UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I - CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEOCLECIANO PEREIRA JUNIOR

A Geometria Analítica Plana no ensino médio e sua abordagem no ENEM

CAMPINA GRANDE

2022

DEOCLECIANO PEREIRA JUNIOR

A Geometria Analítica Plana no ensino médio e sua abordagem no ENEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

2022

P436g Pereira Junior, Deocleciano.

A Geometria Analítica Plana no ensino médio e sua abordagem no ENEM [manuscrito] / Deocleciano Pereira Junior. - 2022.

41 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Departamento de Matemática - CCT."

1. Geometria Analítica Plana. 2. Ensino de Matemática. 3. Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. I. Título

21. ed. CDD 516.3

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

DEOCLECIANO PEREIRA JUNIOR

A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA NO ENSINO MÉDIO E SUA ABORDAGEM NO ENEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 29/11/2022.

BANCA EXAMINADORA

Luciana Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ao meu pai, pela dedicação, companheirismo e amizade, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A minha família de modo geral, que me incentivou diariamente através de gestos e palavras a superar todas as dificuldades, destaque para minha esposa Lidiane Rodrigues Pereira, que esteve ao meu lado e conseguiu mesmo em momentos de grandes dificuldades me incentivar e fazer com que eu continuasse nessa jornada.

Às minhas filhas Leticia Rodrigues Pereira e Alice Rodrigues Pereira que são instrumentos de bênção na minha vida e motivo também da minha busca diária por condições cada vez melhores para obtermos uma qualidade de vida eficiente e dentro do que precisamos.

A meus amigos que estiveram comigo diante dessa jornada e aos colegas de turma que contribuíram para minha perspectiva como acadêmico e que com certeza, por meio dos aprendizados em grupos, facilitam o desenvolvimento profissional.

Aos mestres que me orientaram em todas as disciplinas dentro do curso e, de modo especial a minha orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas que contribuiu significativa para a realização desse sonho.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação, pois sem essa assistência esse sonho não se tornaria uma realidade.

RESUMO

A proposta deste trabalho é apresentar um estudo sobre alguns tópicos da Geometria Analítica plana e analisar como esta teoria pode ser abordada nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio. A Geometria Analítica estuda os principais elementos geométricos como, ponto e reta, por meio de um sistema de coordenadas, utilizando expressões algébricas. Trata-se de um conteúdo fundamental da matemática e que faz parte do currículo do Ensino Médio. Dada sua importância, seu estudo serve como instrumento para outras áreas do conhecimento, portanto, precisa estar conectada à realidade. Contudo, ao ser trabalhada nas diversas etapas de escolarização, a geometria tem apresentado problemas, tanto no seu ensino quanto na sua aprendizagem, um exemplo é a dificuldade de assimilação dos conceitos da Geometria Analítica por parte dos estudantes do Ensino Médio. Neste sentido, buscamos com este trabalho, através de uma pesquisa bibliográfica, fazer uma abordagem sobre o ensino da geometria plana e verificar como este conteúdo tão importante está sendo trabalhado nas provas do ENEM.

Palavras-Chave: geometria analítica plana; ensino; problemas abordados no ENEM.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present a study on some topics of plane analytic geometry and analyze how this theory can be approached in the tests of the National High School Exam. Analytical geometry studies the main geometric elements such as point and line, through a coordinate system, using algebraic expressions. It is a fundamental content of mathematics and is part of the high school curriculum. Given its importance, its study serves as an instrument for other areas of knowledge, therefore, it needs to be connected to reality. However, when working in the different stages of schooling, geometry has presented problems, both in its teaching and in its learning, an example is the difficulty of assimilating the concepts of analytical geometry by high school students. In this sense, we seek with this work, through a bibliographic research, to make an approach on the teaching of plane geometry and to verify how this important content is being worked on the ENEM tests.

Keywords: analytical geometry; teaching; problems examined in the ENEM.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da matemática de grande importância sob o ponto de vista de suas aplicações práticas, tanto na questão do desenvolvimento de diferentes competências como também nas habilidades necessárias à formação de qualquer indivíduo, sendo esta um mecanismo de compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos, se fazendo presente em nosso cotidiano.

Segundo Silva et al. (2016), a produção de conhecimentos em geometria, na história da matemática, está relacionada com as necessidades do homem para resolver problemas do cotidiano e está voltado para o estudo de questões relacionadas à forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades do espaço. De acordo com Kalleff (1994), foi da necessidade do homem em compreender e descrever o meio ambiente, representando através de imagens, que as figuras foram sendo conceitualizadas, adquirindo um significado matemático na geometria.

A Geometria Analítica plana é uma das áreas da matemática que estuda as figuras da geometria plana usando expressões algébricas, ou seja, as relações entre o ponto, a reta e a circunferência vão ser representadas por equações e pares coordenados no plano cartesiano. A Geometria Analítica aparece normalmente nas séries finais do Ensino Médio, com isso o aluno já tem vivenciado durante todo o processo de ensino a tradicional Geometria Euclidiana plana.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para o Ensino Médio orienta que no estudo da Geometria Analítica os alunos devem representar geometricamente funções polinomiais de 1° grau, intersecção e posição de figuras utilizando o plano cartesiano (BRASIL, 2018). Isso deve ocorrer a partir da resolução de problemas, o aluno deve reconhecer que a mesma situação pode ser resolvida de formas diferentes.

O objetivo principal deste trabalho é entender como é trabalhada a Geometria Analítica nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), trazendo questões recentes, pontuando aspectos relevantes sobre essa abordagem, e como objetivos específicos: apresentar um breve histórico sobre a Geometria Analítica plana e o seu ensino na educação básica; estudar alguns tópicos da Geometria Analítica e, por fim, fazer um estudo sobre problemas abordados no ENEM. Para o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, utilizando-se de técnicas de coleta. Realizou-se uma revisão de literatura sistemática, pois permite "ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente" (Gil, 2008, p.50).

Essa pesquisa justifica-se pelo fato da Geometria Analítica fazer parte da grade curricular do 3º ano do Ensino Médio de todos os sistemas educacionais do país, e ser um conteúdo cobrado na prova ENEM, mecanismo esse utilizado para o discente ingressar no ensino superior.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, incluindo este de introdução. No Capítulo 2 fazemos uma abordagem sobre o ensino da Geometria Analítica plana e no Capítulo 3 apresentamos o estudo de alguns tópicos desta teoria. No Capítulo 4 ilustramos e resolvemos alguns problemas recentes que fizeram parte do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos as considerações finais.

2 ENSINO DA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

Dentre os grandes pensadores que surgiram no decorrer da história, podemos destacar René Descartes (1596 – 1650), filósofo e matemático francês, considerado o pai da Geometria Analítica, sua obra mais importante foi o livro *“Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências”*, publicado em 1637. No contexto do que viria ser a Geometria Analítica, um dos apêndices deste livro foi intitulado “*A Geometria*” (DANTE, 2013, p.92). Todavia, Descartes inicia “*A Geometria*” indicando a utilização das operações da aritmética aplicadas à geometria, pois segundo ele, são necessárias e elementares para resolver os problemas geométricos. Sobre isso, ele afirma:

> Como toda a Aritmética consiste apenas em quatro ou cinco operações, a saber, adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração das raízes [...] não temerei introduzir esses termos da Aritmética na Geometria para me fazer compreender melhor. (DESCARTES, 2009, p. 369-370).

Através do que foi exposto percebe-se a relação das operações da aritmética com os cálculos da geometria. Ademais, deve-se entender que o estudo da Geometria Analítica possibilita a análise de propriedades e elementos geométricos por meio de processos algébricos. Contudo, o discente do Ensino Médio a partir desse conteúdo tem a oportunidade de pensar algebricamente sobre os problemas geométricos ou pensar geometricamente sobre problemas algébricos.

Não se pode identificar de forma precisa a criação da Geometria Analítica e tampouco quem a inventou, porém mudanças ocorreram até chegar à formatação que concebemos hoje. Em consonância, Freudenthal apud Fonseca (2009), destaca que em relação à geometria:

> [...] é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta (FONSECA, 2009, p. 92-93).

> [...] Vale ressaltar que a Geometria Analítica é um campo fértil para trabalhar com situações problema, pois possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e construir demonstrações, permitindo ao aluno, desenvolver um raciocínio particular para compreender,

> descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. Além disso, deve-se perceber que um mesmo problema matemático pode ser abordado com diferentes instrumentos pedagógicos de acordo com as suas características (BRASIL, 2002).

O aluno normalmente tem bastante contato na educação básica com a geometria plana, contudo a Geometria Analítica é apresentada na série final do Ensino Médio e tem entre suas características a realização de vinculações entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, esta permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano, ou, até mesmo, representar por meio de uma equação uma figura bidimensional ou tridimensional. Segundo Dante (2013), o estudo da Geometria Analítica representa geometricamente para tornar concretas as expressões algébricas na maioria das vezes tão abstratas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998), o estudo da Geometria Analítica ocorre por meio da representação das equações no plano cartesiano, relação de intersecção e posição relativa de figuras. Sobre isso, os PCNs ainda pontuam:

> A unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 1998, p. 124).

Assim, a Geometria Analítica pode potencializar a compreensão da associação das representações geométricas com as propriedades algébricas, estabelecendo conexões entre elas.

A seguir apresentaremos alguns dos principais tópicos da Geometria Analítica plana.

3 TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

A Geometria Analítica plana tem grande incidência nas provas do ENEM, com recorrência em questões que exigem o conhecimento desta área, sendo esta uma parte importante do estudo da Matemática, apresentando várias aplicações a partir da leitura do sistema cartesiano.

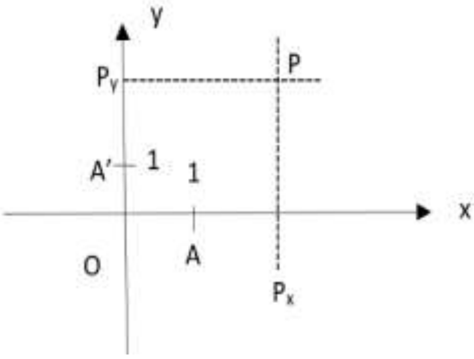
Neste capítulo, vamos estabelecer alguns dos principais conceitos e resultados da Geometria Analítica plana, utilizando-se de definições, exemplos, propriedades e representações gráficas. Para apresentar o conteúdo a seguir, tomamos como referências os autores Dante (2013), Silva (2022) e Reis e Silva (1996). Serão abordados os seguintes tópicos:

- Sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais;
- Distância entre dois pontos;
- Vetores no plano;
- Equações paramétricas da reta;
- Equações cartesianas da reta;
- Ângulo entre retas;
- Distância de um ponto a uma reta;
- Equações da circunferência.

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais

A seguir apresentamos a construção do sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais, também chamado plano cartesiano, sistemas de coordenadas retangulares ou coordenadas ortogonais. Um ponto no plano pode ser representado por um par ordenado (x, y). O plano cartesiano trata-se de um sistema constituído de duas retas perpendiculares (reta horizontal chamada, $eixo\ x$ e reta vertical chamada, $eixo\ y$). O ponto de intersecção é o ponto O, denominado de origem do sistema. A partir de um ponto P qualquer do plano podemos traçar uma única paralela x' a reta x e uma única paralela y' a reta y. Estas paralelas interceptam as retas x e y, respectivamente, nos pontos Px e Py . Seja x o número correspondente ao ponto Px e y correspondente a Py. Com isso a interseção destas paralelas é o ponto P e o par (x, y) representa P (Figura 1).

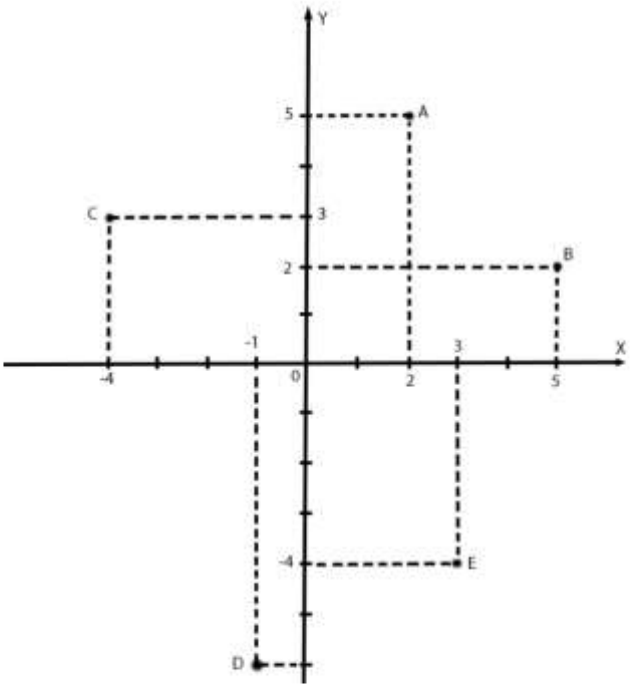
Figura 1: Plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Exemplo 1: No plano cartesiano abaixo cada par ordenado está associado a um ponto. (Figura 2)

Figura 2: Pontos no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A partir deste exemplo, devemos entender que no plano cartesiano acima cada par ordenado (x, y) está associado a um ponto, com isso temos representados os pontos $A(2,5), B(5,2), C(-4,3), D(-1,-6)$ e $E(3,-4)$.

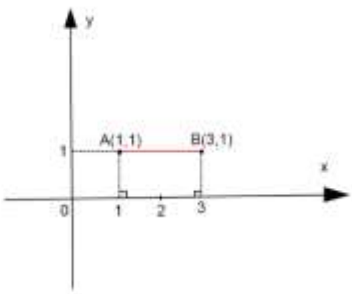
Considerando o ponto $A(2,5)$, dizemos que o número 2 é a coordenada x ou a abscissa do ponto A, e o número 5 é a coordenada y ou a ordenada do ponto A.

3.2 Distância entre dois pontos

Segundo Gouveia (2022), a distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que os une, isto é, dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$, é a medida do segmento de reta de extremidades A e B. (Figura 3).

Exemplo 2: Considere os pontos $A(1,1)$ e $B(3,1)$ representados na Figura 3.

Figura 3: Distância entre dois pontos



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observe que a distância entre os pontos A e B será determinada da seguinte forma:

$$d(A, B) = 3 - 1,$$

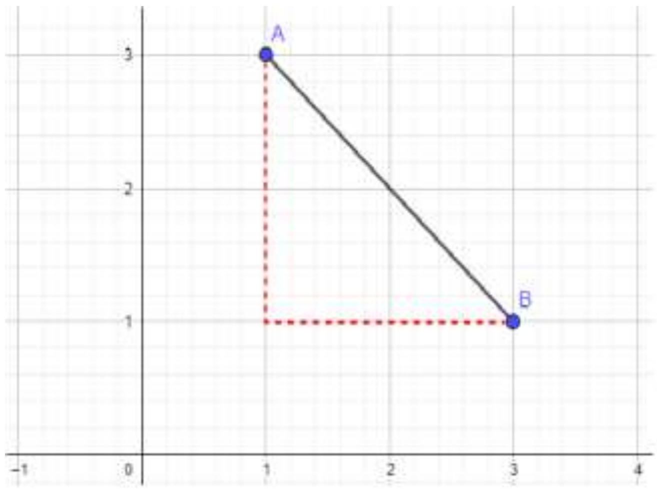
ou,

$$d(A, B) = 2.$$

No Exemplo 2, encontramos a distância através da subtração das abcissas de cada par ordenado $(x,\ y)$. Porém, isso ocorre quando os pontos A e B estão alinhados horizontalmente, se estiverem alinhados verticalmente subtraímos as ordenadas dos pontos.

Precisamos calcular a distância quando os pontos estiverem em outra posição, como por exemplo, na diagonal. (Figura 4)

Figura 4: Distância entre pontos no plano cartesiano



Fonte: DIAS, C. (2006).

Na Figura 4, temos um triângulo retângulo com catetos medindo 2 e 2, a outra medida equivale à medida da hipotenusa, e corresponde a distância entre os pontos A e B. Logo, para encontrar a medida entre os pontos A e B, neste caso, podemos usar o Teorema de Pitágoras. Veja:

$$[d(A,B)]^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow d(A,B) = \sqrt{8} \Rightarrow d(A,B) = 2\sqrt{2}.$$

De modo geral, para calcular a distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ temos a fórmula a seguir:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemplo 3: Calcule a distância entre os pontos $A(3,5)$ e $B(6,1)$.

Solução: Substituindo os valores das coordenadas na fórmula:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

temos

$$d(A,B) = \sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16},$$

logo,

$$d(A,B) = 5.$$

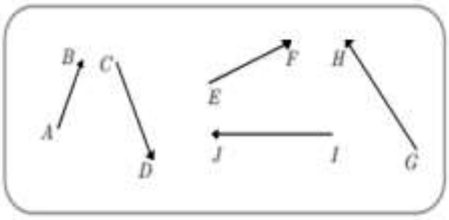
3.3 Vetores no plano

A teoria dos vetores no plano não é trabalhada na educação básica. No entanto, apresentamos a seguir alguns conceitos e propriedades elementares envolvendo vetores, a fim de utilizarmos em algumas demonstrações futuras.

Um vetor é determinado por um ponto inicial, que é a sua origem; por um ponto final, a sua extremidade; por uma direção, que é a direção da reta que passa pela sua origem e sua extremidade; por um sentido de percurso (da origem para a extremidade) e por um comprimento. Um vetor de origem A e extremidade B é denotado por $\overrightarrow{AB}$.

Mas, o que diferencia um vetor de um segmento de reta? O que distingue um vetor $\overrightarrow{AB}$ de um segmento de reta AB é que $AB = BA$, enquanto $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

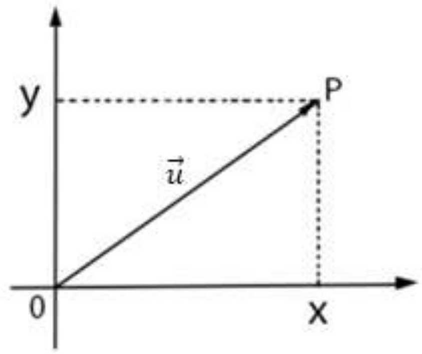
Figura 5: Vetores geométricos



Fonte: DIAS, C. (2006)

Se o vetor $\vec{u}$ tem origem em $A = (x_1, y_1)$ e extremidade em $B = (x_2, y_2)$, então o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y), onde $x = x_2 - x_1$ e $y = y_2 - y_1$. Logo, um vetor no plano cartesiano é um par de coordenadas (x, y) de números reais que segue o que é chamado de base canônica do sistema cartesiano ortogonal. (Figura 6)

Figura 6: Vetor com base canônica



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Assim, o vetor no plano está associado a um par ordenado (x, y) de números reais e se representa por $\vec{u} = (x, y)$ que é a expressão analítica de $\vec{u}$.

A fórmula para calcular o modulo $\vec{u}$ é da forma $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.3.1 Operações com vetores e suas propriedades

Se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$, definimos a adição dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, por:

$$\vec{u} + \vec{w} = (a + c, b + d).$$

A adição satisfaz as seguintes propriedades:

a) Comutativa: para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u} .$$

b) Associativa: para todos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} .$$

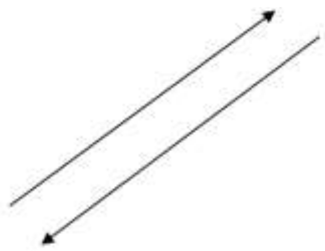
c) Elemento Neutro: se $\vec{0} = (0,0)$ é o vetor nulo em $\mathbb{R}^2$, então para todo vetor u de $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$$0 + \vec{u} = \vec{u}.$$

d) Elemento oposto: para todo vetor $\vec{u}$ em $\mathbb{R}$ tem-se o vetor $-\vec{u}$ tal que:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = 0.$$

Figura 7: Vetores opostos



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

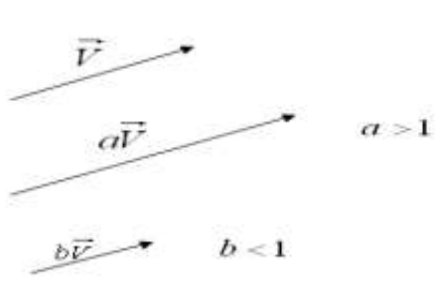
A diferença entre um vetor $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$ é dada pela adição de $\vec{v}$ com o oposto de $\vec{w}$, isto é,

$$\vec{v} - \vec{w} = (a - c, b - d).$$

3.3.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Ao multiplicarmos um vetor $\vec{v}$ por um escalar $a \in \mathbb{R}$, o resultado é um novo vetor, que preserva a mesma direção, mas o módulo e o sentido podem ser alterados pelo valor do escalar. Neste caso dizemos que o vetor $a\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$.

Figura 8: Produto de um vetor por um escalar a > 0



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Sendo assim, o módulo do novo vetor é o que resulta da multiplicação do módulo do vetor $\vec{v}$ pelo escalar.

$$|a\vec{v}| = |a||\vec{v}|.$$

3.3.3 Produto escalar entre dois vetores

Seja $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores, o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem como resultado um número real dado por

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2.$$

Além disso, vale a fórmula,

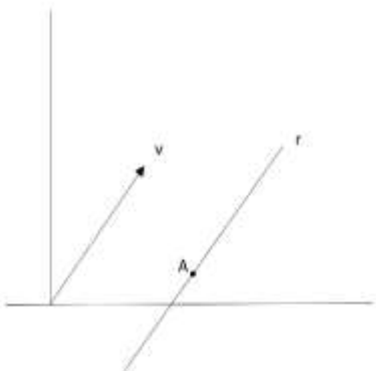
$$\vec{u}\,.\vec{v} = |u|.|v|.cos(\theta),$$

em que θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3.4 Equações Paramétricas da Reta

As equações paramétricas da reta são duas equações que representam a reta utilizando uma incógnita. Segundo Dante (2016), as equações paramétricas são formas de representar retas por meio de um parâmetro, ou seja, uma variável vai fazer a ligação entre duas equações que foram obtidas da equação de uma mesma reta. Assim, para entendermos melhor, seja um vetor não nulo v e um ponto A do plano. Sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém o ponto A (Figura 9).

Figura 9: Equações Paramétricas da Reta



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Agora se pegarmos o ponto A pertencente a r e o vetor $\vec{v}$, somos capazes de determinar qualquer ponto P da reta r. Para isto, usamos o fato que o vetor $\overrightarrow{AP}$ paralelo a v, temos,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v},$$

isso implica que,

$$P - A = t\vec{v}.$$

Se $A\ (x_0, y_0), P(x, y)$ e $v(a, b)$, então

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b),$$

e esta equação equivale ao sistema de equações

$$x = x_0 + at,$$

$$y = y_0 + bt,$$

que são chamadas de equações paramétricas da reta r.

Exemplo 4: Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1,2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3,4)$.

Solução: Pela definição, temos o ponto $A = (x_0, y_0)$ e o vetor $\vec{v} = (a, b)$, isso implica que as equações paramétricas são,

$$x = 1 - 3t,$$

$$y = 2 + 4t.$$

Exemplo 5: Verificar se o ponto $D = (2,0)$ pertence à reta r de equações paramétricas

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 2t$$

Solução: Substituindo $x = 2$ e $y = 0$, temos as seguintes equações:

$$2 = 1 + 2t$$

$$0 = 0 + 2t$$

Pela primeira equação, isolando t, temos que $t = \frac{1}{2}$, e na segunda equação o $t = 0$, portanto como t é diferente nas duas equações o ponto D não pertence a reta r.

3.5 Equação cartesiana da reta

Para eliminarmos o parâmetro t das duas equações paramétricas vistas na seção anterior, basta multiplicar a equação, $x = x_0 + at$ por b e a equação $y = y_0 + bt$ por a, logo encontramos as seguintes equações.

$$bx = bx_0 + bat \quad (1)$$

$$ay = ay_0 + abt \quad (2)$$

Subtraindo a equação (1) de (2), temos:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

Como vimos anteriormente, A e v estão fixados, então podemos dizer que $ay_0 - bx_0$ é igual a uma constante que chamaremos de c, logo obtemos a seguinte equação

$$ay - bx = c,$$

chamada de equação cartesiana da reta r.

Se dividirmos a equação cartesiana da reta r por a com $a \neq 0$, obtemos a equação reduzida da reta.

$$\frac{ay}{a} - \frac{bx}{a} = \frac{c}{a},$$

ou seja,

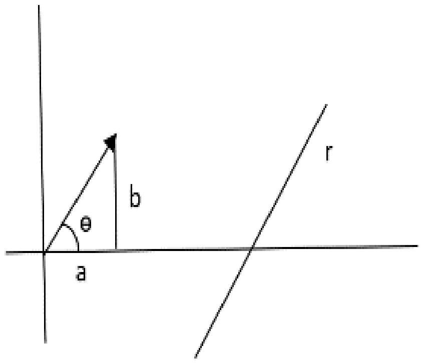
$$y = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}.$$

Denotando, $\frac{b}{a} = m$ e $\frac{c}{a} = k$, temos

$$y = mx + k.$$

Observe a Figura 10, abaixo:

Figura 10: Ângulo da reta r



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Sabemos que a tangente do ângulo no triângulo retângulo é dada pelo cateto oposto dividido pelo cateto adjacente, logo como mostra na Figura 10, $tg\theta = \frac{b}{a}$. O valor de m define a declividade da reta r com o eixo das abscissas, e é chamado de coeficiente angular da reta, se a reta r é paralela ao eixo das ordenadas, tem-se que $x = x_0$.

Sabemos que a reta r tem uma equação da forma

$$bx - ay = c$$

substituindo o $A = b$, $B = -a$ e $C = -c$, obtemos a equação geral da reta

$$Ax + By + C = 0.$$

Exemplo 6: Determine as equações paramétricas e cartesiana da reta r definida pelos pontos $(1,6)$ e $(3,8)$.

Solução: Como as abscissas dos dois pontos são diferentes, temos que a reta r não é paralela ao eixo das ordenadas, logo sua equação é da forma $y = mx + k$, com m diferente de 0. Então substituindo cada ponto na equação, obtemos um sistema de duas variáveis.

$$6 = m + k \quad (1)$$

$$8 = 3m + k \ (2)$$

Multiplicando a equação (1) por -3, obtemos

$$-18 = -3m - 3k$$

$$8 = 3m + k$$

Somando estas equações, obtemos

$$-10 = -2k \Rightarrow k = 5.$$

Substituindo o valor de k na equação (1)

$$6 = m + 5,$$

ou seja,

$$m = 1.$$

Logo, a equação cartesiana é $y = x + 5$.

Agora para acharmos as equações paramétricas, pegamos um ponto (x_0, y_0) como sendo o ponto $(1,6)$ e calculamos a diferença $(3,8)$ - $(1,6)$ = (2, 2).

Portanto as equações paramétricas são:

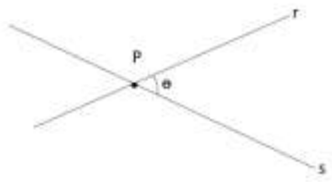
$$x = 1 + 2t$$

$$y = 6 + 2t$$

3.6 Ângulos entre retas

Sejam r e s duas retas que se interceptam em um ponto P, obliquas aos eixos x e y, e não perpendiculares entre si. O ângulo entre essas duas retas é calculado pela fórmula $tan\, \theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right|$, onde m_1 é o coeficiente angular da reta r e m_2 é o coeficiente angular da reta s. (Figura 11).

Figura 11: Ângulos entre duas retas



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Exemplo 7: Determinar o ângulo formado pelas retas $y = 2x - 5$ e $y = -3x - 1$.

Solução: Aplicando a fórmula $tan\, θ = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}\right|$ temos que

$$m_1 = 2 \text{ e } m_2 = -3,$$

logo,

$$tan\, θ = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2.(-3)}\right|$$

o que implica

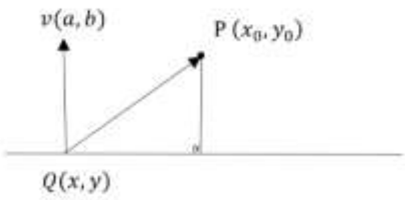
$$tan\, θ = 1\ .$$

Logo, $θ = 45°$.

3.7 Distância de um ponto a uma reta

Segundo Silva (2022), a distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento, que deverá formar com a reta um ângulo reto (90º). Para estabelecer a distância entre os dois necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto (Figura 12).

Figura 12: Distância de um ponto a uma reta



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto e uma reta r com equação geral $ax + by + c = 0$, para definirmos a distância do ponto P a reta r, ilustrado na Figura 12, a partir desta reta podemos traçar um vetor perpendicular a reta r no ponto Q, chamaremos esse vetor $v = (a, b)$, se θ é o ângulo entre v e $\overrightarrow{QP}$, então

$$cos\,\theta = \frac{|\vec{v}.\overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|.|\overrightarrow{QP}|}.$$

Sabemos que o $cos\,\theta$ é o cateto adjacente que é a distância d, dividido pela hipotenusa, então segue que:

$$\frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} = \frac{|\vec{v}.\overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|.|\overrightarrow{QP}|}.$$

Cancelando o $|\overrightarrow{QP}|$ dos dois lados da igualdade, obtemos

$$d = \frac{|\vec{v}.\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}|}.$$

Ou seja,

$$d = \frac{|(a,b).(x_0 - x, y_0 - y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Assim,

$$d = \frac{|(ax_0 - ax + by_0 - by)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como $Q(x, y)$ pertence a r, temos que $ax + by + c = 0$ isso implica que $c = -ax - by$. Então, a fórmula da distância de um ponto até uma reta é

$$d = \frac{|(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemplo 8: Determinar a distância entre o ponto $A(2,3)$ e a reta r, de equação $x + y - 10 = 0$.

Solução: Temos o ponto $A(2{,}3)$ dado com $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$ e a equação da reta $x + y - 10 = 0$, onde $a = 1$, $b = 1$ e $c = -10$, assim, basta substituir na fórmula.

$$d = \frac{|(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Logo,

$$d = \frac{|1.2+1.3+(-10)|}{\sqrt{1^2+1^2}}.$$

Ou seja,

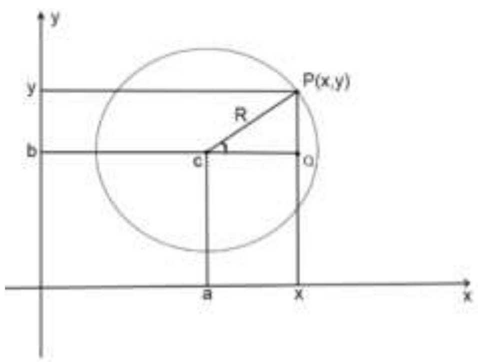
$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, a distância entre o ponto A e a reta r é $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

3.8 Equações da circunferência

A equação geral da circunferência é comumente utilizada, vejamos uma demonstração de como encontrar essa equação.

Figura 13: Equação da circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A circunferência representada na Figura 13 possui centro $C(a,b)$ e raio R. Considere um ponto $P\ (x,y)$ qualquer pertencente a circunferência e o ponto Q(x,b), observe que o ΔCPQ é um triângulo retângulo, R forma a hipotenusa e os catetos são $(y - b)$ e $(x - a)$, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

onde, a e b formam as coordenadas do centro da circunferência.

Podemos também, deduzir as equações paramétricas da circunferência, a partir do ângulo em C temos que

$$sen\, t \ = \frac{y-b}{R}$$

logo,

$$y = b + Rsent \ .$$

além disso,

$$cos\, t \ = \frac{x-a}{R}$$

daí,

$$x = a + Rcos\, t \ .$$

Exemplo 9: Descreva a equação cartesiana da circunferência de equações paramétricas $x = 2cost$ e $y = 2sent$.

Solução: Note que

$$x = 2cost$$

logo

$$cos\, t = \frac{x}{2}$$

Também que

$$y = 2sent$$

e

$$sent \ = \frac{y}{2}$$

Sabemos pela relação fundamental da trigonometria que,

$$sen^2t + cos^2t = 1\ ,$$

Assim

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

Logo, a equação cartesiana da circunferência é

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Com isso, finalizamos nossa abordagem sobre alguns conteúdos de Geometria Plana e, em seguida vamos trabalhar com alguns problemas envolvendo essa teoria.

4 PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA ABORDADOS NO ENEM

A Geometria Analítica é reconhecida como um dos componentes curriculares da educação básica, fundamental e relevante na vida do estudante. Diante disso, fizemos uma busca a cerca de problemas desta área no Exame Nacional do Ensino Médio, considerando provas recentes, de 2018 a 2021, e selecionamos algumas questões, nas quais apresentamos uma solução. Por fim, analisamos alguns aspectos sobre a abordagem da Geometria Analítica no ENEM.

4.1 Problema 1

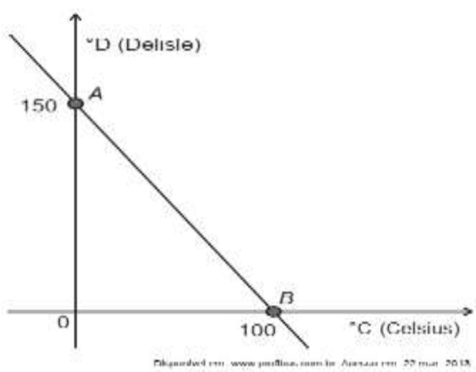
Este problema corresponde à questão número 157 da reaplicação do ENEM 2021. Nela, é abordado o conceito de função definida por uma reta, o objetivo é determinar uma equação da reta que passa por dois pontos no plano cartesiano. Ademais, serão tratadas as relações algébricas entre temperaturas. Vejamos seu enunciado:

A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

a) 2D + C = 100
b) 2D + 3C = 150
c) 3D + 2C = 300
d) 2D + 3C = 300
e) 3D + 2C = 450

Figura 14: Escala de temperatura Delisle (°D) referente a questão 157 - ENEM.



Fonte: Prova ENEM - 2021.

Solução: Notamos que buscamos identificar qual a função que está representando a reta no gráfico. Sabemos que a função de primeiro grau será dada por:

$$y = ax + b.$$

Para o problema, o eixo x e y recebem, respectivamente, como representações, C e D, assim, a equação que representa essa função será:

$$D = aC + b.$$

Assim, substituindo as coordenadas dada pela figura dos pontos, encontramos duas equações.

Usando o ponto $(0; 150)$:

$$150 = a0 + b \implies b = 150$$

Usando o ponto $(100; 0)$ temos:

$$0 = a.100 + 150 \implies a = -1{,}5$$

Logo,

$$D = -1{,}5C + 150$$

Fazendo um ajuste dos termos conforme as alternativas da questão, temos:

$$D + 1{,}5C = 150.$$

Multiplicando ambos os lados por 2 teremos:

$$2D + 3C = 300.$$

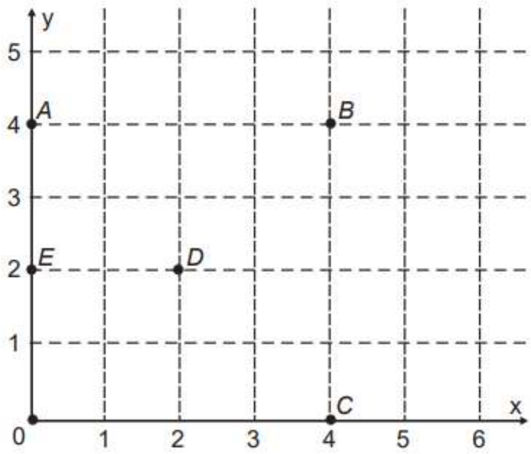
Portanto, a resposta correta é alternativa D.

4.2 Problema 2

Este problema corresponde à questão número 166 do ENEM 2018, prova Amarela. Neste problema é abordado o conceito de equação da circunferência.

Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A (0;4), B(4;4), C(4;0), D(2;2) e E(0;2).

Figura 15: Questão 166 ENEM 2018



Fonte: Prova ENEM – 2018.

Passando pelo ponto *A*, qual equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Solução: Para melhor compreensão, podemos observar que:

I) A reta de equação $x = 0$, passa pela origem e pelos pontos *A* e *E*, totalizando 2 pontos.

II) E a reta de equação $y = 0$, passa pela origem e pelo ponto C, totalizando 1 ponto.

III) A circunferência de equação $x^2 + \mathrm{y}^2 = 16$, não passa pela origem, logo não pode ser utilizada.

IV) A circunferência de equação $x^2 + (\mathrm{y} - 2)^2 = 4$, com centro no ponto $E(0,2)$ e raio 2 passa pela origem e pelos pontos *A* e *D*, totalizando 4 pontos.

V) A circunferência de equação $(x - 2)^2 + (\mathrm{y} - 2)^2 = 8$, com centro no ponto $D(2,2)$ e raio $2\sqrt{2}$ passa pela origem e pelos pontos *A, B* e *C*, totalizando 6 pontos.

Logo, passando pelo ponto A e pela origem, a equação que fornece a maior pontuação é $(x - 2)^2 + (\mathrm{y} - 2)^2 = 8$.

Portanto, a equação que forneceria a maior pontuação é $(x - 2)^2 + (\mathrm{y} - 2)^2 = 8$. Alternativa E.

4.3 Problema 3

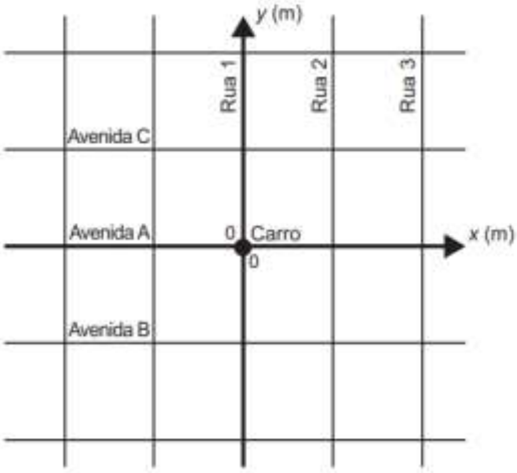
Este problema corresponde à questão número 142 da reaplicação do ENEM 2021. Neste problema é abordado o conceito de coordenadas cartesianas no plano.

Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B. No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.

A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é:

a) – 60.
b) – 40.
c) 0
d) 40
e) 60.

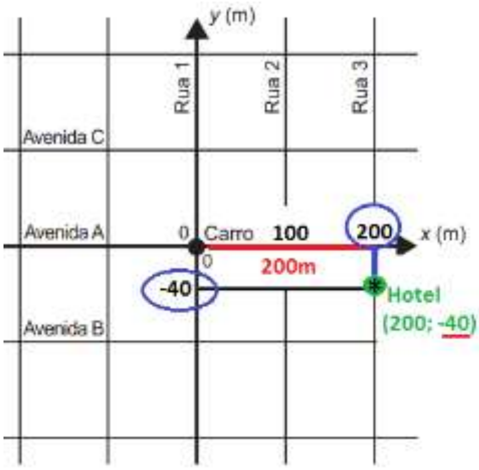
Figura 16: Questão 142 ENEM 2021.



Fonte: Prova ENEM - 2021.

Solução: Para resolução do problema vamos marcar as coordenadas do hotel e da localização onde o carro foi estacionado, ver Figura 17.

Figura 17: Coordenadas do hotel e localização onde o carro foi estacionado.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Da leitura do enunciado, e da ilustração da Figura 17, fica fácil ver que as coordenadas do hotel, em metros, são (200; –40), onde a ordenada é –40. Alternativa correta é B.

4.4 Problema 4

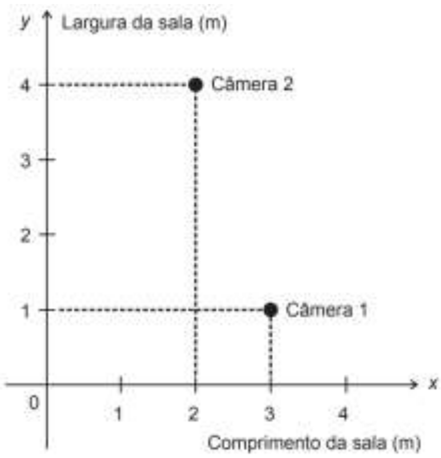
Este problema corresponde à questão número 174 do ENEM 2019. Esta questão envolve os tópicos da Geometria Analítica a partir do conceito de mediatriz.

Portanto, aborda os tópicos de pontos no plano cartesiano e distância entre pontos, vejamos:

Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.

Figura 18: Sistema de coordenadas para câmeras 1 e 2.



Fonte: Prova ENEM - 2019.

(ii) cinco relações entre as coordenadas (x, y) da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$$R_1: y = x$$

$$R_2: y = -3x + 5$$

$$R_3: y = -3x + 10$$

$$R_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

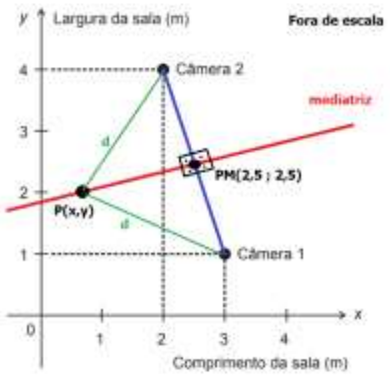
$$R_5: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera. A relação escolhida pelo instalador foi a

a) R_1
b) R_2
c) R_3
d) R_4
e) R_5

Solução: Para resolução desta questão precisamos determinar a equação da reta mediatriz dos pontos C_1 (3,1) e C_2 (2,4). Portanto, a figura abaixo representa a situação para encontrarmos a equação da reta mediatriz.

Figura 19: Representação da distância entre o ponto P e as câmeras 1 e 2.



Fonte: Autor (2022).

A distância de qualquer ponto $P(x, y)$ pertencente à equação de reta mediatriz até C_1 (3,1) será igual a distância deste mesmo $P(x, y)$ até C_2 (2,4). Ou seja,

$$d((x,y)\,,(3,1)) \;=\; d((x,y),(2,4)).$$

Logo,

$$\sqrt{(x-3)^2 +\ (y-1)^2} \quad = \sqrt{(x-2)^2 +\ (y-4)^2}\,,$$

ou ainda,

$$x^2\ -6x+9+y^2-2y+\ 1\ = x^2-4x\ +4+y^2-8y+16,$$

o que implica,

$$6y\ =\ 2x\ +\ 10 \Rightarrow\ y\ =\frac{2}{6}x+\frac{10}{6}\ \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\ .$$

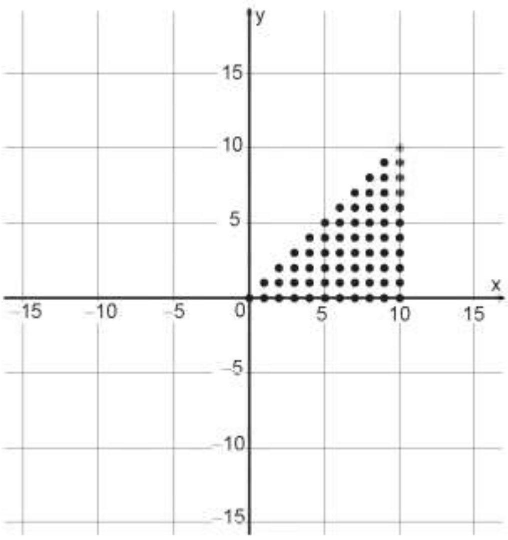
Portanto, a relação escolhida é R_4, alternativa D.

4.5 Problema 5

Este problema corresponde à questão número 178 do ENEM 2018. Novamente temos o conceito de plano cartesiano. Para tanto, a resolução requer o conhecimento de pares ordenados no plano.

Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.

Figura 20: Pontos em forma de triângulo no plano cartesiano.



Fonte: Prova ENEM - 2018.

Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico. Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

a) $0 \leq x \leq y \leq 10$
b) $0 \leq y \leq x \leq 10$
c) $0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10$
d) $0 \leq x + y \leq 10$
e) $0 \leq x + y \leq 20$

Solução: Para resolução desta questão será necessário resolver um sistema de inequações. Observe que a região está abaixo da reta que passa por $(0,0)$ e $(10,10)$, ou seja, a reta $y = x$. Assim, devemos ter $y - x \leq 0$, ou ainda, $y \leq x$. Logo temos:

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

$$y \leq x$$

Portanto, teremos $0 \leq y \leq x \leq 10$. Logo, a alternativa correta é item B.

4.6 Problema 6

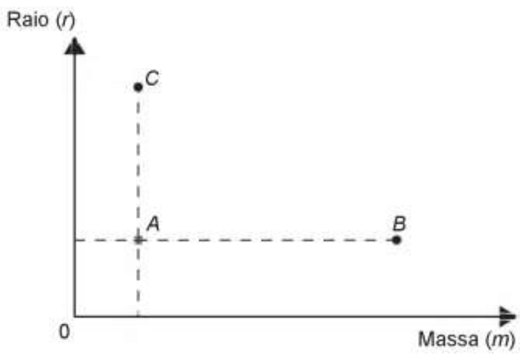
Este problema corresponde à questão número 151 do ENEM 2018. Neste problema é abordado o conceito de pontos localizados em um sistema bidimensional.

De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m; r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.

Figura 21: Representação dos satélites A, B e C no plano cartesiano.



Fonte: Prova ENEM - 2018.

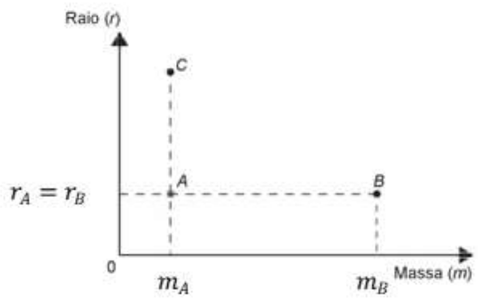
Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A, F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites

A, B e C, respectivamente. As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

a) $F_C = F_A < F_B$
b) $F_A = F_B < F_C$
c) $F_A < F_B < F_C$
d) $F_A < F_C < F_B$
e) $F_C < F_A < F_B$

Solução: Para melhor compreensão, a Figura 24 apresenta uma representação melhor das coordenadas do problema em questão.

Figura 22: Representação das coordenadas da massa e raio nos eixos dos satélites A e B plano cartesiano.



Fonte: Autor (2022).

Como $m_A = m_C$ e $r_A < r_C$, então, $F_A = \frac{km_A}{r_A^2} > \frac{km_C}{r_C^2} = F_C$.

Como $m_A < m_B$ e $r_A = r_B$, então, $F_A = \frac{km_A}{r_A^2} < \frac{km_B}{r_B^2} = F_B$.

Portanto,

$F_A > F_C$ e $F_A < F_B \Rightarrow F_C < F_A < F_B$. Logo, a alternativa correta é o item E.

4.7 Principais aspectos da abordagem da Geometria Analítica nas questões do ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio apresenta diversos problemas voltados para a aplicação dos ensinos matemáticos no cotidiano, em particular, observa-se também uma abordagem frequente de questões dessa natureza envolvendo os conteúdos da Geometria Analítica.

Conforme problemas apontados anteriormente, percebe-se aplicações que envolvem, principalmente, equações da reta e da circunferência. Além disso, é importante a compreensão dos alunos sobre como encontrar as distâncias no plano cartesiano (distância entre dois pontos; distância entre ponto e reta; distância entre duas retas), esses são os tópicos da Geometria Analítica mais recorrentes nas provas. Outro aspecto importante, trata-se da interdisciplinaridade, que é bastante explorada no exame, em especial, percebe-se que é frequente ocorrer aplicações da Geometria Analítica em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na Física.

As questões em que estão presentes os conteúdos da Geometria Analítica no ENEM são, em sua maioria, contextualizadas e não se trata apenas de resoluções de cálculos, mas sim do entendimento dos textos e seus contextos, por isso, é cada vez mais essencial a compreensão dos alunos nos conceitos aplicados dentro do cenário social, pois é dessa maneira que são frequentemente abordadas no exame.

As questões do ENEM possuem um nível de dificuldade desde problemas de simples raciocínio lógico, até questões com alto grau de dificuldade. Em todas elas, porém, é necessário entender os conceitos básicos e relações das rotinas do cotidiano dos indivíduos, pois são por meio de situações práticas que haverá melhor entendimento sobre como a questão deve ser resolvida.

A Base Nacional Comum Curricular tratando sobre a aplicação da contextualização da matemática escolar, aponta que se faz necessário que o aluno compreenda os conteúdos por meio de um contexto, a aplicação prática desse ensino envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar não apenas a resolução de enunciados, mas sim, a compreensão devida sobre as aplicações práticas dos conceitos matemáticos. Assim, por meio dessa aplicação, os alunos passarão a refletir e questionar o que ocorre em um dado problema (BRASIL, 2002).

Por meio dessa implicação, percebemos que o ENEM, promove para os alunos aplicações dos conceitos ligados a situações práticas, permitindo que os problemas sejam resolvidos tendo por base as definições promovidas em sala de aula e a contextualização com o mundo social. A matemática de forma aplicada e, de modo especial, a Geometria Analítica dentro dos problemas no ENEM, apontam a essencialidade não apenas de serem decoradas fórmulas ou conceitos, mas em compreender a maneira em que podem ser aplicadas nas atividades do dia a dia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho de conclusão de curso se desenvolveu por uma metodologia de revisão bibliográfica dos tópicos de Geometria Analítica que são abordados no Ensino Médio. Para tanto, após ser realizado o estudo bibliográfico, como resultados foi concebido um capítulo contendo seis problemas utilizados recentemente nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio.

Portanto, no desenvolvimento deste trabalho foi possível identificar os conteúdos de geometria analítica que são recorrentes em provas do ENEM. Ademais, identificamos que tais conteúdos são cobrados de forma interdisciplinar a partir de situações do cotidiano, da realidade e das relações interpessoais. Por fim, este estudo constitui para uma reflexão acerca da forma como são tratados os conteúdos no Ensino Médio, não só sobre Geometria Analítica, mas também de todos os tópicos da matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática**.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – Proposta preliminar - 2ª versão revista. MEC. Brasília, DF, 2002.

DANTE, L.R. **Matemática:** contexto e aplicações – Volume 3. São Paulo: Ática, 2013. Cap. 3-5, p. 69-140.

DESCARTES, R. **A Geometria - Primeiro livro**. Tradução de José Portugal dos Santos Ramos. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 19, n. 2, p. 221-249, jul.-dez. 2009.

DIAS, C. C. **Geometria analítica e números complexos** / Cláudio Carlos Dias, Neuza Maria Dantas. – Natal, RN: EDUFRN, 2006.

FONSECA, M. C. F. R., *et al*. O ensino da geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOUVEIA, R. **Distância entre dois pontos**. Toda Matéria, 2022. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/distancia-entre-dois-pontos/. Acesso em: 22 de abril de 2022.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** – SBEM. Ano I, n° 2, 1994.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria Analítica.** 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996

SILVA, E. S.; FERREIRA, J. A.; GOMES, L. P. S. 2016. **Uma proposta de ensino de geometria plana no ensino fundamental**: o jogo como instrumento no Paulista de Matemática. DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664essjaflpsg7484 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp. Acesso em 22 de maio de 2022.

SILVA, M. N. P. **Distância entre ponto e reta**. Brasil escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/distancia-entre-ponto-reta.htm. Acesso em 22 de maio de 2022.

VETORES NO $\Re^2$ E NO $\Re^3$. **Álgebra Linear e Geometria Analítica** – Prof. Aline Paliga, UFPEL.2012.