



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUÍS ALBERTO SCIÊNCIA SILVA DE LIMA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO ESPAÇO

CAMPINA GRANDE
2023

LUÍS ALBERTO SCIÊNCIA SILVA DE LIMA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO ESPAÇO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

CAMPINA GRANDE

2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

L732t Lima, Luis Alberto Sciencia Silva de.
O teorema fundamental das curvas no espaço [manuscrito]
/ Luis Alberto Sciencia Silva de Lima. - 2023.
50 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, Coordenação do Curso de Computação - CCT. "

1. Teoria Local das Curvas. 2. Teorema Fundamental das Curvas. 3. Geometria diferencial. I. Título

21. ed. CDD 516

LUÍS ALBERTO CIÊNCIA SILVA DE LIMA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO ESPAÇO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Aprovado em: 03 de Julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente



ALDO TRAJANO LOUREDO
Data: 13/07/2023 12:31:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a
todo jovem periférico
com um sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro à minha mãe que me fez usar um caderno exclusivo para matemática na escola despertando minha atenção especial à matemática.

Agradeço a cada um dos professores que contribuíram para minha jornada até aqui.

Por fim, agradeço a mim por desistir de desistir.

“A reta é uma curva que não sonha.”
Manoel de Barros

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é facilitar ao máximo a compreensão de uma demonstração do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço. Iremos expor todos os conceitos, definições e resultados necessários para o entendimento da demonstração apresentada. A pesquisa se deu através de análise bibliográfica, trazendo conteúdos de diversas fontes e compondo-os para a obtenção do resultado esperado.

Palavras-chave: Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas; Geometria Diferencial.

ABSTRACT

The main objective of this work is to facilitate as much as possible the understanding of a demonstration of the Fundamental Theorem of the Local Theory of Curves in space. We will expose all the concepts, definitions and results necessary for the understanding of the presented demonstration. The research was carried out through bibliographical analysis, bringing contents from different sources and composing them to obtain the expected result.

Keywords: Fundamental Theorem of Local Curves; Differential Geometry.

SUMÁRIO

	Página
1 INTRODUÇÃO	9
2 PRELIMINARES	11
2.1 Tópicos de Álgebra Linear	11
2.2 Tópicos de Espaços Métricos	14
2.3 Tópicos de Análise Matemática	16
2.4 Teorema da Existência e Unicidade de Picard	17
3 CURVAS EM \mathbb{R}^3	21
3.1 Curvas Parametrizadas	21
3.2 Curva Regular e Comprimento de Arco	23
3.3 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco	28
4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DAS CUR- VAS	35
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

Intuitivamente, podemos descrever uma curva como um traço em que uma partícula pode se mover em apenas uma direção (ou na direção contrária), e que o teorema descreve que dadas três características (comprimento de um trecho, quão curvo é o traço em um ponto e quão distante ele está do plano) duas curvas são iguais desconsiderando dois movimentos (mover a curva e rotacioná-la). De maneira técnica, podemos descrever formalmente uma curva como uma função contínua, diferenciável, que mapeia um intervalo real em um plano (espaço bidimensional) ou no espaço (espaço tridimensional). Na verdade, mais geralmente, em um espaço n -dimensional, mas, neste trabalho, focaremos apenas no espaço tridimensional.

Considerando dois pontos inicial e final em uma curva, podemos definir o comprimento de arco como a medida da distância percorrida ao longo da curva entre esses dois pontos. Essa medida é obtida através de técnicas de integração e cálculo diferencial.

Além do comprimento de arco, outra característica importante de uma curva é a sua curvatura, que representa o quão distante a curva está de ser uma linha reta em um determinado ponto. A curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura, que por sua vez pode ser calculado utilizando derivadas da função que descreve a curva.

No caso de curvas no espaço tridimensional, podemos também considerar a torção, que mede o quão distante a curva está de ser plana, ou seja, o quanto a curva se afasta do plano cartesiano. A torção é uma medida da curvatura em relação a um plano normal à curva.

Além das características de uma curva, existem as ações que podem ser realizadas sobre ela, tais como a translação, a rotação e o movimento rígido. A translação consiste em mover a curva no plano ou no espaço, mantendo sua forma e orientação inalteradas. A rotação é o movimento de girar a curva em torno de um eixo, também sem alterar sua forma. O movimento rígido é a composição de uma translação com uma rotação, resultando em um deslocamento e uma rotação simultâneos. Portanto, tanto a translação quanto a rotação são exemplos de movimentos rígidos.

O Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço estabelece que duas curvas com o mesmo comprimento de arco, curvatura e torção serão iguais, diferindo apenas em sua posição no espaço ou em seu ângulo de rotação. Em outras palavras, essas curvas são equivalentes, a menos de um movimento rígido.

Para iniciar o trabalho, apresentamos as preliminares contendo os conceitos matemáticos que serão utilizados, mas que não serão mencionados repetidamente ao longo do texto para evitar redundâncias. Essa seção tem como objetivo servir de referência para o leitor, garantindo que as notações estejam claras e os teoremas bem estabelecidos. Em seguida, apresentamos as definições, teoremas e exemplos de geometria diferencial, que contextu-

alizam o cenário em que o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço é provado e fornecem os conhecimentos necessários para compreensão da demonstração desse teorema. Em seguida, apresentamos as definições e o Teorema do Ponto Fixo de Banach para operadores, que fundamentam a compreensão do Teorema de Picard, e então seguimos com a prova desse teorema. Por fim, concluimos com a contextualização formal sobre o conceito de comprimento de arco, curvatura, torção e movimento rígido. Utilizando todos os conceitos previamente apresentados, procedemos à prova do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço.

2 PRELIMINARES

A princípio vamos introduzir as definições e teoremas que estabelecem as notações principais utilizadas no texto. Neste trabalho, \mathbb{R}^3 será denotado pelo conjunto de ternos ordenados (x, y, z) , com $x, y, z \in \mathbb{R}$, e chamaremos de *diferenciável* uma função que tem derivadas de todas as ordens em todos os pontos, ou seja, uma função de classe \mathcal{C}^∞ .

2.1 Tópicos de Álgebra Linear

Esta seção pretende expor as notações básicas utilizadas ao longo do trabalho e um teorema importante para uma demonstração no corpo do texto principal. As definições e o teorema podem ser encontrados principalmente no livro LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

Definição 2.1 (Produto Interno). Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$, com $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. O *produto interno* de u e v é o número real ($r \in \mathbb{R}$) tal que

$$\langle u, v \rangle = r = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

Definição 2.2 (Norma de um Vetor). Seja $u \in \mathbb{R}^3$, tal que $u = (u_1, u_2, u_3)$, a *norma do vetor* u é dada por

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Definição 2.3 (Determinante). Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tais que $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. O *determinante* entre u, v e w é dado por

$$\det(u, v, w) = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2.$$

Definição 2.4 (Produto Vetorial). Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. O *produto vetorial* de u e v , nesta ordem, é o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}.$$

Ou, ainda, sendo $w \in \mathbb{R}^3$, o produto vetorial de u e v , nesta ordem, pode ser caracterizado como,

$$\langle (u \wedge v), w \rangle = \det(u, v, w).$$

Teorema 2.1 (Derivada do Produto Vetorial). Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, em que $u = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ e $v = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$. Assim, a derivada do Produto Vetorial é dada por

$$(u \wedge v)' = u' \wedge v + u \wedge v'$$

Demonstração. Pela Definição [2.4](#), a derivada do produto vetorial é dada por

$$(u \wedge v)' = [(u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}]'. \quad (2.1)$$

Derivando cada membro do lado direito da equação, temos

$$\begin{aligned} [(u_1v_3 - u_3v_2)\hat{i}]' &= (u_2'v_3 - u_3'v_2)\hat{i} + (u_2v_3' - u_3v_2')\hat{i}, \\ [(u_3v_1 - u_1v_3)\hat{j}]' &= (u_3'v_1 - u_1'v_3)\hat{j} + (u_3v_1' - u_1v_3')\hat{j}, \\ [(u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}]' &= (u_1'v_2 - u_2'v_1)\hat{k} + (u_1v_2' - u_2v_1')\hat{k}. \end{aligned}$$

Isolando a primeira parte de cada termo da direita, temos

$$(u_2'v_3 - u_3'v_2)\hat{i} + (u_3'v_1 - u_1'v_3)\hat{j} + (u_1'v_2 - u_2'v_1)\hat{k} = u' \wedge v \quad (2.2)$$

e fazendo o mesmo com a segunda parte de cada termo da direita, temos

$$(u_2v_3' - u_3v_2')\hat{i} + (u_3v_1' - u_1v_3')\hat{j} + (u_1v_2' - u_2v_1')\hat{k} = u \wedge v'. \quad (2.3)$$

Assim, substituindo [\(2.2\)](#) e [\(2.3\)](#) na derivada [\(2.1\)](#), temos

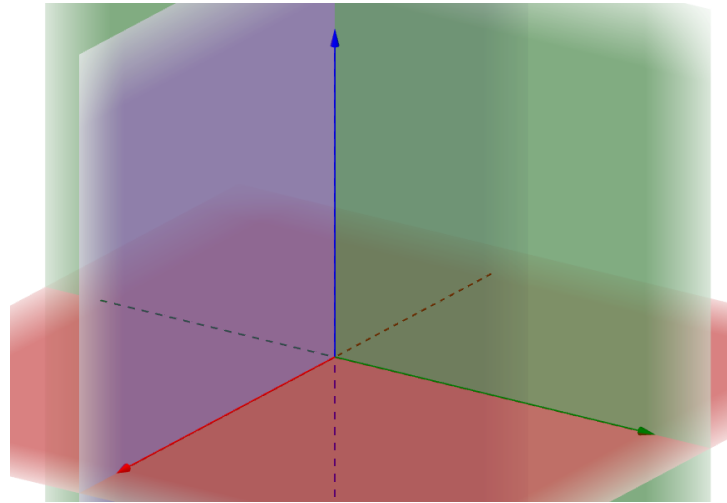
$$(u \wedge v)' = u' \wedge v + u \wedge v'$$

que é o que queríamos mostrar. □

Neste trabalho, o conceito de triedro é fundamental, assim definimos.

Definição 2.5 (Triedro). *Triedro* é a região do espaço delimitada por três semiplanos concorrentes, ou seja, com três arestas (retas) em comum. Cada um dos planos é uma face do triedro.

Figura 1 – Exemplo de Triedro



Fonte: De autoria própria

Definição 2.6 (Espaço Vetorial). Um espaço vetorial real é um conjunto V , não-vazio, munido de duas operações:

Adição: $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$.

Multiplicação por escalar: $u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in V$.

E essas operações satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) $u + v = v + u$;
- (ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$;
- (iii) $\exists 0 \in V \mid u + 0 = u$;
- (iv) $\exists -u \in V \mid u + (-u) = 0$;
- (v) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
- (vi) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
- (vii) $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$;
- (viii) $1 \cdot u = u$.

$\forall u, v, w \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7 (Independência Linear). Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, em que V é um espaço vetorial. Se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

admite somente a solução se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, então dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n são *linearmente independentes*.

Definição 2.8 (Espaço Gerado). Se v_1, v_2, \dots, v_n são vetores de um espaço vetorial V , então o conjunto

$$W = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de *espaço gerado* por $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Definição 2.9 (Base de um Espaço Vetorial). Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é uma *base* do espaço vetorial V se

- (i) v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes;
- (ii) v_1, v_2, \dots, v_n geram o espaço V .

Definição 2.10 (Base Canônica). A **base canônica** de um espaço vetorial é a base mais primitiva e intuitiva para a estrutura.

No \mathbb{R}^2 , a base canônica é dada pelo conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

No \mathbb{R}^3 , a base canônica é dada pelo conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

No \mathbb{R}^n , a base canônica é dada pelo conjunto $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.

Definição 2.11 (Transformação Linear). Sejam E e F espaços vetoriais. Uma *transformação linear* $A : E \rightarrow F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in F$ de modo que valham, para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:

$$A(u + v) = Au + Av$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av.$$

Teorema 2.2 (Teorema do Núcleo da Imagem). *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, com $\dim(V) = \dim(W)$. T é injetora se, e somente se, $N(T) = 0$. T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Demonstração. Seja $\forall v \in V$, com $v = (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)$. Então,

$$T(v) = T(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_nT(v_n) = a_10 + a_20 + \dots + a_n0 = 0$$

Portanto, $T(v) = 0, \forall v \in V$. Logo, $T \equiv 0$. □

Proposição 2.1. *Sejam $T, L : V \rightarrow W$ transformações lineares e $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de V . Se $(T - L)(v_i) = 0$ ou $T(v_i) = L(v_i)$, então $T = L$.*

2.2 Tópicos de Espaços Métricos

Necessitamos fundamentar conceitos importantes de espaços métricos para compreender as demonstrações apresentadas. As definições aqui apresentadas são encontradas no livro LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

Definição 2.12 (Métrica). Uma *métrica* em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa, a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$, um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (i) $d(x, x) = 0$;
- (ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.13 (Espaço Métrico). Um *espaço métrico* é um par (X, d) , onde X é um conjunto e d é uma métrica em X .

Definição 2.14 (Contração). Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \rightarrow X$ é chamada uma *contração* se existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in X.$$

Definição 2.15 (Sequência Convergente). Uma sequência de números reais (s_n) converge para um número real $s \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n > N \Rightarrow |s_n - s| < \epsilon.$$

Quando isso ocorre, dizemos que (s_n) é uma *sequência convergente* com s sendo o seu limite, e escrevemos $s_n \rightarrow s$ ou $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Se (s_n) não converge, então dizemos que (s_n) é uma sequência divergente.

Definição 2.16 (Sequência de Cauchy). Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_n$ uma sequência em X . Dizemos que $(x_n)_n$ é uma *Sequência de Cauchy*, se, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Definição 2.17 (Espaço Métrico Completo). Um espaço métrico é completo quando todas as sequências de Cauchy convergem para um limite que pertence ao espaço.

Definição 2.18 (Bola Aberta). Seja a um ponto no espaço métrico M , munido da métrica d , e $r > 0$. A *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto $B(a, r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r . Ou seja,

$$B(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}.$$

Definição 2.19 (Bola Fechada). Seja a um ponto no espaço métrico M , munido da métrica d , e $r > 0$. A *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto $B[a, r]$ dos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a . Ou seja,

$$B[a, r] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 2.20 (Composição de F n vezes). Sejam $Y \subseteq X$ e $F : X \rightarrow Y$ uma função. Definimos $F^2(x) = F \circ F(x)$ e, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, $F^n(x) = F \circ F^{n-1}(x)$.

2.3 Tópicos de Análise Matemática

Baseado no livro LIMA, Elon Lages. Análise Real - Volume 2. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020, utilizamos as seguintes definições de Análise Matemática.

É importante estabelecermos os tipos específicos de intervalos que serão utilizados no trabalho.

Definição 2.21 (Intervalos Degenerados e Não-Degenerados). O intervalo fechado $[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq a\}$, ou seja, $[a, a] = \{a\}$, contendo apenas um ponto, é chamado *intervalo degenerado*. Qualquer intervalo que contenha mais de um ponto é chamado de *intervalo não-degenerado*.

A continuidade de uma função é relevante em diversas demonstrações ao longo deste trabalho.

Definição 2.22 (Continuidade). Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e $a \in \mathbb{R}^n$. Então,

- f é contínua em a se para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

- f é contínua em \mathbb{R}^n se f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.23 (Globalmente Lipschitziana). Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *globalmente lipschitziana* se

$$\exists L > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|F(y) - F(z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Definição 2.24 (Localmente Lipschitziana). Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *localmente lipschitziana* se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists L, \delta > 0, \forall y, z \in B(x, \delta), \|F(y) - F(z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Definição 2.25. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando cada uma das suas funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.

Se este é o caso, então para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que $a + v \in U$ e para cada $i = 1, \dots, m$, tem-se

$$f_i(a + v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \alpha_j + r_i(v), \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0.$$

Definição 2.26 (Matriz Jacobiana). A matriz $Jf(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] \in M(n \times m)$ chama-se *matriz jacobiana* de f no ponto a .

Definição 2.27. A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, cuja matriz em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n é $Jf(a)$, chama-se a *derivada da aplicação* f no ponto a .

A fim de clarear ao que estamos nos referenciando, quando a derivada for de uma transformação linear F em um ponto u , denotaremos por dF_u , ou seja, de acordo com a Definição 2.27, $dF_u = F'(u)$. Quando se tratar de uma transformação linear aplicada em um vetor v , essa será denotada por $dF_u(v) = F'(u)(v)$.

2.4 Teorema da Existência e Unicidade de Picard

Para resolver a equação diferencial ordinária apresentada na Seção 3.3, necessitamos do Teorema Existência e Unicidade de Picard, ou apenas Teorema de Picard. Neste capítulo apresentaremos e provaremos o Teorema de Picard, junto com os conceitos necessários para sua demonstração.

Definição 2.28 (Problema de Cauchy). Seja U um aberto contido em $I \times \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo não degenerado de \mathbb{R} . Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Fixando um par $(t_0, x_0) \in U$, chamado de *valor inicial* para a equação diferencial ordinária dada por f , chamamos de *problema de Cauchy* associado a f com valor inicial (t_0, x_0) ao problema definido formalmente por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Teorema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração. Então, existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$, e p é chamado de ponto fixo.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ e $x_n = F^n(x_0) := F(F^{n-1}(x_0))$, $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.

De fato,

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(F(x_1), F(x_0)) \leq cd(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(F(x_2), F(x_1)) \leq cd(x_2, x_1) \leq c^2d(x_1, x_0) \\ &\vdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq c^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, para $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) \\ &\leq c^n d(x_1, x_0) + c^{n+1}d(x_1, x_0) + \cdots + c^{n+m-1}d(x_1, x_0) \\ &= c^n(1 + c + \cdots + c^{m-1})d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c}d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

o que prova que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, sendo (X, d) completo, existe $p \in X$ tal que $x_n \rightarrow p$.

Observe que, por ser F uma contração (em particular, contínua),

$$F(p) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Provemos agora a unicidade do ponto fixo P . Seja $q \in X$ outro ponto fixo por F . Então,

$$d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq cd(p, q).$$

Como $0 < c < 1$ temos $1 - c > 0$. Logo, devemos ter $d(p, q) = 0$, pois $(1 - c)d(p, q) \leq 0$. O que prova que $d(p, q) = 0$, isto é, $p = q$. \square

Corolário 2.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma aplicação qualquer tal que F^m é uma contração. Então, F possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Seja $p \in X$ o único ponto fixo de F^m garantido pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Então, por um lado,

$$F^{m+1}(p) = F(F^m(p)) = F(p)$$

e por outro lado,

$$F^{m+1}(p) = F^m(F(p)).$$

Logo

$$F^m(F(p)) = F(p),$$

e pela unicidade do ponto fixo de F^m , concluímos que $F(p) = p$, ou seja, p é também

ponto fixo de F . A unicidade é óbvia. \square

Teorema 2.4 (Teorema de Picard). *Seja $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação limitada, contínua e lipschitziana em relação a segunda variável. Então, existe uma única solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definido no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ em que $\alpha = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ e

$$M = \sup \{|f(t, x)| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0, b]\}.$$

Demonstração. Considere $X = C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; B[x_0, b])$ o espaço das aplicações contínuas de $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ em $B[x_0, b]$ dotada da norma

$$\|\psi\| = \sup \{|\psi(t)| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}.$$

Definamos a aplicação $F : X \rightarrow X$ dada por

$$F(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, \psi(s)) ds.$$

Observe que

(i) F está bem definida. De fato, para $\psi \in X$ e $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$,

$$|F(\psi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b \Rightarrow F(\psi) \in X.$$

(ii) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F^n é contração para todo $n \geq n_0$. De fato, seja $c > 0$ a constante de Lipschitz de f . Por indução, provaremos que

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{c^n |t - t_0|^n}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\|$$

para todos $\psi_1, \psi_2 \in X$ e todo $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} |F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t c |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \leq c|t - t_0| \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

Assumindo verdade para $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
& |F^{n+1}(\psi_1)(t) - F^{n+1}(\psi_2)(t)| = |F(F^n(\psi_1))(t) - F(F^n(\psi_2))(t)| \\
& \leq \int_{t_0}^t |f(s, F^n(\psi_1)(s)) - f(s, F^n(\psi_2)(s))| ds \\
& \leq \int_{t_0}^t c |F^n(\psi_1)(s) - F^n(\psi_2)(s)| ds \\
& \leq \int_{t_0}^t c \frac{c^n |s - t_0|^n}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\| ds \\
& \leq \frac{c^{n+1}}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \\
& = \frac{c^{n+1}}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\| \frac{|t - t_0|^{n+1}}{n+1} = \frac{c^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|\psi_1 - \psi_2\|,
\end{aligned}$$

o que conclui a indução.

Sendo $|t - t_0| \leq \alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{c^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{c^n \alpha^n}{n!} < 1, \forall n \geq n_0.$$

Logo, para todo $n \geq n_0$, F^n é uma contração, o que prova *ii*).

Segue, portanto, de *i*), *ii*) e do Corolário do Teorema do Ponto Fixo de Banach que F possui um único ponto fixo, digamos ϕ . Assim

$$\phi(t) = F(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$$

e, portanto,

$$\begin{cases} \phi' = f(t, \phi) \\ \phi(t_0) = x_0, \end{cases}$$

como queríamos provar. □

3 CURVAS EM \mathbb{R}^3

Este capítulo busca expor os conceitos sobre Curvas em \mathbb{R}^3 que estabelecem o que é uma curva matematicamente, quais características de uma curva necessitaremos e qual tipo de curvas vamos trabalhar. A principal referência utilizada neste capítulo é o livro DO CARMO, Manfredo P. Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised & Updated Second Edition. 1 ed. Prentice Hall, 2016.

3.1 Curvas Parametrizadas

Uma curva em \mathbb{R}^3 é uma função $\alpha : (a, b) \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é unidimensional e ao qual os métodos de cálculo diferencial podem ser aplicados. Uma curva é unidimensional, pois uma partícula numa curva pode se mover em apenas uma direção (ou na direção oposta).

Definição 3.1 (Curva Parametrizada Diferenciável). Uma *curva parametrizada diferenciável* em \mathbb{R}^3 é a função diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

A palavra *diferenciável* da Definição 3.1 significa que α é uma correspondência de cada $t \in I$ a um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de modo que as funções $x(t), y(t), z(t)$ são diferenciáveis.

A curva é chamada parametrizada, pois é sempre descrita em função de um parâmetro.

Definição 3.2 (Parâmetro da Curva). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável, com $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. A variável $t \in I$ é o *parâmetro da curva*.

O desenho que a curva forma no plano ou espaço é o que chamamos de traço.

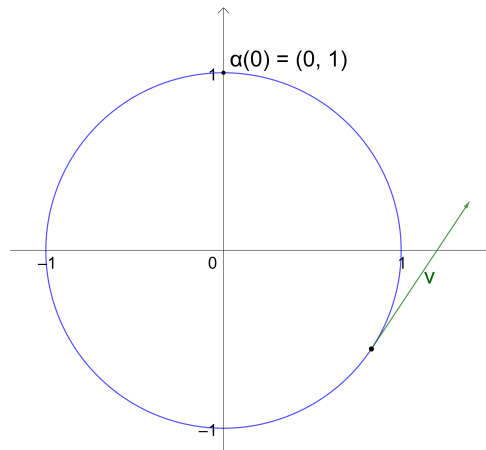
Definição 3.3 (Traço da Curva). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. O subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\alpha(t), t \in I$, é o *traço da curva* α .

Exemplo 3.1 (Manfredo P. do Carmo (2016)). Uma curva parametrizada $\alpha(t)$ cujo o traço é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ pode percorrer o círculo no sentido anti-horário com $\alpha(0) = (0, 1)$.

De fato, considerando a curva $\alpha : (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, definida por $\alpha(t) = (-\sin t, \cos t)$. Assim, $\alpha(0) = (0, 1)$ e α percorre o círculo no sentido anti-horário.

A Figura 1 representa a curva α e um vetor v indicando o sentido em que o círculo é percorrido.

Figura 1 – Curva $\alpha(t) = (-\text{sen } t, \text{cos } t)$



Fonte: De autoria própria

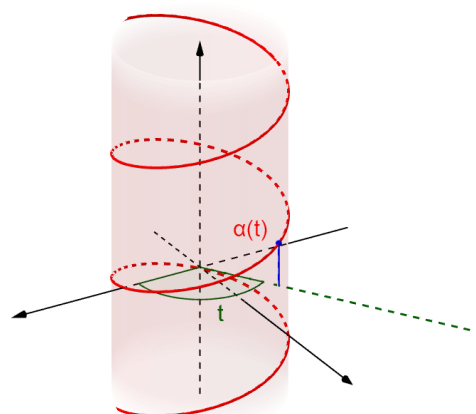
Exemplo 3.2 (Manfredo P. do Carmo (2016)). A curva parametrizada diferenciável $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

como $a > 0$ e $b \neq 0$, é a hélice circular de passo $2\pi b$ cujo traço está contido no cilindro $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo OX faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano XY .

A Figura 2 apresenta a hélice α em vermelho, o ponto $\alpha(t)$ e o traço da sua projeção em azul e o ângulo t que o eixo OX faz com a reta que liga a origem O à projeção em verde.

Figura 2 – Forma canônica local de uma curva



Fonte: De autoria própria

Se dois pontos $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ têm as duas primeiras coordenadas iguais, então $\alpha(t_2) - \alpha(t_1)$ é um múltiplo inteiro de $2\pi b$.

3.2 Curva Regular e Comprimento de Arco

Nesta seção, definimos o principal tipo de curva trabalhada, a curva regular, que é uma curva diferenciável em todos os pontos. Também definimos o que é comprimento de arco de uma curva, que é o tamanho da curva entre dois pontos. Para isso precisamos das seguintes definições.

Definição 3.4 (Reta Tangente). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. Para cada $t \in I$ em que $\alpha'(t) \neq 0$, existe uma reta bem definida, que contém o ponto $\alpha(t)$ e o vetor $\alpha'(t)$. Essa reta é chamada de *reta tangente* a α em t .

Definição 3.5 (Ponto Singular). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável, chamamos cada ponto t em que $\alpha'(t) = 0$ de *ponto singular* de α .

Assim, definimos como curva regular, uma curva que é diferenciável em todos os pontos.

Definição 3.6 (Curva Regular). Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, em um intervalo aberto $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, é dita *regular* se para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Neste trabalho assumiremos que todas as curvas são regulares.

Definição 3.7 (Norma de Curva Parametrizada). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. A *norma da curva parametrizada*, ou norma da curva, é dada por

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$$

que coincide com o comprimento do vetor $\alpha(t)$.

Dada uma curva, podemos precisar quanto mede essa curva, ou qual o comprimento do traço dessa curva.

Definição 3.8 (Comprimento de Arco). Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. O *comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1* é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

e a *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 é

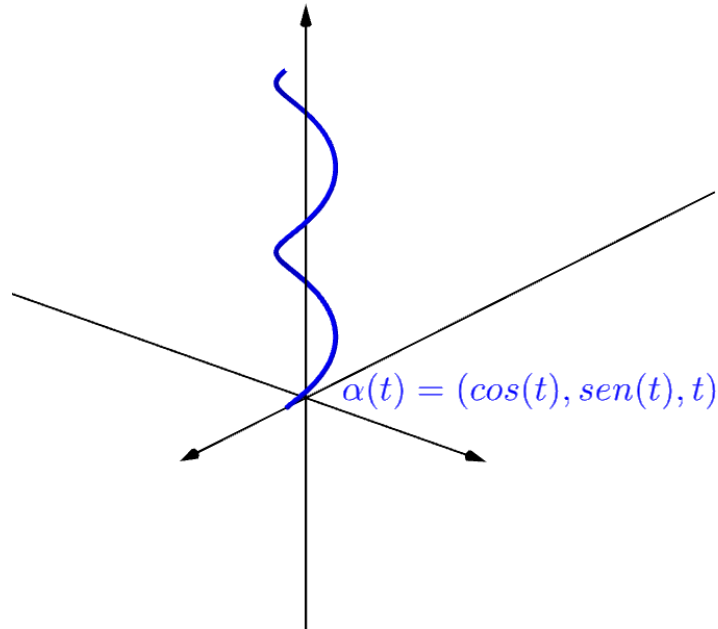
$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi,$$

para todo $t \in I$.

Exemplo 3.3. Seja a hélice $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ e $0 \leq t \leq 4\pi$. Calculado o comprimento dessa hélice, como $\alpha'(s) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, temos:

$$\int_0^{4\pi} \|(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

Figura 3 – Traço da curva $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, com $0 \leq t \leq 4\pi$



Fonte: De autoria própria

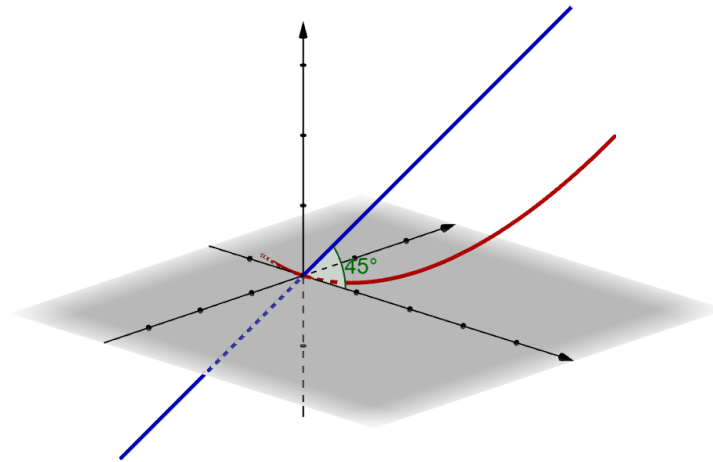
Exemplo 3.4 (Manfredo P. do Carmo (2016)). As retas tangentes à curva regular parametrizada $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ formam um ângulo constantes com a reta $y = 0, z = x$.

De fato, a reta $y = 0$ e $z = x$ é $(x, 0, x) = x(1, 0, 1)$, ou seja, é a reta que passa por $(0, 0, 0)$ na direção de $(1, 0, 1)$. Assim, para mostrar que as retas tangentes à $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0$ e $z = x$, temos que provar que o ângulo θ_t formado entre $\alpha'(t)$ e $(1, 0, 1)$ é constante para todo t . Mas

$$\begin{aligned} \cos \theta_t &= \frac{\langle \alpha'(t), (1, 0, 1) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|(1, 0, 1)\|} \\ &= \frac{\langle (3, 6t, 6t^2), (1, 0, 1) \rangle}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{(3 + 6t^2)^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim, θ_t não depende de t . Logo, $\theta_t = \theta = 45^\circ$, para todo t .

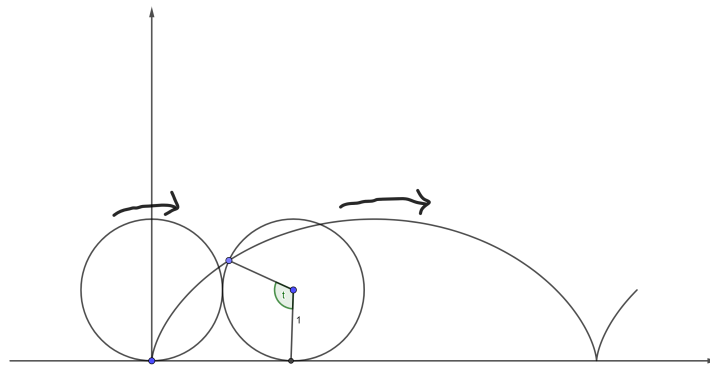
Figura 4 – Curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ e reta $y = 0$ e $z = x$



Fonte: De autoria própria

Exemplo 3.5 (Manfredo P. do Carmo (2016)). Um disco circular de raio 1 no plano xy rola sem deslizar ao longo do eixo x . A figura descrita por um ponto da circunferência do disco é chamada de cicloide.

Figura 5 – O cicloide



Fonte: De autoria própria

- (i) Obteremos uma curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo traço seja um cicloide e determinaremos seus pontos singulares;
- (ii) Calcularemos o comprimento de arco do cicloide correspondente à rotação completa do disco.

Assim, resolvendo cada um dos itens, temos

- (i) Consideremos um ponto arbitrário $P = (x, y)$ do cicloide. Para parametrizar tal

ponto, observe que

$$\begin{aligned} x &= \overline{Ox} = \overline{OA} - \overline{xA} \\ &= \overline{PA} - \overline{PB} \\ &= t \cdot r - \overline{PB} = t - \overline{PB}, \end{aligned}$$

mas

$$\text{sen } t = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC'}} \Rightarrow \overline{PB} = \overline{PC'} \overset{\text{raio}}{\text{sen } t} = \text{sen } t.$$

Logo, $x = t - \text{sen } t$. Analogamente, como

$$\begin{aligned} y &= \overline{OC} - \overline{yC} \\ &= 1 - \overline{BC'} \end{aligned}$$

e

$$\text{cos } t = \frac{\overline{BC'}}{\overline{PC'}} \Rightarrow \overline{BC'} = \overline{PC'} \overset{\text{raio}}{\text{cos } t} = \text{cos } t,$$

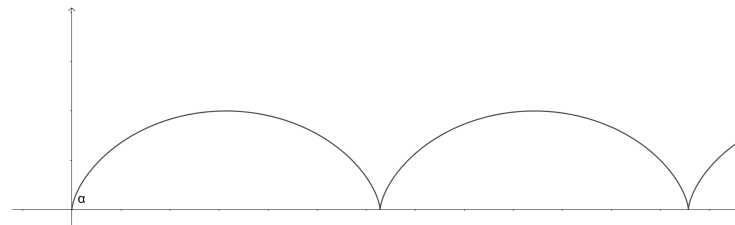
temos $y = 1 - \text{cos } t$. Portanto, a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ será dada por

$$\alpha(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t).$$

Calculando agora seus pontos singulares, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) = (1 - \text{cos } t, \text{sen } t) = (0, 0) &\iff \text{cos } t = 1 \text{ e } \text{sen } t = 0 \\ &\iff t = 2n\pi, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Figura 6 – Curva $\alpha(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t)$



Fonte: De autoria própria

(ii) Calculemos o comprimento de arco do cicloide correspondente a uma rotação com-

pleta do disco. Observe que o disco completa uma rotação quando $t = 2\pi$, já que

$$\begin{aligned}\alpha(2\pi) &= (2\pi - \text{sen } 2\pi, 1 - \cos 2\pi) \\ &= (2\pi, 0).\end{aligned}$$

Assim, o comprimento de arco do cicloide correspondente a uma rotação completa do disco será

$$\begin{aligned}\delta(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(s)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos^2 t) + \text{sen}^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt.\end{aligned}$$

Observe que

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos^2 \frac{t}{2} - \text{sen}^2 \frac{t}{2}$$

e, portanto, substituindo na integral, temos

$$\begin{aligned}\delta(2\pi) &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{t}{2} - \text{sen}^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \text{sen}^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{t}{2} dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \text{sen } t dt = 4(-\cos \pi + \cos 0) = 8,\end{aligned}\tag{3.1}$$

que em [\(3.1\)](#) utilizamos que $\text{sen} \frac{t}{2} \geq 0$, ($0 \leq t \leq 2\pi$), pois $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$.

Assim, obtemos o comprimento do arco do cicloide correspondente à rotação completa do disco.

Ainda, tendo o comprimento de arco, podemos parametrizar uma curva por esse comprimento, ou seja, os parâmetros da curva serão todos os pontos que determinam esse comprimento. Além disso, quando a curva estiver parametrizada pelo comprimento de arco, veremos que a norma da derivada dessa curva será sempre igual a um.

Definição 3.9 (Curva Parametrizada pelo Comprimento de Arco). Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$.

Proposição 3.1. *Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.*

Demonstração. (\Leftarrow) Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, então $\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0$ para quaisquer $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$.

(\Rightarrow) Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0 .

Então,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t - t_0, \text{ se } t \geq t_0,$$

e

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = - \int_t^{t_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = -(t_0 - t) = t - t_0, \text{ se } t \leq t_0,$$

ou seja, $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$. Logo, $s'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$. \square

3.3 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Nesta seção apresentamos os conceitos necessários para compreendermos as Fórmulas de Frenet que são fundamentais para a demonstração do teorema principal deste trabalho.

Seja $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s . Podemos definir um vetor velocidade, ou vetor tangente, à curva α em $t \in I$.

Definição 3.10 (Vetor Tangente Unitário). O vetor tangente t de uma curva α no ponto s é definido por

$$t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}.$$

Mas, como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, então $\|\alpha'(t)\| = 1$. Logo, definimos o *vetor tangente unitário* como

$$t(s) = \alpha'(s).$$

Como o vetor tangente $t(s)$ é unitário, a norma $\|\alpha''(s)\|$ da segunda derivada mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em s , em outras palavras, $\|\alpha''(s)\|$ mede o quão rápido a curva se afasta da reta tangente a α em s na vizinhança de s . Assim, podemos pensar no conceito de curvatura.

Definição 3.11 (Curvatura). A *curvatura* de uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco no ponto s é definida por

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Exemplo 3.6 (Jorge Delgado e Kátia Frensel (2017)). Seja $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, dada por

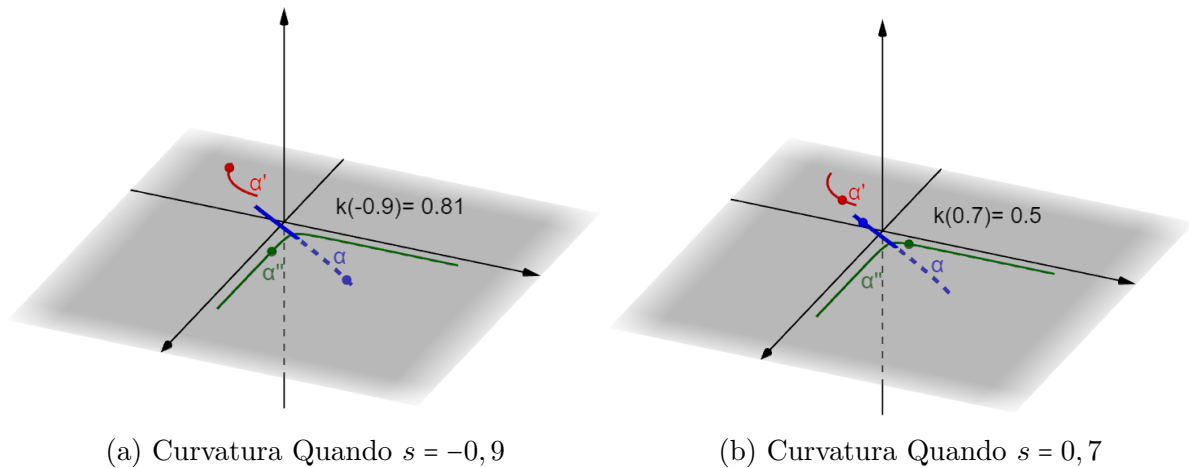
$$\alpha(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

Então $\alpha'(s) = \left(\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, \frac{-(1-s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ e $\alpha''(s) = \left(\frac{1}{4(1+s)^{1/2}}, \frac{1}{4(1-s)^{1/2}}, 0 \right)$.

Logo, $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{1+s}{4} + \frac{1-s}{4} + \frac{1}{2}} = 1$, isto é, α está parametrizada pelo comprimento de arco, e

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1-s^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2-2s^2}}.$$

Figura 7 – Exemplo de Curvatura



Fonte: De autoria própria

Se α é uma reta, $\alpha(s) = us + v$, em que u e v são vetores constantes ($\|u\| = 1$), então $k \equiv 0$. Por outro lado, se $k = \|\alpha''(s)\| \equiv 0$, então por integração $\alpha(s) = us + v$, e a curva é uma reta.

Proposição 3.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha(s)$ é um segmento de reta se, e somente se, $k(s) = 0, \forall s \in I$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que $\alpha(I)$ é um segmento de reta. Seja $v = \alpha'(s_0), s_0 \in I$ fixo. Então existe uma função diferenciável $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(s) = \lambda(s)v$ para todo $s \in I$.

Como $|\lambda(s)| = \|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$, $\lambda(s_0) = 1$ e $\lambda(s) = \langle \alpha'(s), v \rangle$ é contínua, temos que $\lambda(s) = 1$ para todo $s \in I$.

Logo $\alpha'(s) = v$ para todo $s \in I$ e, portanto, $\alpha(s) = vs + p$ para algum ponto $p \in \mathbb{R}^3$.

Assim, $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ para todo $s \in I$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ para todo $s \in I$. Então, como o intervalo $(-1, 1)$ é conexo, então $x''(s) = 0, y''(s) = 0$ e $z''(s) = 0$, e assim existe $v \in \mathbb{R}^3$ unitário tal que $\alpha'(s) = v$ para todo $s \in I$.

Logo, existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = vs + p$ para todo $s \in I$. \square

Nos pontos em que $k(s) \neq 0$, um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$ é bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Ainda, $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, porque derivando $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle' = 1' &\Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

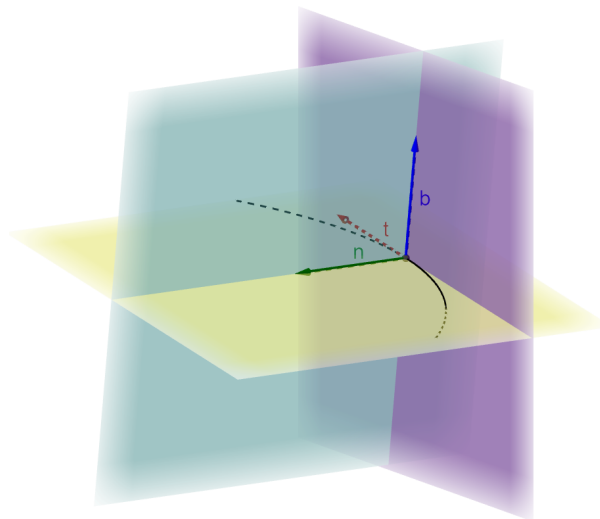
Assim, como o produto interno entre $\alpha''(s)$ e $\alpha'(s)$ é 0, os vetores são ortogonais.

Definição 3.12 (Vetor Normal). Nos pontos em que a curvatura $k(s) \neq 0$, o *vetor normal* $n(s)$ da curva α é definido por

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}.$$

O plano determinado pelos vetores tangente unitário e normal, $\alpha'(s)$ e $n(s)$, é chamado de *plano osculador* de s . Como na Figura 8 o plano osculador é representado, sendo formado pelos vetores $N = n(s)$ e $T = \alpha'(s)$.

Figura 8 – Plano Osculador de Uma Curva



Fonte: De autoria própria

Nos pontos em que $k(s) = 0$, o vetor normal e o plano osculador não estão definidos. O plano osculador é fundamental para proceder com a análise local das curvas. Assim, é conveniente dizer que $s \in I$ é um *ponto singular de ordem 1* se $\alpha''(s) = 0$. Os pontos em que $\alpha'(s) = 0$ são chamados de *pontos singulares de ordem 0*.

Neste trabalho, nos restringiremos às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1. Ou seja, nos restringiremos às curvas que tenham $k(s) \neq 0$ e plano osculador definido para todo $s \in I$.

Definição 3.13 (Vetor Binormal). O vetor binormal b da curva α no ponto s é definido por

$$b(s) = t(s) \wedge n(s).$$

O vetor binormal é normal ao plano osculador. Como $b(s)$ é um vetor unitário, o tamanho $\|b'(s)\|$ mede a taxa de mudança dos planos osculadores vizinhos com o plano osculador em s , ou seja, $b'(s)$ mede quão rápido a curva se distancia do plano osculador em s , numa vizinhança de s .

Corolário 3.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $t'(s) = k(s)n(s)$.

Demonstração. Como $t(s) = \alpha'(s)$, então $t'(s) = \alpha''(s)$, mas

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \Rightarrow n(s)k(s) = \alpha''(s) \Rightarrow n(s)k(s) = t'(s).$$

□

O vetor $b'(s)$ é paralelo ao vetor normal $n(s)$. Derivando $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, como $t'(s) = k(s)n(s)$, pelo Teorema [2.1](#), obtemos

$$\begin{aligned} b'(s) &= (t(s) \wedge n(s))' \\ &= t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) \\ &= k(s)n(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) \\ &= t(s) \wedge n'(s). \end{aligned}$$

Portanto, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$.

Como $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$, temos que $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$, ou seja, $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Logo, $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, isto é, $b'(s)$ é igual ao produto de $n(s)$ por um número real.

Definição 3.14 (Torção). A torção τ da curva α no ponto s é definida por

$$b'(s) = \tau(s)n(s).$$

Por definição, a torção mede a mudança de direção de um vetor binormal b . Como b é ortogonal ao plano osculador, τ também mede como o plano osculador se comporta no espaço \mathbb{R}^3 . Geometricamente, a torção representa o quanto uma curva deixa de ser plana.

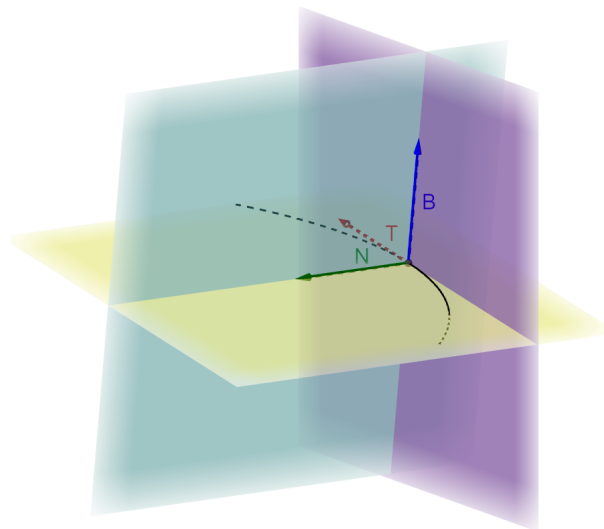
As derivadas de $t(s)$ e $n(s)$ nos dão a curvatura $k(s)$ e a torção $\tau(s)$, que descreve as propriedades geométricas de α na vizinhança de um ponto. É natural calcular a derivada do vetor normal.

Como $b(s) \wedge t(s) = n(s)$, temos

$$\begin{aligned} n'(s) &= (b(s) \wedge t(s))' \\ &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\ &= \tau(s)n(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge k(s)n(s) \\ &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s). \end{aligned}$$

Resumindo os conceitos introduzidos, para uma curva diferenciável regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, associamos três vetores unitários ortogonais $t(s), n(s), b(s)$ para todos os valores do parâmetro $s \in I$. O triedro formado por esses três vetores é chamado de *Triedro de Frenet*.

Figura 9 – Triedro de Frenet em Uma Curva



Fonte: De autoria própria

A relação entre esses três vetores, que descreve as propriedades locais da curva, pode ser resumida pelas *Fórmulas de Frenet*:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\ b'(s) = \tau(s)n(s). \end{cases}$$

Exemplo 3.7 (Jorge Delgado e Kátia Frensel (2017)). Seja a hélice circular parametri-

zada pelo comprimento de arco $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

em que $a > 0$ e $b \neq 0$. Então,

$$\alpha'(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e

$$\alpha''(s) = \left(\frac{-a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Logo, $k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$ é constante e o vetor normal

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k'(s)} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

é um vetor paralelo ao plano xy para todo $s \in \mathbb{R}$.

Como

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \wedge n(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & b \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right), \end{aligned}$$

temos

$$b'(s) = \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

e, portanto, $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ é constante.

Seja $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^9$ uma função tal que $\xi(s) = (t(s), n(s), b(s))$. Então, podemos reescrever as equações de Frenet como um sistema linear

$$\xi'(s) = \begin{bmatrix} 0 & k(s)I_3 & 0 \\ -k(s)I_3 & 0 & -\tau(s)I_3 \\ 0 & \tau(s)I_3 & 0 \end{bmatrix} \xi(s),$$

em que I_3 é a matriz identidade 3×3 .

Seja $M(s)$ a matriz correspondente. Definimos uma função $F : I \times \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ como

$$F(s, \xi(s)) = M(s)\xi(s) = \xi'(s).$$

Seja $s_0 \in I$ e $\xi_0 = (t_0, n_0, b_0) \in \mathbb{R}^3$ as condições iniciais. Agora, obtemos um problema de

valor inicial

$$\begin{aligned}\xi'(s) &= F(s, \xi(s)), \\ \xi(s_0) &= \xi_0.\end{aligned}$$

Daí, ao resolver essa equação diferencial ordinária, obtemos uma família de funções diferenciáveis $\{t(s), n(s), b(s)\}$ satisfazendo as equações de Frenet de modo que $t(s_0) = t_0, n(s_0) = n_0, b(s_0) = b_0$.

4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA LOCAL DAS CURVAS

Antes de provarmos o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas, introduziremos o conceito de movimento rígido e demonstraremos que a curvatura, a torção e o comprimento de arco de uma curva parametrizada não variam a menos de um movimento rígido.

Definição 4.1 (Isometria). Uma aplicação $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *isometria* quando preserva distância, isto é,

$$\|Au - Av\| = \|u - v\|$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.

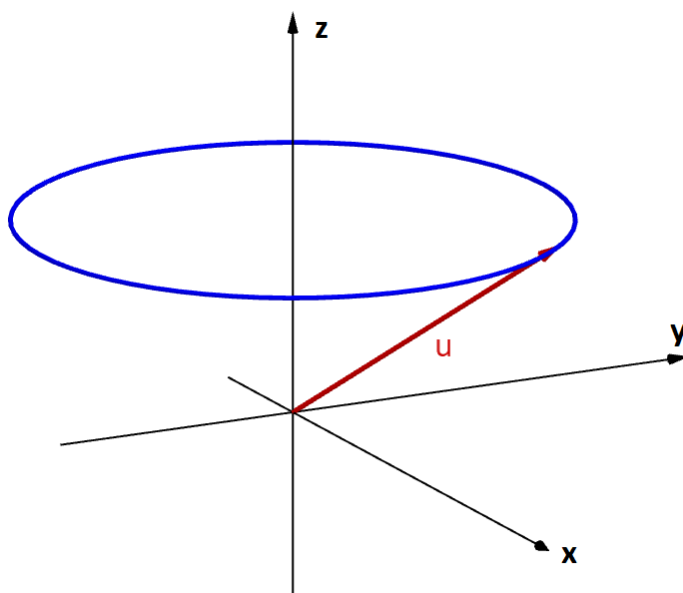
Exemplo 4.1 (Jorge Delgado e Kátia Frensel (2017)). A aplicação $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z),$$

em que $\theta \in (0, 2\pi)$, é uma isometria de \mathbb{R}^3 , denominada *rotação de ângulo θ em torno do eixo- Oz* .

Tomando um vetor $u \in \mathbb{R}^3$, F rotaciona o vetor em torno do eixo- Oz , conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – Rotação do vetor u



Fonte: De autoria própria

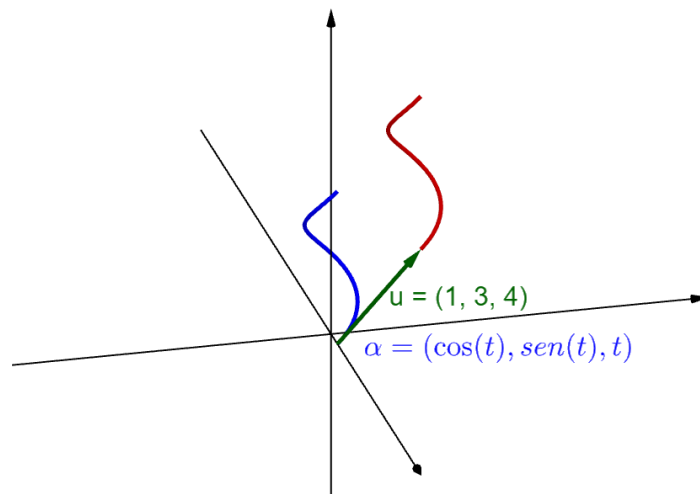
Um tipo especial de isometria é a que move, ou translada, um ponto de um lugar para outro no plano ou no espaço.

Definição 4.2 (Translação). Uma *translação por v* de um vetor $u \in \mathbb{R}^3$ é a aplicação $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Au = u + v$, com $v \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.2. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ e $0 \leq t \leq 2\pi$, e a translação $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $u = (1, 3, 4)$. A curva $A\alpha(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t) + 3, t + 4)$ é a translação da curva α por u .

Figura 2 – Curva Transladada

$$A\alpha(t) = (\cos(t) + x(u), \sin(t) + y(u), t + z(u))$$



Fonte: De autoria própria

Proposição 4.1. *A translação é uma isometria.*

Demonstração. Seja aplicação $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Au = u + w$ e $Av = v + w$, com $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, a translação por w . Observe que

$$\|Au - Av\| = \|u + w - (v + w)\| = \|u - v\|.$$

□

Há algumas propriedades sobre isometrias e translações que são importantes e são estabelecidas a seguir.

Proposição 4.2. (i) *Se A e B são isometrias de \mathbb{R}^3 , então $A \circ B$ é uma isometria.*

(ii) *Se A e B são translações, então $A \circ B = B \circ A$ é uma translação.*

(iii) *Se A é uma translação por v , então A é invertível e A^{-1} é a translação por $-v$.*

(iv) *Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, existe uma única translação T , tal que $Tu = v$.*

Demonstração. (i) $\|A(Bu) - A(Bv)\| = \|Bu - Bv\| = \|u - v\|$.

(ii) Se $Au = u + v$ e $Bu = u + w$, para todo $u \in \mathbb{R}^3$, então $(A \circ B)u = (B \circ A)u = u + (v + w)$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $Au = u + v$ e considere $Bu = u - v$. Então $A \circ Bu = B \circ Au = u$, para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Logo $B = A^{-1}$.

(iv) Seja T a translação por $v - u$, isto é, $Tw = w + (v - u)$ para todo $w \in \mathbb{R}^3$. Então $Tu = v$.

Para provar a unicidade, consideramos duas translações T e \bar{T} por w e \bar{w} , respectivamente, tais que $Tu = v = \bar{T}u$. Então, $u + w = Tu = \bar{T}u = u + \bar{w}$, o que implica $w = \bar{w}$. Portanto, $T = \bar{T}$.

□

Outra isometria importante é a transformação ortogonal, que é uma transformação linear, em um espaço com produto interno real, que preserva o produto interno.

Definição 4.3 (Transformação Ortogonal). A função linear $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *transformação ortogonal* se $\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$.

Observação 4.1. Sendo J uma aplicação linear, temos $J0 = 0$; J é diferenciável; $dJ_u = J$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$, e é invertível, pois $Ju = 0 \iff u = 0$, já que $\|Ju\|^2 = \|u\|^2$. Disto obtemos que J é injetora e, como $\dim(J) = \dim(\text{Im}(J))$, pelo Teorema (2.2), temos que J é sobrejetora, e, portanto, bijetora.

Proposição 4.3. *Toda transformação ortogonal é uma isometria.*

Demonstração. Seja a transformação ortogonal $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $u, v \in \mathbb{R}^3$.

$$\|Ju - Jv\|^2 = \|J(u - v)\|^2 = \langle J(u - v), J(u - v) \rangle = \langle u - v, u - v \rangle = \|u - v\|^2.$$

Portanto, $\|Ju - Jv\| = \|u - v\|$.

□

E podemos especificar que uma isometria é uma transformação ortogonal quando a aplicação levar o vetor nulo ao próprio vetor nulo.

Proposição 4.4. *Se $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria tal que $A0 = 0$, então A é uma transformação ortogonal.*

Demonstração. Provaremos primeiro que A preserva o produto interno.

Como $\langle Au, Au \rangle = \|Au\|^2 = \|Au - A0\|^2 = \|u - 0\|^2 = \langle u, u \rangle$ (pois A é uma isometria e $A0 = 0$), temos

$$\langle Au, Av \rangle = \frac{1}{2}(\|Au\|^2 + \|Av\|^2 - \|Au - Av\|^2) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2) = \langle u, v \rangle.$$

Mostraremos agora que A é linear, isto é, $A(au + bv) = aAu + bAv$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\|A(au + bv) - aAu - bAv\|^2 &= \langle A(au + bv) - aAu - bAv, A(au + bv) - aAu - bAv \rangle \\
&= \|A(au + bv)\|^2 + a^2\|Au\|^2 + b^2\|Av\|^2 \\
&\quad - 2a\langle A(au + bv), Au \rangle - 2b\langle A(au + bv), Av \rangle \\
&\quad + 2ab\langle Au, Av \rangle \\
&= \|au + bv\|^2 + a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 - 2a\langle au + bv, u \rangle \\
&\quad - 2b\langle au + bv, v \rangle + 2ab\langle u, v \rangle \\
&= \|(au + bv) - au - bv\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $A(au + bv) - aAu - bAv = 0$, ou seja, $A(au + bv) = aAu + bAv$. □

Definiremos a seguir o que é um movimento rígido.

Definição 4.4 (Movimento Rígido). Um *movimento rígido* é a isometria resultante da composição de uma translação com uma transformação ortogonal.

A translação e a transformação ortogonal são sozinhas movimentos rígidos também, já que são a composição com a outra sendo nula. Ainda, sabemos que são únicas a translação e a transformação ortogonal que compõem um movimento rígido.

Corolário 4.1. Se $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido, então existe uma única transformação ortogonal $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e uma única translação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = T \circ J$.

Demonstração. Existência: Como,

$$\|Ju - Jv\| = \|Au - A0 - Av + A0\| = \|Au - Av\| = \|u - v\|,$$

então J é uma isometria. Daí, pela proposição [4.4](#), $Ju = Au - A0$ é uma transformação ortogonal, pois J é uma isometria e $J0 = 0$. Como $Au = Ju + A0$, para todo $u \in \mathbb{R}^3$, então $A = T \circ J$, onde T é uma translação por $A0$.

Unicidade: Sejam T, \bar{T} translações e J, \bar{J} transformações ortogonais tais que $A = T \circ J = \bar{T} \circ \bar{J}$.

Então, $A0 = T(J0) = T0 = \bar{T}(\bar{J}0) = \bar{T}0$. Logo, $T = \bar{T}$ e, portanto, $J = T^{-1} \circ A = \bar{T}^{-1} \circ A = \bar{J}$. □

Podemos mostrar também que uma isometria é invertível e sua inversa também é uma isometria.

Proposição 4.5. *Se $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido, então A é invertível e A^{-1} é uma isometria.*

Demonstração. Seja $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um movimento rígido.

Então, como $A = J \circ T$ e T e J são invertíveis, temos que A é invertível e $A^{-1} = T^{-1} \circ J^{-1}$. Portanto, A^{-1} é um movimento rígido, pois A^{-1} é a composta de duas isometrias, uma translação e uma transformação ortogonal. \square

E se uma aplicação é um movimento rígido, então essa aplicação é diferenciável e sua derivada é uma transformação ortogonal.

Proposição 4.6. *Se A é um movimento rígido dado por $A = T \circ J$, em que T é uma translação e J é uma transformação ortogonal, então A é diferenciável e $dA_u(v) = Jv$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja A um movimento rígido dado por $A = T \circ J$, em que T é uma translação e J é uma transformação ortogonal.

Assim, A é diferenciável, pois A é a composta de duas funções diferenciáveis, e

$$\begin{aligned} dA_u(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(u + tv) - A(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) + a - J(u) - a}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u) + tJ(v) + a - J(u) - a}{t} = J(v), \end{aligned}$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$, em que T é a translação por $a \in \mathbb{R}^3$.

Portanto, para todo $u \in \mathbb{R}^3$, $dA_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva o produto interno. Assim, dado $u \in \mathbb{R}^3$, dA_u leva uma base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ em outra base ortonormal $\{dA_u(v_1), dA_u(v_2), dA_u(v_3)\}$. \square

Dizemos que a isometria A *preserva orientação* se as bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{dA_u(v_1), dA_u(v_2), dA_u(v_3)\}$$

têm a mesma orientação, ou seja, se

$$\langle dA_u(v_1) \wedge dA_u(v_2), dA_u(v_3) \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle.$$

Dizemos que a isometria A *inverte orientação* se as bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' têm orientações opostas, ou seja, quando

$$\langle dA_u(v_1) \wedge dA_u(v_2), dA_u(v_3) \rangle = -\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle.$$

Observação 4.2. Dos conceitos de preservação e inversão de orientação, decorre que A preserva (ou inverte) orientação se, e somente se, o determinante da matriz jacobiana de A é igual a 1 (ou -1).

Proposição 4.7. *Sejam $u, q \in \mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases ortonormais de \mathbb{R}^3 . Então, existe uma única isometria $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Au = q$ e $dA_u(v_i) = w_i$, com $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Existência: Seja $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $J(v_i) = w_i$, com $i = 1, 2, 3$, ou seja, se $q \in \mathbb{R}^3$, $q = av_1 + bv_2 + cv_3$, então

$$J(q) = aJ(v_1) + bJ(v_2) + cJ(v_3) = aw_1 + bw_2 + cw_3.$$

Como as bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ são ortonormais, segue-se da definição de J que J preserva produto interno. Portanto, J é uma transformação ortogonal.

Seja T a translação por $q - J(u)$. Então, a isometria $A = T \circ J$ satisfaz as condições exigidas.

De fato,

$$A(u) = T \circ J(u) = q - J(u) + J(u) = q,$$

e, pela Observação 4.6,

$$dA_u(v_i) = J(v_i) = w_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Unicidade: Suponhamos que as isometrias $A = T \circ J$ e $\bar{A} = \bar{T} \circ \bar{J}$ satisfaz as condições da proposição, ou seja,

$$A(u) = \bar{A}(u) = q \quad \text{e} \quad dA_u(v_i) = d\bar{A}_u(v_i) = w_i,$$

com $i = 1, 2, 3$.

Segue-se da última relação que $J(v_i) = \bar{v}_i = w_i$, com $i = 1, 2, 3$. Como J e \bar{J} são aplicações lineares, pelo resultado (2.1), temos que $J = \bar{J}$. Portanto, $T \circ J(u) = \bar{T} \circ J(u) = q$, ou seja, T e \bar{T} são translações que levam $J(u)$ em q . Então, pela Proposição 4.2, $T = \bar{T}$ e, portanto, $A = \bar{A}$. \square

Quando duas curvas são colocadas uma sobre a outra e são iguais, dizemos que essas curvas são congruentes e isso acontece sem importar suas posições ou ângulos de rotação no plano ou espaço em que estiverem contidas. Nos atentamos apenas às características que compreendem seus respectivos traços.

Definição 4.5 (Congruência Entre Curvas). Dizemos que duas curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são *congruentes* quando existe uma isometria $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = A \circ \alpha$, ou seja, β difere de α apenas por um movimento rígido.

Proposição 4.8. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. Sejam A uma isometria de \mathbb{R}^3 e $\bar{\alpha} = A \circ \alpha$. Então $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$*

é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que, para todo $s \in I$,

$$\begin{aligned}\bar{k}(s) &= k(s), \\ \bar{\tau}(s) &= \pm\tau(s), \\ \bar{t}(s) &= dA_{\alpha(s)}(t(s)), \\ \bar{n}(s) &= dA_{\alpha(s)}(n(s)), \\ \bar{b}(s) &= \pm dA_{\alpha(s)}(b(s)),\end{aligned}$$

em que o sinal \pm se refere a se A preserva orientação (+) ou se A inverte orientação (-).

Demonstração. A curva $\bar{\alpha}$ é diferenciável, pois A e α são diferenciáveis. Além disso, como

$$\bar{\alpha}'(s) = dA_{\alpha(s)}(\alpha'(s)),$$

temos

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \|dA_{\alpha(s)}(\alpha'(s))\| = \|\alpha'(s)\| = 1,$$

pois $dA_{\alpha(s)}$ é uma transformação ortogonal. Logo, $\bar{\alpha}$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

Sejam T uma translação e J uma transformação ortogonal tais que $A = T \circ J$. Então como $\bar{\alpha}'(s) = J(\alpha'(s))$, segue que $\bar{\alpha}''(s) = J(\alpha''(s))$.

Assim,

$$\bar{k}(s) = \|\bar{\alpha}''(s)\| = \|J(\alpha''(s))\| = \|\alpha''(s)\| = k(s),$$

e

$$\bar{n}(s) = \frac{\bar{\alpha}''(s)}{\bar{k}(s)} \Rightarrow J\left(\frac{\bar{\alpha}''(s)}{\bar{k}(s)}\right) = J(n(s)) = dA_{\alpha(s)}(n(s)).$$

Temos $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ e $\bar{b}(s) = J(t(s)) \wedge J(n(s))$.

Se J preserva orientação, então J leva a base ortonormal positiva $\{t(s), n(s), b(s)\}$ na base ortonormal positiva $\{J(t(s)), J(n(s)), J(b(s))\} = \{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$.

Logo, $\bar{b}(s) = J(b(s)) = dA_{\alpha(s)}(b(s))$.

Se A inverte orientação, então J leva a base ortonormal positiva $\{t(s), n(s), b(s)\}$ na base ortonormal negativa $\{J(t(s)), J(n(s)), J(b(s))\} = \{\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)\}$.

Logo, $\bar{b}(s) = -J(b(s)) = -dA_{\alpha(s)}(b(s))$.

Finalmente, como $\bar{b}(s) = \pm J(b(s))$, temos $\bar{b}'(s) = \pm J(b'(s))$ e, portanto,

$$\bar{\tau}(s) = \langle \bar{b}'(s), \bar{n}(s) \rangle = \pm \langle J(b'(s)), J(n(s)) \rangle = \pm \langle b'(s), n(s) \rangle = \pm\tau(s).$$

□

Com isso, temos bem estabelecidos os conceitos necessários para provar o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas). *Duas curvas são congruentes se tiverem a mesma curvatura, torção e comprimento de arco, diferindo apenas de um movimento rígido*

- (i) *Se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura e torção (a menos de sinal), então α e β congruentes, isto é, existe uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F \circ \alpha = \beta$.*
- (ii) *Se $k, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções diferenciáveis, com $k(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α em s para todo $s \in I$.*
- (iii) *Dados $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vetores ortonormais, existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(s_0) = p_0, \alpha'(s_0) = v_1, \alpha''(s_0) = k(s_0)v_2, k_\alpha \equiv k$ e $\tau_\alpha \equiv \tau$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco.

- (i) Seja $s_0 \in I$ fixo e suponhamos que $\tau_\alpha = \tau_\beta$ (respectivamente $\tau_\alpha = -\tau_\beta$). Pela Proposição 4.7, existe uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ e

$$\begin{aligned} dF_{\alpha(s_0)}(t_\alpha(s_0)) &= t_\beta(s_0); \\ dF_{\alpha(s_0)}(n_\alpha(s_0)) &= n_\beta(s_0); \\ dF_{\alpha(s_0)}(b_\alpha(s_0)) &= b_\beta(s_0) \end{aligned}$$

(respectivamente $dF_{\alpha(s_0)}(b_\alpha(s_0)) = -b_\beta(s_0)$).

Seja $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Então, pela Proposição 4.8, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \beta(s_0); \\ \bar{t}(s_0) &= t_\beta(s_0); \\ \bar{k} &= k_\alpha = k_\beta; \\ \bar{n}(s_0) &= n_\beta(s_0); \\ \bar{\tau} &= \tau_\alpha = \tau_\beta; \\ \bar{b}(s_0) &= b_\beta(s_0) \end{aligned}$$

(respectivamente $\bar{\tau} = -\tau_\alpha = \tau_\beta$ e $\bar{b}(s_0) = -b_\alpha(s_0) = b_\beta(s_0)$).

Para provar que $\bar{\alpha} = \beta$, basta mostrar que $\bar{t} = t_\beta$, pois, neste caso, teremos $\alpha - \beta$ constante e como $\bar{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$, poderemos concluir que $\bar{\alpha}(s) = \beta(s)$ para todo $s \in I$.

Consideremos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \|\bar{t}(s) - t_\beta(s)\|^2 + \|\bar{n}(s) - n_\beta(s)\|^2 + \|\bar{b}(s) - b_\beta(s)\|^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2\langle \bar{t}'(s) - t'_\beta(s), \bar{t}(s) - t_\beta(s) \rangle + 2\langle \bar{n}'(s) - n'_\beta(s), \bar{n}(s) - n_\beta(s) \rangle \\ &\quad + 2\langle \bar{b}'(s) - b'_\beta(s), \bar{b}(s) - b_\beta(s) \rangle \\ &= 2k(s)\langle \bar{n}(s) - n_\beta(s), \bar{t}(s) - t_\beta(s) \rangle - 2k(s)\langle \bar{t}(s) - t_\beta(s), \bar{n}(s) - n_\beta(s) \rangle \\ &\quad - 2\tau(s)\langle \bar{b}(s) - b_\beta(s), \bar{n}(s) - n_\beta(s) \rangle + 2\tau(s)\langle \bar{n}(s) - n_\beta(s), \bar{b}(s) - b_\beta(s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, f é constante, vista que I é conexo. Como $f(s_0) = 0$, temos $f = 0$ e, portanto, $\bar{t} = t_\beta$.

- (ii) Existência: Para provar a existência de α , demonstraremos primeiro que existe um referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ que satisfaz as fórmulas de Frenet, isto é,

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\ b'(s) &= \tau(s)n(s). \end{aligned}$$

Considere $x = (x_1, x_2, x_3)$, em que $x_i(s) = (x_{i1}(s), x_{i2}(s), x_{i3}(s))$, $i = 1, 2, 3$. Considere ainda

$$f(s, x) = \begin{pmatrix} k(s)x_{21}(s), k(s)x_{22}(s), k(s)x_{23}(s), \\ -k(s)x_{11}(s) - \tau(s)x_{31}(s), -k(s)x_{12}(s) \\ -\tau(s)x_{32}(s), -k(s)x_{13}(s) - \tau(s)x_{33}(s), \\ \tau(s)x_{21}(s), \tau(s)x_{22}(s), \tau(s)x_{23}(s) \end{pmatrix}$$

e $x_0 = (e_1, e_2, e_3)$, em que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Pelo Teorema 2.4 (Picard), temos que o problema de Cauchy associado a f com valor inicial (s_0, x_0) (sistema de nove equações diferenciais), isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = f(s, x), \\ x(s_0) = x_0, \end{cases}$$

possui uma única solução, a qual denotaremos por $\{t, n, b\}$.

Observe que o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial s} = (k(s)x_{21}(s), k(s)x_{22}(s), k(s)x_{23}(s)), \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} = (-k(s)x_{11}(s) - \tau(s)x_{31}(s), -k(s)x_{12}(s) \\ \quad - \tau(s)x_{32}(s), -k(s)x_{13}(s) - \tau(s)x_{33}(s)), \\ \frac{\partial x_3}{\partial s} = (\tau(s)x_{21}(s), \tau(s)x_{22}(s), \tau(s)x_{23}(s)), \\ x_1(s_0) = e_1, \\ x_2(s_0) = e_2, \\ x_3(s_0) = e_3. \end{cases}$$

Portanto, obtemos que, para $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} t'_i(s) &= k(s)n_i(s), \\ n'_i(s) &= -k(s)t_i(s) - \tau(s)b_i(s), \\ b'_i(s) &= \tau(s)n_i(s), \end{aligned} \tag{4.1}$$

com

$$t(s_0) = (1, 0, 0), \quad n(s_0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad b(s_0) = (0, 0, 1). \tag{4.2}$$

Vamos provar agora que a solução $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$. Para isto, consideremos as funções

$$\begin{aligned} \langle t(s), t(s) \rangle, \quad \langle n(s), n(s) \rangle, \quad \langle b(s), b(s) \rangle, \\ \langle t(s), n(s) \rangle, \quad \langle t(s), b(s) \rangle, \quad \langle n(s), b(s) \rangle, \end{aligned}$$

que satisfazem ao sistema de 6 equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle t(s), t(s) \rangle &= 2k(s)\langle t(s), n(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle n(s), n(s) \rangle &= -2k(s)\langle t(s), n(s) \rangle - 2\tau(s)\langle n(s), b(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle b(s), b(s) \rangle &= 2\tau(s)\langle n(s), b(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle t(s), n(s) \rangle &= k(s)\langle n(s), n(s) \rangle - k(s)\langle t(s), t(s) \rangle - \tau(s)\langle t(s), b(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle t(s), b(s) \rangle &= k(s)\langle n(s), b(s) \rangle + \tau\langle t(s), n(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle n(s), b(s) \rangle &= -k(s)\langle t(s), b(s) \rangle - \tau(s)\langle b(s), b(s) \rangle + \tau(s)\langle n(s), n(s) \rangle,\end{aligned}$$

com condições iniciais

$$\langle t(s_0), t(s_0) \rangle = \langle n(s_0), n(s_0) \rangle = \langle b(s_0), b(s_0) \rangle = 1,$$

e

$$\langle t(s_0), n(s_0) \rangle = \langle t(s_0), b(s_0) \rangle = \langle n(s_0), b(s_0) \rangle = 1.$$

A solução para esse sistema de equações diferenciais é única e é dada pelas funções

$$\langle t(s), t(s) \rangle = \langle n(s), n(s) \rangle = \langle b(s), b(s) \rangle = 1,$$

e

$$\langle t(s), n(s) \rangle = \langle t(s), b(s) \rangle = \langle n(s), b(s) \rangle = 1.$$

De fato, basta substituir estas funções no sistema acima para verificar que formam uma solução do sistema.

Portanto, a solução de (4.1) com a condição inicial (4.2) forma um referencial ortogonal positivo, ou seja, $\det(t(s), n(s), b(s)) = 1$ para todo $s \in I$, pois $\det(t(s_0), n(s_0), b(s_0)) = 1$.

Logo, $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ para todo $s \in I$.

Definimos a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(\xi) d\xi$.

Então $\alpha'(s) = t(s)$. Portanto, $\|\alpha'(s)\| = \|t(s)\| = 1$ para todo $s \in I$, isto é, α está parametrizada pelo comprimento de arco, e $\alpha''(s) = t'(s) = k(s)n(s)$.

Assim, $k_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \|k(s)n(s)\| = k(s)$ e $n_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{k_\alpha(s)} = n(s)$ para todo $s \in I$.

Além disso, $b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \wedge n_\alpha(s) = t(s) \wedge n(s) = b(s)$ e, portanto,

$$\tau_\alpha(s) = \langle b'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle = \langle b'(s), n(s) \rangle = \tau(s)\langle n(s), n(s) \rangle = \tau(s),$$

para todo $s \in I$.

- (iii) Unicidade: Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que

$$k_\alpha = k_\beta = k, \quad \tau_\alpha = \tau_\beta = \tau, \quad \alpha(s_0) = \beta(s_0) = p_0 \\ \alpha'(s_0) = \beta'(s_0) = v_1, \quad \alpha''(s_0) = \beta''(s_0) = k(s_0)v_2.$$

Então, $n_\alpha(s_0) = n_\beta(s_0) = v_2$ e $b_\alpha(s_0) = t_\alpha(s_0) \wedge n_\alpha(s_0) = v_1 \wedge v_2 = t_\beta(s_0) \wedge n_\beta(s_0) = b_\beta(s_0)$.

Como $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ e $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ são soluções do sistema [4.1](#) com condição inicial $\{v_1, v_2 \wedge v_2\}$, temos que $\alpha = \beta$.

Existência: Dados $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vetores ortonormais, o sistema [4.1](#) tem uma única solução $\{t(s), n(s), b(s)\}$ com condição inicial $t(s_0) = v_1, n(s_0) = v_2$ e $b(s_0) = v_1 \wedge v_2$.

Como $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ é uma base ortonormal positiva, podemos provar, de modo análogo ao feito no item [\(i\)](#) para $v_1 = e_1, v_2 = e_2$ e $v_1 \wedge v_2 = e_3$, que $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $s \in I$ e que

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(\xi) d\xi + p_0$$

é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com

$$\alpha(s_0) = p_0, \quad t_\alpha(s) = t(s), \quad n_\alpha(s) = n(s), \\ b_\alpha(s) = b(s), \quad k_\alpha(s) = k(s) \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(s) = \tau(s),$$

para todo $s \in I$.

□

Com isso, seguem exemplos de aplicações do Teorema Fundamental das Curvas no espaço.

Exemplo 4.3 ([Aline Mauricio Barbosa \(2021\)](#)). Dada a constante $a > 0$, sejam as funções $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(s) \equiv \frac{1}{a}$ e $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) \equiv 0$.

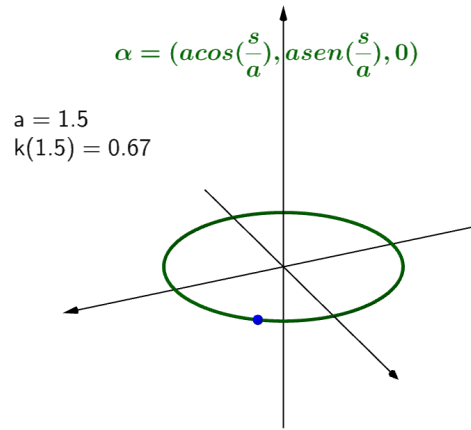
O Teorema Fundamental das Curvas, parte [\(ii\)](#), garante a existência de uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que

$$k_\alpha(s) = k(s) = \frac{1}{a}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(s) = \tau(s) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Pois, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(s) = (a \cos(\frac{s}{a}), a \sin(\frac{s}{a}), 0), s \in \mathbb{R}$, é um exemplo de curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com $k_\alpha(s) = \frac{1}{a}$ e $\tau_\alpha(s) = 0, \forall s \in \mathbb{R}$.

Com efeito, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\alpha'(s) = (-\operatorname{sen}(\frac{s}{a}), \cos(\frac{s}{a}), 0)$; $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$; $\alpha''(s) = -\frac{1}{a}(\cos(\frac{s}{a}), \operatorname{sen}(\frac{s}{a}), 0)$; $k(s)\|\alpha''(s)\| \equiv \frac{1}{a}$; $\tau(s) \equiv 0$, pois α é plana.

Figura 3 – Curva $\alpha(s) = (a \cos(\frac{s}{a}), a \operatorname{sen}(\frac{s}{a}), 0)$ com $a = 1,5$



Fonte: De autoria própria

Exemplo 4.4 (A. Bhattacharyya (2020)). Dadas as funções

$$k = \frac{\sqrt{2}a}{(2a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{s}, \quad \tau = \frac{b}{(2a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{s}$$

existe uma única curva α , cuja a equação é dada por

$$\alpha = (ae^u \cos(u), ae^u \operatorname{sen}(u), be^u),$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos as definições e teoremas de conceitos fundamentais para a compreensão das ideias posteriormente mostradas. Então, expusemos os conteúdos, definições e teoremas de geometria diferencial que foram utilizados na demonstração do teorema principal deste trabalho. E então o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço foi fundamentado e demonstrado.

Primeiro, expusemos conceitos elementares de Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial, Espaços Métricos e outras áreas da matemática. Além disso, estabelecemos as notações que foram utilizadas no decorrer do trabalho a fim de fazer com que este trabalho fosse o autossuficiente, ou seja, que não necessitasse de mais fontes para a compreensão dos principais tópicos apresentados.

Após isso, evidenciamos os conceitos, definições e teoremas sobre Curvas em \mathbb{R}^3 , explorando Curvas Parametrizadas, Curvas Regulares e Comprimento de Arco e a Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco. Auxiliando-se de exemplos, imagens e resolução de exercícios para fixação das ideias propostas.

Daí, trouxemos a prova do Teorema da Existência e Unicidade de Picard junto com os conceitos necessários para sua compreensão, como o Problema de Cauchy, pois o Teorema de Picard foi imprescindível para a elucidação do teorema principal deste trabalho.

Por fim, introduzimos o conceito de movimento rígido e mostramos que a curvatura, a torção e o comprimento de arco de uma curva parametrizada não mudam sob um movimento rígido, aplicando todos os conceitos previamente evidenciados neste trabalho. Para finalmente provarmos o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço.

Com isso, este trabalho ainda registra que há maneiras diferentes da apresentada aqui de se demonstrar o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas no espaço, utilizando outros conceitos não apontados aqui. Além de que diversas outras aplicações do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas podem ser trazidas.

REFERÊNCIAS

- ALINE MAURICIO BARBOSA. **Videoaula 4, Parte III: Teorema Fundamental das Curvas**. YouTube, 02 de abril de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vS9kN07ERR4>. Acesso em: 20 de maio de 2023.
- DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia. **Notas de Geometria Diferencial I**. <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-diferencial-i/>. UFF, 2017.
- DO CARMO, Manfredo P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised & Updated Second Edition**. 1 ed. Prentice Hall, 2016.
- E-CONTENT-SCIENCE. **M-12. Geometry of space curve: fundamental theorem for space curve**. YouTube, 15 de outubro de 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=DYcnMCCFNww>. Acesso em: 20 de maio de 2023.
- LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- LIMA, Elon Lages. **Análise Real - Volume 2**. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.
- Poliedros: Conheça essas Figuras Geométricas**. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/poliedros--conheca-essas-figuras-geometricas.htm>. Acesso em: 02 de abril de 2023.