UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JACKSON CAUANDO DA SILVA

CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA O ESTUDO DAS SEÇÕES CÔNICAS NO *GeoGebra*

CAMPINA GRANDE - PB
2022

JACKSON CAUANDO DA SILVA

CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA O ESTUDO DAS SEÇÕES CÔNICAS NO *GeoGebra*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

CAMPINA GRANDE - PB

2022

S586c Silva, Jackson Cauando da.
Construções dinâmicas para o estudo das seções cônicas no *GeoGebra* [manuscrito] / Jackson Cauando da Silva. - 2022.
56 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida , Departamento de Matemática - CCT."

1. Educação Matemática. 2. Ensino de Geometria. 3. Ensino médio. 4. Seções cônicas. 5. Aplicativo GeoGebra. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

JACKSON CAUANDO DA SILVA

CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA O ESTUDO DAS SEÇÕES CÔNICAS NO *GeoGebra*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovado em: 24/11/2022

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Freitas

____

Prof.ª Dr.ª Luciana Roze de Freitas

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Elídio Raimundo da Silva Júnior

____

Prof. Me. Elídio Raimundo da Silva Jr.

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico aos meus pais, Maria e Josinaldo, por tudo que fizeram e fazem por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Josinaldo e Maria, por todo o apoio e por me darem oportunidades que nunca tiveram na vida. Sem eles, eu certamente não chegaria até aqui.

À minha irmã, Jaqueline, por ser uma pessoa incrível e divertida.

Ao meu professor orientador Dr. Joelson pela disponibilidade, pelo apoio, pela paciência e por tudo que me ensinou durante o desenvolvimento deste trabalho. E também pelas suas excelentes aulas, que tive o prazer de assistir no decorrer da graduação.

Aos demais membros da banca examinadora, Prof.ª Dr.ª Luciana e Prof. Me. Elídio, pela disponibilidade.

A todos os professores que tive na vida, pela competência e dedicação.

A todos os meus colegas de graduação, pelos momentos divertidos que passamos juntos e pela troca de conhecimentos.

“Geometria é a arte do raciocínio correto de figuras desenhadas incorretamente.”

Henri Poincaré

RESUMO

O ensino de Geometria não é tão valorizado no Brasil, quando comparamos com outros ramos da Matemática, como a Álgebra e a Aritmética. Consequentemente, muitos conteúdos são deixados de lado, até mesmo quando estão presentes nos programas de ensino e livros didáticos, como é o caso das seções cônicas. Este trabalho faz um estudo sobre as seções cônicas, abordando aspectos da Geometria Plana e Analítica, e apresenta um breve histórico do seu ensino. E por fim, apresenta algumas construções dinâmicas no *GeoGebra* e como utilizá-las na abordagem deste conteúdo no Ensino Médio, buscando facilitar a visualização das figuras e o entendimento dos conceitos.

Palavras-chave: Educação Matemática; ensino de Geometria; Ensino Médio; seções cônicas; aplicativo *GeoGebra*.

ABSTRACT

The teaching of Geometry is not so valued in Brazil, when we compare it to other branches of Mathematics, such as Algebra and Arithmetic. Consequently, many contents are left aside, even when they are present in teaching programs and textbooks, as is the case of conic sections. This work studies conic sections, addressing aspects of plane and analytical Geometry, and presents a brief history of its teaching. And finally, it presents some dynamic constructions in GeoGebra and how to use them in approaching this content in High School, seeking to facilitate the visualization of the figures and the understanding of the concepts.

Keywords: Math Education; Geometry teaching; High School; conic sections; *GeoGebra* app.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática certamente não está entre as disciplinas preferidas dos alunos, independentemente do nível de ensino. É considerada difícil pela maioria das pessoas. E de fato, contém diversos conceitos complexos e com o passar dos anos na vida escolar, esta disciplina exige cada vez mais da capacidade de abstração do estudante. O baixo desempenho apresentado nas escolas é agravado ainda pela maneira que os conteúdos são apresentados e algumas áreas da Matemática são mais prejudicadas do que outras, como é o caso da Geometria.

A Aritmética e a Álgebra, por exemplo, sofrem com a maneira que as aulas são ministradas e com o ensino tradicional. No caso da Geometria, existe ainda um outro fator que atrapalha o seu ensino, que é a sua desvalorização nos programas de ensino. O impacto sofrido é tão grande, que muitos autores, como Pavanello, consideram ser um abandono. Por conta disto, alguns conteúdos considerados mais complexos, como as seções cônicas, quase não são ensinados.

As cônicas são figuras geométricas planas obtidas a partir da interseção entre um cone duplo de revolução e um plano, podendo ser estudadas por meio de equações e no plano cartesiano. Este conteúdo é visto na Terceira Série do Ensino Médio e geralmente recebe um tratamento analítico, relacionando a Geometria e a Álgebra. Os conteúdos que relacionam estas duas áreas são considerados difíceis, já que envolvem o estudo de equações, plano cartesiano, e figuras geométricas.

Existem diversas alternativas para facilitar o ensino destes conteúdos, como o uso de *softwares* educacionais. No caso das cônicas, podemos utilizar o *GeoGebra*, que é um poderoso aplicativo gratuito e bastante versátil, por possuir várias ferramentas que permitem o estudo de gráficos, planilhas, equações, etc. Com o uso deste aplicativo, podemos construir elipses, hipérboles e parábolas com grande precisão e estudar as suas definições e propriedades. Um ponto negativo do *GeoGebra* é que, por possuir muitos recursos, não é tão fácil de utilizar quanto outros *softwares* e por isso exige um certo tempo de estudo para usá-lo de maneira eficiente.

Sabemos que muitas escolas não possuem recursos digitais suficientes para o ensino e não é objetivo deste trabalho discutir sobre isto. Mas vale destacar que o *GeoGebra* já vem instalado no sistema *Linux Educacional*, mas não necessariamente na versão mais atualizada. Este sistema está presente em equipamentos como o *Data Show* e computadores, e Lemos (2010) explica que:

> Esta distribuição GNU/Linux foi desenvolvida pelo Centro de Experimentação em Tecnologia Educacional (CETE) do Ministério da Educação (MEC). O CETE concentra, organiza, distribui, acompanha e coordena informações relativas à implantação do Proinfo, e configura-se como um canal de comunicação entre universidades, centros de pesquisa e indústria, escolas e o MEC. O Linux Educacional foi colocado em evidência a partir de sua utilização nos la-

> boratórios de Informática das escolas públicas brasileiras, através do Proinfo (LEMOS, 2010, p.41).

Então, em escolas que possuem equipamentos com o *Linux Educacional* é necessário ainda, uma formação adequada do corpo docente. Pensando nisto, este trabalho apresenta uma maneira de utilizar o *GeoGebra* para ensinar o conteúdo das seções cônicas. Mas primeiro, estudamos aspectos históricos do desenvolvimento do ensino da Geometria e também do ensino das cônicas no Brasil.

Vejamos então, como o trabalho está organizado: no capítulo 2, mostramos um pouco da história da origem do ensino de Geometria no Brasil e buscamos entender como o Movimento da Matemática Moderna (MMM) provocou o seu abandono. Em seguida, vemos um pouco do histórico do ensino das seções cônicas e como este conteúdo é abordado no Ensino Médio e de que maneira é apresentado em algumas obras do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

Iniciamos o capítulo 3 entendendo qual foi a origem das cônicas e quais as mudanças que ocorreram sobre alguns conceitos. Em seguida, fazemos um estudo sobre alguns conceitos que podem ser vistos no Ensino Médio, como suas definições, equações e outras características.

No capítulo 4, discutimos a importância do uso de recursos tecnológicos para melhorar o ensino de Matemática. Depois apresentamos o *GeoGebra*, mostramos alguns dos seus recursos e também como usar suas ferramentas básicas.

Finalmente, no capítulo 5, mostramos tutoriais para fazer construções dinâmicas no aplicativo. Estas construções exploram as definições, equações e propriedades vistas no capítulo 3.

2 ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Muitos professores e alunos têm dificuldades em lidar com a Geometria e, como podemos perceber em diversos livros didáticos utilizados na atualidade, este conteúdo geralmente é abordado no final do ano letivo, o que prejudica ainda mais o aprendizado dos estudantes. Além disso, por muito tempo o ensino de Geometria foi deixado de lado, enquanto que a Álgebra e a Aritmética tinham um certo destaque no ensino de Matemática. Neste capítulo veremos alguns aspectos históricos que explicam o porquê desta desvalorização e como ocorreu o ensino da Geometria ao longo do tempo.

2.1 Um pouco da história

Segundo Meneses (2007), o ensino no Brasil foi, por um tempo, dominado pelos jesuítas, mas a maioria destes não considerava a matemática algo importante para a formação do homem. Não existiam muitos professores devidamente qualificados para ensinar a disciplina, então o seu ensino não era prioridade.

O início do ensino de Geometria no Brasil, é então, atribuído aos militares, por necessidades de guerra, no desenvolvimento de construções mais resistentes e armas mais precisas. Surgem então, em 1699, no Rio de Janeiro, as Aulas de Artilharia e Fortificação, fazendo a matemática ganhar mais espaço. Surgia também um novo profissional no exército, o engenheiro:

> Engenheiro: oficial que serve à guerra para ataques, defesa e fortificação de praças. É um matemático hábil, 'expert' e astuto, que faz o reconhecimento das praças que se quer atacar e que mostra ao general o ponto mais frágil, que desenha trincheiras, galerias [...]. Ao engenheiro cabe também a invenção de novas bombas [...] (MENESES, 2007, p.22).

O engenheiro tinha um papel muito importante, já que, com o seu conhecimento geométrico, podia projetar e conduzir as obras de maneira eficiente, evitando o desperdício de recursos e despesas desnecessárias.

Em meados do século XVII, Portugal enviou diversos especialistas para formação de pessoas em fortificação militar. Mas somente no início do século XVIII, o ensino de Geometria ganhou força no Brasil, quando se tornou obrigatória a formação na área para os militares que desejassem se tornar oficiais. E segundo Meneses (2007), a preocupação de Portugal com o estudo da Geometria entre os militares se deu por conta da ameaça de guerra contra a Espanha.

Em 1744, José Fernando Pinto Alpoim escreveu os dois primeiros livros em português que foram utilizados para as Aulas de Artilharia e Fortificação: *O Exame de Artilheiros* e *Exame de bombeiros*. Meneses (2007) nos conta que, apesar dos livros terem uma boa didática, não tinham muito rigor matemático. Os livros mostravam diversas técnicas de desenho geométrico para ensinar os conceitos da Geometria, como, por exemplo, construção e divisão de ângulos, divisão de segmentos, construção de triângulos etc.

De acordo com Caldatto e Pavanello (2015), a bibliografia utilizada nestes cursos de formação militar foi utilizada como base curricular até meados do século XIX, quando o Colégio Pedro II se tornou referência de ensino secundário no Brasil.

Novos materiais surgiram na Europa e principalmente na França, e no ano de 1779, a Corte Portuguesa determinou que estes materiais fossem utilizados (MENESES, 2007). Foram criados mais dois cursos para aperfeiçoar as forças portuguesas: o curso da Academia Real dos Guardas-Marinha e o curso da Academia Real Militar. A partir daí, outras áreas da matemática, além da Geometria, ganharam mais destaque, como a Álgebra e a Aritmética.

Nesta época, a obra mais utilizada no curso da Academia Real dos Guardas-Marinha foi a de Bézout, que permaneceu por bastante tempo. Sua obra foi, aos poucos, substituída pela geometria do brasileiro Vilela Barbosa, que estava em ascensão. E segundo Meneses (2007), com essa substituição:

> [...] percebe-se que a Geometria prática, que era referência no ensino brasileiro desde os tempos de Alpoim, perdeu espaço para a chamada Geometria especulativa, isto é, a Geometria mais rigorosa, que abordava os conteúdos de uma forma encadeada, partindo dos teoremas e axiomas até a conclusão de determinado conceito (MENESES, 2007, p.39).

A obra utilizada no curso da Academia Real Militar era a de Legendre, que ao passar dos anos, foi substituída pela de Lacroix. Podemos perceber que foram estes dois cursos que modelaram o ensino de Matemática no Brasil. Com o tempo, "o curso da Academia Real dos Guardas-Marinha foi se constituindo num curso de nível secundário, enquanto o curso da Academia Real Militar foi se constituindo num curso superior" (MENESES, 2007).

O curso primário foi organizado somente após a constituição dos ensinos secundário e superior. Havia a preocupação com o ensino da Geometria, formando os alunos com habilidades de medição de terrenos e construção utilizando régua e compasso. Mas segundo Meneses (2007), concluiu-se que o ensino da Geometria na educação primária era impossível.

Apesar disto, não só a Geometria, mas principalmente ela, sempre foi um conhecimento matemático de destaque nos outros níveis de ensino, inclusive para o ingresso em cursos jurídicos, que exigiam uma formação prévia em Geometria. Segundo Meneses (2007), este fato gerou bastante discussão, mas:

> [...] após os calorosos debates verificados na Câmara, onde a grande maioria era favorável ao emprego da Geometria, chegou-se ao consenso de que a Geometria, entre outras coisas, era responsável por levar o indivíduo a adquirir ideias exatas em Economia Política, desenvolver a razão ainda inexperta do rapaz e fazer raciocinar com exatidão e método etc (MENESES, 2007, p.43).

Por conta dessa valorização em cursos superiores, a Geometria ganhou bastante espaço no ensino secundário. Além disso, perdeu a característica de ser uma disciplina exclusivamente militar e passou a ser considerada essencial para a formação do indivíduo. E a partir daí, a

Geometria foi se tornando uma disciplina escolar. Apesar de uma disciplina escolar levar um bom tempo para se estabelecer, dentre outros fatores:

> A criação de colégios, como foi o caso do Imperial Colégio de D. Pedro II, em 1837, reforça a caracterização e surgimento de disciplinas escolares, pois a criação das escolas determinou o surgimento de metodologias específicas para o ensinamento destes conhecimentos, e essas metodologias [...] podem ser apontadas como uma nova forma de organização da disciplina (MENESES, 2007, p. 45).

Os métodos de ensino seguiam o mesmo modelo das obras anteriores, mas com o avanço da industrialização, o mundo inteiro estava se modernizando, e o mesmo aconteceu com o ensino de Matemática. Com a criação da Comissão Internacional de Instrução Matemática (IMUK, do alemão Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission) no Quarto Congresso Internacional de Matemáticos, que ocorreu em Roma em 1908, novas propostas de ensino surgiram.

Durante anos, diversas mudanças foram feitas nos modelos de ensino em alguns colégios do Brasil, ocorrendo também a união entre Geometria, Álgebra, Aritmética e Trigonometria no Colégio Pedro II (SANTOS e LEAL, 2021). Surgiu então, uma nova disciplina escolar: a Matemática, com uma grande contribuição do então diretor deste colégio, Euclides Roxo.

Com a revolução de 1930, por conta da pressão da sociedade, o novo Governo desenvolveu um projeto de modernização e criou dois ministérios: o da "Educação e Saúde" e do "Trabalho, Indústria e Comércio". Para o primeiro, foi designado Francisco Campos, que no ano seguinte, deu início a uma reforma que buscava unificar o ensino em todo o território brasileiro (MENESES, 2007).

Nesta época, Euclides Roxo se tornou membro do Conselho Nacional de Ensino, e por conta da sua força política e o grande destaque do Colégio Pedro II, a Reforma Francisco Campos adotou o modelo de ensino deste colégio. A reforma foi oficializada através da Portaria Ministerial de 30 de junho de 1931. A partir daí, a Matemática se tornara uma disciplina escolar, e a Geometria, apenas um dos seus conteúdos.

2.2 Barreiras enfrentadas pelo ensino da Geometria

O ensino da Geometria no Brasil, sofre a bastante tempo, com um abandono gradual, comparado a outros conteúdos matemáticos. Isso ocorre principalmente em escolas públicas, mas não somente nelas. Segundo Pavanello (1993), a Lei 5692/71 contribuiu consideravelmente para este abandono:

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto a decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula [...] (PAVANELLO, 1993, p.7).

Esta lei surgiu na mesma época do Movimento da Matemática Moderna. Movimento este, que teve origem por volta dos anos 1950 e, segundo Gomes (2013), chegou de fato ao Brasil em 1961 com a criação do GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), em São Paulo.

Segundo Soares (2001), a preocupação com a modernização da Matemática se deu principalmente por conta do baixo conhecimento matemático dos estudantes ao entrar na faculdade. Esse movimento trazia propostas de mudanças no currículo, incluindo novos conteúdos, ao mesmo tempo que outros seriam excluídos ou modificados, buscando aproximar a matemática da educação básica com aquela vista no ensino superior.

De acordo com Gomes (2013), um dos principais objetivos do Movimento da Matemática Moderna era:

> [...] integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções. Enfatizava-se, ainda, a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos e estruturais da Matemática, em oposição às características pragmáticas que, naquele momento, predominavam no ensino, refletindo-se na apresentação de regras sem justificativa e na mecanização dos procedimentos (GOMES, 2013, p.24).

Soares (2001) destaca que esse abandono do ensino da Geometria foi sentido em todo o mundo, mas principalmente no Brasil, por conta da falta de preparo dos professores. E as mudanças curriculares propostas para a abordagem dos conceitos não aconteceu de fato na prática.

Desejava-se mudar a maneira como a Geometria Euclidiana era ensinada, já que os resultados descritos pelo próprio Euclides, eram obtidos através de conhecimentos intuitivamente óbvios. Mas, na tentativa de fazer esta mudança, Soares (2001) nos conta que os livros didáticos ficaram repletos de símbolos e notações, deixando-os excessivamente formais. E, no final dos anos 1970, esta formalidade da matemática e a preocupação com o rigor na linguagem através de símbolos gerou diversas críticas ao movimento, e matemáticos como Morris Kline e René Thom, que eram matemáticos de grande destaque na área, se posicionavam contra as propostas (GOMES, 2013).

2.3 O ensino das seções cônicas no Brasil

Desde, pelo menos, o ano de 1892 as seções cônicas são ensinadas no Brasil, com a introdução deste conteúdo no programa do Colégio Pedro II, de acordo com Bordallo (2011). Apesar do abandono parcial da Geometria com a chegada do Movimento da Matemática Moderna, as cônicas continuaram a ser estudadas nas escolas.

Segundo Bordallo (2011),

> [...] a abordagem analítica sugerida pelo GEEM se concretizou nos livros de

> matemática moderna que abordavam cônicas, mas a escolha do terceiro ano colegial não foi seguida por todos. Era de se esperar uma abordagem puramente analítica nesse período já que o Movimento da Matemática Moderna era a favor da algebrização da geometria, com uma valorização da geometria analítica em detrimento da geometria sintética.
> Mas o que observamos foi que o Movimento da Matemática Moderna marcou o fim da abordagem sintética. Mesmo com o fim do movimento, a abordagem continuou a ser apenas analítica e [...] sempre nos livros do último ano do ensino médio (BORDALLO, 2011, p.11).

Podemos notar que, embora o ensino de Geometria tenha sofrido grande impacto com a chegada do MMM, o ensino das cônicas não foi deixado de lado, mas sim modificado. Bordallo (2011) destaca que, antes do MMM, "em geral, quando o tratamento era geométrico, as cônicas eram unificadas; quando analítico, fragmentadas" e que "a abordagem exclusivamente analítica trouxe ao ensino das seções cônicas o fim definitivo da apresentação unificada."

As cônicas são ensinadas com abordagem fragmentada até os dias atuais, como podemos ver, por exemplo, nos livros de Matemática da Terceira Série do Ensino Médio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. Os livros que trazem o conteúdo são: Matemática - Ciência e Aplicações - Volume 3, Matemática - Contexto & Aplicações - Volume 3 e Matemática para compreender o mundo - Volume 3.

Os três livros apresentam as cônicas a partir da interseção entre cone duplo e plano, sendo que apenas Matemática para compreender o mundo apresenta a definição de cone duplo. Os três definem a elipse e a hipérbole a partir dos focos, e a parábola a partir de foco e diretriz. Também demonstram as equações reduzidas de cada curva, destacando as diferenças que existem quando fazemos mudanças de eixos. Todos os livros, com exceção do Matemática para compreender o mundo, mostram as equações nos casos de translação de eixos para as três curvas. E diferente dos outros dois, este último mostra apenas a equação da parábola com translação e, em seguida, apresenta a equação reduzida como caso particular.

Além disso, os livros Matemática - Ciência e Aplicações e Matemática - Contexto & Aplicações, apresentam de maneira superficial a utilização do *GeoGebra* para estudar as cônicas. Com relação à excentricidade, os três livros mostram como calcular da elipse e da hipérbole, mas não falam sobre a parábola e nem relacionam as três cônicas a partir deste conceito.

Os três livros apresentam o conteúdo de maneira fragmentada já que utilizam as definições focais de cada curva e as relacionam apenas ao mostrar a interseção entre plano e cone duplo. Segundo Bordallo (2011), a melhor maneira de se ensinar cônicas de maneira unificada mantendo o tratamento analítico, seria apresentar o conteúdo com base na definição em termos de foco, diretriz e excentricidade, pois neste caso a relação entre as três curvas é clara.

No próximo capítulo, dedicado às cônicas, veremos uma breve história da sua origem. Além disso, vamos explorar alguns conceitos que podem ser abordados no Ensino Médio e que geralmente aparecem nos livros didáticos.

3 AS SEÇÕES CÔNICAS

As seções ou curvas cônicas são figuras planas que podem ser obtidas a partir da interseção de um cone duplo de revolução e um plano, como veremos mais adiante. Também podem ser definidas num sistema de eixos coordenados através de equações. As cônicas, bem como os demais conceitos matemáticos, são apresentados a partir de Lima (2014) e Reis e Silva (1996), enquanto que a parte histórica está de acordo com Eves (2011).

3.1 História

Apesar de poderem ser representadas por equações, as curvas cônicas são estudadas desde muito antes da Geometria Analítica. Elas surgiram a partir do problema da duplicação do cubo proposto pelos gregos. O problema consistia em encontrar a aresta de um cubo cujo volume era o dobro do volume de um cubo dado. O primeiro matemático que obteve algum progresso na resolução deste problema foi Hipócrates (460-377 a.C.) (EVES, 2011).

Ele reduziu o problema à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de comprimentos, s e $2s$. Sendo x e y as médias proporcionais, temos

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$$

Daí segue que

$$x^2 = sy \Rightarrow x^4 = s^2y^2 \qquad \text{e} \qquad y^2 = 2sx$$

Substituindo y^2, temos

$$x^4 = s^2 \cdot 2sx \Rightarrow x^3 = 2s^3 \Rightarrow x = s\sqrt[3]{2}$$

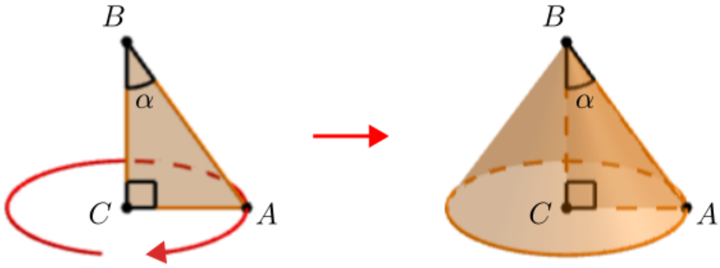
Deste modo, o cubo de aresta x tem o dobro do volume do cubo de aresta s.

A partir desta redução, um matemático chamado Menecmo (c. 350 a.C.) conseguiu solucionar o problema utilizando as curvas cônicas que, ao que tudo indica, foram inventadas por ele. Nesta época as cônicas eram obtidas através da interseção de um plano com três tipos diferentes de cone, e a definição desta superfície era diferente da que temos atualmente. O cone era definido pela revolução de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos, como podemos ver na figura 1.

Considerando o ângulo α (vide figura 1) formado pelo eixo do cone (cateto vertical) e a geratriz (hipotenusa), podemos definir os três tipos de cone: se $2\alpha < 90°$, então o cone é acutângulo; se $2\alpha = 90°$, então o cone é retângulo; se $2\alpha > 90°$, então o cone é obtusângulo.

Para se obter cada uma das cônicas, deveria se considerar um plano perpendicular a uma geratriz (hipotenusa do triângulo que gerou o cone). Quando o cone é acutângulo, temos uma elipse; quando é retângulo, temos uma parábola; e quando é obtusângulo, uma hipérbole.

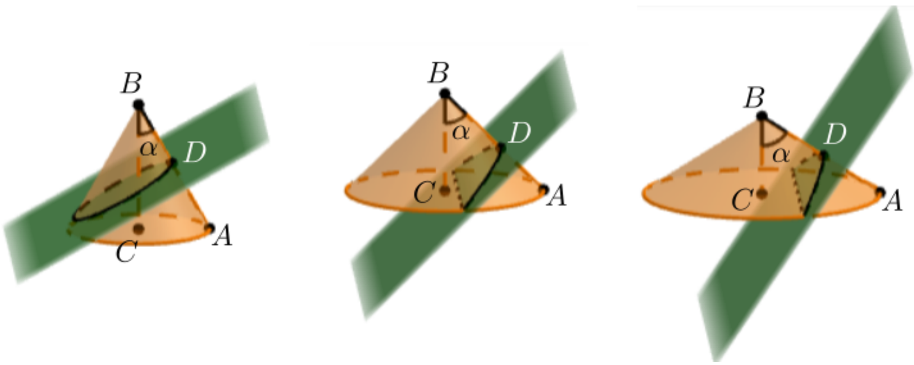
Figura 1 – Cone a partir de um triângulo retângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

As seções cônicas eram obtidas deste modo (como mostrado na figura 2) até a época de Apolônio (c. 225 a.C.), que foi um dos matemáticos mais conhecidos pelo estudo destas curvas. Ele passou a definir cone de uma maneira bem semelhante à que temos hoje em dia, considerando-o infinito e com duas folhas.

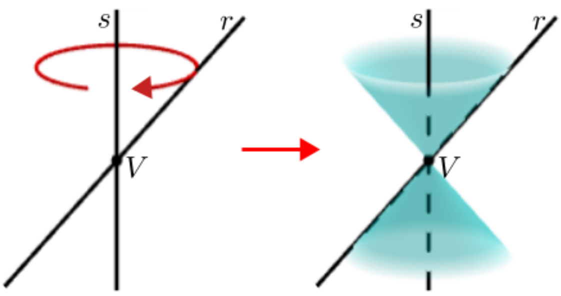
Figura 2 – Elipse, parábola e hipérbole



Os planos interceptam a geratriz AB no ponto D de maneira perpendicular em cada um dos cones.
Fonte: elaborada pelo autor.

Definição 3.1. Cone duplo de revolução (ou cone de duas folhas) é a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de uma outra que a intercepta formando um ângulo agudo.

Figura 3 – Cone duplo de revolução

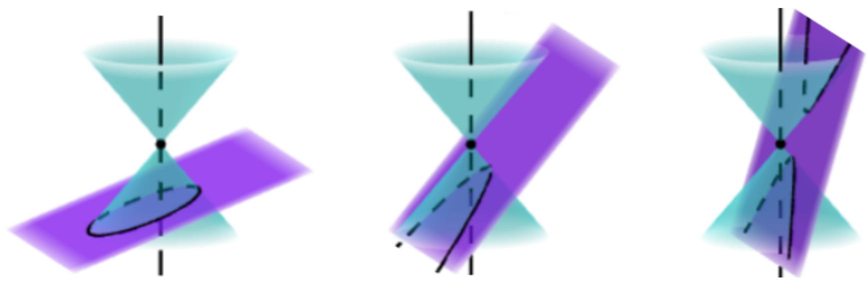


Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 3, as retas r e s são concorrentes no ponto V. A rotação de r em torno de s gera um cone. A reta r é a geratriz do cone, a reta s é o seu eixo e o ponto V, o seu vértice.

As cônicas passaram então, a ser obtidas a partir de qualquer tipo de cone. Assim, a partir de um único cone, podemos obter diferentes cônicas, basta mudar a posição relativa do plano, como vemos na figura 4. Além disso, a hipérbole passou a ter dois ramos, já que intercepta as duas folhas do cone.

Figura 4 – Cônicas obtidas a partir de um mesmo cone



Fonte: elaborada pelo autor.

3.2 Cônicas: conceitos a serem ensinados no Ensino Médio

Veremos, a partir daqui, alguns conceitos que podem ser vistos no Ensino Médio sem muitas dificuldades, já que podemos utilizar o *GeoGebra* para estudá-los. A escolha destes conceitos foi feita com base na maneira que as cônicas são ensinadas atualmente, mas vamos entender também a definição unificada, levando em conta que esta definição é interessante para o estudo, mas não aparecem nos livros citados no capítulo anterior.

Vimos anteriormente que as cônicas podem ser obtidas através da interseção de um cone duplo de revolução com um plano. Vamos entender, então, em quais condições podemos garantir qual cônica será gerada pela interseção. Além da definição de cada uma delas no plano cartesiano e suas equações.

3.2.1 Elipse

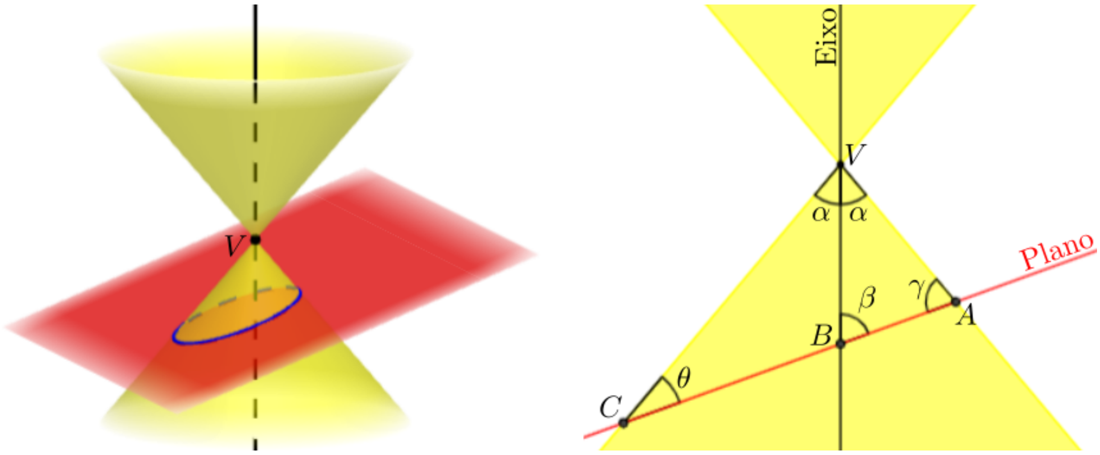
Caso o plano intercepte completamente apenas uma das folhas do cone, obtemos uma elipse. Nesta situação o plano é secante a todas as geratrizes do cone. Se considerarmos o ângulo α formado entre a reta geratriz e o eixo do cone, e o ângulo β formado entre o eixo do cone e o plano em questão, podemos observar que $\alpha < \beta$. Isso sempre ocorrerá quando a interseção for uma elipse.

Na figura 5, temos na esquerda, a interseção entre plano e cone e, na direita, a vista lateral dos objetos, mostrando os ângulos anteriormente mencionados, além de outros que precisamos para mostrar que $\alpha < \beta$.

Observe que, $C\hat{V}B = B\hat{V}A = \alpha$, já que as retas que contém os segmentos CV e AV são geratrizes do cone. No triângulo CAV temos $2\alpha + \theta + \gamma = 180°$. E no triângulo BAV, temos $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Então, $2\alpha + \theta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow 2\alpha + \theta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \theta = \beta \Rightarrow \alpha < \beta$.

Se $\beta = 90°$, ou seja, se o plano fosse perpendicular ao eixo do cone, então a interseção seria uma circunferência. E se o plano passasse pelo vértice do cone, ainda com $\alpha < \beta$, a

Figura 5 – Elipse a partir da interseção entre cone e plano



Fonte: elaborada pelo autor.

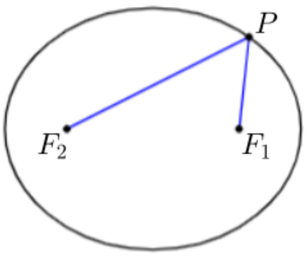
interseção seria apenas um ponto. Tanto a circunferência quanto o ponto são elipses degeneradas.

Equação reduzida da elipse

Definição 3.2. Dados dois pontos F_1 e F_2 (ditos focos), e um número real positivo $2a$, elipse é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e a F_2 é constante e igual a $2a$. Ou seja,

$$\mathrm{d}(P, F_1) + \mathrm{d}(P, F_2) = 2a$$

Figura 6 – Elipse a partir da definição



Fonte: elaborada pelo autor.

A demonstração que vem a seguir está de acordo com Lima (2014), e através dela mostraremos que a elipse pode ser representada por uma equação bastante simples, quando escolhemos um sistema de eixos conveniente.

Dada uma elipse E, tomamos no plano um sistema de coordenadas xOy de maneira que os focos estejam sobre o eixo x e o ponto médio deles seja a origem do sistema (figura 7). Assim temos, $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$ com $a > c > 0$.

Pela definição, um ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$\mathrm{d}(P, F_1) + \mathrm{d}(P, F_2) = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

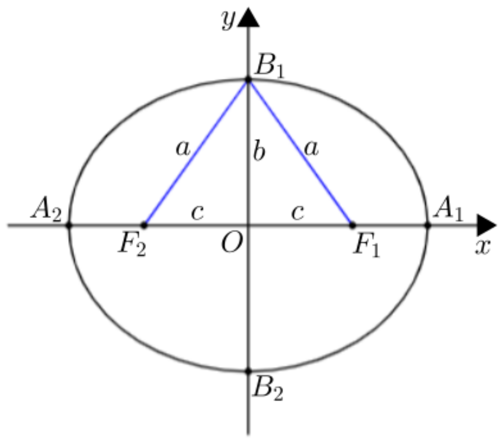
Desenvolvendo, temos:

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$(cx + a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}\right)^2$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

Simplificando:

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Figura 7 – Elipse centrada em um sistema de coordenadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Fazendo $a^2 - c^2 = b^2$, temos:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$
$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

A equação (3.1) representa, no sistema de eixos coordenados xOy, uma elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox. No caso de uma elipse com os focos sobre o eixo Oy, a equação seria a mesma, mas $b > a$.

Elementos da elipse

Observando a figura 7 podemos destacar os seguintes elementos:

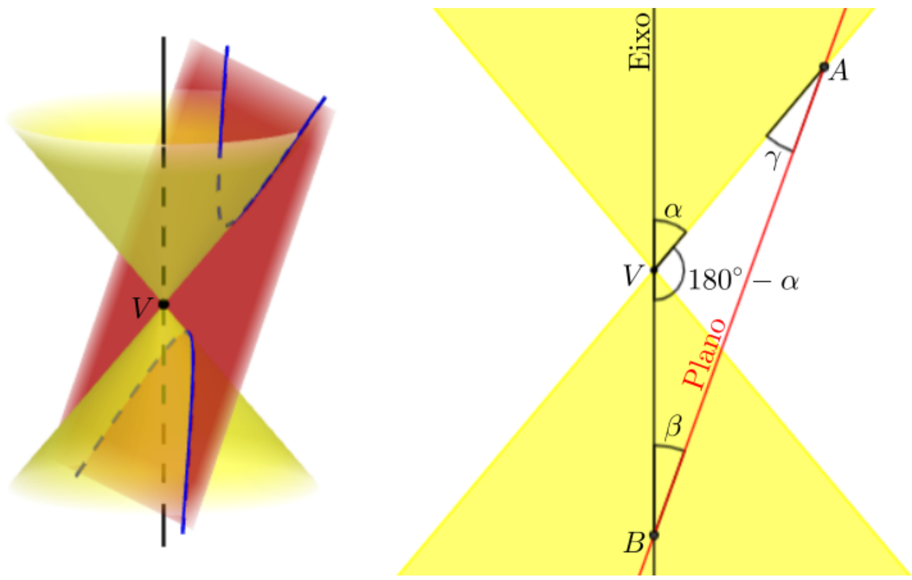
- Centro: ponto O;
- Eixo maior: segmento A_1A_2, com comprimento $2a$;
- Eixo menor: segmento B_1B_2, com comprimento $2b$;
- Vértices: pontos A_1 e A_2;
- Focos: pontos F_1 e F_2;
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$.

3.2.2 Hipérbole

Para que a interseção seja uma hipérbole, o plano deve interceptar as duas folhas do cone. Neste caso, será paralelo a duas geratrizes do cone. Se considerarmos os mesmos ângulos que na seção anterior: α sendo o ângulo formado entre o eixo e a geratriz do cone, e β o ângulo formado entre o plano e o eixo do cone, temos $\alpha > \beta$.

Observe na figura 8 que, no triângulo BAV temos $180° - \alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow -\alpha + \beta + \gamma = 0° \Rightarrow \beta + \gamma = \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$. Sempre que a interseção for uma hipérbole, temos $\alpha > \beta$. Se o plano intercepta o cone passando pelo vértice, a interseção vai gerar duas retas concorrentes. Temos, neste caso, uma hipérbole degenerada.

Figura 8 – Hipérbole a partir da interseção entre cone e plano



Fonte: elaborada pelo autor.

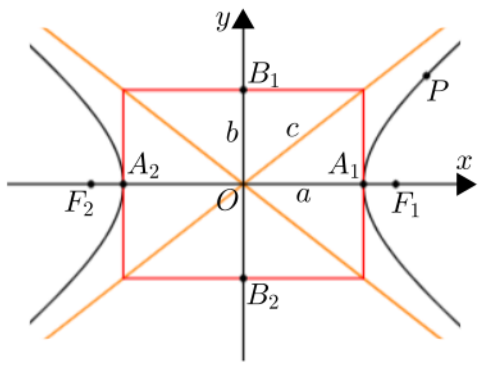
Existe também, a possibilidade do plano interceptar as duas folhas do cone, mas não cortar o eixo. Neste caso, o plano estaria paralelo ao eixo e o ângulo β seria igual a zero. Mas ainda assim, temos $\alpha > \beta$.

Equação reduzida da hipérbole

Definição 3.3. Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos), e um número real positivo $2a$, hipérbole é o conjunto dos pontos P do plano cuja diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$. Assim, temos

$$|\mathrm{d}(P, F_1) - \mathrm{d}(P, F_2)| = 2a$$

Figura 9 – Hipérbole centrada em um sistema de coordenadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos deduzir a equação da hipérbole de maneira semelhante ao que fizemos para a elipse. Como a hipérbole possui dois ramos, existem pontos P tais que, $\mathrm{d}(P, F_1) - \mathrm{d}(P, F_2) = 2a$ e outros pontos P tais que $\mathrm{d}(P, F_1) - \mathrm{d}(P, F_2) = -2a$ (LIMA, 2014).

Tomando os focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$, os ramos da hipérbole estarão um ao lado do outro, como na figura 9. Observe que o ponto P na figura está no ramo direito e satisfaz a equação $\mathrm{d}(P, F_1) - \mathrm{d}(P, F_2) = -2a$. Os pontos do ramo esquerdo satisfazem a outra equação.

Desenvolvendo $\mathrm{d}(P, F_1) - \mathrm{d}(P, F_2) = -2a$, temos $\mathrm{d}(P, F_2) = \mathrm{d}(P, F_1) + 2a$ e daí podemos deduzir a equação do ramo direito, onde $P = (x, y)$:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando, temos:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(cx - a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

Simplificando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \tag{3.2}$$

Pela desigualdade triangular, temos no triângulo PF_1F_2, que o lado F_1F_2 é maior do que a diferença dos outros dois. Assim, $2c > 2a$, então $c^2 > a^2$. Portanto, a diferença $c^2 - a^2$ é maior que zero. Logo, podemos dizer que $c^2 - a^2 = b^2$.

Substituindo b^2 em (3.2), temos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.3}$$

Portanto, se o ponto $P = (x, y)$ pertence ao ramo direito, então satisfaz a equação acima.

Como, neste caso, os ramos da hipérbole são simétricos em relação ao eixo y, para cada $P = (x, y)$ no ramo direito, temos um ponto $Q = (-x, y)$ no ramo esquerdo. Mas note que o ponto Q também satisfaz a equação (3.3).

Portanto, a equação encontrada é satisfeita por todos os pontos da hipérbole.

A equação que encontramos foi deduzida para o caso onde os focos estão sobre o eixo Ox, mas quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo Oy, temos a seguinte equação:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{3.4}$$

Logo, o termo positivo da equação indica em qual eixo estão os focos da hipérbole.

Elementos da hipérbole

Observando a figura 9 podemos destacar os seguintes elementos:

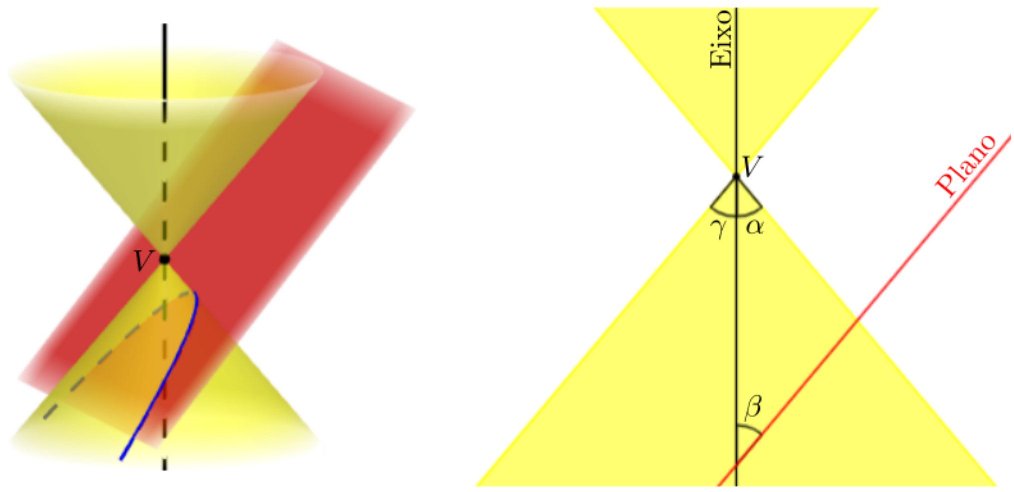
- Centro: ponto O;
- Eixo real: segmento A_1A_2, com comprimento $2a$;
- Eixo imaginário: segmento B_1B_2, com comprimento $2b$;
- Vértices: pontos A_1 e A_2;
- Focos: pontos F_1 e F_2;
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$;

- Assíntotas: retas destacadas na cor laranja, cujas equações são $y = \frac{bx}{a}$ e $y = -\frac{bx}{a}$.

3.2.3 Parábola

Quando o plano intercepta apenas uma das folhas do cone, e é paralelo a apenas uma geratriz, a interseção é uma parábola. Neste caso, os ângulos α e β são iguais. Observe na figura 10 que os ângulos β e γ são alternos internos já que a geratriz r da figura é paralela ao plano, então $\beta = \gamma$. E como $\alpha = \gamma$, segue que $\alpha = \beta$.

Figura 10 – Parábola a partir da interseção entre plano e cone



Fonte: elaborada pelo autor.

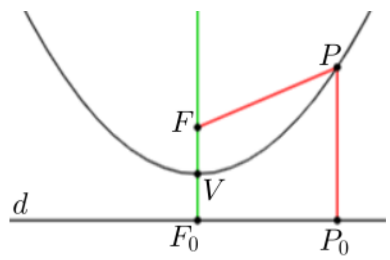
Se o plano intercepta o cone passando pelo vértice e $\alpha = \beta$, então a interseção será uma reta. Sendo então, uma parábola degenerada.

Equação reduzida da parábola

Definição 3.4. Parábola é o conjunto dos pontos P do plano equidistantes a uma reta d e um ponto F dados. A reta d é chamada de diretriz e o ponto F é o foco.

$$\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, d)$$

Figura 11 – Parábola a partir da definição



Fonte: elaborada pelo autor.

Vale lembrar que a distância de um ponto à uma reta é a distância deste ponto a sua projeção ortogonal sobre a reta. Na figura 11, P_0 é o pé da perpendicular baixada de P sobre d, então $\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, P_0)$. Além disso, F_0 é o pé da perpendicular baixada de F sobre d, sendo assim, FF_0 é um eixo de simetria da parábola. O ponto médio V, do segmento FF_0, é o vértice da parábola e é o ponto mais próximo de d.

Vamos deduzir a equação de uma parábola de diretriz d e foco F, onde $\mathrm{d}(F, d) = p > 0$, cujo vértice V é a origem de um sistema de coordenadas e o eixo vertical é o seu eixo de simetria (figura 12).

Temos então, que a equação de d é $y = \dfrac{-p}{2}$ e $F = \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$. Sendo $P = (x, y) \neq (0, 0)$ um ponto qualquer da parábola, a distância de P à diretriz d é igual a $y + \dfrac{p}{2}$ e a distância entre P e F é $\sqrt{x^2 + \left(y - \dfrac{p}{2}\right)^2}$. Mas P é ponto da parábola, então:

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

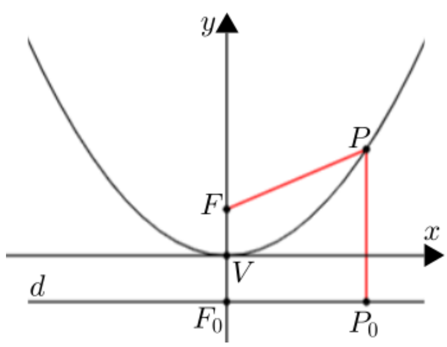
$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando, temos:

$$2py = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p} \tag{3.5}$$

Figura 12 – Parábola com vértice na origem de um sistema de coordenadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Existem outras três equações para representar uma parábola, dependendo do seu eixo de simetria e do sentido da concavidade. A equação (3.5) representa uma parábola cujo eixo de simetria é o eixo Oy e a concavidade está voltada para o sentido positivo do eixo. Com o mesmo eixo, mas com a concavidade no sentido contrário, temos:

$$y = -\frac{x^2}{2p} \tag{3.6}$$

Se o eixo de simetria é o Ox e a concavidade está voltada para o sentido positivo, temos:

$$x = \frac{y^2}{2p} \tag{3.7}$$

E no mesmo eixo, mas com a concavidade no sentido contrário, temos:

$$x = -\frac{y^2}{2p} \tag{3.8}$$

3.2.4 Translação de eixos

Podemos também fazer a translação e rotação das cônicas num plano cartesiano, porém como os casos de rotação geralmente não são vistos no Ensino Médio, não iremos explorá-los a fundo neste trabalho. Vejamos então como fica a equação de cada uma das cônicas quando fazemos uma translação.

Considere um sistema de coordenadas $x'O'y'$ que tem eixos paralelos aos eixos de um outro sistema xOy. De modo que $x - x_0 = x'$ e $y - y_0 = y'$ com $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, para todo ponto $P = (x, y)$ do plano. Uma elipse centrada na origem do sistema $x'O'y'$ com os focos sobre o eixo $O'x'$, tem uma equação do tipo:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Ou seja:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.9}$$

Uma hipérbole centrada em $x'O'y'$ e focos sobre o eixo $O'x'$ tem a seguinte equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.10}$$

Já uma parábola com vértice O' e eixo de simetria $O'y'$, tem equação:

$$y' = \frac{(x')^2}{2p}$$

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p} \tag{3.11}$$

É possível representar qualquer uma das cônicas com uma equação mais geral. Desenvolvendo a equação (3.9), temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - a^2b^2 + x_0^2 + y_0^2 = 0$$

Vamos substituir todas as constantes reais, fazendo $b^2 = A$, $a^2 = B$, $-2x_0 = C$, $-2y_0 = D$ e $(-a^2b^2 + x_0^2 + y_0^2) = E$:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \tag{3.12}$$

Para $A \neq 0$, $B = 0$ e $D \neq 0$, a equação representa uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy:

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$$
$$\frac{A}{D}x^2 + \frac{C}{D}x + y + \frac{E}{D} = 0$$
$$y = -\frac{A}{D}x^2 - \frac{C}{D}x - \frac{E}{D}$$

Observe que este é um polinômio do segundo grau do tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para $A = 0$, $B \neq 0$ e $D \neq 0$, temos um polinômio do tipo $x = ay^2 + by + c$, cuja representação gráfica é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Ox.

Então, de fato, a equação (3.12) representa qualquer uma das cônicas. Vale lembrar que a equação (3.12) poderia também, ser deduzida a partir de (3.10).

Utilizando a técnica de completar quadrados, é possível determinar qual o tipo de cônica representada por uma equação semelhante à (3.12), chegando em umas das equações reduzidas vistas anteriormente. Além de ser possível determinar qual foi a translação aplicada.

3.2.5 Equação geral das cônicas

A equação geral das cônicas é uma equação do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.13}$$

Note que se $A = B = C = 0$, a equação se reduz a uma equação do primeiro grau e, neste caso, representaria algum dos casos de cônica degenerada. Observe, também, que temos um termo com xy que não aparece na equação (3.12). Este é conhecido como termo misto, e indica que há uma rotação, quando seu coeficiente é diferente de zero. Os termos que contém x^2 ou y^2 são os termos quadráticos, os que contém apenas x ou y são os temos lineares e o termo que não contém variáveis é o termo independente.

A demonstração desta equação foi omitida, pois como mencionado anteriormente os casos de rotação de eixos geralmente não são vistos no Ensino Médio.

3.2.6 Definição unificada das cônicas

Esta definição parte da noção de excentricidade, então vamos entender primeiro o que é este conceito. De acordo com Junior (2018) temos a seguinte definição:

Definição 3.5. Sejam α o ângulo formado entre o eixo e a geratriz de um cone duplo de revolução, e β o ângulo formado entre o eixo desse cone e um plano que o intercepta, a excentricidade e da seção gerada é a razão entre o cosseno de β e o cosseno de α:

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Estes são os mesmos ângulos que aparecem nas figuras 5, 8 e 10. Vimos anteriormente que quando a seção é uma elipse, $\alpha < \beta$; quando é uma parábola, $\alpha = \beta$; e quando é uma hipérbole $\alpha > \beta$. Sabendo que α é agudo e $0 \leq \beta < 90°$ (se não levarmos em conta as cônicas degeneradas) então:

1. A excentricidade da elipse é um número real positivo menor que 1, pois:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta \Rightarrow 0 < \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1 \Rightarrow 0 < e < 1$$

2. A excentricidade da parábola é 1, já que:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1 \Rightarrow e = 1$$

3. A excentricidade da hipérbole é um número real maior que 1:

$$\alpha > \beta \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta \Rightarrow \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1 \Rightarrow e > 1$$

Junior (2018) traz uma outra maneira (que geralmente aparece nos livros do Ensino Médio) de determinar a excentricidade da elipse e da hipérbole, por meio das medidas de alguns dos seus elementos. É possível mostrar que as excentricidades como veremos a seguir têm o mesmo valor numérico daquelas que vimos na definição anterior, mas a demonstração é relativamente extensa e por isso foi omitida.

Na elipse, a excentricidade e é a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior. Assim, para uma elipse com focos sobre o eixo Ox e equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$e = \frac{2c}{2a} \Rightarrow 0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

Na hipérbole, a excentricidade e é a razão entre a distância focal e a medida do eixo real. Então, para uma hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$e = \frac{2c}{2a} \Rightarrow e = \frac{c}{a} > 1$$

Vejamos agora, a definição a partir da excentricidade.

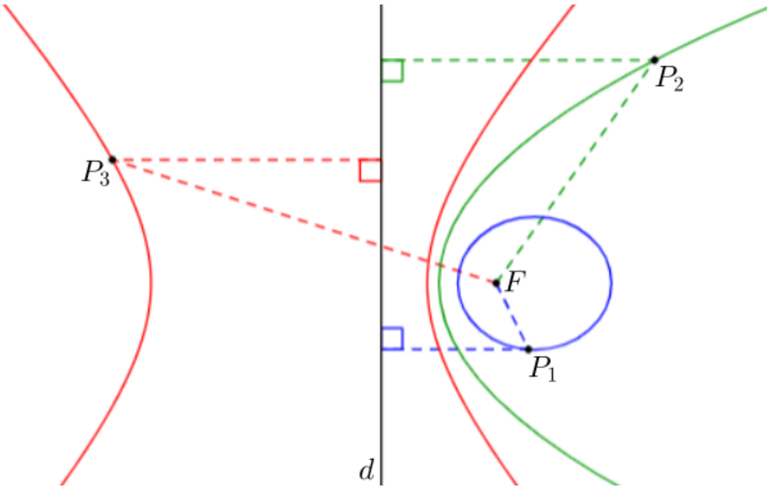
Definição 3.6. Dados uma reta fixa d (chamada de diretriz), um ponto fixo F (foco) fora dela e uma constante e (excentricidade), chamamos de cônica, o lugar geométrico dos pontos P cuja razão das distâncias a F e a d é igual a e. Ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}(P,F)}{\mathrm{d}(P,d)} = e$$

Ou ainda,

$$\mathrm{d}(P,F) = e \cdot \mathrm{d}(P,d)$$

Figura 13 – Diferentes cônicas com mesma diretriz e mesmo foco



As excentricidades da hipérbole e da elipse valem $1{,}5$ e $0{,}5$, respectivamente. Fonte: elaborada pelo autor.

Com o mesmo foco F e mesma reta diretriz d podemos obter todas as cônicas, quando escolhemos diferentes valores para a excentricidade, como vemos na figura 13.

4 UTILIZAÇÃO DO *GeoGebra*

A tecnologia é uma grande aliada no ensino de matemática, facilitando a visualização de figuras geométricas, agilizando alguns cálculos e também tornando as aulas mais atrativas aos estudantes, podendo ser usada em todos os níveis de ensino. Neste capítulo vamos entender a importância do uso de recursos tecnológicos na escola. Veremos também o que é o *GeoGebra* e entender o seu funcionamento.

4.1 Uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática

Um dos primeiros recursos que imaginamos quando falamos em tecnologia é o computador, pois nos dá diversas possibilidades para produção e obtenção de conhecimento. Para Valente (1998), o computador pode ser utilizado na escola como "máquina de ensinar" ou como ferramenta. Da primeira maneira, através de exercícios, tutoriais, simulações e jogos, fazendo com que a máquina não apenas apresente o conhecimento, mas também facilite a compreensão de alguns conceitos. Já da segunda maneira, o aluno pode utilizar o computador para desenvolver algo, como por exemplo, elaboração de textos, construção de gráficos e figuras e também resolução de problemas.

Atualmente existem diversos *softwares* para computadores e também para celulares que podem ser utilizados em sala de aula em qualquer disciplina escolar. Quando falamos da Matemática, o uso de *softwares* na educação:

> [...] pode modificar o caráter das aulas de Geometria, assim como de Geometria Analítica, à medida que modifica a ação do aluno frente ao cenário sugerido, conferindo-lhe autonomia para planejar ações, executá-las e refletir sobre elas, ações estas que caracterizam o ambiente Construcionista de aprendizagem (RICHIT, 2005, p.36).

Este ambiente Construcionista citado por Richit, surge do Construcionismo, que segundo Valente (1998), foi um termo utilizado por Papert para denominar a construção do conhecimento por meio do computador. E de acordo com Valente (1998) "o uso do computador requer certas ações que são bastante efetivas no processo de construção do conhecimento. Quando o aprendiz está interagindo com o computador ele está manipulando conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental". Podemos notar que o uso de recursos tecnológicos é uma boa alternativa ao ensino tradicional.

Além disso, de acordo com Machado (2011), "os avanços na produção de equipamentos digitais e a diminuição de seus custos permitiu uma popularização muito grande do seu uso" e que grande parte das pessoas que fazem uso destes equipamentos são jovens e crianças. Assim, a introdução de novas tecnologias na escola não provoca aversão nos alunos e nem demanda muita adaptação por parte deles.

Machado (2011) destaca ainda que:

> A atual revolução causada pela tecnologia traz consigo características bastante próprias, diferente do impacto causado pelas máquinas à vapor, ou do advento do controle da energia elétrica. Vivencia-se o que a comunidade intelectual denomina de Sociedade da informação ou Sociedade do conhecimento, na qual a mudança mais radical e a principal força motriz está na disseminação da informação e do conhecimento (MACHADO, 2011, p.26).

Podemos perceber então, que o avanço da tecnologia proporciona um acesso quase que ilimitado à informação e ao conhecimento, mas que a utilização de novos recursos tecnológicos em sala de aula deve ser bem pensada, já que, como ressalta Perius (2012), é necessário que haja a formação contínua do professor, para que este consiga dar significado ao conteúdo estudado.

De acordo com Richit (2005), as abordagens que "priorizam a investigação, o diálogo entre alunos e a reflexão, não acontecem naturalmente em ambientes permeados pelo computador, mas sim, acontecem se forem promovidas pela ação consciente e qualificada do professor". Isso nos mostra que não basta ter acesso à tecnologia, mas sim valorizar a boa qualidade na formação dos professores.

4.2 Apresentação do *GeoGebra*

O *GeoGebra* é um *software* de Matemática dinâmica desenvolvido para o ensino. Ele reúne diversas ferramentas para o estudo de praticamente qualquer conteúdo de Matemática nos mais diversos níveis do aprendizado. Está disponível gratuitamente para computadores, *smartphones* e *tablets*, e também em versão *web* para navegadores (GEOGEBRA, s/d). O *site* oficial pode ser acessado através do *link*: https://www.geogebra.org.

4.2.1 Interface

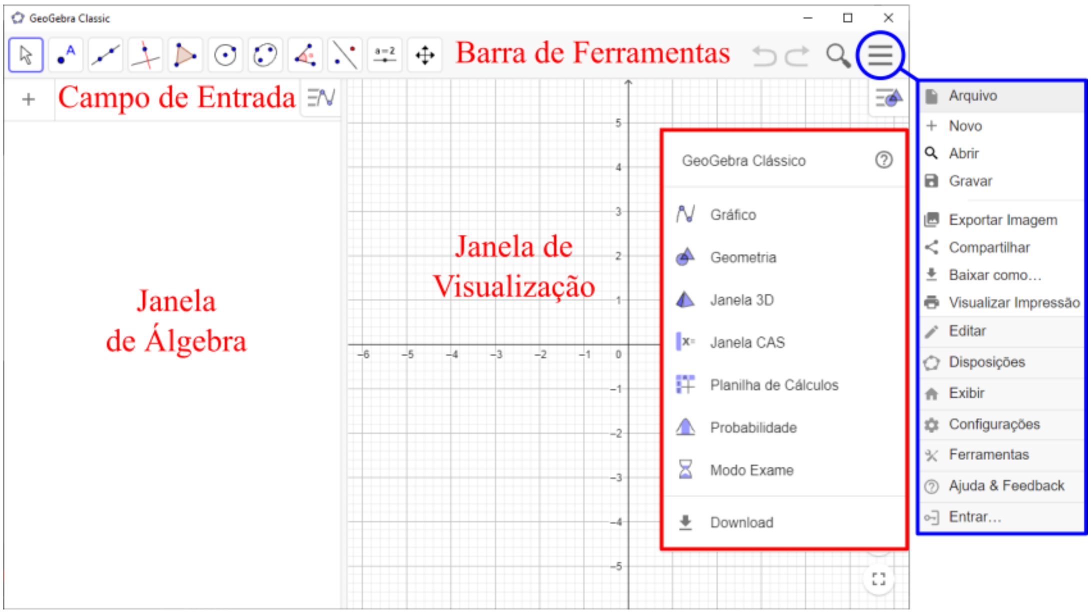
A interface do programa no computador é bem simples, e por padrão, sempre inicia como na figura 14. Podemos ver uma pequena janela sobreposta ao plano cartesiano no lado direito da tela, onde devemos escolher o "modo" que vamos utilizar o *GeoGebra*. O programa inicia automaticamente no modo *Geometria*. Para as construções mostradas neste trabalho, pouco importa o modo que escolhermos. Veremos mais à frente que podemos alterar as configurações da interface enquanto usamos o programa.

Temos então, no modo *Geometria*, duas janelas principais: a *Janela de Visualização*, onde fica o plano cartesiano e a malha quadriculada; e a *Janela de Álgebra*, onde ficam destacadas as equações das construções, suas posições no plano ou outras informações básicas. E as ferramentas para construção ficam na parte superior da interface.

Clicando nos três traços no canto superior direito, destacados na figura 14, abrimos os menus do programa: *Arquivo*, *Editar*, *Disposições*, *Exibir*, *Configurações*, *Ferramentas*, *Ajuda & Feedback* e *Entrar...*. O menu *Arquivo* fica aberto por padrão.

Clicando em *Entrar...* podemos acessar uma conta do *GeoGebra*. Esta conta é útil para que possamos salvar quaisquer construções de maneira *online*, podendo então, acessá-las em qualquer computador com *internet*. E além disso, podemos disponibilizar as construções para

Figura 14 – Interface inicial do *GeoGebra Classic 6*



Esta interface é do aplicativo instalado no *Windows 10* e é exatamente igual à da versão *web*. Fonte: elaborada pelo autor.

outras pessoas. Podemos criar uma conta acessando o *link*: https://accounts.geogebra.org/user/create/expiration/129600/clientinfo/website.

Temos também a opção de criar uma conta usando um *login* existente do *Google*, *Office 365*, *Microsoft*, *Facebook*, *Twitter* ou *Clever*. Acessando a conta no menu *Entrar...*, todas as construções salvas ficarão automaticamente disponíveis *online*.

4.2.2 Alguns comandos e ferramentas básicas

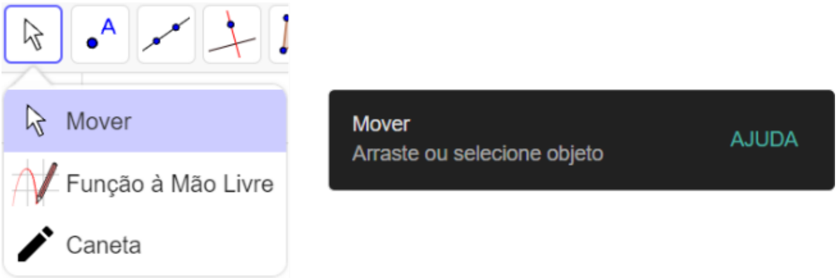
O programa disponibiliza diversas ferramentas para fazer as construções, e a maioria delas possui comandos que podemos digitar no *Campo de Entrada* da *Janela de Álgebra*. Veremos como usar algumas das ferramentas do modo *Geometria* (a barra de ferramentas muda de acordo com o modo selecionado, mas funciona de maneira semelhante).

Ferramenta Mover

Quando um dos ícones da barra de ferramentas é selecionado, uma lista aparece. Ao deslizar o *mouse* sobre as opções da lista, o programa mostra, no canto inferior esquerdo, uma pequena janela de ajuda para entendermos como a ferramenta funciona.

A ferramenta *Mover* serve para selecionar ou mover as construções e também para mover o plano cartesiano. Uma outra função da ferramenta é editar o nome ou equação dos objetos na *Janela de Álgebra*. Também é possível modificar as configurações dos objetos na *Janela de Visualização*, clicando com o botão direito do *mouse*.

Figura 15 – Ferramenta *Mover*

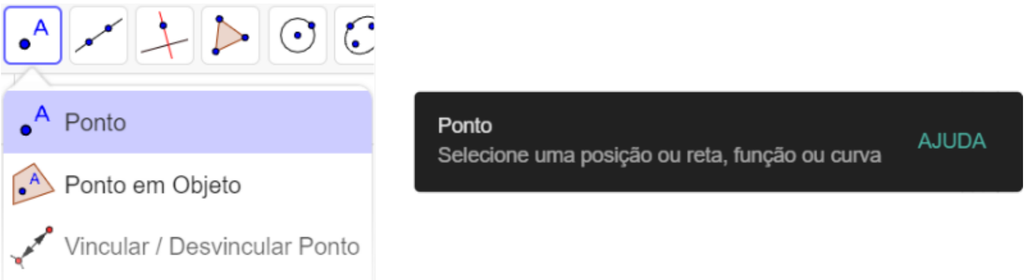


Fonte: elaborada pelo autor.

Ferramenta Ponto

Selecionando a ferramenta *Ponto*, podemos clicar na *Janela de Visualização* e criar os pontos que desejamos. O nome dado a cada ponto segue a ordem alfabética, então o primeiro ponto criado é o A, o segundo é o B, e assim sucessivamente.

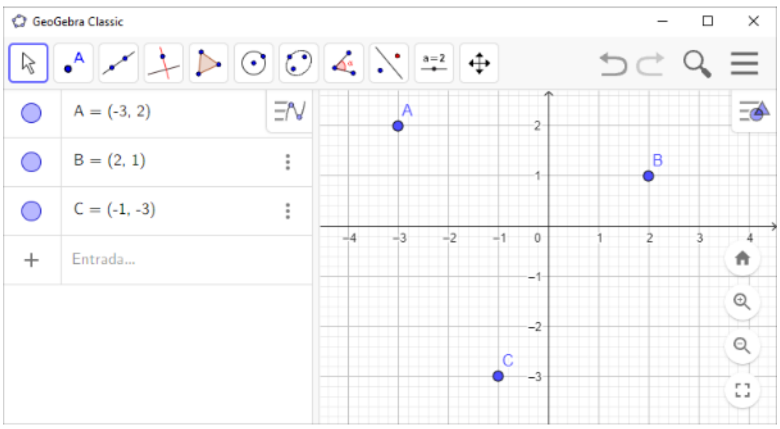
Figura 16 – Ferramenta *Ponto*



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na figura 17, os pontos criados usando a ferramenta. Na *Janela de Álgebra* ficam destacadas as coordenadas de cada ponto. Sem usar a ferramenta e digitando no *Campo de Entrada*: "$A = (-3, 2)$", "$B = (2, 1)$" e "$C = (-1, -3)$", teríamos o mesmo resultado.

Figura 17 – Pontos no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

Ferramenta Reta

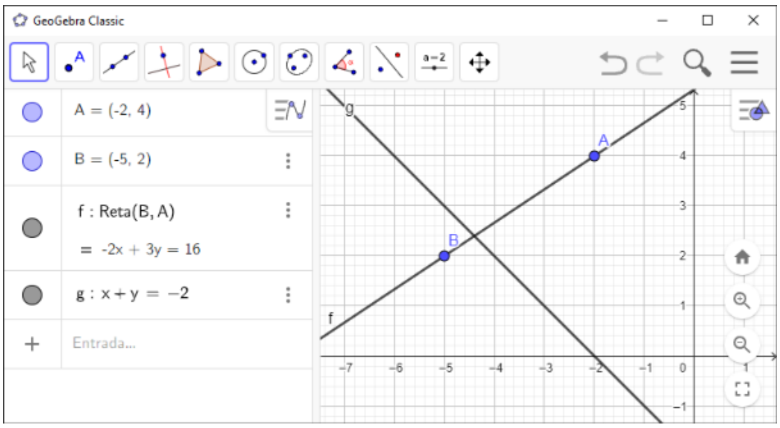
Para construir retas, usamos a ferramenta *Reta*. Com a ferramenta selecionada, podemos clicar em dois pontos existentes ou clicar em dois lugares quaisquer na *Janela de Visualização*, criando dois novos pontos por onde a reta passará. O *GeoGebra* interpreta as retas como funções e o nome dado a elas segue a ordem alfabética, mas a primeira é a reta f.

Figura 18 – Ferramenta *Reta*

Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 19, os pontos A e B foram construídos com a ferramenta *Reta*, então a reta f é determinada por eles. Na *Janela de Álgebra* temos os pontos e a reta em questão: "f : Reta(A, B)". Logo abaixo, temos a equação linear que corresponde à reta: "$= 2x - 3y = -16$".

Figura 19 – Retas no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

As retas podem ser criadas também através de comandos no *Campo de Entrada* da *Janela de Álgebra*. Podemos fazer isto de duas maneiras (existem outros comandos, mas estes são os mais básicos):

- Determinada por dois pontos - se dois pontos, digamos P e Q, já existem, podemos digitar "r : Reta(P, Q)" no *Campo de Entrada*, e será construída uma reta r que passa pelos pontos P e Q. Esta construção seria análoga à reta f da figura 19. Poderíamos também, digitar o seguinte comando: "r : Reta$((x_P, y_P), (x_Q, y_Q))$", onde (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q) são os pontos por onde a reta passa, mas neste caso, eles não aparecem na

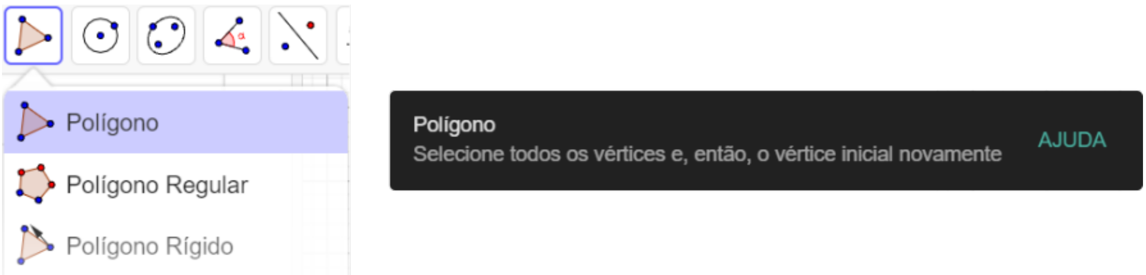
Janela de Visualização, nem na *Janela de Álgebra* (semelhante ao que ocorre com a reta g na figura 19).

- Com uma equação linear - digitando, por exemplo, "$g : x+y = -2$" no *Campo de Entrada*, a reta construída seria a reta g da figura 19.

Ferramenta Polígono

A ferramenta *Polígono* funciona de maneira semelhante à ferramenta *Reta*: selecionando pontos existentes ou criando novos pontos para que sejam os vértices. O nome dado a cada polígono é "pol1", "pol2", etc. Observe na figura 21 um exemplo do uso da ferramenta.

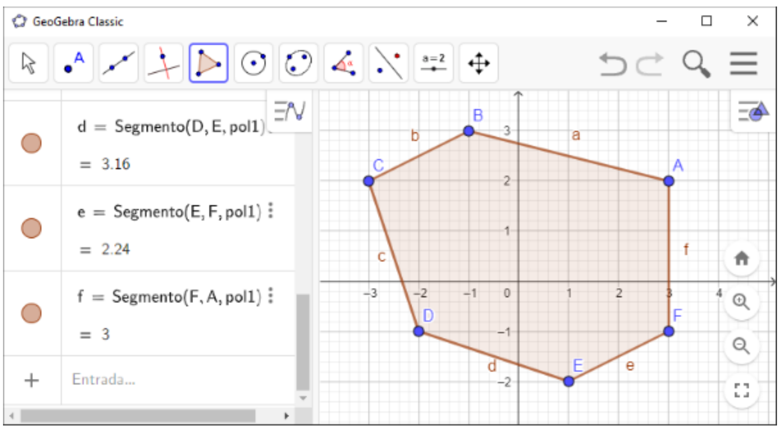
Figura 20 – Ferramenta *Polígono*



Fonte: elaborada pelo autor.

Na *Janela de Álgebra*, aparecem todos os pontos e segmentos que fazem parte do polígono. Logo abaixo de cada segmento e de cada polígono construído, é mostrado um número ("= 3" abaixo do segmento f, por exemplo) que indica o comprimento ou a área da figura.

Figura 21 – Polígono no *GeoGebra*



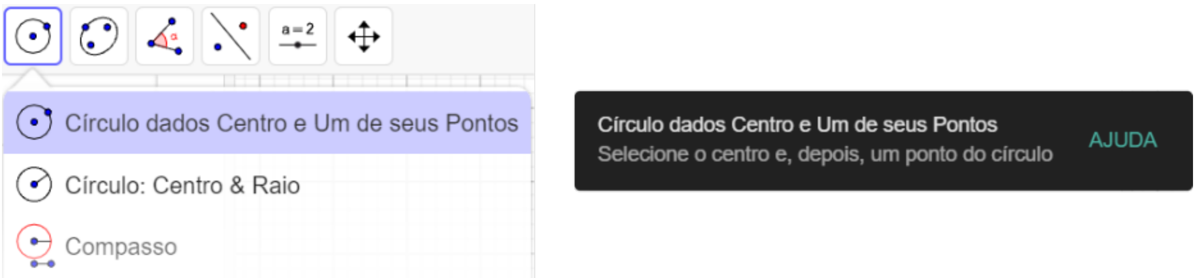
Fonte: elaborada pelo autor.

Também é possível construir polígonos através de comandos no *Campo de Entrada*. Para construir um hexágono como o do exemplo, podemos construir primeiramente os pontos e, em seguida, digitar "pol1 = Polígono(A, B, C, D, E, F)". Ou construir o polígono sem construir os pontos, digitando "pol1 = Polígono$((3, 2), (-1, 3), (-3, 2), (-2, -1), (1, -2), (3, -1))$".

Construindo círculos e circunferências

Existem diferentes ferramentas para construir círculos no *GeoGebra* como vemos na figura 22, mas vamos entender como se usa apenas uma delas: *Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos*. Com a ferramenta selecionada, basta clicar para criar o centro, e depois escolher um outro lugar no plano para ser um dos pontos da circunferência.

Figura 22 – Ferramenta *Círculo*

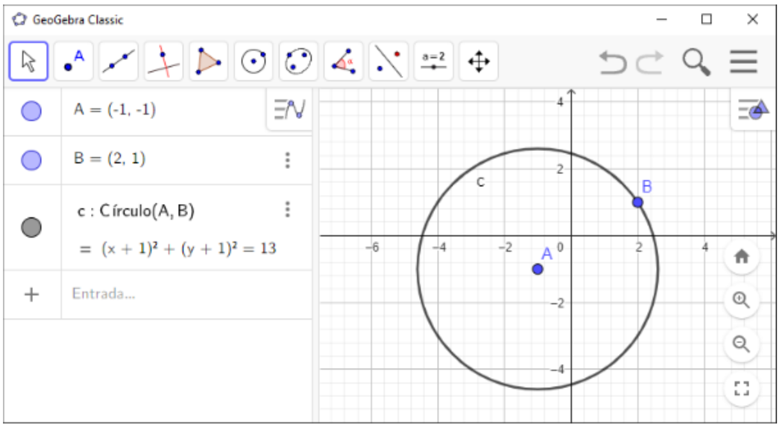


Fonte: elaborada pelo autor.

O nome dado automaticamente segue a ordem alfabética, partindo do c, pois o *GeoGebra* interpreta como curvas. Essa nomenclatura também se aplica à elipses, hipérboles e parábolas.

Podemos também utilizar comandos no *Campo de Entrada* para construir circunferências. Com os pontos $A = (-1, -1)$ e $B = (2, 1)$ da figura 23 já construídos, por exemplo, podemos digitar: "c : Círculo(A, B)". A circunferência resultante terá centro em A e passará por B. A *Janela de Álgebra* mostra a equação de c: "$= (x+1)^2 + (y+1)^2 = 13$". Digitando esta equação, o mesmo resultado é gerado, mas a figura não depende dos pontos A e B.

Figura 23 – Círculo no *GeoGebra*

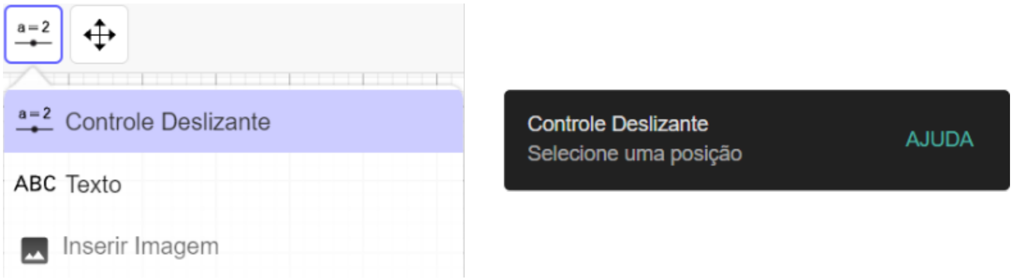


Fonte: elaborada pelo autor.

Ferramenta Controle Deslizante

Uma ferramenta bastante útil que o *GeoGebra* possui é o *Controle Deslizante*. Com ela podemos criar valores editáveis e utilizá-los em figuras, funções e equações, por exemplo. Esta ferramenta será bastante utilizada nas construções mostradas neste trabalho.

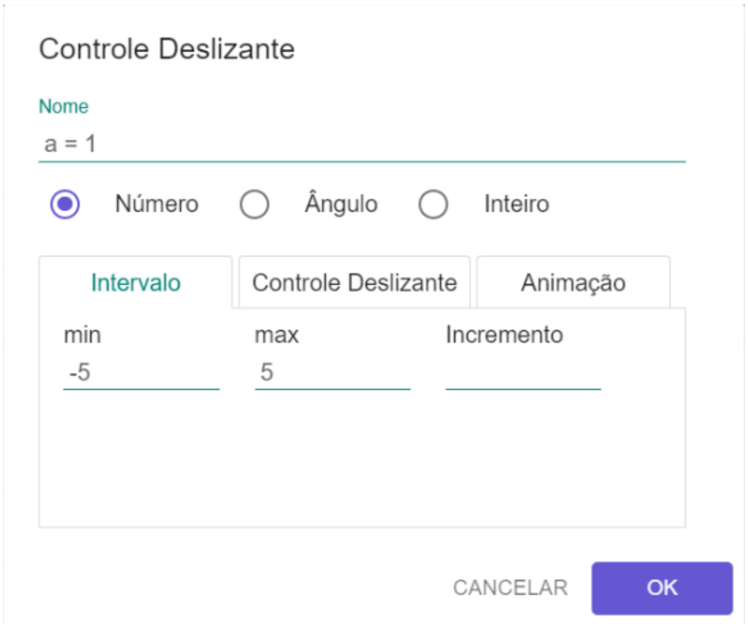
Figura 24 – Ferramenta *Controle Deslizante*



Fonte: elaborada pelo autor.

Para criar um controle deslizante, basta selecionar a ferramenta e clicar na *Janela de Visualização* (não é possível criar controles deslizantes na *Janela de Visualização 3D*). Fazendo isto, uma janela de configuração será exibida, como podemos ver na figura 25. Nela devemos escolher se o controle é um número ou um ângulo (as opções *Número* e *Inteiro* produzem basicamente a mesma coisa, com a diferença de que na última opção o *Incremento* na aba *Intervalo* é definido para 1) e precisamos definir os limites do intervalo e o incremento.

Figura 25 – Configuração do *Controle Deslizante*



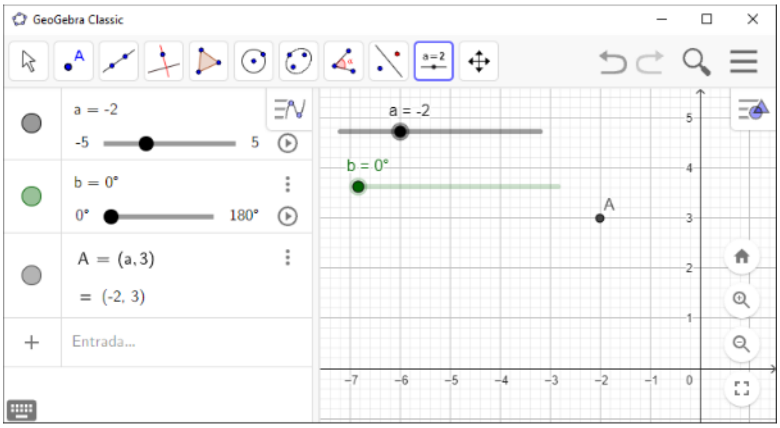
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe na figura 26 que o controle deslizante a (que foi criado através da ferramenta) é exibido na *Janela de Álgebra*, onde também podemos modificar seu valor. Ao clicar no botão *play*, que aparece logo ao lado, o valor do controle começa a se mover sozinho, do limite mínimo ao limite máximo e podemos escolher a velocidade de deslocamento clicando em “<<” ou “>>”.

Temos a possibilidade de contruir controles deslizantes no *Campo de Entrada*, mas o comando é extenso e complicado, e tem a seguinte estrutura: “ControleDeslizante(Mínimo, Máximo, Incremento, Velocidade, Comprimento, Ângulo, Horizontal, Animar, Aleatório)”. As três primeiras entradas são as mesmas que aparecem quando usamos a ferramenta; a quarta entrada é a velocidade de deslocamento; o comprimento da barra é medido em *pixels* e o padrão é 200; as quatro últimas entradas devem ser preenchidas com “*true*” (para verdadeiro) ou “*false*” (para falso). Quando a entrada *Aleatório* está ativada (*true*) e iniciamos a animação, os valores são gerados aleatoriamente. Digitando b = ControleDeslizante$(0°, 180°, 1°, 0, 200,$ *true*, *true*, *false*, *false*$)$, temos o controle mostrado na figura 26.

Após usar a ferramenta, podemos construir figuras que dependem dela. Na figura 26, por exemplo, o ponto A foi construído através do comando “$A = (a, 3)$”. Então quando interagimos com o controle deslizante a, o ponto se desloca horizontalmente.

Figura 26 – Controles deslizantes no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

5 EXPLORANDO AS CÔNICAS NO *GeoGebra*

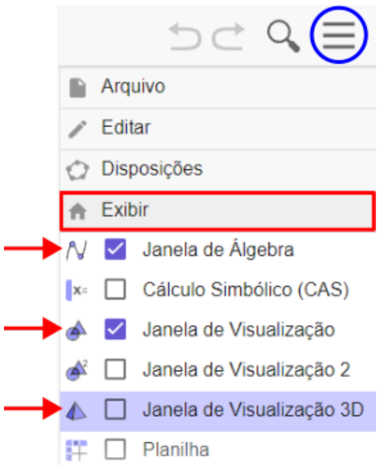
Todas as ferramentas vistas no capítulo anterior, e mais algumas outras, serão fundamentais para as construções que vêm a seguir. Apesar da versão utilizada neste trabalho ser a disponível para computador, podemos também utilizar a versão *mobile* do aplicativo para fazer todas as construções, com exceção da primeira, pois esta utiliza três janelas. Os ícones das ferramentas são os mesmos, mas a interface é completamente diferente. Tentamos simplificar ao máximo as construções mostradas neste trabalho e, por isso, as versões que disponibilizamos *online* são diferentes. Vejamos então, como estudar algumas propriedades e definições das cônicas, mostradas no capítulo 3, utilizando o *GeoGebra*.

5.1 Interseção entre cone de duas folhas e plano

Esta construção mostra em quais condições cada uma das cônicas é formada a partir da interseção de um cone de duas folhas qualquer, e um plano, permitindo alterar o cone e a sua posição em relação ao plano. Aqui será apresentado um tutorial de como fazer a construção, mas o objetivo é que o professor entenda como o programa funciona e como utilizá-lo, para então, o aluno com a construção pronta, compreender como ocorre e quais os resultados da interseção.

De início, devemos selecionar três janelas para fazer a construção: *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 3D*. Fazemos isto através do menu *Exibir*.

Figura 27 – Janelas necessárias para a construção



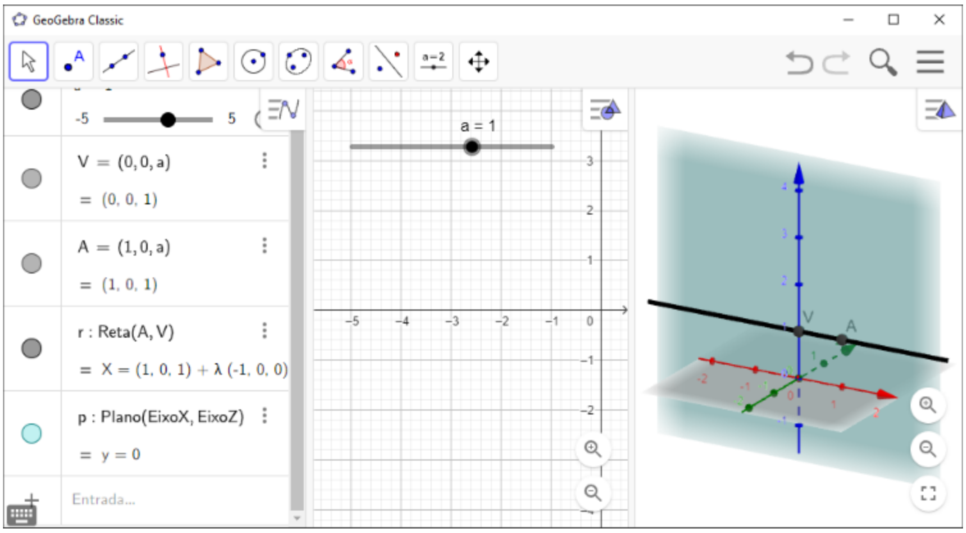
Fonte: elaborada pelo autor.

Começaremos pelo vértice do cone. Digitando "$a = 1$" no *Campo de Entrada*, será criado um controle deslizante com limites -5 e 5, e incremento 0.1. Para criar o vértice, digitamos "$V = (0, 0, a)$" e ele aparecerá na *Janela de Visualização 3D*. Será necessário construir outros objetos auxiliares, usando ainda, o *Campo de Entrada*: "$A = (1, 0, a)$", "r : Reta(A, V)" e "p : Plano$(\text{EixoX}, \text{EixoZ})$" (este último, irá construir um plano que passa pelos eixos x e z).

Ao lado de cada objeto na *Janela de Álgebra*, temos a opção de exibi-los ou escondê-los das outras janelas, marcando ou desmarcando o círculo. Por enquanto, todos os objetos deverão ser exibidos.

A construção deve estar como na figura 28. Alterando o valor de a, a reta r deve se deslocar verticalmente e se manter paralela ao eixo x (eixo de cor vermelha).

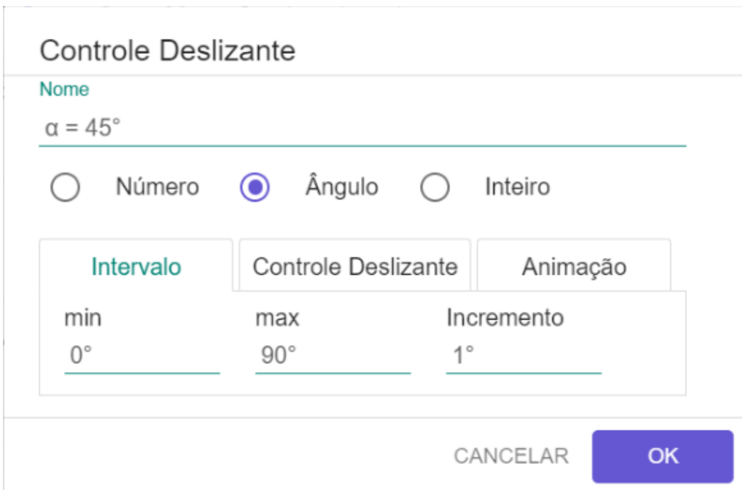
Figura 28 – Base da construção



Fonte: elaborada pelo autor.

Precisamos de mais dois controles deslizantes: um será o ângulo formado entre o eixo e uma geratriz do cone; o outro será o ângulo entre o eixo do cone e o plano. Ao selecionar a ferramenta e clicar na *Janela de Visualização*, devemos escolher a configuração de acordo com a figura 29: marcando a caixa *Ângulo*; definindo os limites para $0°$ e $90°$ e o incremento para $1°$. Isto deve ser feito para os dois ângulos. O nome dos ângulos segue a ordem alfabética, mas do alfabeto grego, então serão α e β (os nomes podem ser alterados na janela de configuração).

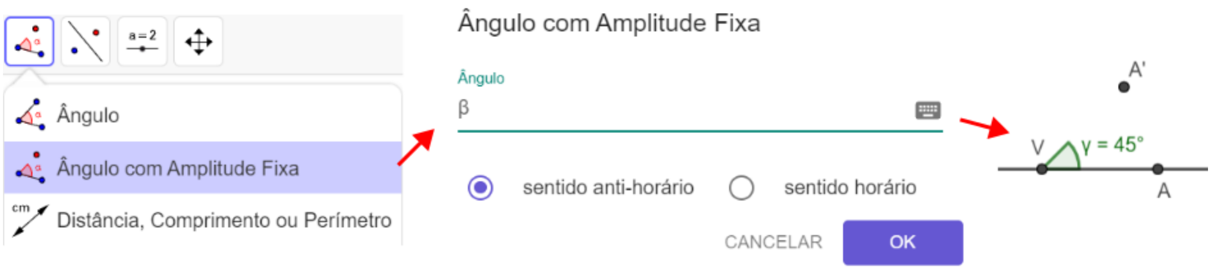
Figura 29 – Configuração dos ângulos



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, vamos criar o eixo do cone. Com a ferramenta *Mover* selecionada, devemos clicar com o botão direito do *mouse* no plano p, e selecionar a opção *Criar vista 2D de p*. Outra janela será aberta, com a reta r e os pontos A e V. Nela usaremos a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*: com a ferramenta selecionada, clicamos no ponto A e, em seguida, no ponto V. Aparecerá uma janela para escolhermos o ângulo, como na figura 30, devemos então, digitar β (ao digitar, temos ao lado um ícone para abrir um teclado virtual, com símbolos, letras e todo o alfabeto grego). Um ponto A' será criado automaticamente juntamente com um ângulo γ (este último pode ser excluído). Por V e A', devemos construir uma reta s (digitando $s:\text{Reta}(V, A')$ no *Campo de Entrada*), que será o eixo do cone. Podemos agora, fechar a janela do plano p.

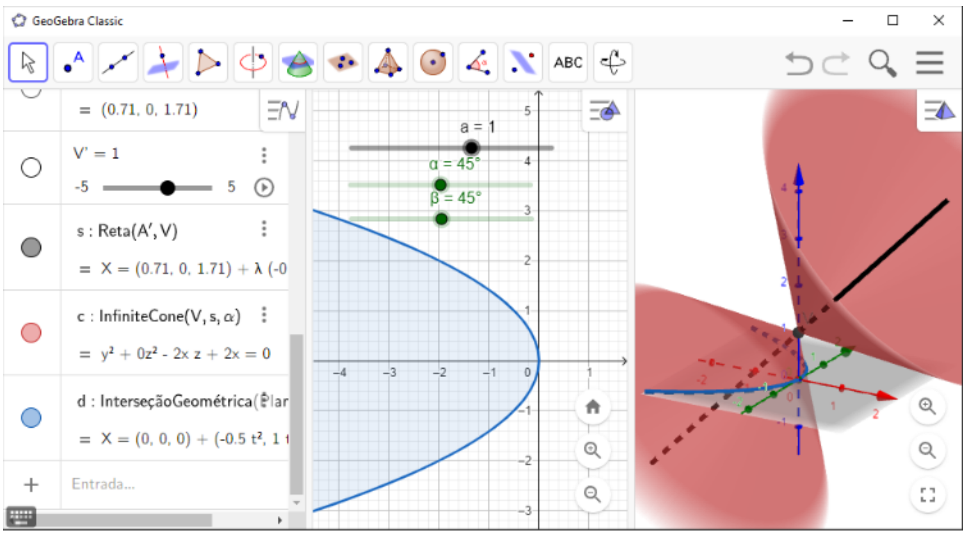
Figura 30 – Base para o eixo do cone



Os pontos V e A' definem o eixo do cone. Fonte: elaborada pelo autor.

Para construir o cone, devemos digitar: "$c:\text{ConeInfinito}(V, s, \alpha)$". Com este comando, o cone tem vértice V, eixo s e ângulo α. Podemos ver a interseção entre o cone e o plano na *Janela de Visualização*, digitando o seguinte comando: "Interseção(c, PlanoXOY)" ou utilizando a ferramenta. Não será necessário exibir os seguintes objetos: A, A', r e p. Devemos ter algo parecido com a figura 31. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/ubgeszkh.

Figura 31 – Interseção entre plano e cone no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

Com a construção pronta, o aluno pode alterar os valores dos controles deslizantes, modificando o cone e sua posição em relação ao plano e observar como se comporta a interseção. Além disso, os ângulos α e β desta construção são os mesmos mostrados no capítulo 3 e a partir deles podemos calcular a excentricidade da cônica obtida.

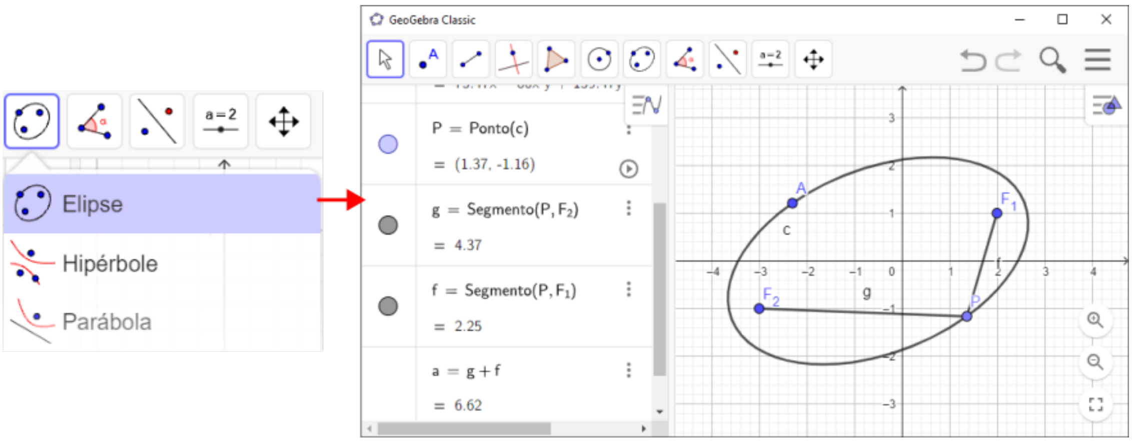
5.2 Construindo cônicas no *GeoGebra*

As construções desta seção são relativamente simples, e os próprios alunos podem fazê--las com auxílio do professor. Veremos como verificar as definições das cônicas a partir das figuras construídas no aplicativo.

5.2.1 Definição de elipse

Para começar, vamos construir três pontos: F_1 e F_2 para os focos, e A um ponto qualquer da elipse. Usando a *Ferramenta Elipse*, clicamos primeiro nos focos e em seguida no ponto A. Podemos alterar a posição destes três pontos para mudar o formato da figura. Agora, clicando na elipse utilizando a *Ferramenta Ponto*, criamos um ponto P. Este ponto se desloca sobre a figura e não altera o seu formato. Agora digitamos "f = Segmento(P, F_1)" e "g = Segmento(P, F_2)" no *Campo de Entrada*, para construir os segmentos PF_1 e PF_2. Os comprimentos dos segmentos estarão na *Janela de Álgebra*.

Figura 32 – Elipse no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

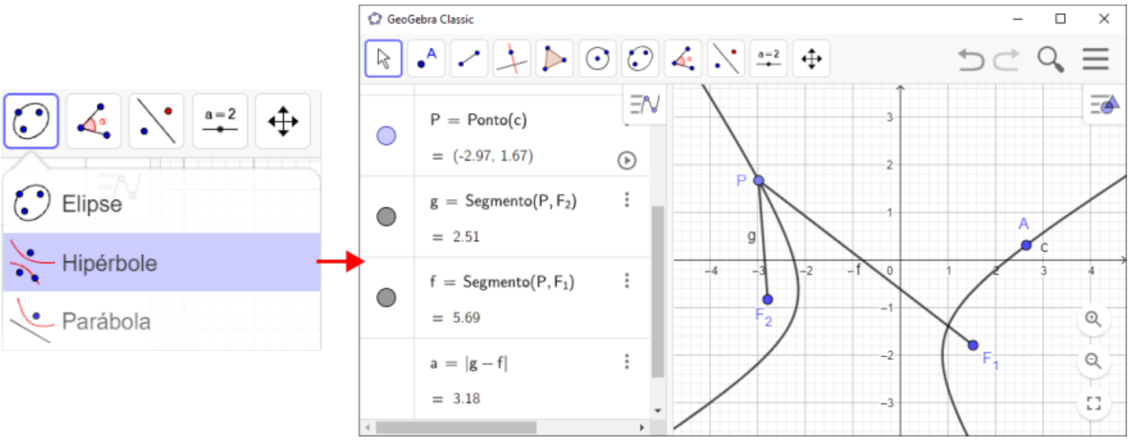
Para verificar a definição, basta digitar $a = f + g$. Agora, o aluno pode alterar livremente o formato da elipse e verificar que a soma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = a$ se mantém constante para qualquer posição de P sobre a elipse. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/mr9pzzzx.

5.2.2 Definição de hipérbole

Esta construção é análoga à anterior: construímos os mesmos pontos (F_1, F_2 e A), mas desta vez usamos a *Ferramenta Hipérbole*. De maneira semelhante ao que vimos anteriormente, estes três pontos determinam o formato da hipérbole, então podemos deslocá-los livremente.

Com a figura pronta, criamos um ponto P sobre a hipérbole e digitamos "f = Segmento(P, F_1)" e "g = Segmento(P, F_2)" no *Campo de Entrada*.

Figura 33 – Hipérbole no *GeoGebra*



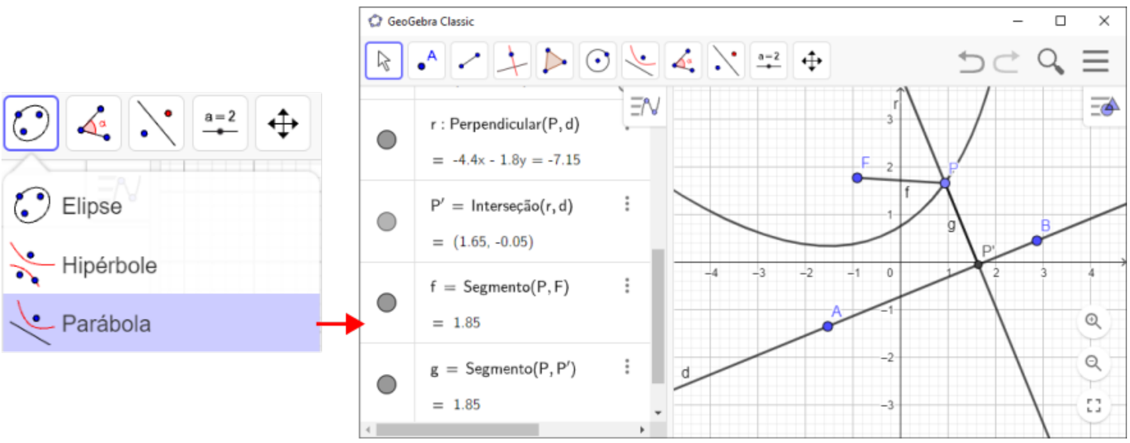
Fonte: elaborada pelo autor.

Digitando "$a = |f - g|$" no *Campo de Entrada*, o aluno pode ver na *Janela de Álgebra* que a definição se verifica, pois a se mantém constante para qualquer posição do ponto P na hipérbole. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/njqeedne.

5.2.3 Definição de parábola

Para esta construção, criamos três pontos quaisquer A, B e F. Por A e B construímos uma reta d digitando "d : Reta(A, B)" no *Campo de Entrada*. Agora, com a *Ferramenta Parábola* selecionada, clicamos na reta d e em seguida, no ponto F. Desta forma, temos uma parábola de reta diretriz d e foco F. Podemos deslocar os pontos A, B e F livremente para alterar o formato da parábola.

Figura 34 – Parábola no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, com a *Ferramenta Ponto*, construímos um ponto P sobre a parábola. Em seguida, devemos digitar, nesta ordem, "r : Perpendicular(P, d)", "P' = Interseção(r, d)", "f =

Segmento(P, F)" e "g = Segmento(P, P')" no *Campo de Entrada*. Deste modo, o ponto P' é o pé da perpendicular de P sobre d. E para verificar a definição, basta observar, na *Janela de Álgebra*, que $f = g$, ou seja, $d(P, d) = d(P, F)$. Esta construção pode ser acessada através do *link*: https://www.geogebra.org/m/bnze5qmd.

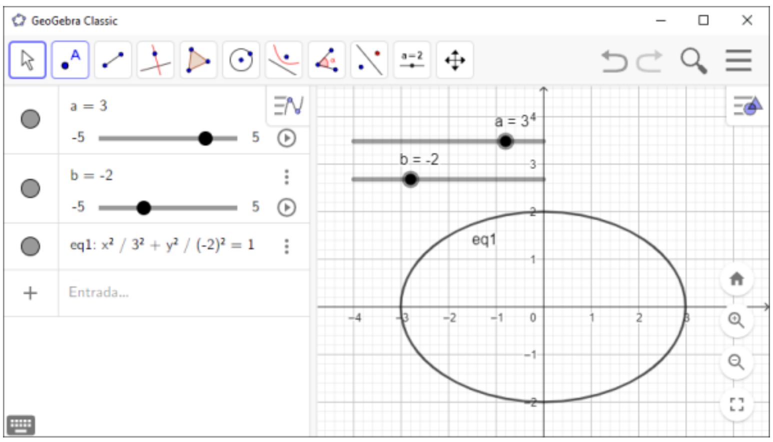
5.3 Equações reduzidas das cônicas

As construções mostradas a seguir servem para verificarmos o comportamento de uma cônica com relação a sua equação reduzida. Nelas podemos alterar os valores de a e b nas equações da elipse e da hipérbole, e o valor de p na equação da parábola.

5.3.1 Equação da elipse

Para esta construção, basta criar dois controles deslizantes: a e b, e em seguida, digitar a equação reduzida da elipse no *Campo de Entrada*: "$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$". Desta forma, a elipse será construída no centro do sistema de eixos coordenados e sem rotação. Quando alteramos os valores de a e b a elipse deve mudar o formato. A construção deve estar como a da figura 35 e através dela, o aluno pode editar a figura e associar a equação que aparece na *Janela de Álgebra* com a sua representação gráfica. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/nbbtxwmm.

Figura 35 – Equação da elipse no *GeoGebra*



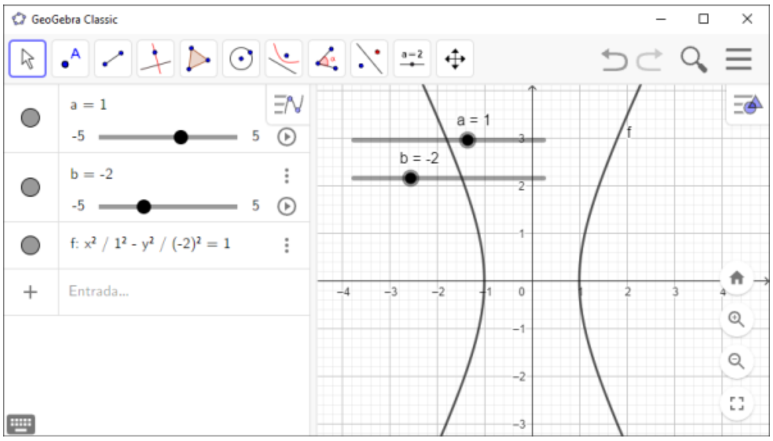
Fonte: elaborada pelo autor.

5.3.2 Equação da hipérbole

Esta construção segue os mesmos passos da anterior. Precisamos dos controles deslizantes a e b, mas desta vez devemos digitar uma das equações da hipérbole: "$f : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$" ou "$f : y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$". Na figura 36, por exemplo, utilizamos a primeira equação.

Com esta construção, o aluno pode alterar a hipérbole e associar a equação com a sua representação gráfica, mas com o auxílio do professor. Podemos facilitar a visualização construindo as assíntotas da hipérbole.

Figura 36 – Equação da hipérbole no *GeoGebra*

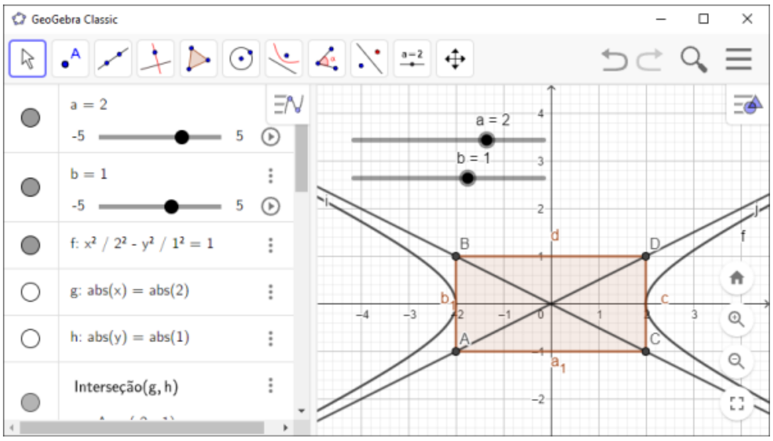


Fonte: elaborada pelo autor.

Para construir as assíntotas, digitamos "$g : |x| = |a|$" e "$h : |y| = |b|$" no *Campo de Entrada*. Duas retas verticais e duas horizontais serão construídas. Estas retas não precisam ser exibidas, pois precisamos apenas das interseções entre elas. Para isto, digitamos "Interseção(g, h)". Agora, basta construir duas retas formando um "X" passando pelos pontos de interseção, como vemos na figura 37.

Podemos também construir um retângulo com a ferramenta *Polígono* passando pelos mesmo pontos. Os lados deste retângulo cruzam os eixos coordenados justamente nos valores de a e b. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/awjshbs2.

Figura 37 – Hipérbole com assíntotas

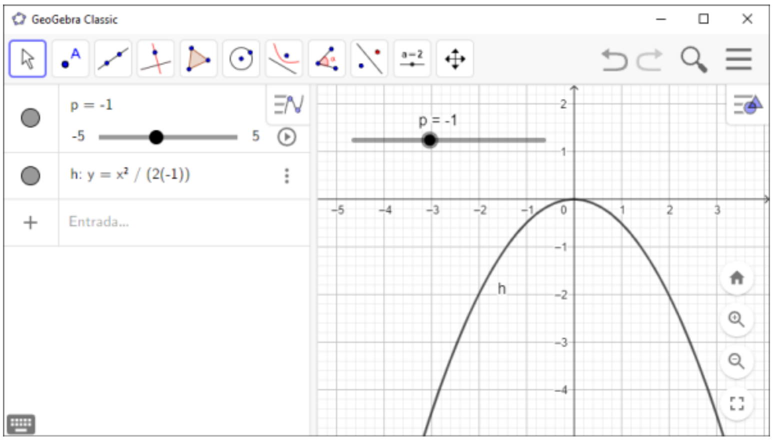


Fonte: elaborada pelo autor.

5.3.3 Equação da parábola

Para a parábola, basta criar apenas um controle deslizante p e digitar uma das duas equações no *Campo de Entrada*: "$y = x^2/2p$" ou "$x = y^2/2p$". As outras duas possibilidades de parábola serão obtidas quando p assumir valores negativos. A construção deve ser semelhante à da figura 38. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/v7swt3ne.

Figura 38 – Equação da parábola no *GeoGebra*



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao modificar o valor de p, o aluno pode alterar a abertura da parábola e até mesmo a direção da sua concavidade, de acordo com o sinal de p. Mas a figura vai se manter com o vértice na origem e eixo de simetria sobre um dos eixos coordenados, assim como a elipse e a hipérbole das construções anteriores se mantém no centro do plano cartesiano. Veremos logo a seguir como explorar os outros casos.

5.4 Cônicas com translação de eixos no *GeoGebra*

Para construir cônicas com translação de eixos, podemos digitar no *Campo de Entrada*, as equações (3.9), (3.10) e (3.11), vistas no capítulo 3. Mas antes, devemos construir alguns controles deslizantes. Para a elipse ou hipérbole, precisamos dos controles deslizantes a, b, x_0 e y_0, e depois devemos digitar sua equação. Para a parábola, precisamos dos controles deslizantes p, x_0 e y_0.

Lembrando que as equações a serem digitadas são:

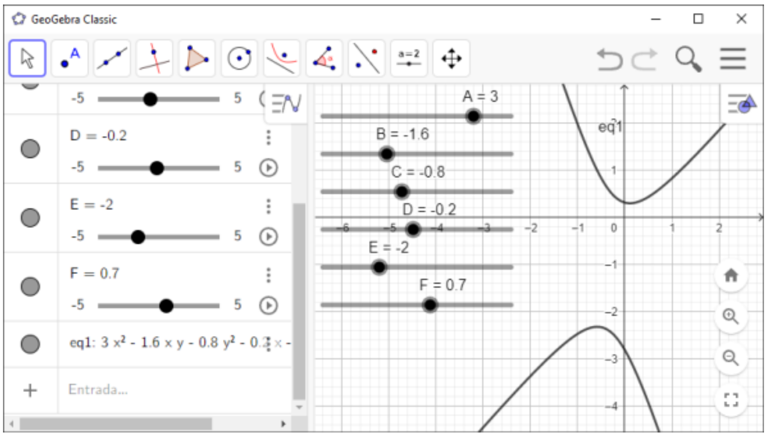
- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ para a elipse;
- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ para a hipérbole;
- $y - y_0 = \dfrac{(x-x_0)^2}{2p}$ ou $x - x_0 = \dfrac{(y-y_0)^2}{2p}$ para a parábola.

Estas construções funcionam de maneira semelhante às anteriores, mas com o acréscimo de x_0 e y_0, possibilitando a translação de maneira horizontal e vertical, respectivamente. *Links* das construções: https://www.geogebra.org/m/htqfysed, https://www.geogebra.org/m/nzad4sax e https://www.geogebra.org/m/jrcyuh7t.

5.5 Equação geral das cônicas no *GeoGebra*

Esta provavelmente é a construção mais simples mostrada neste capítulo. Para explorar a equação geral e entender qual o papel que cada coeficiente desempenha, basta criar controles deslizantes para cada um deles e, em seguida, digitar a equação geral no *Campo de Entrada*. Criamos então os controles deslizantes A, B, C, D, E e F, depois digitamos a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Teremos algo parecido com a figura 39. Agora, podemos alterar os valores dos coeficientes e observar como a curva se comporta. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/j3rrvugw.

Figura 39 – Equação geral das cônicas no *GeoGebra*

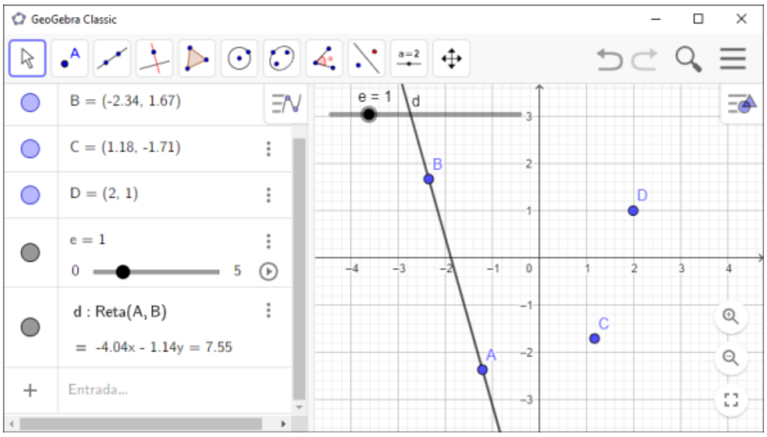


Fonte: elaborada pelo autor.

5.6 Cônicas a partir da definição unificada no *GeoGebra*

Iniciamos a construção criando quatro pontos quaisquer na *Janela de Visualização*: A, B, C e F (o ponto F será o foco). Precisamos também de um controle deslizante e para escolhermos a excentricidade. Usando a ferramenta *Controle Deslizante*, clicamos na tela e, nas configurações, definimos o valor mínimo para 0.

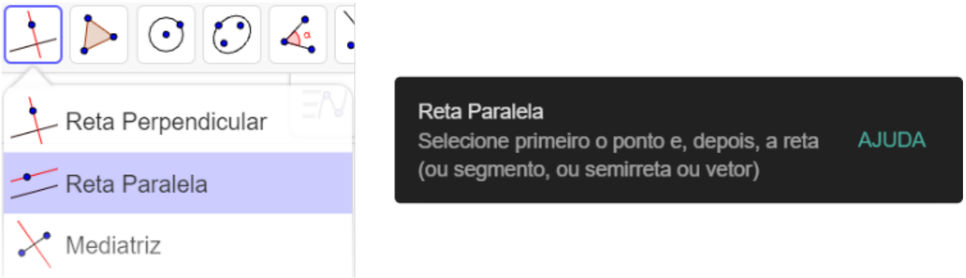
Figura 40 – Base para a construção da definição unificada



Fonte: elaborada pelo autor.

Por A e B construímos uma reta d que será a nossa diretriz, podemos fazer isto digitando d : Reta(A, B) no *Campo de Entrada*. Nesta etapa, devemos ter algo parecido com a figura 40. Agora, construímos uma reta r paralela à diretriz passando pelo ponto C. Para construí-la utilizamos a ferramenta mostrada na figura 41, ou então, digitamos r : Reta(C, d) no *Campo de Entrada*. Esta reta deve se mover livremente quando arrastamos o ponto C pela tela.

Figura 41 – Ferramenta *Reta Paralela*



Fonte: elaborada pelo autor.

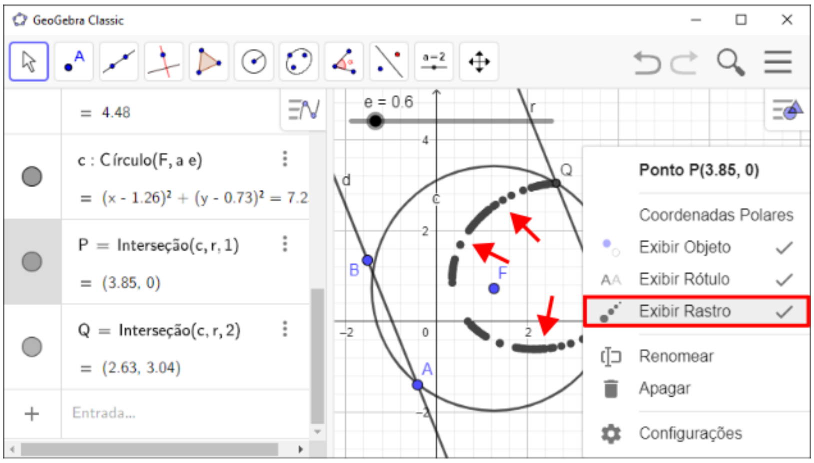
Precisamos da distância entre as duas retas e, para isto, digitamos a = Distância(r, d) no *Campo de Entrada*. Esta será a distância entre um ponto P da cônica e a diretriz (d(P, d)). Vamos construir agora, uma circunferência c com centro em F e raio $e \cdot$ d(P, d). Usando a ferramenta *Círculo: Centro & Raio*, clicamos primeiro no ponto F e na janela que se abre devemos digitar ae, como na figura 42.

Figura 42 – Ferramenta *Círculo: Centro & Raio*

Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, digitamos P = Interseção$(c, r, 1)$ e Q = Interseção$(c, r, 2)$ no *Campo de Entrada* para criar os dois pontos de interseção entre a reta r e a circunferência. Caso os pontos não apareçam na tela, podemos arrastar o ponto C e aproximar a reta r ao foco F e assim, veremos a interseção. Clicando com o botão direito do *mouse* sobre os pontos P e Q, devemos habilitar a opção *Exibir Rastro*. Desta maneira, quando arrastamos o ponto C, consequentemente os pontos de interseção também se movem, deixando rastros para trás que desenham a cônica (figura 43). Vale lembrar que, quando movemos a tela ou modificamos o *zoom*, o rastro desaparece. *Link* da construção: https://www.geogebra.org/m/z8se5mdg

Figura 43 – Rastros de P e Q formando a cônica



Fonte: elaborada pelo autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento do trabalho, podemos notar que o ensino da Geometria vem perdendo muito espaço, por conta do MMM, que valorizou mais a Álgebra. O conteúdo das seções cônicas, que relaciona estes dois ramos da Matemática sempre foi ensinado, mas também está cada vez mais sendo deixado de lado. Isto acontece talvez por conta da dificuldade de ensiná-lo. Os livros didáticos trazem demonstrações que os alunos na maioria das vezes não estão preparados para entender. O entendimento é prejudicado também pelos métodos de ensino tradicionais que, muitas vezes, utilizam apenas o quadro branco para expor os conteúdos.

Neste trabalho, trouxemos uma alternativa para o ensino de Matemática, mas principalmente para a Geometria e especificamente as cônicas. Mas sabemos que o *GeoGebra* pode ser utilizado em outros contextos, e como destacamos anteriormente, para que o aplicativo seja eficiente em sala de aula, o professor precisa de um certo tempo para aprender a utilizá-lo.

Notamos que o computador favorece o aprendizado do aluno, visto que na visão de Valente (1998), a construção do conhecimento através da máquina contribui para o desenvolvimento mental. E o uso da tecnologia atrai os estudantes, pois estamos cada vez mais introduzidos no mundo digital. As construções que vimos no capítulo 5 não necessariamente precisam ser feitas pelos alunos (e nem pelo professor, já que estão disponíveis *online*), mas mesmo assim contribuem para a construção do conhecimento, pois apresentam os conceitos com extrema precisão e dinamicidade, que seria impossível por meio do quadro branco.

As construções mostradas neste trabalho não substituem o livro didático, apenas o complementam, facilitando a compreensão dos conceitos que são apresentados. Como, por exemplo, a relação entre a equação e a representação geométrica de cada uma das cônicas. A construção por si só, não tem significado sem que a equação seja previamente apresentada. E para o caso da hipérbole, o uso do aplicativo é praticamente obrigatório, por conta dos seus eixos e das assíntotas.

Vale lembrar também que é possível abrir as construções que disponibilizamos *online* através do aplicativo instalado no computador para que sejam modificadas pelo professor. E recomendamos que isto seja feito, inclusive durante a aula, pois com o surgimento das dúvidas dos alunos, algumas alterações podem ser feitas para entender outras propriedades que não mostramos neste trabalho. Além do uso do *software*, é interessante que o professor busque por outras alternativas para o ensino do conteúdo e utilize o que achar mais adequado para cada turma.

Julgamos que o uso do *GeoGebra* contribui bastante para o ensino e aprendizagem das seções cônicas, mas não podemos afirmar que é a melhor opção disponível atualmente. O nosso principal objetivo foi mostrar que é possível melhorar o ensino destas curvas por meio de construções dinâmicas e, diante do que foi exposto, acreditamos que este objetivo foi alcançado. Esperamos também que o que foi apresentado estimule a criatividade do professor para que utilize o aplicativo no ensino de outros conteúdos.

Como continuação para este trabalho, temos a possibilidade de aprofundar o conteúdo com demonstrações mais complexas e conceitos mais abstratos, a partir de um tratamento vetorial e estender para o espaço e estudar as quádricas. Desta maneira podemos adaptar o conteúdo para ser visto por alunos do Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

BORDALLO, M. **As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2011. Disponível em: https://pemat.im.ufrj.br/index. php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2011/107-as-conicas-na-matematica-escolar-brasileira-historia-presente-e-futuro. Acesso em: 12 de dez. de 2022.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/index.php/quadrante/article/view/22913. Acesso em: 12 de dez. de 2022.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações, volume 3: Ensino Médio**. 3ª ed. São Paulo, SP: Ática, 2016.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GOMES, M. L. M. História do ensino da matemática: uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: https://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/historia_do_ensino_da_matematica_CORRIGIDO_13MAR2013.pdf. Acesso em: 15 de dez. de 2022.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações, volume 3: Ensino Médio**. 9ª ed. São Paulo, SP: Saraiva, 2016.

JUNIOR, F. H. M. M. **Seções Cônicas**. 2018. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal. 2018. Disponível em: http://www.locus.ufv.br/handl e/123456789/20709. Acesso em: 12 de dez. de 2022.

LEMOS, C. D. **Linux Educacional: desafio para o professor**. Trabalho de Conclusão de Especialização - Centro Interdisciplinar em Novas Tecnologias na Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: https://www.lume.uf rgs.br/handle/10183/141552. Acesso em: 12 de dez. de 2022.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 1ª ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2014.

MACHADO, C. P. **INVESTIGANDO O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO APOIO AO ENSINO DE MATEMÁTICA**. 2011. 82 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Física, Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2011. Disponível em: https://hdl.handle.net/1092 3/3075. Acesso em: 12 de dez . de 2022.

MENESES, R. S. **UMA HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESCOLAR NO BRASIL: de disciplina a conteúdo de ensino**. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007. Disponível em:

https://tede2.pucsp.br/ha ndle/handle/11203. Acesso em: 15 de dez. de 2022.

O que é o GeoGebra? **GeoGebra**, s/d. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 21 de out. de 2021.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 1, n. 1, p. 7-17, 2009. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicam p.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822. Acesso em: 15 de dez. de 2022.

PERIUS, A. A. P. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. Trabalho de Conclusão de Especialização - Centro Interdisciplinar em Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo. 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/95 906. Acesso em: 15 de dez. de 2022.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria Analítica**. 2ª ed. Goiânia, GO: Editora LTC, 1996.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática**. 2005. 169 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91153. Acesso em: 11 de ago. de 2022.

SANTOS, S. M. F.; LEAL, D. A. O Ensino de Matemática no Brasil com ênfase na Geometria. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 10647–10662, 2021. Disponível em: https://brazilianjournals.com/ojs/index.php/BRJD/article/view/23911. Acesso em: 15 de dez. de 2022.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 3**. 1ª ed. São Paulo, SP: Saraiva, 2016.

SOARES, F. **Movimento da matemática moderna no Brasil: avanço ou retrocesso?** 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: https://app.uff.br/riu ff/handle/1/2191. Acesso em: 9 de ago. de 2022.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. 2ª ed. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1998.