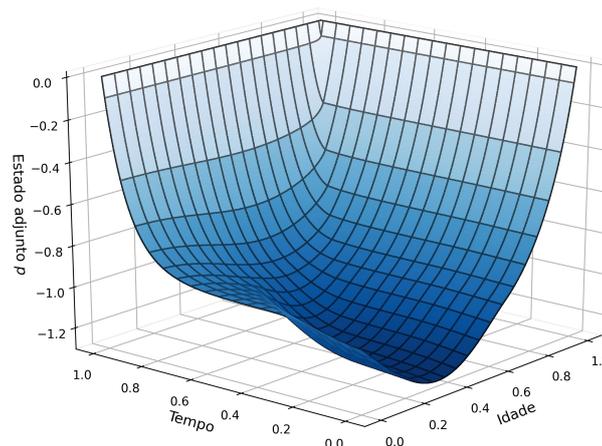
$$\begin{aligned} y_i^j - y_{i-1}^{j-1} - h\mu_i y_i^j &= h[L\Pi(y_i^j) - \beta_i y_1^j] \\ \Rightarrow -y_{i-1}^{j-1} + (1 - h\mu_i)y_i^j &= h[L\Pi(y_i^j) - \beta_i y_1^j]. \end{aligned}$$

Somando  $y_{i-1}^{j-1}$  e subtraindo  $h[L\Pi(y_i^j) - \beta_i y_1^j]$ , vem

$$y_{i-1}^{j-1} = (1 - h\mu_i)y_i^j - h[L\Pi(y_i^j) - \beta_i y_1^j].$$

**Exemplo 5.1.** Para  $A = 1$ ,  $T = 1$ ,  $L = 10$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $\beta(a, t) = 10a^2(A-a)(1 + \text{sen}(\frac{\pi}{Aa}))$ ,  $\mu(a) = \frac{e^{-a}}{A-a}$  e  $y_0(a) = e^{-0.5a^2}$ , tem-se:

**Figura 5.4** – Estado adjunto  $y$

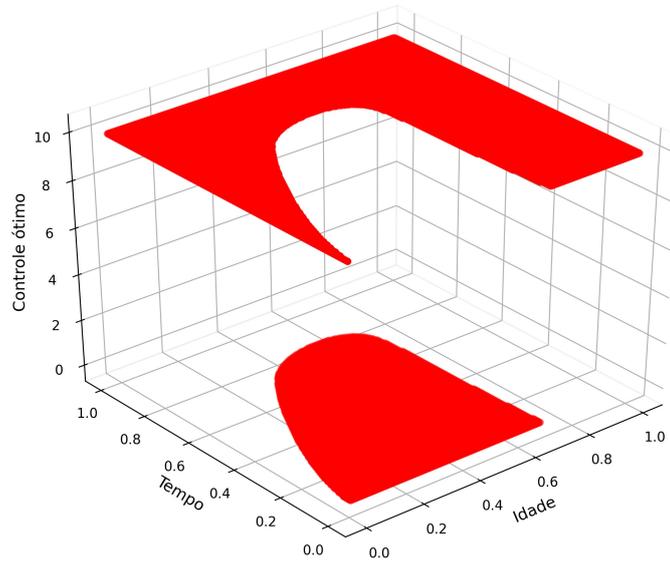


**Fonte:** Autor

Observe que na figura anterior temos um conjunto de pontos tais que sua imagem é inferior à  $-1$ , conseqüentemente, quando somamos 1 obtemos valores maiores que 0, por outro lado, para os outros pontos, quando somado 1 a sua imagem resulta em valores

maiores que 0. Com isso, decorrente do Teorema 4.9, o controle ótimo fica determinado como segue:

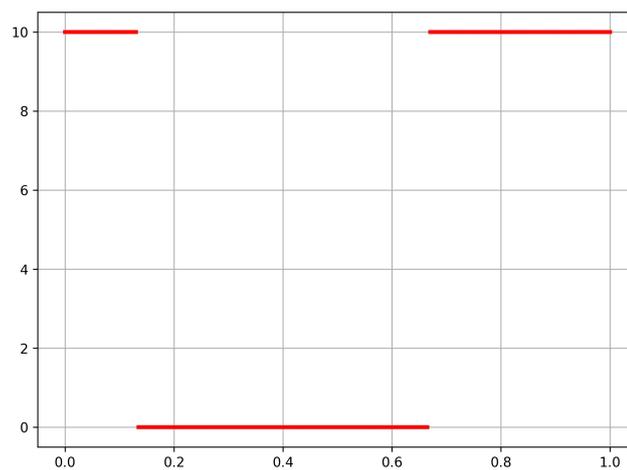
**Figura 5.5** – Controle ótimo



Fonte: Autor

Em particular, para o tempo  $t = 0,4$ , temos

**Figura 5.6** – Controle ótimo em  $t = 0,4$



Fonte: Autor

Nas figuras 5.5 e 5.6 notamos que, a depender do ponto, o controle é 0 ou 10, que são os valores limites do conjunto  $K$ , este tipo de controle é denominado bang-bang em virtude desta característica, isto é, assume apenas valores dos extremos do conjunto de controle.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise e a compreensão dos casos acerca de uma enfermidade tornam-se cada vez mais necessárias por parte da matemática, visto que permitem obtermos resultados tanto do atual cenário, quanto dos possíveis caminhos que os envolvidos vivenciarão. Desta forma, evidenciando para os órgãos responsáveis as formas mais viáveis de lidar com o atual momento.

Diante disso, o referente texto buscou apresentar e discutir, de forma introdutória, detalhada e didática os dois modelos da teoria de modelagem matemática com ênfase na epidemiologia, a saber, o modelo SIR e o modelo Mckendrick-Von Foerster. Em suma, foi descrita a construção das equações que constituem os modelos, facilitando a compreensão das variáveis envolvidas, assim como uma análise sobre a solução analítica obtida por meio do método das curvas características e, finalizamos com um método numérico que nos permite obter, quando possível, a solução quando as funções que descrevem as taxas são mais complexas.

Desta forma, o objetivo central do trabalho foi alcançado e, conseguimos não só descrever dois importantes e conhecidos modelos, como também permitimos que o leitor obtenha a solução deles, analítica ou numérica.

Finalmente, destacamos o fato que os modelos apresentados são introdutórios, porém, triviais para aqueles que têm tendência no estudo em epidemiologia e, há diversos modelos baseados neles que, por sua vez, envolvem outras variáveis e características acerca do conjunto analisado. Em consequência, recomendamos ao leitor o estudo sobre essa ampliação e construção de modelos que, possivelmente, possam ser mais eficientes que os estudados aqui.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANGULO, O.; MARCOS, J. and MILNER, F.; **The application of an age-structured model with unbounded mortality to demography.** *Math. Biosci.*, 208 (2007), pp. 495–520.
- [2] ANITA, S; **Analysis and control of age-dependent population dynamics**, Springer Science-Business Media Dordrecht 2000.
- [3] ANITA, S; VIORELI, A and VINCENZO, C; **An introduction to optimal control problems in life sciences and economics from mathematical models to numerical simulation with MATLAB**, Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- [4] BASSANEZI, R. C e FERREIRA, Jr. W.C; **Equações diferenciais com aplicações**, Ed. Harba, São Paulo, 1988.
- [5] HARTMUT, L and EUGENE, P. R; **Ordinary differential equations analysis, qualitative theory and control**, Springer-Verlag, London. 2014.
- [6] SHARPE, F. and LOTKA, A.; **A problem in age distribution.** *Philosophical Magazine*, 1911. 435-438.
- [7] IANNELLI, I and PUGLIESE, A; **An introduction to mathematical Population dynamics along the trail of volterra and lotka**; pringer International Publishing Switzerland 2014
- [8] IANNELLI, M and MILNER, F.; **The basic approach to age-structured population dynamics models, methods and numerics**, Springer Science+Business Media B.V. 2017
- [9] INABA, H.; **Age-structured population dynamics in demography and epidemiology**; Springer Science+Business Media Singapore 2017.
- [10] KERMACK, W.O and MCKENDRICK, A.G; **Proceedings of the Royal Society of London.** Series A, Containing papers of a mathematical and physical character 115, 700 (1927)
- [11] MARTCHEVA, M; **An Introduction to mathematical epidemiology.** Texts in Applied Mathematics Vol. 61. Springer, 2007.
- [12] MURRAY, J. D; **Mathematical Biology: I. an introduction.** Vol. 17 (Springer Science & Business Media, 2007).

- [13] VAIBRE, I. I; **Differential equations**. An introduction to basic concepts, results and applications, World scientific publishing, new Jersey, 2016.
- [14] YANG, H. Mo; **Epidemiologia matemática**: estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta, Editora da Unicamp, Campinas - SP, 2001.

## APÊNDICE

### A.1 Espaços $L_p$ e seqüências

**Definição A.1.** Duas funções em  $\mathbf{L}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  são ditas equivalentes se elas são iguais quase sempre. A classe de equivalência determinada por  $f$  em  $\mathbf{L}$  é algumas vezes denotadas por  $[f]$  e consiste de todas as funções em  $\mathbf{L}$  as quais são equivalentes a  $f$ . O Espaço de Lebesgue  $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  consiste de todas as classes em  $\mathbf{L}$ . Se  $[f]$  pertence a  $\mathbf{L}^1$ , definimos sua norma por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu.$$

**Observação A.2.** Por simplicidade escrevemos apenas  $L^1(\Omega)$ .

**Definição A.3.** Seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 < p < \infty$ , escrevemos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

**Exemplo A.1.** A função  $f(x) = x^{-1/4} \in L^2(0, 1)$ , mas sua derivada q.s  $f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-5/4} \notin L^2(0, 1)$ .

**Solução:** De fato,

$$\int_0^1 (x^{-1/4})^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 < \infty$$

isto é,  $f \in L^2(0, 1)$ . Porém, para a derivada de  $f$  q.s, temos

$$\int_0^1 \left[ -\frac{1}{4} (x^{-5/4}) \right]^2 dx = \frac{1}{16} \int_0^1 x^{-5/2} dx = -\frac{2}{3} \frac{1}{16} x^{-3/2} \Big|_0^1 = \infty$$

**Definição A.4** (Convergência Forte). Uma seqüência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é dita ser fortemente convergente ou que converge na norma se existe um elemento  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Notação:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ou  $x_n \rightarrow x$ .

**Definição A.5** (Convergência Fraca). Uma seqüência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  é

dita ser fracamente convergente se existe um elemento  $x \in X$ , tal que para todo  $f \in X'$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

O elemento  $x$  é chamado o limite fraco de  $(x_n)$  e dizemos que  $(x_n)$  converge fraco para  $x$ .  
Notação:  $x_n \rightarrow x$  ou  $x_n \xrightarrow{w} x$ .

**Definição A.6.** Escrevemos  $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e existe } C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s sobre } \Omega\}$  com norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{supess } f = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.s sobre } \Omega\}$$

A seguinte observação implica que  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma:

**Observação A.7.** Se  $f \in L^\infty(\Omega)$  então temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ q.s sobre } \Omega.$$

De fato, existe uma sequência  $C_n$  tal que

$$C_n \rightarrow \|f\|_\infty \text{ e } |f(x)| \leq C_n \text{ q.s sobre } \Omega$$

Portanto,  $|f(x)| \leq C_n$  para todo  $x \in \Omega \setminus E_n$ , com  $|E_n| = 0$ . Escrevemos  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , assim, temos que  $|E| = 0$  e

$$|f(x)| \leq C_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega \setminus E.$$

Portanto,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \forall x \in \Omega \setminus E.$$

## A.2 Controle ótimo e Bang-Bang

A teoria do controle lida com o controle de sistemas dinâmicos. O objetivo é desenvolver um modelo ou algoritmo que governe a aplicação das entradas do sistema para conduzir o sistema a um estado desejado, minimizando qualquer atraso ou erro em regime permanente e garantindo um nível de estabilidade de controle; muitas vezes com o objetivo de alcançar um grau de otimização. Tal teoria tem muitas aplicações, em particular, na engenharia e biologia. Dentro do estudo de controles temos o controle ótimo, o qual está descrito abaixo.

Um problema de controle ótimo bastante geral pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{minimizar } \mathcal{L}(u, x^u)$$

sujeito a  $u \in K$ , onde  $u$  é a solução para

$$F(u, x) = 0 \tag{A.1}$$

Aqui  $U, X, Y$  são espaços Banach reais,  $K \subset U$  é um subconjunto fechado e  $\mathcal{L} : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : U \times X \rightarrow Y$  funções dadas.  $U$  é o conjunto dos controladores.

Assumindo que para qualquer  $u \in K$ , a equação (A.1) admita solução única denotada por  $x^u$ . Dizemos que o controle  $u^* \in K$  é ótimo se

$$\mathcal{L}(u^*, x^{u^*}) \leq \mathcal{L}(u, x^u)$$

para qualquer  $u \in K$ . O par  $(u^*, x^{u^*})$  é um par ótimo e  $\mathcal{L}(u^*, x^{u^*})$  é o valor ótimo do funcional de custo. Em suma,

Em problemas de controle ótimo, às vezes é o caso de um controle ser restrito a estar entre um limite inferior e um limite superior. Se o controle ótimo muda de um extremo para o outro (isto é, estritamente nunca está entre os limites), então esse controle é chamado de controle bang-bang.

### A.3 Cone normal

**Definição A.8.** Seja  $K$  um subconjunto convexo fechado do espaço real de Hilbert  $V$  munido de um produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e  $u \in K$ . O conjunto

$$N_K(u) = \{w \in V; (v - u, w) \leq 0 \text{ para qualquer } v \in K\}$$

é chamado de cone normal a  $K$  em  $u$ .

**Exemplo A.9.** Seja  $V = \mathbb{R}$  munido do produto usual e  $K = [a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ), então

$$N_K(u) = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & u = b \\ \{0\}, & a < u < b \\ \mathbb{R}^-, & u = a \end{cases}$$