UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JULIANA HENRIQUE DO NASCIMENTO

COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA NOS TRIÂNGULOS: TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

CAMPINA GRANDE
2023

JULIANA HENRIQUE DO NASCIMENTO

COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA NOS TRIÂNGULOS: TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2023

N244c Nascimento, Juliana Henrique do.

Colinearidade e concorrência nos triângulos [manuscrito] : Teoremas de Menelaus e Ceva / Juliana Henrique do Nascimento. - 2023.

52 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Colinearidade de triângulos. 2. Concorrência de triângulos. 3. Educação matemática. 4. Geometria. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/790

JULIANA HENRIQUE DO NASCIMENTO

COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA NOS TRIÂNGULOS: TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 13 / 09 / 2023 .

BANCA EXAMINADORA

Luciana R Freitos

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Joselma Soares dos Santos

Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

À Deus, por toda força, coragem e superação que depositou em mim, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por sua infinita bondade e seu amor, que me fez superar tantos receios, medos, inseguranças e me deu a graça de chegar até aqui. Sem Ele, com certeza, não estaria alcançando essa vitória.

Ao meu pai, José Marcos Nascimento (*in memoriam*), que esteve comigo sempre, me dando muita força e me incentivando. Há um ano ele está ausente fisicamente, mas presente em meu coração e me lembrando sempre de permanecer firme e não desistir.

À minha mãe, Jucimara Henrique do Nascimento, que é meu alicerce e me apoia quando preciso. Com seu jeito meigo, ela sempre foi meu maior exemplo, ainda mais por ser docente, então agradeço a ela por seu apoio constante.

Aos meus familiares, meu namorado e meus amigos, que me dão muita força e estão sempre torcendo por mim. Meu sentimento de gratidão por ter vocês em minha vida.

Agradeço imensamente a minha professora e orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas, por toda paciência e apoio durante a orientação da escrita deste trabalho. Sou grata por ter aceitado me orientar e por ter permanecido comigo até o final.

Aos meus professores, que serviram de inspiração nesse tempo de curso e contribuíram efetivamente na minha caminhada ao longo da licenciatura.

Aos amigos que fiz durante a graduação, especialmente Alexandra Silva, pelos momentos de amizade e parceria.

“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.”

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre os teoremas de Menelaus e Ceva, que abordam as relações de colinearidade e concorrência nos triângulos, destacando sua importância na área da Geometria. No decorrer do trabalho buscamos apresentar os conceitos, resultados e demonstrações de maneira simples, tendo como intuito uma fácil compreensão do leitor. Além da apresentação de todo o conteúdo, o trabalho também busca trazer uma visibilidade para o assunto, por se tratar de temas pouco ou nunca vistos no meio da educação básica, por não estar presente em livros utilizados nas escolas. Apresentamos também algumas aplicações dos referidos teoremas, para que o leitor entenda onde podemos utilizá-los, além de instigar o conhecimento pela área da Geometria.

Palavras-Chave: colinearidade de triângulos; concorrência de triângulos; educação matemática; geometria.

ABSTRACT

This paper presents a study of the theorems of Menelaus and Ceva, which deal with the relations of collinearity and concurrency in triangles, highlighting their importance in the field of geometry. Throughout the work we have tried to present the concepts, results and proofs in a simple the reader to understand them easily. In addition to presenting all the content, the work also seeks to bring visibility to the subject, as it is the subject, as it is rarely or never seen in the context of basic education, because it is not present in books used in schools. We also present some applications of these theorems, so that the reader understands where we can use them, as well as instigating knowledge in the area of Geometry.

Keywords: collinearity of triangles; competition of triangles; math education; geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Menelaus de Alexandria 13
Figura 2.2 - Giovanni Ceva 14
Figura 4.1 - Triângulo 18
Figura 4.2 - Altura 19
Figura 4.3 - Mediana 20
Figura 4.4 - Mediatriz 20
Figura 4.5 - Bissetriz 21
Figura 4.6 - Ceviana 21
Figura 4.7 - Ortocentro 22
Figura 4.8 - Baricentro 22
Figura 4.9 - Circuncentro 23
Figura 4.10 - Incentro 23
Figura 4.11 - Congruência de triângulos 24
Figura 4.12 - Congruência de triângulos (Caso LAL) 25
Figura 4.13 - Congruência de triângulos (Caso ALA) 25
Figura 4.14 - Congruência de triângulos (Caso LLL) 26
Figura 4.15 - Semelhança de triângulos 26
Figura 4.16 - Semelhança de triângulos (Caso AA) 27
Figura 4.17 - Semelhança de triângulos (Caso LAL) 28
Figura 4.18 - Semelhança de triângulos (Caso LLL) 28
Figura 4.19 - Teorema da Bissetriz Interna 29
Figura 4.20 - Teorema da Bissetriz Externa 30
Figura 5.1 - Triângulo com reta transversal 31
Figura 5.2 - Triângulo com reta transversal e semirreta r........ 32
Figura 5.3 - Triângulo com cevianas 1 33
Figura 5.4 - Triângulo ABM 34
Figura 5.5 - Triângulo AMC 34
Figura 5.6 - Triângulo com cevianas 2 35
Figura 5.7 - Triângulo com duas cevianas 1 36
Figura 5.8 - Triângulo com duas cevianas 2 36

Figura 5.9 - Segmento 37
Figura 6.1 - Aplicação 1 39
Figura 6.2 - Aplicação 2 41
Figura 6.3 - Aplicação 3 42
Figura 6.4 - Aplicação 4 44
Figura 6.5 - Aplicação 5 46
Figura 6.6 - Aplicação 6.1 47
Figura 6.7 - Aplicação 6.2 48
Figura 6.8 - Aplicação 6.3 48
Figura 6.9 - Aplicação 6.4 49

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO** ……………………………………………………………..	11
2	**BREVE HISTÓRICO** ……………………………………………..…………..	13
2.1	**Menelaus**………………………………………………………………….	13
2.1	**Ceva**…………………………………………………………………….	14
3	**ENSINO DE GEOMETRIA** …………………………………………………..	16
4	**CONTEÚDO PRELIMINAR** ……………………………….…………..	18
4.1	**Triângulos** ……………………………………………………………….	18
4.2	**Pontos notáveis de um triângulo** ………………………………………	19
4.3	**Congruência de triângulos** ……………………………………………..	24
4.4	**Semelhança de triângulos** ………………………………………………	26
4.5	**Teoremas das Bissetrizes** ……………………………………………….	29
5	**TEOREMAS DE COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA** …..………..	31
5.1	**Teorema de Menelaus** ……………………………………………………	31
5.2	**Teorema de Ceva** ………………………………………………………..	33
6	**APLICAÇÕES** ………………………………………………………………	39
7	**CONSIDERAÇÕES FINAIS** ……………………………………………….	50
	REFERÊNCIAS ………………………………………………………….	51

1 INTRODUÇÃO

A Matemática envolve várias áreas de estudo e uma dessas áreas é a Geometria. Nela estudamos as formas, tamanhos, figuras e suas propriedades relativas ao plano e ao espaço. Pensando nisso e no quanto seu estudo é de fundamental importância para a Matemática, resolvemos direcionar este trabalho para essa área, a Geometria.

Vários são os teoremas que encontramos na Geometria, alguns até muito conhecidos, como o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales. Partindo disso, também podemos encontrar teoremas pouco conhecidos presentes na Geometria, que é o caso dos que iremos abordar neste trabalho.

O presente trabalho tem como tema os teoremas de Menelaus e Ceva, utilizados para comprovação de casos de colinearidade e concorrência nos triângulos. De abordagem importante, os teoremas facilitam resoluções de problemas envolvendo colinearidade de pontos e concorrência de segmentos associados aos triângulos.

O tema abordado surgiu com o interesse de um aprofundamento nos teoremas, e também para apresentação de algumas de suas aplicações. Por não ser abordado em sala de aula pela ausência em alguns livros didáticos do ensino básico, os teoremas acabam sendo pouco utilizados, sendo esse também um dos interesses para a escolha do tema, buscando resgatar resultados tão importantes.

Vemos que a Geometria é bem abrangente, mas muitas vezes temas como esse são escassos. Dessa forma, o trabalho traz um pouco da história de Menelaus e Ceva, uma abordagem sobre o ensino da Geometria nas escolas, demonstração dos teoremas e algumas aplicações, para assim conhecermos mais sobre essa área da geometria, nos aprofundando no tema.

O objetivo geral desse trabalho é apresentar os teoremas de Menelaus e Ceva e suas respectivas demonstrações, facilitando o conhecimento do tema proposto, e conhecer algumas de suas aplicações, exemplificando o uso de ambos os teoremas.

No que se refere aos objetivos específicos, buscamos realizar uma pesquisa bibliográfica a fim de fazer um estudo aprofundado do tema; apresentar um breve histórico sobre os matemáticos que desenvolveram os teoremas; abordar o ensino da Geometria em sala de aula; ressaltar a utilização dos teoremas e conhecer suas aplicações.

Além do primeiro capítulo que é esta introdução, o trabalho contém mais quatro capítulos, organizados da seguinte forma: no segundo capítulo, iniciamos abordando a parte histórica, apresentando um pouco das vidas e principais contribuições de Menelaus e Ceva. O terceiro capítulo é dedicado ao ensino da Geometria em sala de aula, citando alguns documentos importantes utilizados no ensino de modo geral, que são referências para professores, bem como a utilização de recursos tecnológicos como auxílio didático. No quarto capítulo, é apresentando um conteúdo preliminar aos teoremas, que são alguns conceitos e resultados básicos da Geometria plana, que irão auxiliar e ajudar no entendimento das demonstrações dos teoremas. No quinto capítulo são enunciados os teoremas de Menelaus e Ceva e apresentadas suas demonstrações. O sexto e último capítulo é dedicado a algumas aplicações com a utilização dos teoremas, vindo para exemplificar um pouco o tema e apresentar onde podemos aplicá-lo. E, por fim, abordamos as considerações finais e as referências utilizadas no nosso estudo.

2 BREVE HISTÓRICO

Neste capítulo, falamos sobre a história de Menelaus e Ceva e alguns fatos sobre os teoremas que os mesmos desenvolveram.

2.1 Menelaus

Menelaus nasceu em Alexandria, no Egito, por volta de 70 d.C. Viveu em Alexandria durante sua juventude, onde depois mudou-se para a Roma. Menelaus foi um astrônomo e matemático grego.

Figura 2.1 – Menelaus de Alexandria

Fonte: Wikipédia, 2023. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Menelaus > Acesso em: 11 jul. 2023.

Em registros, há observações astronômicas feitas por Menelaus, em Roma. Existem alguns livros de sua autoria, como "*O Livro das Proposições Esféricas*", "*Sobre o conhecimento dos pesos e a distribuição de diferentes corpos*", três livros sobre "*Elementos da Geometria*" e "*O livro sobre o triângulo*".

Em suas contribuições, Menelaus foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos. Seu trabalho marcou um ponto de virada na trigonometria esférica, onde foi aplicado na astronomia. No seu tratato *Sphaerica*, o livro II aborda sobre a astronomia, enquanto os livros I e III são onde encontramos a primeira definição de triângulos esféricos.

Menelaus é o responsável por criar o teorema que leva seu nome, Teorema de Menelaus, presente no livro II de seu tratado. O Teorema diz, em sua forma básica, que “toda reta que corta as três retas suporte dos lados de um triângulo determina seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade comum, é igual ao produto dos outros três” (MACEDO, 2014, p. 27).

O teorema de Menelaus foi esquecido por séculos, sendo redescoberto por Giovanni Ceva, em 1678.

2.2 Ceva

Giovanni Ceva (1647 – 1734) foi um matemático italiano, nascido em Milão. Teve destaque após redescobrir o Teorema de Menelaus, dando uma definição mais ampla.

Figura 2.2 – Giovanni Ceva

Fonte: ZTF News, 2023. Disponível em: < https://ztfnews.wordpress.com/2014/06/15/giovanni-ceva-especialista-en-geometria-del-triangulo/>. Acesso em: 11 jul. 2023.

Seu trabalho está presente principalmente na Geometria e suas aplicações. Em 1678 publicou seu livro *De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio*, onde contém o teorema que leva seu nome, Teorema de Ceva. Por seus estudos em relação ao Teorema de Menelaus, o Teorema de Ceva ou das cevianas, utiliza-se do mesmo para sua comprovação.

O teorema diz o seguinte:

> Três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto se, e somente se, determinam nos lados do triângulo seis segmentos tais que o produto das medidas de três desses segmentos, não tendo uma extremidade comum, é igual ao produto das medidas dos outros três segmentos (MACEDO, 2014, p. 30).

Giovanni Ceva, com sua contribuição no Teorema de Ceva, ajuda-nos a resolver problemas que envolvem relações de concorrência de segmentos associados aos triângulos. Exercícios na área da Geometria que envolvam colinearidade e concorrência podem ser “simplificados” utilizando-se os teoremas de Menelaus e Ceva.

3 ENSINO DA GEOMETRIA

A Geometria é uma das áreas da matemática que faz parte do currículo escolar desde os anos iniciais. Conceitos básicos apresentando figuras e fazendo o aluno reconhecê-las são os primeiros passos de inserção do aluno no campo da Geometria.

Nessa etapa inicial o aluno necessita ter um contato com a Geometria de forma mais lúdica, para, aos poucos, associa-lá a matemática. No Ensino Fundamental as áreas da matemática, incluindo a Geometria, precisam garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações e associem essas representações a uma atividade matemática, fazendo induções e conjecturas (BNCC, 2018).

Dessa forma, o aluno vai compreendendo o que é a matemática, sendo capaz de relacioná-la a representações que a envolvem. Inicialmente pode parecer algo simples, mas para o aluno é uma nova descoberta, entendendo o funcionamento dos conceitos matemáticos e descobrindo como utilizá-los.

No que diz respeito a Geometria no Ensino Fundamental - Anos Finais, a BNCC (2018) destaca:

> O ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BNCC, 2018, p. 272).

É nessa etapa que os alunos serão apresentados aos conceitos geométricos de forma mais objetiva, onde futuramente esses conhecimentos serão aperfeiçoados no Ensino Médio. Com isso, é uma etapa que necessita desenvolver no aluno a capacidade de reconhecer conceitos e aplicá-los, para assim instigá-lo ao conhecimento.

Alguns desses assuntos que são abordados nos documentos da BNCC (2018) e nos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacional (2002) dizem respeito a congruência e semelhança de triângulos, e a proporcionalidade em relação a retas paralelas cortadas por transversais. São temas que utilizamos nos Teoremas de Ceva e Menelaus, em suas demonstrações e aplicações, nos mostrando que é um conhecimento que vai sendo construído desde o Ensino Fundamental.

Para abordagem de assuntos como esses e tantos outros que envolvem a Geometria, só o ensino tradicional não é suficiente. É necessário instigar o aluno ao conhecimento através de outros métodos de ensino, indo além do tradicional.

Uma forma que pode ser utilizada para ajudar os alunos a essa visão mais prática da Geometria e que também é um incentivo para seu aprendizado, é a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula como auxílio didático. É um meio que o aluno atualmente já está inserido e que voltado para o ensino da Geometria irá ser uma ótima ferramenta, pelas construções, dinamismo e interações que os recursos oferecem. A utilização de um software como recurso didático no ensino da Geometria constitui uma forma do professor e aluno obterem maior satisfação em relação a aprendizagem (FARIA; SOUZA; FERNANDES, 2015).

É essencial que o aluno possa ver na prática a construção de elementos geométricos com a utilização de recursos tecnológicos. Atualmente, se tem uma grande variedade de softwares que oferecem essas ferramentas para construções geométricas. Um exemplo é o GeoGebra, que é um aplicativo, onde é possível fazer construções utilizando a Geometria e a álgebra.

A utilização de ferramentas tecnológicas para o entendimento de assuntos como a semelhança e congruência de triângulos é de grande valia, deixando o aluno mais interessado. É importante que o professor tenha um objetivo claro na utilização desses recursos, para que o aproveitamento seja o mais satisfatório e o assunto proposto compreendido.

4 CONTEÚDO PRELIMINAR

Este capítulo irá abordar o conteúdo referente a teoria de triângulos necessário para compreensão do tema abordado. Os tópicos apresentados nesse capítulo podem ser encontrados nas referências: MUNIZ NETO (2012), BARBOSA (1995) e DOLCE E POMPEO (1993).

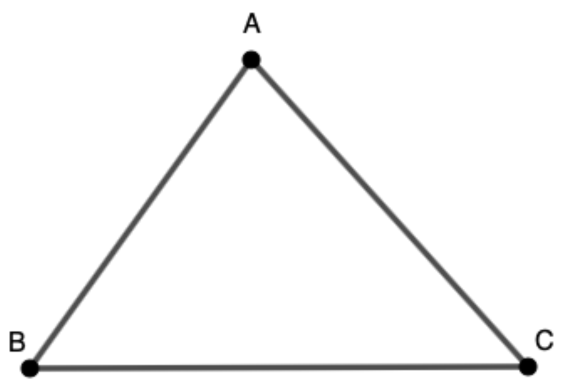
4.1 Triângulos

Nesta secão, vamos falar sobre os triângulos, apresentando sua definição e classificação.

Os triângulos são figuras planas formadas por segmentos que unem três pontos não colineares, mais precisamente, se A, B e C são pontos não colineares, o triângulo ABC é a figura formada pelos segmentos AB, BC e AC (Figura 4.1). Neste caso, dizemos que A, B e C são os vértices e AB, BC e AC são os lados do triângulo. Eles possuem três ângulos internos e três ângulos externos. Vejamos suas definições:

- **Ângulos internos:** são os ângulos formados por dois lados adjacentes;
- **Ângulos externos:** são ângulos formados por um lado e o prolongamento de seu lado adjacente.

Figura 4.1 - Triângulo



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Podemos classificar os triângulos considerando as medidas de seus lados. Vejamos quais tipos de triângulos temos:

- **Equilátero**: quando todos os lados têm a mesma medida;
- **Isósceles:** quando dois lados do triângulo têm a mesma medida;
- **Escaleno:** quando todos os lados têm medidas diferentes.

Também podemos classificar os triângulos de acordo com seus ângulos. Vejamos como:

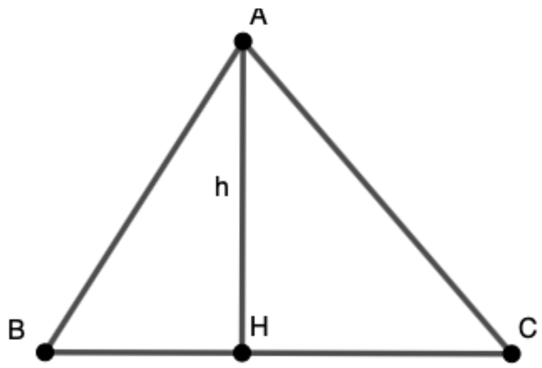
- **Acutângulo:** triângulo com todos os ângulos agudos, ou seja, com medidas menores que 90º;
- **Retângulo:** triângulo com um dos ângulos medindo 90º;
- **Obtusângulo:** triângulo com um dos ângulos obtusos, isto é, com medida maior que 90º.

4.2 Pontos notáveis de um triângulo

Nesta seção apresentamos alguns elementos do triângulo através de sua definição e representações.

a) **Altura**: uma altura de um triângulo é o segmento de reta que liga um dos vértices ao lado oposto, onde este segmento é perpendicular ao lado oposto. Na Figura 4.2 temos um exemplo, onde o segmento h é a altura em relação ao vértice A e o ponto H é o pé da altura do triângulo ABC.

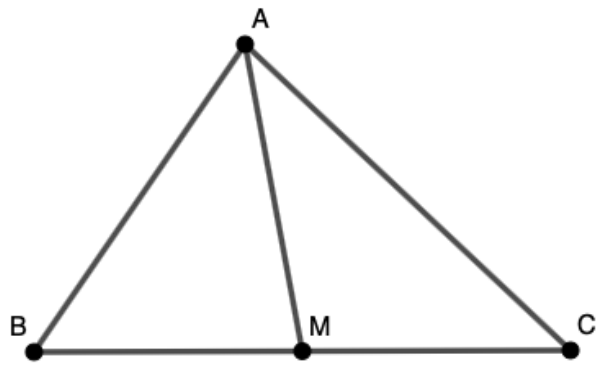
Figura 4.2 - Altura



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

b) **Mediana**: é um segmento de reta que liga um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.

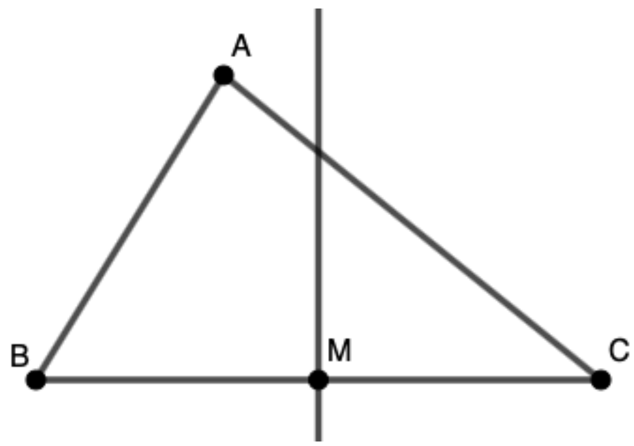
Figura 4.3 - Mediana



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

c) **Mediatriz:** é uma reta perpendicular a um lado que passa pelo ponto médio deste lado.

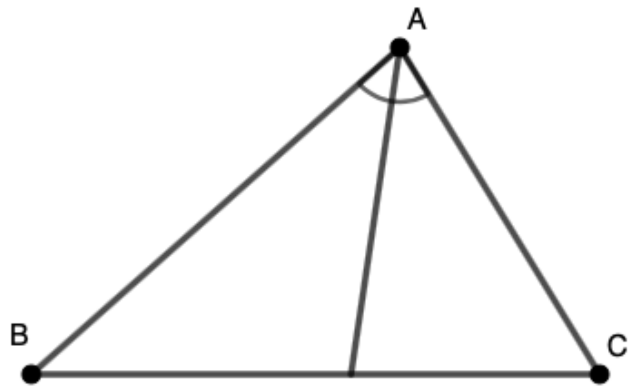
Figura 4.4 - Mediatriz



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

d) **Bissetriz:** é um segmento de reta que parte de um dos vértices do triângulo até seu lado oposto e divide o ângulo do vértice ao meio.

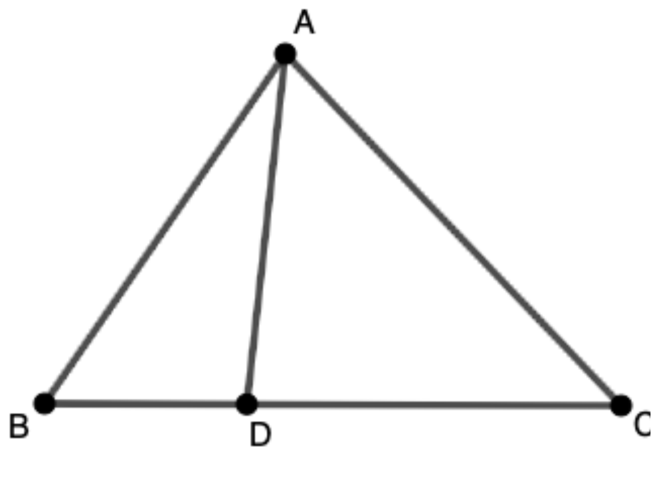
Figura 4.5 - Bissetriz



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

e) **Ceviana:** é qualquer segmento que liga um vértice ao um ponto qualquer do lado oposto.

Figura 4.6 - Ceviana

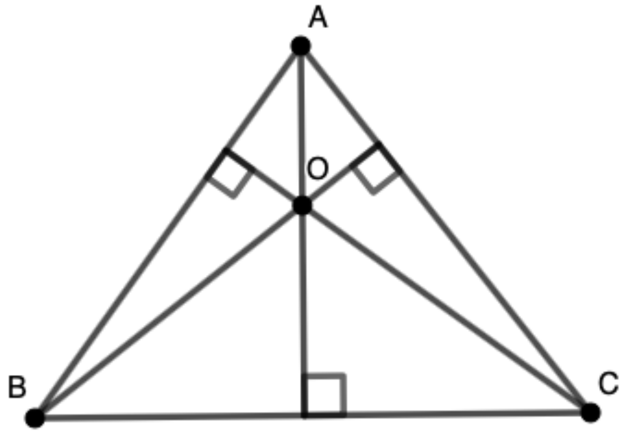


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Em decorrência desses elementos dos triângulos, temos alguns pontos notáveis para destacar. Vejamos quais são eles:

f) **Ortocentro:** é o ponto de encontro das três alturas de um triângulo. Na Figura 4.7 temos o ponto O como ortocentro do triângulo ABC.

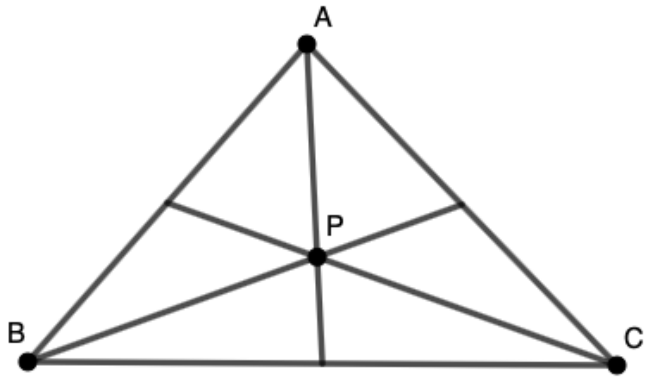
Figura 4.7 - Ortocentro



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

g) **Baricentro:** é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo. Na Figura 4.8 temos o ponto P como baricentro do triângulo ABC.

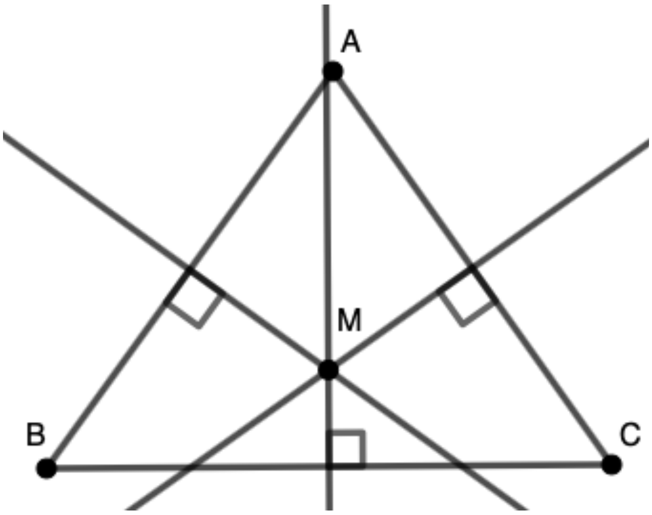
Figura 4.8 - Baricentro



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

h) **Circuncentro:** é o ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo. Na Figura 4.9 temos o ponto M como circuncentro do triângulo ABC.

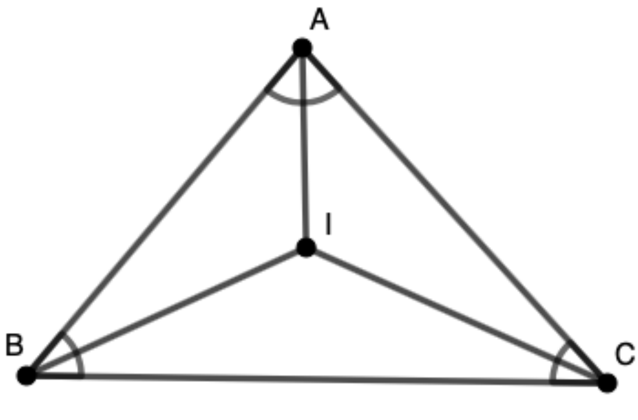
Figura 4.9 - Circuncentro



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

i) **Incentro:** é o ponto de encontro das três bissetrizes de um triângulo. Na Figura 4.10 temos o ponto I como incentro do triângulo ABC.

Figura 4.10 - Incentro



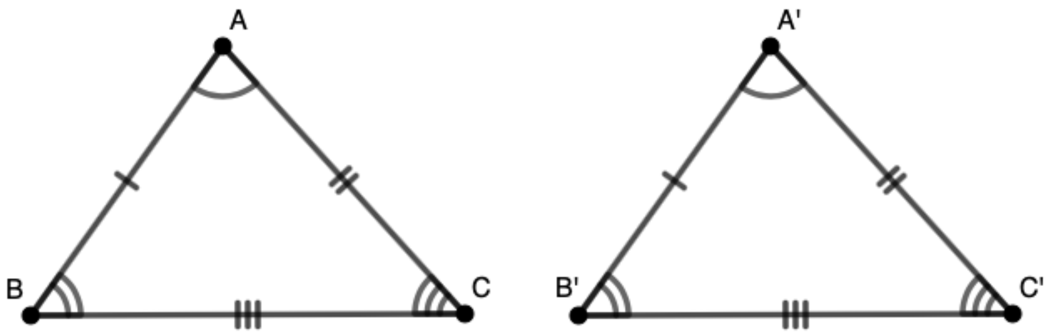
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Para que as definições acima referentes aos pontos notáveis façam sentido é fundamental que se possa provar que os três segmentos sejam, de fato, concorrentes em um ponto. No Capítulo 6 iremos verificar esse fato utilizando o Teorema de Ceva.

4.3 Congruência de triângulos

Um triângulo é congruente ao outro quando possuem os três lados e os três ângulos internos iguais. Neste caso, existe uma correspondência entre os vértices tais que, lados correspondentes possuem mesma medida e os ângulos internos dos vértices correspondentes são iguais. Veja a representação de congruência de triângulos na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Congruência de triângulos



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Neste caso, usamos a seguinte notação:

$$ABC \equiv A'B'C',$$

e tem-se

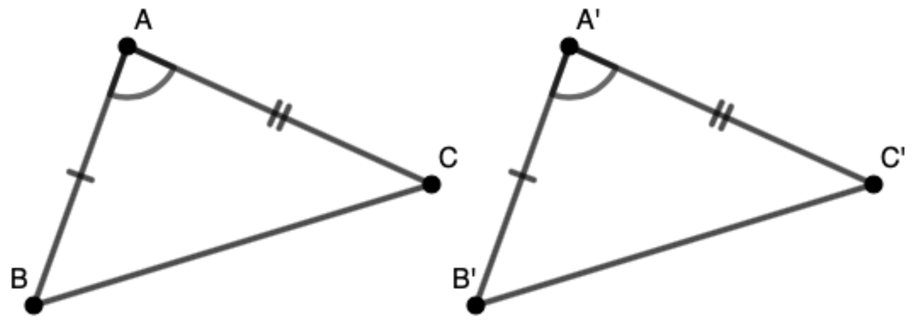
$$\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ BC \equiv B'C' \\ AC \equiv A'C' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}.$$

Para verificar se dois triângulos são congruentes, podemos utilizar alguns critérios que garante a congruência. Vejamos:

a) Caso LAL

Quando dois triângulos possuem dois lados correspondentes iguais e o ângulo formado por esses lados iguais, então eles são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Veja a representação na Figura 4.12:

Figura 4.12 - Congruência de triângulos (caso LAL)

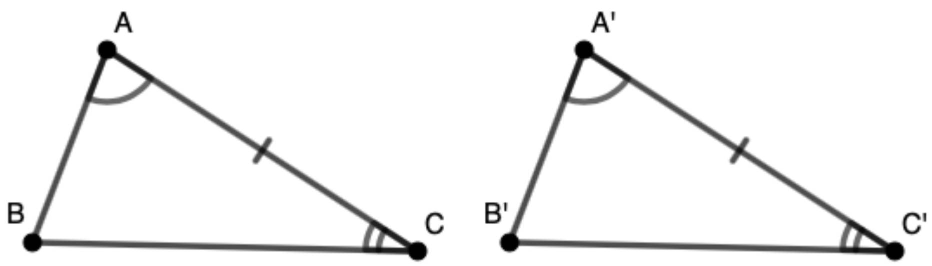


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

b) Caso ALA

Quando dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes iguais e o lado adjacente a esses ângulos iguais, então eles são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo). Veja a representação na Figura 4.13:

Figura 4.13 - Congruência de triângulos (Caso ALA)

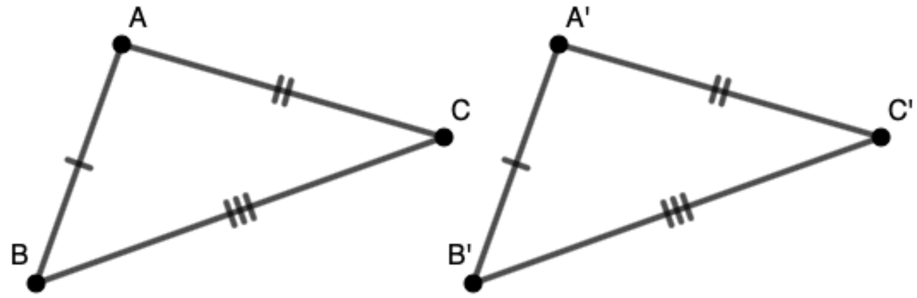


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

c) Caso LLL:

Quando dois triângulos possuem os três lados correspondes iguais, então eles são congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado). Veja a representação na Figura 4.14:

Figura 4.14 - Congruência de triângulos (caso LLL)

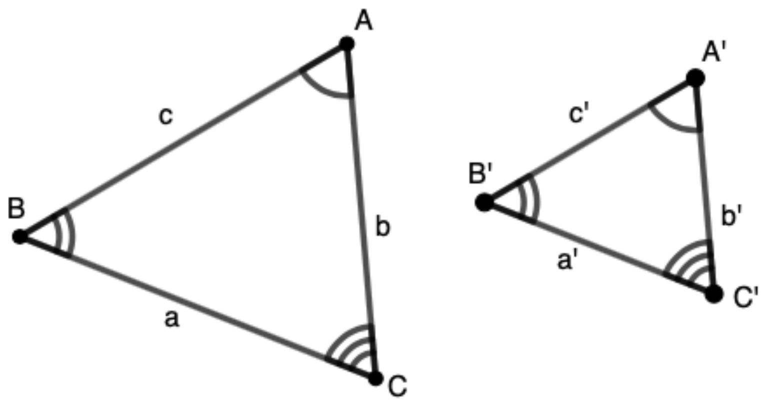


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

4.4 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência entre os vértices tais que os três ângulos internos correspondentes são iguais e os três lados correspondentes são proporcionais. Vejamos a representação na Figura 4.15:

Figura 4.15 - Semelhança de Triângulos



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Neste caso, usamos a seguinte notação:

$$ABC \sim A'B'C'.$$

Pois,

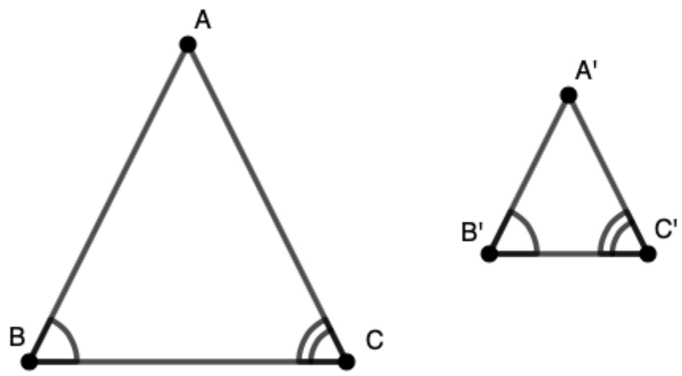
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \right.$$

Vamos agora ver os casos de semelhança de triângulos:

a) Caso AA:

Quando dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Vejamos a Figura 4.16:

Figura 4.16 - Semelhança de triângulos (Caso AA)



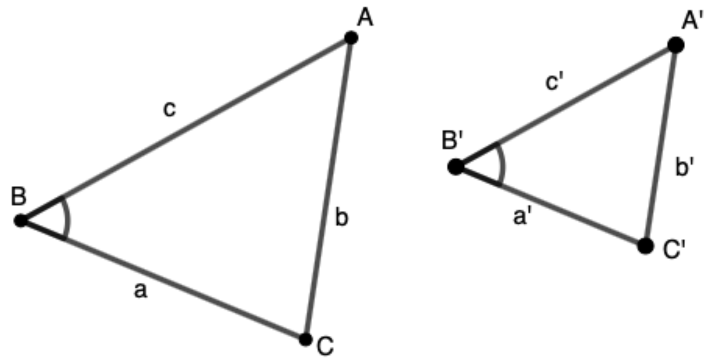
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Como $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, então $ABC \sim A'B'C'$.

b) Caso LAL:

Quando dois triângulos possuem dois lados correspondentes com medidas proporcionais e os ângulos entre eles tem a mesma medida, então esses triângulos são semelhantes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Veja na Figura 4.17:

Figura 4.17 - Semelhança de triângulos (Caso LAL)



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Como

$$\hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

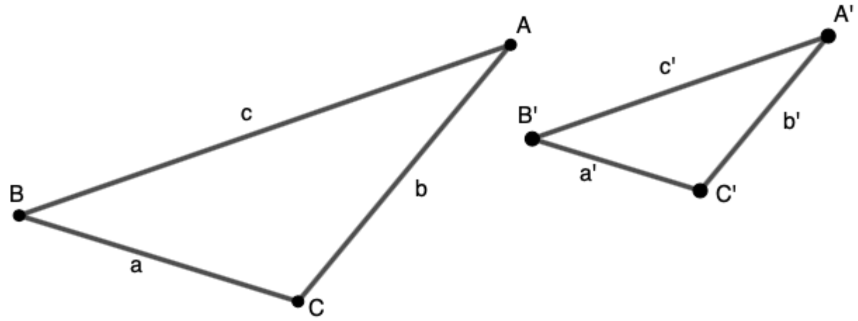
então

$$ABC \sim A'B'C'.$$

c) Caso LLL:

Quando dois triângulos possuem os três lados com medidas proporcionais, então eles são semelhantes pelo caso LLL (lado-lado-lado). Veja na Figura 4.18:

Figura 4.18 - Semelhança de triângulos (Caso LLL)



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Como

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

então

$$ABC \sim A'B'C'.$$

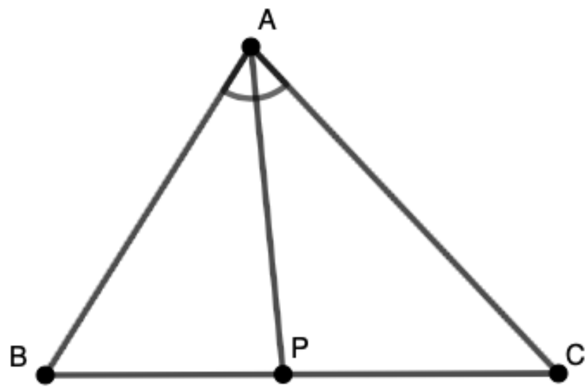
4.5 Teoremas das bissetrizes

Vamos enunciar os teoremas das bissetrizes internas e externas, que serão necessários no decorrer do trabalho. As demonstrações podem ser encontradas em DOLCE E POMPEO (1993).

Teorema da Bissetriz Interna: A bissetriz interna de um triângulo divide seu lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Observemos a Figura 4.19:

Figura 4.19 - Teorema da bissetriz interna



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

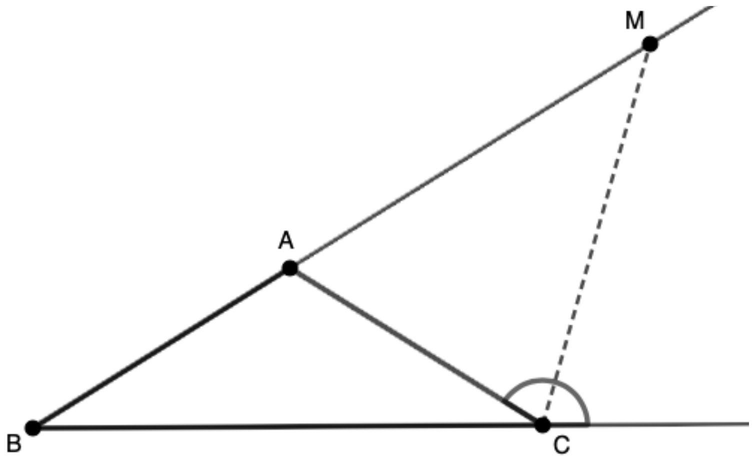
Na Figura, temos o triângulo ABC e a bissetriz interna AP do vértice A. Pelo Teorema da Bissetriz Interna, podemos afirmar que

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}.$$

Teorema da Bissetriz Externa: Se uma bissetriz externa de um triângulo intersecta a reta que contem o lado oposto, então ela divide o lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Observemos a Figura 4.20:

Figura 4.20 - Teorema da Bissetriz Externa



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Na Figura, temos o triângulo ABC e a bissetriz externa CM do vértice C. Pelo Teorema da Bissetriz Externa, podemos afirma que

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AM}.$$

5 TEOREMAS DE COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA

Neste capítulo, serão abordados os Teoremas de Menelaus e Ceva, com seus enunciados e demonstrações.

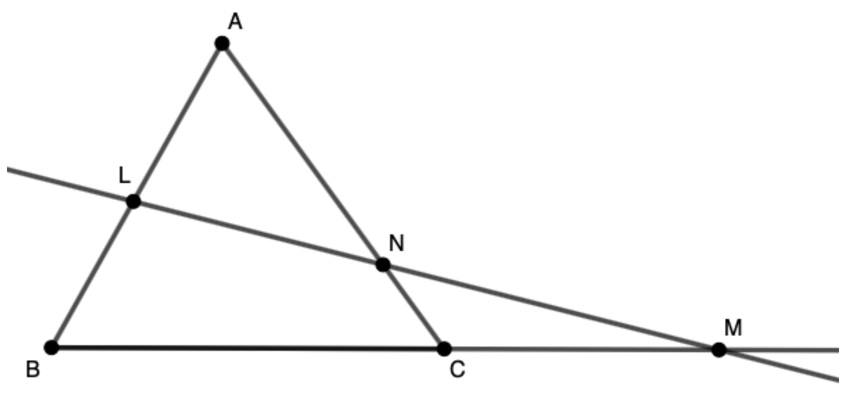
5.1 Teorema de Menelaus

Trataremos aqui sobre a demonstração do Teorema de Menelaus, que data de 100 d.C., onde o mesmo aborda a colinearidade de três pontos através da semelhança de triângulos.

Teorema 1. (Teorema de Menelaus) Seja ABC um triângulo e suponha que uma reta transversal corta as retas suportes dos lados AB, BC e CA nos pontos L, M e N, respectivamente. Então,

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

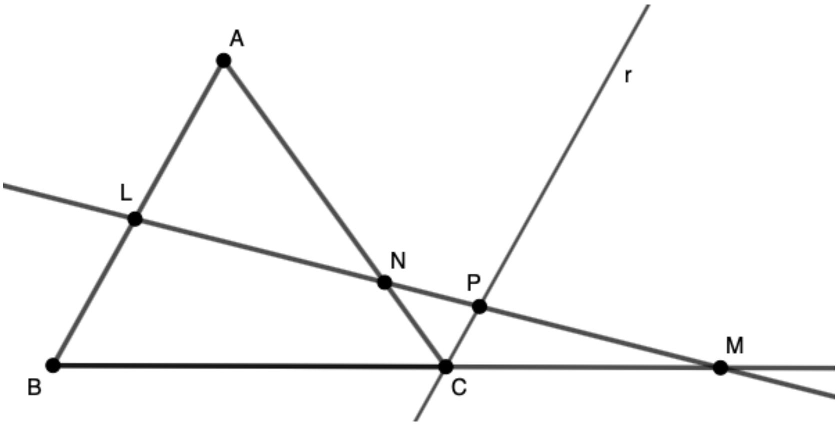
Figura 5.1 - Triângulo com reta transversal



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Demonstração: Para provarmos o teorema, vamos iniciar traçando uma semirreta r partindo do ponto C que intersecta o segmento NM no ponto P, onde o segmento CP é paralelo ao segmento BA (Figura 5.2).

Figura 5.2 - Triângulo com reta transversal e semirreta r



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Observemos que na Figura 5.2 ocorre a seguinte semelhança de triângulos: $NCP \sim NAL$, pelo fato dos seus ângulos serem alternos internos e, portanto, possuem medidas iguais. Então:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{PC}{LA}. \tag{5.1}$$

Também observamos que os triângulos BML e CMP são semelhantes, pois possuem um ângulo em comum e ângulos correspondentes. Daí,

$$\frac{MB}{MC} = \frac{LB}{PC}. \tag{5.2}$$

Multiplicando (5.1) e (5.2) membro a membro, teremos

$$\frac{NC}{NA} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{\cancel{PC}}{LA} \cdot \frac{LB}{\cancel{PC}} \Rightarrow \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{LA}{LB} = 1.$$

Como queríamos provar.

5.2 Teorema de Ceva

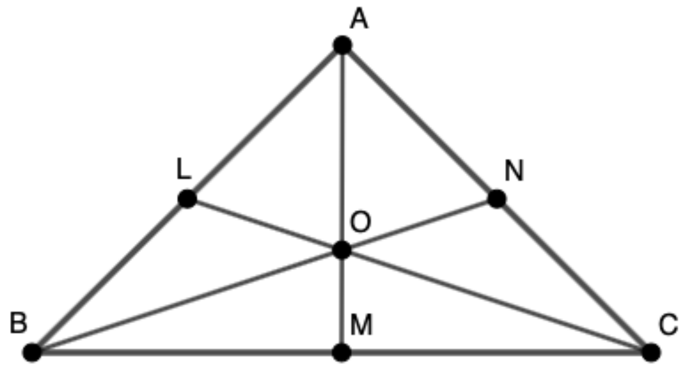
Veremos a demonstração do Teorema de Ceva, que refere-se a concorrência de cevianas que cortam-se em um único ponto.

Teorema 2. (Teorema de Ceva) Dado um triângulo ABC, os pontos L, M e N dos lados AB, BC e CA, respectivamente, são tais que as cevianas AM, BN e CL cortam-se em um único ponto, se, e somente se,

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1. \tag{5.3}$$

Demonstração: Utilizaremos o Teorema de Menelaus para a prova.
($\Rightarrow$) Vamos supor que as cevianas AM, BN e CL cortam-se em um único ponto, o ponto O (Figura 5.3).

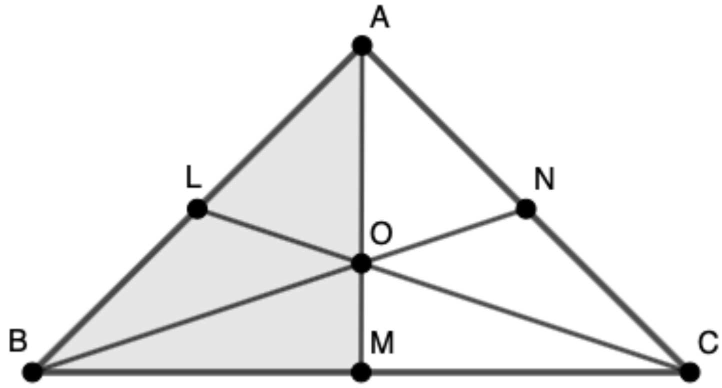
Figura 5.3 - Triângulo com cevianas 1



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Pelo Teorema de Menelaus, considerando o triângulo ABM e a reta transversal que corta as retas AB, BM e AM nos pontos L, C e O, respectivamente (Figura 5.4).

Figura 5.4 - Triângulo ABM



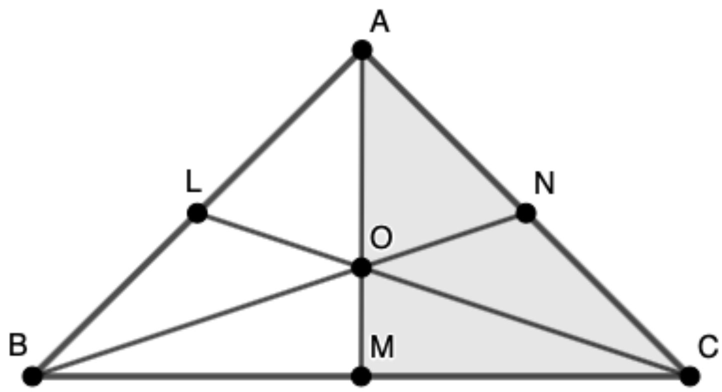
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Dessa forma, teremos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{BC}{MC} \cdot \frac{OM}{OA} = 1. \tag{5.4}$$

Agora, consideremos o triângulo AMC e a reta transversal que corta as retas AM, MC e CA, nos pontos O, B e N, respectivamente (Figura 5.5).

Figura 5.5 - Triângulo AMC



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Novamente, pelo Teorema de Menelaus, temos que

$$\frac{OA}{OM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1. \tag{5.5}$$

Multiplicando membro a membro (5.4) e (5.5), concluímos que

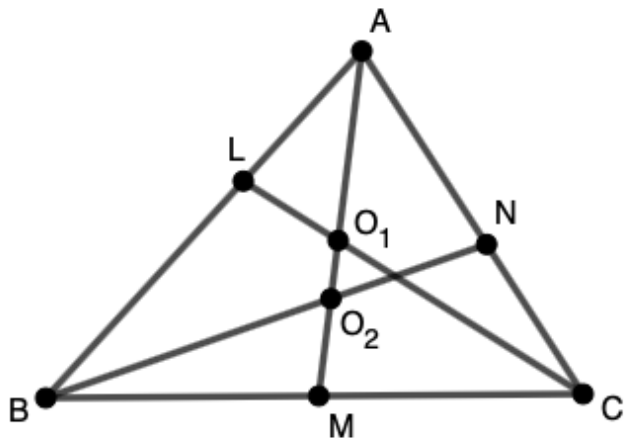
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{BC}{MC} \cdot \frac{OM}{OA} \cdot \frac{OA}{OM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{LA}{LB} \cdot \frac{\cancel{BC}}{MC} \cdot \frac{\cancel{OM}}{\cancel{OA}} \cdot \frac{\cancel{OA}}{\cancel{OM}} \cdot \frac{MB}{\cancel{BC}} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Como queríamos provar.

($\Leftarrow$) Para provarmos a recíproca vamos supor que (5.3) ocorre e que as cevianas não cortam-se em um único ponto (Figura 5.6).

Figura 5.6 - Triângulo com cevianas 2

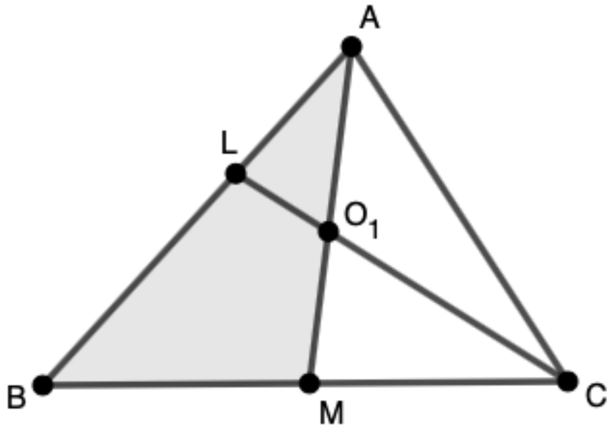


Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Partindo disso, vamos utilizar o Teorema de Menelaus novamente.

Consideremos o triângulo ABM e a reta transversal que corta as retas AB, BM e MA nos pontos L, C e O_1, respectivamente (Figura 5.7).

Figura 5.7 - Triângulo com duas cevianas 1



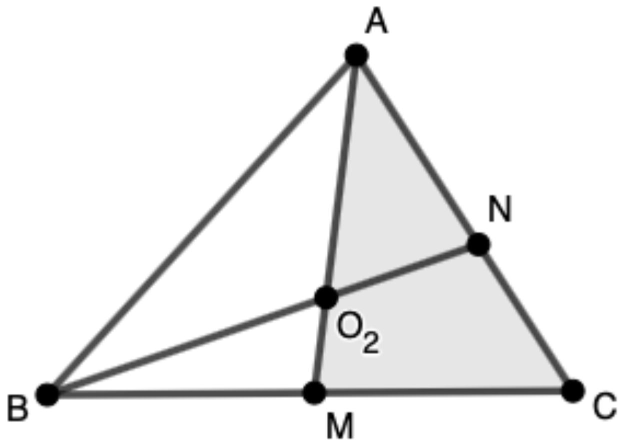
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Pelo Teorema de Menelaus, teremos:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{O_1M}{O_1A} = 1. \tag{5.6}$$

Agora, consideremos o triângulo AMC e a reta transversal que corta as retas AM, MC e CA nos pontos O_2, B e N, respectivamente (Figura 5.8).

Figura 5.8 - Triângulo com duas cevianas 2



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Novamente, pelo Teoremos de Menelaus, teremos:

$$\frac{O_2A}{O_2M} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1. \tag{5.7}$$

Partindo das duas últimas conclusões, quando multiplicamos membro a membro as equações (5.6) e (5.7) e usamos (5.3), vemos que

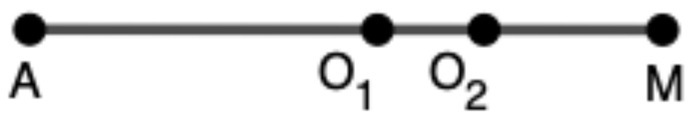
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{O_1M}{O_1A} \cdot \frac{O_2A}{O_2M} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{LA}{LB} \cdot \frac{\cancel{CB}}{CM} \cdot \frac{O_1M}{O_1A} \cdot \frac{O_2A}{O_2M} \cdot \frac{BM}{\cancel{BC}} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{LA}{LB} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{O_1M}{O_1A} \cdot \frac{O_2A}{O_2M} = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{LA}{LB} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{NC}{NA}}_{1} \cdot \frac{O_1M}{O_1A} \cdot \frac{O_2A}{O_2M} = 1 \Rightarrow \frac{O_1M}{O_1A} = \frac{O_2M}{O_2A}. \tag{5.8}$$

Com isto, concluímos que os pontos O_1 e O_2 dividem o segmento AM em uma mesma razão, o que é um absurdo. Vejamos:

Figura 5.9 - Segmento



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Na Figura 5.9 temos o segmento AM com os pontos O_1 e O_2, obtidos da Figura 5.6. Observe que $O_1M = O_1O_2 + O_2M$, $O_2A = O_1A + O_1O_2$ e $AM = AO_1 + O_1O_2 + O_2M$. Consequentemente, de (5.8), concluímos que:

$$\frac{O_1O_2 + O_2M}{O_1A} = \frac{O_2M}{O_1A + O_1O_2}.$$

Partindo disso, temos que:

$$O_1O_2 \,.\, AO_1 + O_1O_2 \,.\, O_1O_2 + O_2M \,.\, AO_1 + O_2M \,.\, O_1O_2 = O_2M \,.\, O_1A$$
$$\Rightarrow O_1O_2 \,.\, AO_1 + O_1O_2 \,.\, O_1O_2 + \cancel{O_2M \,.\, AO_1} + O_2M \,.\, O_1O_2 = \cancel{O_2M \,.\, O_1A}$$
$$\Rightarrow O_1O_2 \,.\, AO_1 + O_1O_2 \,.\, O_1O_2 + O_2M \,.\, O_1O_2 = 0$$
$$\Rightarrow O_1O_2 \,.\, \underbrace{(AO_1 + O_1O_2 + O_2M)}_{AM} = 0$$

$$\Rightarrow O_1O_2 \,.\, AM = 0.$$

Com isso, nos atentemos que $AM \neq 0$, pois se trata de uma medida de segmento, então:

$$O_1O_2 = 0.$$

Um segmento só tem medida zero quando se trata de um segmento degenerado, isto é, os extremos coincidem. Portanto:

$$O_1 = O_2.$$

Como queríamos provar.

6 APLICAÇÕES

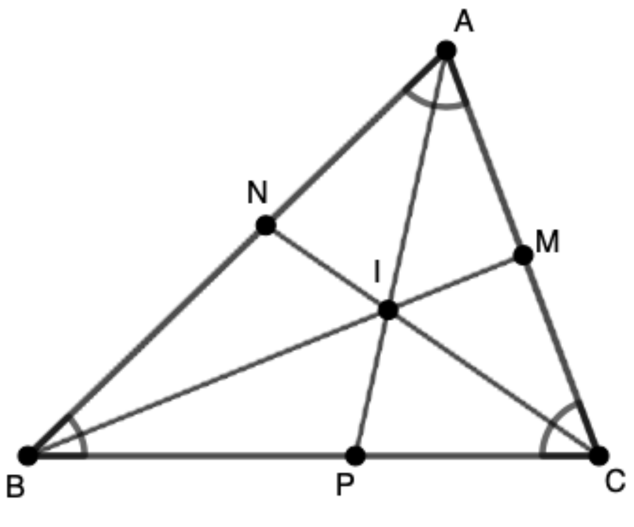
Neste capítulo, veremos algumas aplicações dos teoremas de Menelaus e Ceva, para aprofundarmos o conhecimento.

Aplicação 1: existência do incentro.

Prove que as bissetrizes de um triângulo qualquer são concorrentes em um único ponto.

Solução: Considere um triângulo ABC (Figura 6.1) e que os segmentos AP, BM e CN são as bissetrizes dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

Figura 6.1 - Aplicação 1



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Pelo Teorema de Ceva, para mostrar que os segmentos (cevianas) AP, BM e CN são concorrentes em um único ponto, devemos provar que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Temos, pelo Teorema das bissetrizes e considerando o segmento AP, que

$$\frac{AB}{PB}=\frac{AC}{PC}\Rightarrow AB\,.\,CP=AC\,.\,BP\Rightarrow\frac{PB}{CP}=\frac{AB}{AC}. \tag{6.1}$$

Pelo mesmo teorema e considerando o segmento BM, teremos

$$\frac{BA}{MA}=\frac{BC}{MC}\Rightarrow BA\,.\,MC=BC\,.\,MA\Rightarrow\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{BA}. \tag{6.2}$$

Agora considerando o segmento CN,

$$\frac{CA}{NA}=\frac{CB}{NB}\Rightarrow CA\,.\,NB=CB\,.\,NA\Rightarrow\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}. \tag{6.3}$$

Multiplicando as equações (6.1), (6.2) e (6.3) membro a membro, teremos que

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\cdot\frac{\cancel{BC}}{\cancel{BA}}\cdot\frac{\cancel{CA}}{\cancel{CB}}$$
$$\Rightarrow\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=1.$$

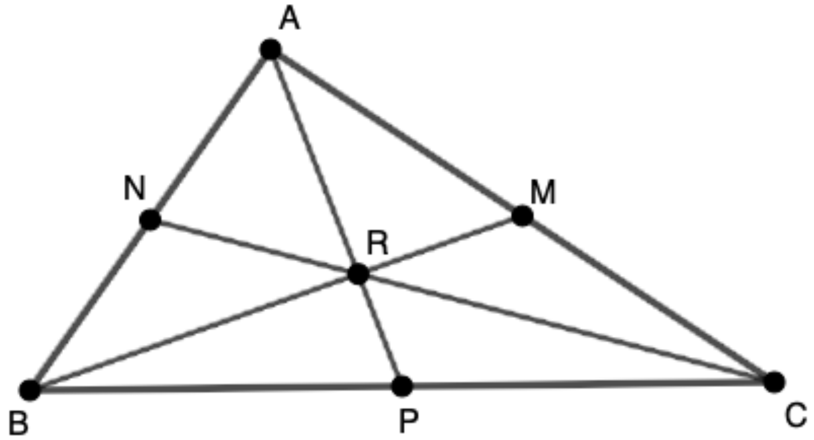
Como queríamos provar. Então, pelo Teorema de Ceva, as bissetrizes são concorrentes em um único ponto, ou seja, provamos a existência do incentro.

Aplicação 2: existência do baricentro.

Prove que as medianas de um triângulo qualquer concorrem em um único ponto.

Solução: Considere um triângulo ABC (Figura 6.2), onde os segmentos AP, BM e CN são as medianas.

Figura 6.2 - Aplicação 2



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Pela definição das medianas sabemos que ela liga um dos vértices ao ponto médio do lado oposto a este vértice. Então, partindo disso, concluímos que

$$NA = NB, MC = MA \text{ e } PB = PC.$$

Portanto,

$$\frac{NA}{NB} = 1, \frac{MC}{MA} = 1 \text{ e } \frac{PB}{PC} = 1.$$

Multiplicando as três equações membro a membro teremos a seguinte igualdade:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{PB}{PC} = 1.1.1 = 1.$$

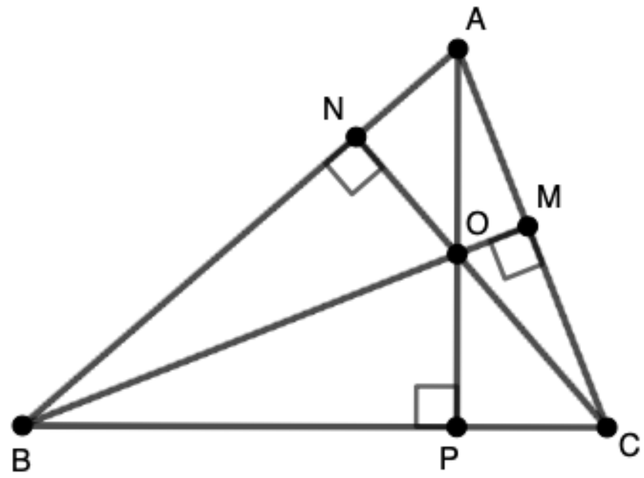
Portanto, provamos que pelo Teorema de Ceva as medianas são concorrentes em um único ponto, ou seja, provamos a existência do baricentro.

Aplicação 3: existência do ortocentro.

Prove que as alturas de um triângulo qualquer concorrem em um único ponto.

Solução: Vamos considerar um triângulo ABC (Figura 6.3), onde suas alturas são os segmentos AP, BM e CN. Os pontos N, P e M cortam os segmentos AB, BC e AC, respectivamente.

Figura 6.3 - Aplicação 3



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Agora vamos utilizar a definição de cosseno do ângulo de um triângulo. Observemos os triângulos ANC, AMB, CMB, CPA, CNB e APB. Dessa forma, podemos escrever que

$$cos(N\hat{A}C) = \frac{NA}{AC} \Rightarrow NA = AC \,.\, cos(N\hat{A}C) = AC \,.\, cos(B\hat{A}C).$$

$$cos(M\hat{A}B) = \frac{MA}{AB} \Rightarrow MA = AB \,.\, cos(M\hat{A}B) = AB \,.\, cos(C\hat{A}B).$$

$$cos(M\hat{C}B) = \frac{MC}{BC} \Rightarrow MC = BC \,.\, cos(M\hat{C}B) = BC \,.\, cos(A\hat{C}B).$$

$$cos(P\hat{C}A) = \frac{PC}{AC} \Rightarrow PC = AC \,.\, cos(P\hat{C}A) = AC \,.\, cos(B\hat{C}A).$$

$$cos(C\hat{B}N) = \frac{NB}{BC} \Rightarrow NB = BC\,.\,cos(C\hat{B}N) = BC\,.\,cos(C\hat{B}A).$$

$$cos(A\hat{B}P) = \frac{PB}{AB} \Rightarrow PB = AB\,.\,cos(A\hat{B}P) = AB\,.\,cos(A\hat{B}C).$$

Partindo disso e utilizando o Teorema de Ceva, temos que

$$\frac{NA}{NB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA} = \frac{AC\,.\,cos(B\hat{A}C)}{BC\,.\,cos(C\hat{B}A)}\cdot\frac{AB\,.\,cos(A\hat{B}C)}{AC\,.\,cos(B\hat{C}A)}\cdot\frac{BC\,.\,cos(A\hat{C}B)}{AB\,.\,cos(C\hat{A}B)}$$

$$\Rightarrow \frac{NA}{NB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA} = \frac{\cancel{AC}\,.\,\cancel{cos(B\hat{A}C)}}{\cancel{BC}\,.\,\cancel{cos(C\hat{B}A)}}\cdot\frac{\cancel{AB}\,.\,\cancel{cos(A\hat{B}C)}}{\cancel{AC}\,.\,\cancel{cos(B\hat{C}A)}}\cdot\frac{\cancel{BC}\,.\,\cancel{cos(A\hat{C}B)}}{\cancel{AB}\,.\,\cancel{cos(C\hat{A}B)}}$$

$$\Rightarrow \frac{NA}{NB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{MC}{MA} = 1.$$

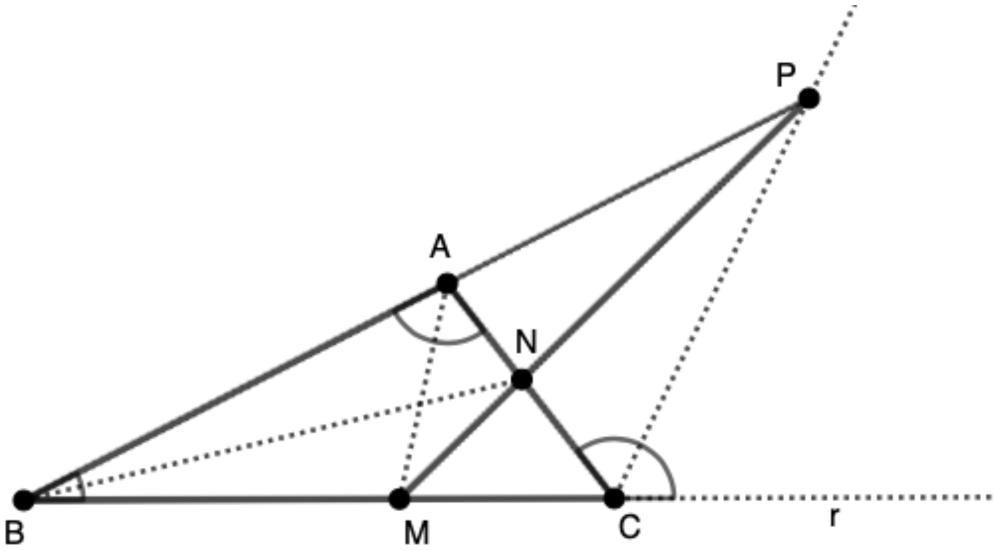
Portanto, pelo Teorema de Ceva, as alturas de um triângulo concorrem em um único ponto, ou seja, provamos a existência do ortocentro.

Aplicação 4:

Dado um triângulo não isósceles, mostre que as bissetrizes internas de dois ângulos quaisquer e a bissetriz externa do terceiro ângulo intersectam o lado oposto em três pontos colineares.

Solução: Vamos considerar o triângulo ABC não isósceles (Figura 6.4), que tem como bissetrizes:

Figura 6.4 - Aplicação 4



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

- AM é bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$, que intersecta o segmento BC no ponto M;
- BN é bissetriz interna do ângulo $A\hat{B}C$, que intersecta o segmento AC no ponto N;
- CP é bissetriz externa do ângulo $R\hat{C}A$ e intersecta a reta suporte do segmento AB no ponto P.

Queremos mostrar que os pontos M, N e P são colineares. Para isso, basta mostrarmos que o Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo ABC e a reta transversal MP é válido, ou seja,

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1.$$

Observemos o seguinte:

Aplicando o Teorema da bissetriz interna em AM, teremos que

$$\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CM}\Rightarrow AB\,.\,CM=AC\,.\,BM\Rightarrow\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}. \qquad (6.4)$$

Aplicando novamente o Teorema da bissetriz interna, agora em relação a BN, teremos que

$$\frac{BC}{CN}=\frac{BA}{AN}\Rightarrow BC\,.\,AN=BA\,.\,CN\Rightarrow\frac{CN}{AN}=\frac{BC}{BA}. \qquad (6.5)$$

Por último, vamos aplicar o teorema da bissetriz externa a bissetriz CP. Dessa forma, teremos que

$$\frac{BC}{BP}=\frac{AC}{AP}\Rightarrow BC\,.\,AP=AC\,.\,BP\Rightarrow\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BC}. \qquad (6.6)$$

Agora, multiplicando as equações (6.4), (6.5) e (6.6) membro a membro, concluímos que

$$\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{BP}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{BP}=\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\cdot\frac{\cancel{BC}}{\cancel{BA}}\cdot\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}}$$
$$\Rightarrow\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{BP}=1.$$

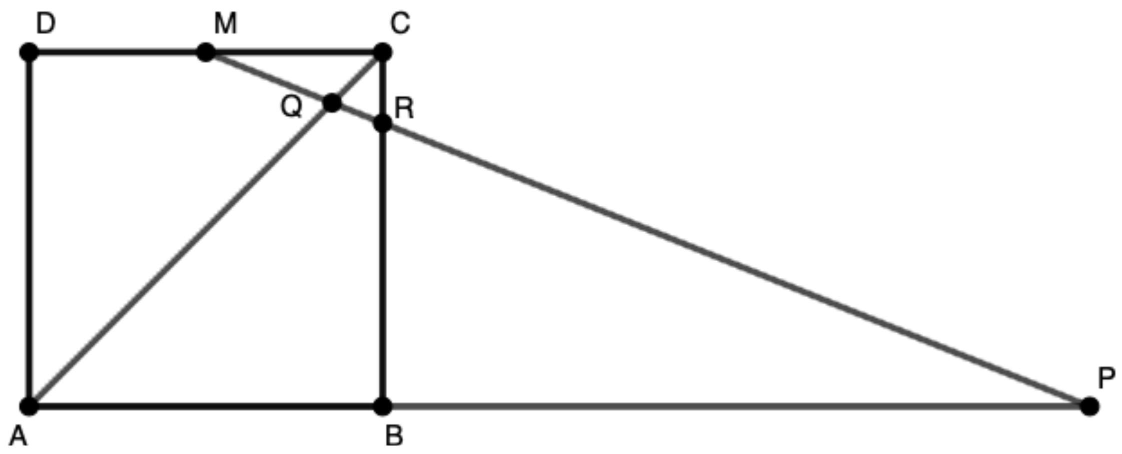
Portanto, pelo Teorema de Menelaus, os pontos M, N e P são colineares.

Aplicação 5:

(POTI - GEOMETRIA - NÍVEL 2) O lado AB de um quadrado é prolongado no sentido de A para B até o ponto P tal que $BP = 2AB$. Sendo M o ponto médio de CD, desenhe PM intersectando AC em um ponto Q. Sabendo que PQ corta BC em um ponto R, calcule CR/RB.

Solução: Observemos a representação (Figura 6.5):

Figura 6.5 - Aplicação 5



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Vamos denominar a medida do lado do quadrado por x.

Note que pelo caso AA (ângulo-ângulo), os triângulos APQ e CMQ são semelhantes. Então, podemos dizer que

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{CM}{AP} \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{\frac{x}{2}}{3x} \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{x}{2} . \frac{1}{3x} \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{1}{6}. \quad (6.7)$$

Agora, como os pontos P, Q e R são colineares, podemos aplicar o Teorema de Menelaus ao triângulo ABC em relação ao segmento PQ. Com isso, temos que

$$\frac{CQ}{AQ} . \frac{BR}{CR} . \frac{PA}{PB} = 1. \quad (6.8)$$

Sabemos que $BP = 2AB$, então

$$\frac{AP}{BP} = \frac{3x}{2x} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{3}{2}. \quad (6.9)$$

Substituindo as equações (6.7) e (6.9) em (6.8), concluímos que

$$\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{BR}{CR}\cdot\frac{PA}{PB}=1 \ \Rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{BR}{CR}\cdot\frac{3}{2}=1\Rightarrow \frac{CR}{BR}=\frac{1}{4}.$$

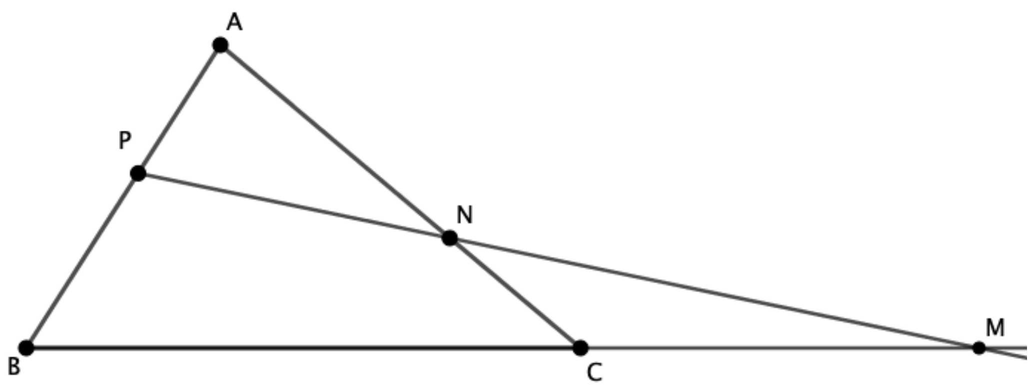
Aplicação 6:

Para esta aplicação é necessário que se tenha um conhecimento prévio do GeoGebra e suas ferramentas.

Vamos utilizá-lo para a construção de um triângulo ABC, onde os pontos P, M e N pertencem as retas AB, BC e CA, respectivamente, e são pontos colineares. Vamos usar a Geometria dinâmica do GeoGebra para mostrar que o Teorema de Menelaus é válido, ou seja,

$$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=1. \tag{6.10}$$

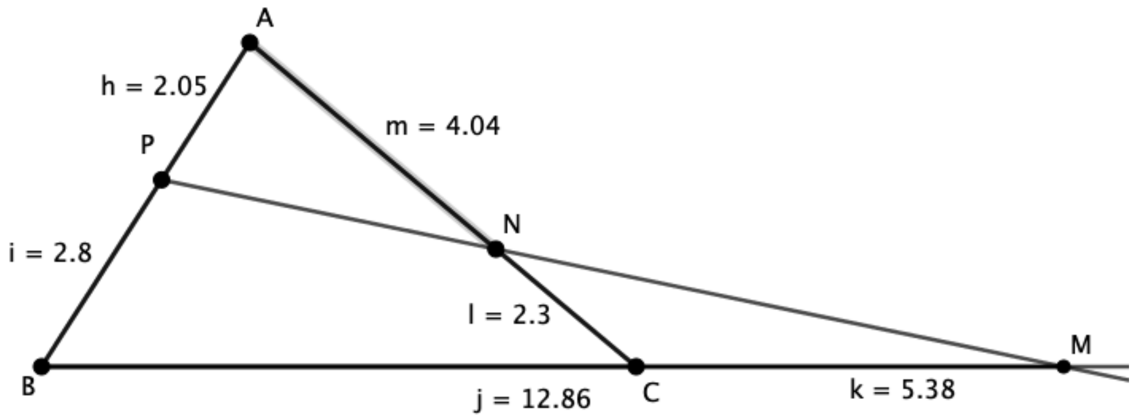
Figura 6.6 - Aplicação 6.1



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Solução: Para verificarmos, através do GeoGebra, se o Teorema de Menelaus é válido no triângulo da Figura 6.6 vamos utilizar os recursos do próprio aplicativo para obtermos os valores dos segmentos PA, PB, MB, MC, NC e NA. Dessa forma, observemos a Figura 6.7:

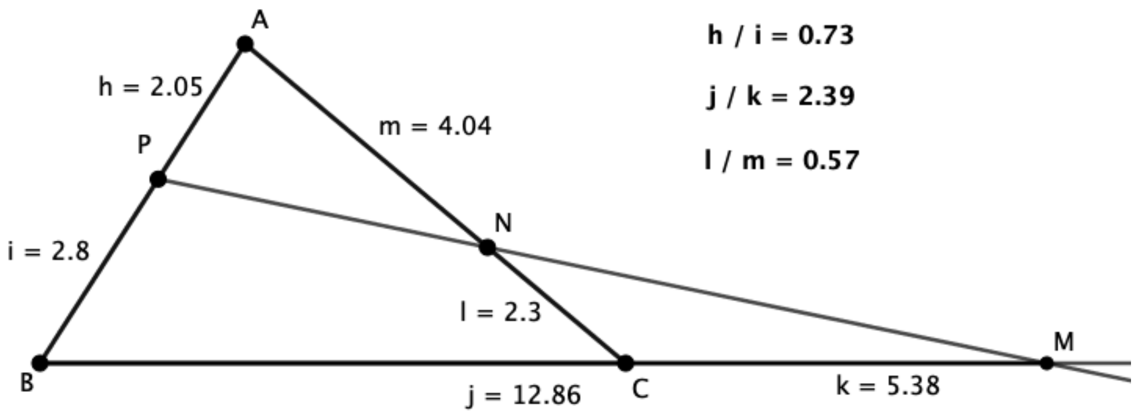
Figura 6.7 - Aplicação 6.2



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Como já obtivemos os valores dos segmentos, vamos calcular as razões de acordo com (6.10). Vejamos:

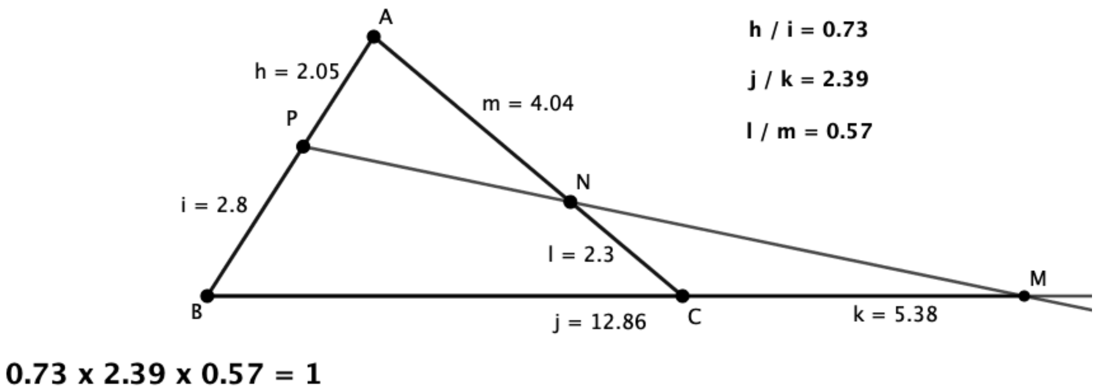
Figura 6.8 - Aplicação 6.3



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Na Figura 6.8 temos o cálculo das razões feitas pelo próprio GeoGebra, sendo uma ferramenta do próprio aplicativo. Agora, vamos calcular a multiplicação dos três valores para analisarmos se a expressão (6.10) é válida. Observemos a Figura 6.9:

Figura 6.9 - Aplicação 6.4



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Como podemos ver, o resultado do produto das três razões é igual a 1, mostrando que o Teorema de Menelaus é válido e que podemos utilizá-lo no GeoGebra como forma de visualização utilizando um recurso tecnológico. Por se tratar de um aplicativo dinâmico, podemos mexer com os pontos dos triângulos e os resultados permanecerão, afirmando a validade do resultado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria, por muitas vezes, é uma área de estudo que pode ser deixada de lado, mas seus resultados, estudos e teoremas nos mostra sua contribuição e o quanto seu estudo é importante. Menelaus e Ceva são apenas alguns de tantos matemáticos que deixaram suas contribuições para a área de Geometria. Partindo disso, seus teoremas sobre a colinearidade de pontos e concorrência de retas associadas aos triângulos traz resultados que nos ajudam a resolver problemas envolvendo estas definições.

De forma muito efetiva, vemos isso nas aplicações, que mostram exemplos tanto na existência de pontos associados ao triângulo, como o baricentro, como também vemos um exemplo de uma forma trabalhar com o assunto em sala de aula, através da utilização de recursos tecnológicos.

Como sendo esse um dos trabalhos existentes que abordam esse tema, outras versões dos teoremas existem, de forma mais geral, que podem ser exploradas, como também outras formas de se trabalhar com o GeoGebra, sendo uma delas abordando o Teorema de Ceva.

Resumindo de modo geral, o trabalho apresentado busca resgatar os teoremas de Menelaus e Ceva, fazendo com que o leitor entenda seu estudo e se aprofunde nele. Portanto, abordar este assunto desde a história desses matemáticos até as aplicações dos teoremas busca criar um contexto completo para que o assunto abordado seja contemplado de forma satisfatória.

REFERÊNCIAS

BACHA, José Alberto Mendes. **Geometria Plana: Teorema Clássicos e Aplicações**. Universidade Federal do Pará – Faculdade de Matemática, 2023. Disponível em: <https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_14.pdf>. Acesso em: 11 jul. de 2023.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 4 ed. SBM, 1995.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2023.

BRASIL. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+).** Brasília: MEC, 2002. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2023.

COSTA, Gilson Pacífico da. **Círculos notáveis no triângulo**. 2021. 60 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2021.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar , 9: geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta**. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

FARIA, Isabela Gobbo; SOUZA, L. D. F. R.; FERNANDES, Estela Aparecida. Métodos informatizados contribuem para o ensino da Matemática: utilização do GeoGebra para o ensino de geometria-Revisão bibliográfica. **Revista Eletrônica de Educação e Ciência**, v. 5, n. 1, p. 65-70, 2015.

LIMA, Anna Thecya Oliveira. **Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, demonstração e aplicação**. 2016. 57 p. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal do Piauí, Pós-graduação em Matemática, Teresina, 2016.

MACEDO, Darilene Maria Ribeiro. **Resgatando alguns teoremas clássicos da geometria plana**. Repositório Institucional UFC, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014_dis_dmrmacedo.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2023.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://poti.impa.br/>. Acesso em: 19 jul. 2023.

SILVA, José Constantino da. **Os Teoremas de Menelaus e Ceva**. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2023. Disponível em: < http://dm.ufrpe.br/sites/dm.ufrpe.br/files/dissertacao_constantino_b.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2023.

ULIANO, Jaqueline. **Teoremas matemáticos: um encontro entre história, conceitos e aplicações**. 2021. 124 p. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática, Blumenau, 2021.