UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ANTONIEL JOSÉ DO NASCIMENTO

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

MONTEIRO
2023

ANTONIEL JOSÉ DO NASCIMENTO

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Orientador: Prof. Me. Robson Batista de Sousa

MONTEIRO
2023

N244n Nascimento, Antoniel Jose do.

Números complexos [manuscrito] : história, teoria e aplicações / Antoniel Jose do Nascimento. - 2023.

56 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2023.

"Orientação : Prof. Me. Robson Batista de Sousa , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Números complexos. 2. Números complexos - Aplicação. 3. História da matemática. I. Título

21. ed. CDD 512

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/970

Biblioteca José Rafael de Menezes

ANTONIEL JOSÉ DO NASCIMENTO

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 28/11/2023.

BANCA EXAMINADORA

Robson Batista de Sousa

Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Orientador

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva
Examinador Interno (CCHE/UEPB)

Natan de Assis Lima

Prof. Dr. Natan de Assis Lima
Examinador Interno (CCHE/UEPB)

Passamos toda a vida nos preocupando com o futuro. Fazendo planos para o futuro. Tentando prever o futuro. Como se desvendá-lo fosse aliviar o impacto. Mas o futuro está sempre mudando. O futuro é o lar dos nossos medos mais profundos e das nossas maiores esperanças. Mas uma coisa é certa: quando ele finalmente se revela, o futuro nunca é como imaginamos.”

(Grey’s Anatomy)

AGRADECIMENTOS

Deus. Inicio os meus agradecimentos com aquele que esteve comigo durante toda a minha trajetória, que não me desamparou em momento algum, me manteve de pé apesar dos obstáculos e dificuldades, sem Ele não estaria aqui, não teria alcançado meu objetivo!

A minha família, por me apoiar, incentivar e acreditar em mim, agradeço por tudo. Em especial a minha mãe, minha rainha ROSILENE, por sempre estar presente nos momentos de dificuldade, me apoiando, incentivando e acreditando em mim.

Agradeço amiga Emonaiza Raimundo (Monaiza), por fazer parte da minha vida e também por ser uma inspiração como Ser Humano, agradeço por tudo. Adenise Sousa (Denise), que tive o prazer de conhecer durante um programa de educação e desde lá sou muito grato pelo companheirismo.

Aos amigos e colegas universitários Joice Daisyelle, agradeço pela paciência que teve comigo, por ter me ajudado durante toda a graduação, e também pelas criações das figuras deste trabalho, muito obrigado. E também a Ana Beatriz, Lorena Nunes, Layla Brito, Myllene Nogueira e aos demais que estiveram junto durante minha trajetória.

Agradeço também as minhas professoras, Ana Lúcia e Sandra Vilma, que me fizeram apaixonar ainda mais pela Matemática, por fazerem parte de mim como professor.

Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba - Campus VI e também à professora Marília Lidiane Chaves da Costa Alcântara por suas contribuições ao trabalho durante a disciplina de pesquisa. Agradeço à professora Ana Emília Victor Barbosa, bem como aos demais professores que contribuíram para a minha trajetória acadêmica.

Agradeço ao meu orientar, Robson Batista de Sousa, por toda suas contribuições para que eu trilhasse meu caminho acadêmico e pela paciência, obrigado.

Agradeço aos membros da banca, o professor Natan de Assis Lima e o professor Cládio Odair Pereira da Silva, por todas contribuições feitas ao trabalho, muito obrigado.

Enfim, Agradeço a todos que estiveram comigo e me ajudaram durante minha trajetória acadêmica. Muito Obrigado!

"O SENHOR é a minha luz e a minha salvação; à quem temerei? O Senhor é
a força da minha vida; de quem me recearei?[...]
Ainda que um exército me cercasse, o meu coração não temeria: ainda que a
guerra se levantasse contra mim, nele confiaria."
(Bíblia Sagrada, Salmos 27: 1,3)

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos uma breve história dos números complexos e contribuições de matemáticos para o desenvolvimento deste conjunto. Os números complexos foram se desenvolvendo ao longo do tempo onde os matemáticos trabalhavam principalmente com números reais e ao solucionar algumas equações se depararam com raízes de números negativos. Matemáticos importantes contribuíram para esse desenvolvimento como, Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Argand, Gauss, Euler e outros. Junto a isto, mostraremos a expansão dos conjunto naturais até os números complexos, apresentaremos a definição e algumas propriedades importantes dos números complexos. Posto isso, apresentaremos algumas aplicações tanto em matemática quanto em física. Ao fim do texto mostramos nos apêndices, duas importantes equações para os complexos, a fórmula de Cardano e a fórmula de Euler.

Palavras-chave: Números Complexos. História dos Números Complexos. Aplicações dos Números Complexos.

ABSTRACT

In this work we will present a brief history of complex numbers and the contributions of mathematicians to the development of this set. Complex numbers developed over time where mathematicians worked mainly with real numbers and when solving some equations they came across roots with negative numbers. Important mathematicians contributed to this development, such as Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Argand, Gauss, Euler and others. Along with this, we will show the expansion of natural sets to complex numbers, we will present the definition and some important properties of complex numbers. Having said that, we will present some applications in both mathematics and physics. At the end of the text we show in the appendices two important equations for complexes, the Cardano formula and the Euler formula.

Key-words: Complex numbers. History of Complex Numbers. Applications of Complex Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os números complexos são apresentados teoricamente aos alunos no Ensino Médio, onde eles se deparam com raízes de números negativos, contudo, vários professores cometem o equívoco na educação básica anos finais ($6°$ ao $9°$ ano), onde afirmam que não existem soluções para raízes de números negativos. Isso é um problema, pois, ao se depararem com essas raízes negativas no Ensino Médio haverá solução para aquele problema. Portanto, precisa-se enfatizar nos anos finais que existe solução para problemas com discriminantes negativos, porém, em um outro conjunto numérico que vai além dos Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

Conforme Brasil (2002) os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), o conteúdo dos números complexos é tido como flexível no currículo, com isso, grande parte dos professores do Ensino Médio não apresentam o conteúdo, ou até mesmo, por não se sentirem preparados para ministrá-lo. Por muitas vezes é tido como desnecessário, o que torna prejudicial aos que irão seguir na vida acadêmica. Dessa forma, ao não dar a devida atenção a esse conteúdo, está-se negligenciando um conhecimento essencial na educação matemática.

Durante toda a graduação, mostra-se que as componentes básicas do curso de licenciatura plena em matemática são de extrema importância, pois, estas são a base para as demais componentes avançadas, assim, sendo imprescindível para a formação dos graduandos de licenciatura em Matemática. O licenciando[1] percebeu que alguns componentes não apresentam os conteúdos em sua completude, deixando lacunas sobre assuntos importantes e que são necessários em outros componentes.

Uma delas é a componente curricular matemática II (MII) a qual faz parte do Projeto Pedagógico do curso de licenciatura plena em matemática do Campus VI (CCHE). Esta possui uma carga horária de 60h e trata dos seguintes conteúdos: Trigonometria e números complexos. Contudo, o orientador desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem ministrado a componente curricular (MII) há alguns períodos, e, conforme informa que devido à carga horária, o conteúdo dos números complexos não é abordado de maneira abrangente, devido ao calendário acadêmico e há imprevistos. Este conteúdo é de suma importância para os graduandos em matemática, além de ser indispensável na formação dos futuros professores, já que o mesmo deve ser abordado no Ensino Médio.

[1] autor do presente texto.

A partir dos pontos supracitados, decidi desenvolver uma pesquisa que tenha como ponto primordial o aprofundamento do estudo dos números complexos. Em suma, podemos justificar a escolha do tema de pesquisa já que o mesmo é indispensável no decorrer da graduação em diversas componentes curriculares, tais como: Álgebra Linear, Estruturas I e II, Equações Diferenciais Ordinárias, História da Matemática e outros. Logo, é notória sua grande relevância para os licenciandos em matemática.

De acordo com os procedimentos técnicos utilizados, esse trabalho é de natureza bibliográfica, pois, conforme Gil (2002), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

As questões norteadoras deste trabalhos são: **Como os números complexos foram desenvolvidos ao longo da história? Quais são suas definições e propriedades fundamentais? Eles encontram aplicações em outras áreas do conhecimento?**

Partindo desses pontos onde maioria da utilização das aplicações dos Números Complexos são direcionados ao ensino superior, este TCC tem como finalidade ser material de apoio tendo como público alvo os professores de Matemática do Ensino Médio e também para os graduandos em Matemática.

No Capítulo 1, encontra-se a introdução. No Capítulo 2, é apresentada uma breve história acerca dos números complexos. No Capítulo 3, encontra-se a teoria básica dos números complexos. No capítulo 4, encontram-se algumas aplicações dos números complexos. E, por fim, o Capítulo 5, é o de conclusão.

2 BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um fato interessante sobre os números complexos é que eles foram criados devido a um problema com equações polinomiais, ou seja, para solucionar um problema matemático, com intuído em não deixar a matemática de certa forma “estacionada”, assim, criando-se matemática pela matemática. Diferente de outros conteúdos, que são criados para solucionar problemas relacionados ao cotidiano ou da natureza.

Os números complexos foram se desenvolvendo ao longo da história, os matemáticos trabalhavam principalmente com números reais e ainda não consideravam a existência dos números imaginários, na época. Conforme Ribeiro (2015), o primeiro cálculo que se levou a raiz de um número negativo foi registrado cerca de 50 d.C. em Stereometrica, de Herão de Alexandria.

Segundo Roque (2012) o debate sobre as quantidades negativas e imaginárias, durante o século XVIII, mostrava que somente os números absolutos eram aceitos, pois procurava-se associar a matemática a um noção de “realidade”. Enquanto os números eram associados a quantidades geométricas, não se permitia a realização de operações abstratas[1] e arbitrárias[2] sobre eles. Portanto, para tornar-se aceitos, era preciso mudar para um conceito abstrato de um número não subordinado à ideia de quantidade.

Apesar de serem utilizados para resolver equações os números complexos não eram admitidos como solução das equações. Isso mostra o quão difícil foi para os números complexos tornarem-se admitidos na matemática. Conforme Roque (2012):

> Ainda que, desde o século XVII, as entidades algébricas tenham adquirido um lugar de destaque na matemática, até o final do século XVIII as raízes negativas e imaginárias de equações eram consideradas quantidades irreais. [...] quantidades “falsas”, “fictícias”, “impossíveis” ou “imaginárias”, eram descritas para os números negativos e complexos. Todos os nomes utilizados para designar esses números exprimem a dificuldade de admitir sua existência ou, melhor dizendo, sua cidadania matemática (Roque, 2012, p.371).

Certamente, não possuíam uma cidadania, não eram, em última instância, admitidos como números. Ainda segundo Roque (2012):

---

[1] Que só pode existir no pensamento (ideia)
[2] Que não segue princípios lógicos nem depende de regras e normas.

> Leonhard Paul Euler já via a álgebra como uma ciência dos números, e não das quantidades. Para ele, todas as grandezas podiam ser expressas por números e a base da matemática devia se constituir de uma exposição clara do conceito de números e das operações. Entretanto, suas propostas não foram reconhecidas no século XVIII (Roque, 2012, p.400).

2.1 CONTRIBUIÇÕES DE MATEMÁTICOS PARA O AVANÇO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Segundo Roque (2012), Silva (2005) e Silva (2019) :

Frei Luca Pacioli (1447- 1517) fez algumas considerações sobre as equações cúbicas em Pacioli (1523) *"Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita"*, ele menciona que não poderia ser generalizada a solução de equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$. Porém, o italiano *Scipione del Ferro* (1465-1526), professor de Matemática da Universidade de Bolonha, foi um dos primeiros matemáticos europeus a trabalhar com números complexos e conseguiu resolver o problema envolvendo equações do tipo $x^3 + px = q$. Mas, não publicou seu resultado. Ele compartilhou seu método com dois de seus alunos, *Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore*, sem fornecer a eles dados concretos de sua descoberta.

Em 1535, *Antonio Maria Fiore* desafiou *Niccoló Fantana* (1499-1557)(Figura 1) conhecido como Tartaglia a resolver um problema de equação cúbica do tipo $x^3 + px = q$, usando

Figura 1 – Tartaglia

Fonte: Só.Matemática

apenas a fórmula que Del Ferro havia descoberto. Na época, Tartaglia era um matemático reconhecido na Itália e Fiore era um jovem matemático que havia aprendido a fórmula com Del Ferro, mas que ainda não era muito conhecido. Tartaglia aceitou o desafio, mas impôs a condição de que Fiore também deveria resolver um problema de equação cúbica proposto por ele. Os dois matemáticos conseguiram resolver os problemas propostos, mas Tartaglia foi o vencedor do desafio, usando uma técnica que ele próprio havia desenvolvido para a resolução de equações cúbicas. A vitória de Tartaglia nesse desafio acabou contribuindo para a popularização da técnica de resolução de equações cúbicas que ele havia criado.

Informações sobre a disputa entre Tartaglia e Fior, bem como sobre o conteúdo dos problemas, chegaram até *Girolano Cardano* (1501-1576)(Figura 2).

Figura 2 – Cardano

Fonte: Só.Matemática

Cardano, que era um matemático renomado na época, ficou fascinado com a técnica de resolução de equações cúbicas desenvolvida por Tartaglia e atraiu-o até sua casa sob a promessa de manter sigilo sobre a técnica. Tartaglia acabou revelando sua técnica a Cardano, mas sob a condição de que ele não a divulgasse publicamente. Porém, mais tarde, em 1542, Cardano e seu discípulo *Lodovico Ferrari* foram a Bolonha examinar os manuscritos de Del Ferro, entre esses estavam a resolução de problemas do tipo $x^3 + px = q$. Como o juramento de Cardano era a Tartaglia e não a Del ferro, decidiu então publicar a fórmula em sua famosa obra *Ars Magna* (1545), atribuindo a autoria da fórmula a Tartaglia. Mais tarde, a fórmula ficaria conhecida como **Fórmula de Cardano.**[3]

Em 1560, *Rafael Bombelli* (1526-1572) (Figura 3) teve contato com a obra *Ars Magna* e

Figura 3 – Bombelli

Fonte: Só.Matemática

ao aplicar a fórmula de Cardano a equação $x^3 = 15x + 4$ obteve um resultado inesperado, esta equação será resolvida adiante em (Equação 2.5). Contudo, como Bombelli sabia que $x = 4$ era

[3] Para informações ver em A.

a solução da equação, utilizou os números na forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e ainda $b > 0$, da mesma maneira que se operava com os reais, porém com a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

> Bombelli mostrou, ao lidar com os números complexos, estar à frente no seu tempo, uma capacidade de abstração algébrica superior à dos seus antecessores, que lhe permitiu desenvolver as regras operatórias com esses novos números que surgiam e que ainda não faziam grande sentido (Silva, 2005, p. 46)

Com isso os números complexos foram ganhando espaço na matemática e então começaram a serem aceitos. Um dos contribuintes para isso ocorrer, foi o matemático suíço-fraçês *Jean Robert Argand* (1768-1822) (Figura 4). Sua principal contribuição foi a representação geométrica

Figura 4 – Argand

Fonte: Engineering Mathematics

dos números complexos como pontos no plano cartesiano, conhecida como o “Diagrama de Argand”.

Antes da criação do Diagrama de Argand, os números complexos eram vistos apenas como entidades abstratas que satisfaziam certas propriedades algébricas. Argand propôs a ideia de que cada número complexo poderia ser representado como um ponto no plano cartesiano, com a parte real representada no eixo x e a parte imaginária representada no eixo y, como será mostrado na (Figura 10). Isso permitiu uma visualização mais clara das propriedades dos números complexos e facilitou o trabalho com eles. Além disso, permitiu a interpretação geométrica das operações com números complexos, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Apesar disso, os números complexos foram definitivamente aceitos na Matemática no século XIX, quando matemáticos como *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) e *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) (Figura 5) estabeleceram uma base teórica sólida para o estudo dos números complexos e sua relação com outras áreas da matemática, como a análise complexa e a geometria complexa.

Gauss, definiu os números complexos na forma $a + bi$ tal que a, b pertencem ao conjunto dos números reais onde $i^2 = -1$, denominada *forma algébrica dos números complexos*.

Figura 5 – Gauss

Fonte: Mol (2013, p. 126)

Vários matemáticos contribuíram para a forma polar ou trigonométrica dos números complexos ao longo da história, incluindo: *Roger Cotes* (1682-1716); *Abraham De Moivre* (1667 - 1754) conhecido por ter estabelecido o chamado teorema de De Moivre, que permite elevar um número complexo à potência de um número inteiro, este teorema afirma que se z é um número complexo na forma trigonométrica $z = r(cos\theta + isen\theta)$, então $z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$, onde n pertence aos conjunto dos números inteiros.

E também do alemão *Leonhard Paul Euler* (1707-1783) (Figura 6), considerado um dos mais prolíficos da história, entre as suas muitas contribuições para os números complexos, destacam-se:

1. Representação trigonométricas dos números complexos: Euler foi o primeiro a utilizar a notação e^{ix} para representar um número complexo na forma trigonométrica. Essa notação é conhecida como a fórmula de Euler.[4]

2. Teorema de Euler: Ele descobriu um teorema fundamental dos números complexos que relaciona a exponencial complexa com as funções trigonométricas seno e cosseno, o mesmo é utilizado em outras áreas da matemática, como na engenharia.

Figura 6 – Euler

Fonte: Mol (2013, p. 118)

[4] Para mais informações ver B.

Essas são algumas contribuições de Euler que é considerado o homem que dominou os números complexos.

2.2 A NECESSIDADE DE UM NOVO CONJUNTO NUMÉRICO

Segundo AMORIM, Seimetz e SCHIMITT (2006):

A numeração escrita nasceu, na pré-história, da necessidade que o homem sentia de registrar os seus bens. É, portanto, tão antiga quanto a linguagem. A forma mais antiga de numeração escrita era feita por meio de traços num bastão ou em árvore. Séculos depois, foram criados símbolos para representar números de contagem, e os registros mais antigos que se têm são dos sumérios e egípcios (3.500 a.C). Atualmente esses números são representados por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \tag{2.1}$$

Após muitos anos, o uso do símbolo para o zero, sem dúvidas, revolucionou a escrita dos números e facilitou a linguagem matemática. Historicamente, o zero não fazia parte do conjunto dos números naturais, foi criado somente séculos depois. Acontece que o zero é admitido e às vezes não, por isso, temos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, por questão de conveniência. O mais importante é que, ao darmos nome a um conjunto, deve ficar claro os seus elementos.

Até o século XVII, os matemáticos estavam limitados ao campo dos números naturais, como vimos brevemente e veremos mais adiante, de modo que as operações mais simples nem sempre eram possíveis. As operações de adição e multiplicação eram possíveis, enquanto as operações inversas, subtração e divisão só eram possíveis sob algumas restrições. Sentiu-se, então, a necessidade de ampliar o campo numérico, momento onde se juntaram aos números naturais, o zero e os números negativos, assim, surgindo os números inteiros representados por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}. \tag{2.2}$$

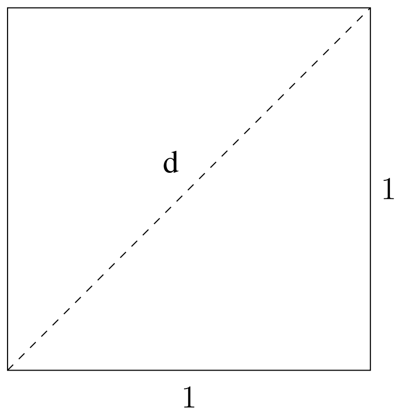
O problema com a operação da subtração estava superado, porém, não o da divisão. Novamente fez-se necessário uma ampliação e foram criadas os números racionais que é também chamado de corpo de frações, representados por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ \ a, b \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0\right\}. \tag{2.3}$$

Neste caso a única restrição quanto à divisão seria a impossibilidade de se dividir por zero. A equação $x \cdot 0 = 0$ é satisfeita por qualquer número racional, porém, a equação $x \cdot 0 = a$, $a \neq 0$ não é satisfeita por nenhum.

Com isso descobriu-se que os racionais não eram suficientes para representar todos os números. Era certo que a medida de um segmento representa um número. Mas a diagonal de um quadrado de lado 1 (Figura 7) não poderia ser representado como quociente de dois inteiros.

Figura 7 – Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Esses números foram chamados de irracionais $(\mathbb{I})$. Foi, então, definido um conjunto mais amplo em relação biunívoca[5]. Esse conjunto foi denominado de números reais e representado por $\mathbb{R}$.

Por tempos, os matemáticos aparentavam estar satisfeitos, porém, ainda havia problemas práticos na solução de equações polinomiais. Os matemáticos esbarravam, em ocasiões, com soluções "diferentes". O matemático Tartaglia desenvolveu a fórmula para encontrar uma das raízes de equações polinomiais de terceiro grau, do tipo $x^3 + px + q = 0$, a qual foi publicada por Cardano em 1.545, e recebendo o seu nome, como vimos anteriormente.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{2.4}$$

[5] Que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos, sendo que cada elemento de um conjunto está somente associado a um, e só um, elemento do outro.

Consideremos a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$. Então, $p = -6$ e $q = -9$. Assim:

$$x = \sqrt[3]{-\left(-\frac{9}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{9}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}.$$

Então,

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}.$$

Logo,

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3.$$

Na maioria das vezes nos deparamos com números negativos dentro das raízes, mesmo quando sabemos que devem existir três raízes reais. É o caso da equação $x^3 = 15x + 4$, dita como "irredutível". Ao aplicarmos a fórmula a esta equação temos:

$$x = \sqrt[3]{-\left(-\frac{4}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{4}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} \tag{2.5}$$

Então,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Acontece que $x = 4$ é solução para a equação;

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$$

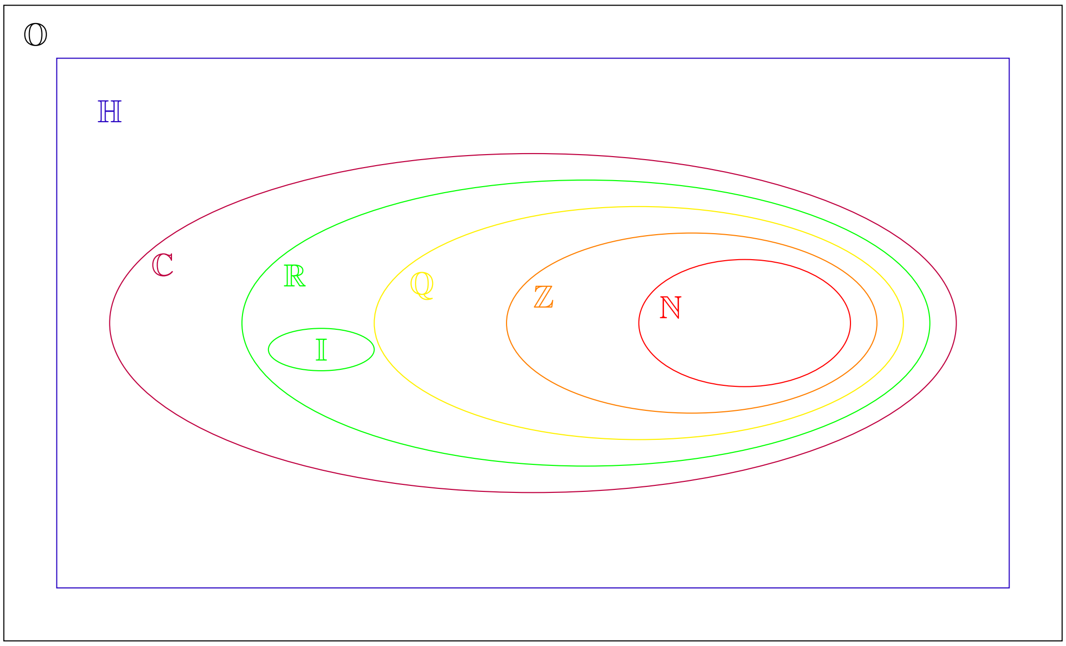
$$\Longrightarrow x = -2 + \sqrt{3} \ \text{e} \ x = -2 - \sqrt{3}$$

são as duas raízes reais, contudo, um número estranho produzido pela fórmula de Tartaglia.

Como vimos anteriormente, esses números estranhos que "não existiam", vieram a ser "criados" por Bombelli, ainda no seculo XVI. Outra vez, o campo numérico foi ampliado, surgindo assim, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

O conjunto numérico pode ser ampliado para além dos complexos (Figura 8), os Quatérnios ($\mathbb{H}$) e Octônios ($\mathbb{O}$). Poucos alunos, mesmo universitários, terão ouvido falar dos quaterniões de Hamilton, porém parte dos licenciados que frequentarem alguma cadeira de Matemática, ouviu falar de grupos, corpos, anéis, e outros. Essa expansão além dos complexos não serão abordados neste trabalho.

Figura 8 – Conjuntos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

3 NÚMEROS COMPLEXOS

Vimos na (seção 2.2) a necessidade de se ampliar o conjunto numérico, e assim, surgiram o conjunto dos números complexos, o qual é denotado por $\mathbb{C}$. Apresentaremos em seguida operações com pares ordenados, a unidade imaginária para então definir os números complexos e suas operações.

3.1 OPERAÇÕES COM PARES ORDENADOS

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}\}. \tag{3.1}$$

Isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) em que x e y são números reais.

Tomemos dois elementos, (a, b) e (c, d), de $\mathbb{R}^2$. Valem as seguintes definições:

1. *Igualdade*: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b$ e $c = d$.
2. *Adição*: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
3. *Multiplicação*: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Todo par ordenado na forma $(x, 0)$ pode ser identificado pelo número real x, ou seja:

$$x = (x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

3.1.1 Unidade Imaginária

O que há de novo nos estudos dos pares ordenados de números reais é o produto do par ordenado $(0, 1)$ por ele mesmo:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \tag{3.3}$$

Se chamarmos o par ordenado (0, 1) de *unidade imaginária* e o representamos por i, temos que, $i \cdot i = -1$, isto é,

$$i^2 = -1$$

Ou seja, "O quadrado de certo elemento é igual a um número negativo". Dizemos que i é uma raiz quadrada de -1.

Podemos calcular a potência do número i da mesma maneira que calculamos para potência de um número real. De fato,

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
- $i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$

Observe que, os resultados começam a se repetir após i^4. Portanto, podemos generalizar, seja $n, m \in \mathbb{N}$, temos:

- Para $n = 4m$, temos $i^n = i^{4m} = (i^4)^m = 1^m = 1$;
- Para $n = 4m + 1$, temos $i^n = i^{4m+1} = (i^4)^m \cdot i = 1^m \cdot i = 1 \cdot i = i$;
- Para $n = 4m + 2$, temos $i^n = i^{4m+2} = (i^4)^m \cdot i^2 = 1^m \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$;
- Para $n = 4m + 3$, temos $i^n = i^{4m+3} = (i^4)^m \cdot i^3 = 1^m \cdot (-i) = 1 \cdot (-i) = -i$.

Ou seja, $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$, com $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de $\dfrac{n}{4}$.

3.2 DEFINIÇÃO

Segundo Iezzi (2005, p. 2) temos que:

Chama-se conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e multiplicação, definidas em 3.1. Representa-se cada elemento $x, y \in \mathbb{C}$ com símbolo z,

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Observemos que, dado um número complexo $z = (x, y)$, temos que:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

como $x = (x, 0)$, $y = (y, 0)$ e $i = (0, 1)$, logo:

$$(x, y) = x + yi \quad \text{ou} \quad z = x + yi$$

Dessa maneira, os números complexos z podem ser escritos na **forma algébrica** $z = x + yi$, onde chamamos o número real x a parte real de z, e y a parte imaginária de z, os quais denotamos respectivamente por

$$x = Re(z) \quad \text{e} \quad y = Im(z).$$

3.2.1 Operações com Números Complexos

Lembremos que um número complexo pode ser representado como um *par ordenado* de números reais e também na forma algébrica.

1. **Igualdade:** Dados dois números complexos $z_1 = (a, b) = (a + bi)$ e $z_2 = (c, d) = (c + di)$, tem-se que $z_1 = z_2$, se e somente se, $a = c$ e $b = d$, ou seja:

   $$a + bi = c + di$$

   isto é, dois números complexos são iguais quando apresentam, simultaneamente, partes reais e imaginarias iguais.

2. **Adição:** Seja $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, definimos a soma $z_1 + z_2$ é dada por:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

3. **Subtração:** A mesma ideia da soma se aplica a subtração, temos:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

4. **Multiplicação:** Dados $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ devemos aplicar a definição 3, vista anteriormente.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

5. **Conjugado:** Dado $z = (a, b)$ um número complexo qualquer, consideremos o par ordenado simétrico[1] a z em relação ao eixo x. Este par é chamado de *conjugado*[2] de z, o qual é indicado por $\bar{z}$. Na forma algébrica, dizemos, que, se $z = a + bi$, seu conjugado é $\bar{z} = a - bi$. Valem então as relações,

$$\text{Re(z)} = \text{Re}(\bar{z}) \quad \text{e} \quad \text{Im(z)} = \text{-Im}(\bar{z}).$$

Propriedades de Conjugação

a) Seja $z = a + bi$ um número complexo, seu conjugado é $\bar{z} = a - bi$. Assim,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

b) Temos que $z = \bar{z}$, se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$. Assim, para $z = \bar{z}$, pela definição (Item 1) dos números complexos, tem-se que $a = a$ e $b = -b$, logo $b = 0$ e $z = a$.

c) O conjugado da soma é a soma dos conjugados. Seja $z = a + bi$ e $w = x + yi$ então seus conjugados são, respectivamente, $\bar{z} = a - bi$ e $\bar{w} = x - yi$. Então

$$\bar{z} + \bar{w} = (a - bi) + (x - yi) = (a + x) - (b + y)i = \overline{z + w}$$

d) O conjugado do produto é o produto dos conjugados. Seja $z = a + bi$ e $w = x + yi$ então seus conjugados são, respectivamente, $\bar{z} = a - bi$ e $\bar{w} = x - yi$. Logo,

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi) \cdot (x - yi) = ax - ayi - bxi + byi^2 = ax - by - (ay + bx)i = \overline{z \cdot w}.$$

[1] Relativo a simetria; cujas formas, medidas, posições apresentam correspondência ou estão em conformidade umas com as outras; proporcional, regular.

[2] ligado, unido, reunido harmonicamente; misturado, combinado.

6. **Divisão:** Sejam $z_1 = (a+bi)$ e $z_2 = (c+di)$ e $z_3 = (x+yi)$, sendo $z_2 \neq 0$. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = z_3$, ou seja, $z_1 = z_2 \cdot z_3$. Temos então:

$$a + bi = (c + di) \cdot (x + yi) \Rightarrow a + bi = (cx - dy) + (cy + dx)i.$$

segue o sistema:

$$\begin{cases} a = cx - dy \\ b = cy + dx \end{cases}$$

resolvendo o sistema, temos:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

então:

$$z_3 = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i.$$

Exemplo 3.1. Seja $z_1 = 3 + 7i \quad \text{e} \quad z_2 = 4 - i$. Calcule $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Resolução:

$$z_1 + z_2 = (3 + 7i) + (4 - i) = 7 + 6i;$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 7i) - (4 - i) = -1 + 8i;$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (3 + 7i) \cdot (4 - i) &= (3 \cdot 4 - 7 \cdot (-1) + (3 \cdot (-1) + 7 \cdot 4)i \\ &= (12 + 7) + (-3 + 28)i \\ &= 19 + 25i; \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 7i}{4 - i} = \frac{(3 + 7i)}{(4 - i)} \cdot \frac{(4 + i)}{(4 + i)} = \frac{12 + 3i + 28i + 7i^2}{16 + 1} = \frac{5}{17} + \frac{31}{17}i.$$

3.2.2 Propriedades

Os números complexos constituem um conjunto onde estão definidas operações nos itens 2 e 4 (subseção 3.2.1), mostrados anteriormente. Quando consideramos três números complexos, z_1, z_2 e z_3, as seguintes propriedades são válidas para essas operações:

- **Comutatividade:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

  Demonstração.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1, \ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ z_1 + z_2 &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

■

- **Associatividade:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

  Demonstração.

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), \ \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= [(a + c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)] \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = (a + b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

■

- **Distributividade:** $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

  Demonstração.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (+z_2 + z_3) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot [c + e, d + f] \\ &= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\ &= [(ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be] \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \end{aligned}$$

■

- **Elemento neutro aditivo:** O número complexo $(0,0)$ tal que $z+(0,0)=(a,b)+(0,0)=z, \forall\ z \in \mathbb{C}$.

  Demonstração.

  $\exists\ e_a \in \mathbb{C} \mid z+e_a = z,\ \ \forall z \in \mathbb{C}.$ Seja $z=(a,b),$ ou seja $e_a=(x,y) \mid z+e_a=z:$

  $$(a,b)+(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+x=a \\ b+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

  portanto existe $e_a=(0,0)$, chamado elemento neutro aditivo, que somado a qualquer número complexo z resulta no próprio z. ■

- **Elemento neutro multiplicativo:** O número complexo $(1,0) \mid z\cdot(1,0)=z, \forall\ z \in \mathbb{C}$.

  Demonstração.

  $\exists\ e_m \in \mathbb{C} \mid z{\cdot}e_m = z,\ \ \forall z \in \mathbb{C}.$ Seja $z=(a,b),$ provemos que $e_m=(x,y) \mid z{\cdot}e_m=z:$

  $$(a,b)\cdot(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow (ax-by, ay+bx)=(a,b) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot x=a \\ b\cdot y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

  portanto existe $e_m=(1,0)$, chamado elemento neutro multiplicativo, que multiplicado a qualquer número complexo z resulta no próprio z. ■

- **Existência do simétrico aditivo:** Todo número $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ possui um único simétrico aditivo $-z=(-x,-y) \mid z+(-z)=(0,0)$.

  Demonstração.

  $\forall z \in \mathbb{C},\ \ \exists\ z' \in \mathbb{C} \mid z'+z=e_a.$ Seja $z=(a,b),$ então $z'=(x,y) \mid z'+z=e_a:$

  $$(a,b)+(x,y)=\Leftrightarrow \begin{cases} a+x=a \\ b+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases}$$

  portanto existe $z'=(-a,-b)$, chamado simétrico ou inverso aditivo de z, que somado ao número complexo z resulta no $e_a=(0,0)$. ■

- **Existência do inverso multiplicativo:** Para todo $z=(x,y)\neq 0$ existe um único número $z^{-1}=(x',y') \mid z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z$.

Demonstração.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \exists \ z'' \in \mathbb{C} \mid z \cdot z'' = e_m. \text{ Seja } z = (a, b), a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0, \text{ então}$$

$z'' = (x, y) \mid z \cdot z'' = e_m$:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

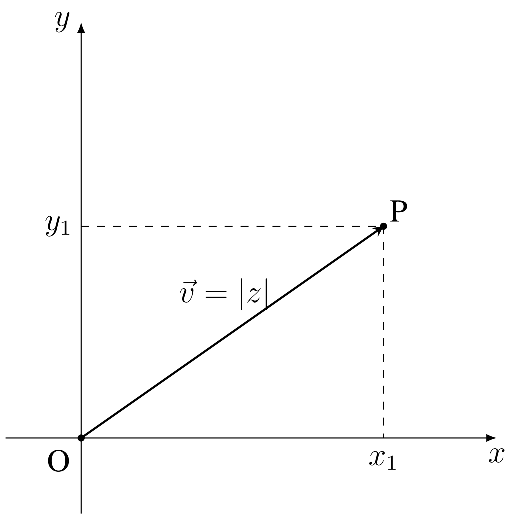
portanto existe $z' = (-a, -b)$, chamado simétrico ou inverso aditivo de z, que somado ao número complexo z resulta no $e_a = (0, 0)$. ■

3.2.3 Módulo de um Número Complexo

Seja $z = a + b$ um número complexo, temos que o módulo ou valor absoluto de z (Figura 9), é dado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.5}$$

Figura 9 – Módulo de z



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos verificar que $|z|^2 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Propriedades do Conjugado

i) Vimos anteriormente no *item a* (subseção 3.2.1) das propriedades de conjugação, que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Assim,

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}.$$

ii) Seja $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$, temos $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ e $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.

iii) Seja $z = a + bi$ e $z_1 = c + di \in \mathbb{C}$, seus módulos são respectivamente $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ e $|z_1| = \sqrt{c^2+d^2}$, operando o produto entre z e z_1 temos:

$$z \cdot z_1 = (a+bi)(c+di) = ac - bd + (bc+ad)i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |z \cdot z_1| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2} \\ &= |z| \cdot |z_1| \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Mostremos que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Resolução:

Seja $z = a + bi$, tal que $a, b \in \mathbb{R}$, com isso, $\bar{z} = a - bi$. Logo:

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

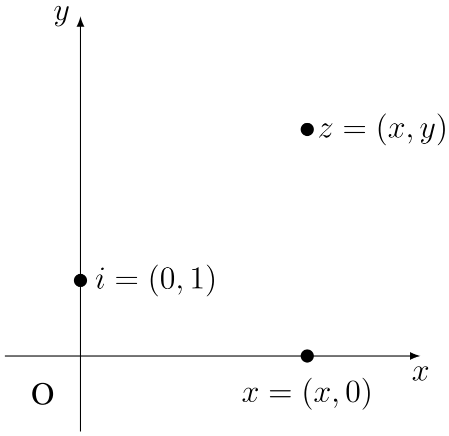
3.3 NÚMEROS COMPLEXOS NO PLANO

Conforme Ribeiro (2015), foi *Caspar Wessel* (1745-1818) que criou a representação geométrica dos complexos que utilizamos até a atualidade. Contudo, seus estudos não foram devidamente reconhecidos, pois, além de estarem escritos em dinamarquês, foram publicados numa revista científica em 1799, pouco reconhecida fora da Dinamarca. No entanto, a ideia só teve visibilidade quando publicada por *Argand*, como vimos no cap 2.1. Somente em 1895 *Wessel* é reconhecido como pioneiro. Conforme Roque (2012), temos:

> A associação dos números complexos aos pontos do plano foi enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele, mas o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos fosse firmemente estabelecido foi dado com a introdução da noção de *vetor* (Roque, 2012, p.410).

Definimos $z = (x, y) = x + yi$ como sendo um par ordenado (x, y), o qual pode ser representado como um ponto no plano cartesiano. O número real $x = x + 0i$ que é o ponto $(x, 0)$ e o número imaginário $y = 0 + yi$ é o ponto $(0, y)$, em que o eixo x é a parte real e o eixo y a parte imaginária. A representação do plano se deu após as publicações dos trabalhos de *Gauss*, por isso chamado de **Plano de Argand-Gauss** ou **Plano Complexo**. (Observa-se na Figura 10)

Figura 10 – Plano Complexo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Pela definição dada, podemos ainda representar um número complexo como um vetor (isto é, um segmento orientado) segmento esse que se dá início na origem até a extremidade (x_1, y_1), ou seja, o complexo de z é representado pelo vetor $\vec{v} = \vec{Oz}$ onde $P(x_1, y_1)$ é a imagem geométrica do número complexo z. (Observa-se na figura 9).

3.3.1 Argumento de um Número Complexo

Seja $P = (a, b)$ um ponto no plano complexo, onde $\vec{OP}$ é o vetor. Temos que θ é o ângulo entre $\vec{OP}$ e o semi-eixo positivo x, e $\rho = \bar{OP}$. Então, $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$. As coordenadas polares do ponto P são (ρ, θ). O ângulo θ para o qual temos:

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{a}{b} \;\;\Rightarrow\;\; \theta = \arctan\frac{b}{a}$$

é chamado de argumento, denotado por $\arg z$, ilustrado na (Figura 11). Temos que,

$$\arg z = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho}, \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{b}{\rho}, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Se limitarmos o intervalo de θ, temos:

$$\theta = 0, \;\; \forall \; \mathbb{R}^{+} \in (-\pi, \pi] \quad \text{e} \quad \theta = \pi, \;\; \forall \; \mathbb{R}_{-} \in (-\pi, \pi].$$

A origem é o único ponto em que $\rho = 0$, ou seja, θ não está definido.

Exemplo 3.3. Calcular o argumento de $z = 2 - i$.

Temos

$$\rho^2 = 2^2 + (-1^2) \Rightarrow \rho^2 = 5 \Rightarrow \rho = \sqrt{5}$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

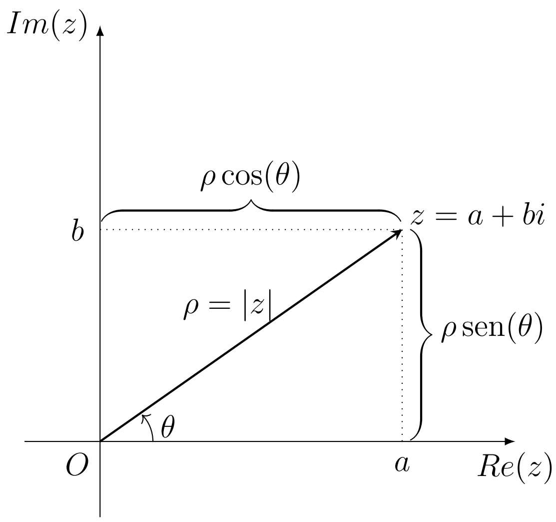
Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, temos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right).$$

3.4 FORMA POLAR

A forma polar, também conhecida como forma trigonométrica, é uma maneira de representar números complexos no plano complexo usando o módulo (magnitude) e o argumento (ângulo) do número.

Figura 11 – Forma Polar



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Seja, $z = a + bi \neq 0$, escrevemos a forma polar da seguinte maneira

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta). \tag{3.6}$$

podemos ainda escrever a expressão acima na seguinte forma

$$z = \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot \text{sen}(\theta + 2k\pi)) \tag{3.7}$$

substituimos θ por $\theta + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, não altera o número complexo z.

Essas representações são úteis para efetuar cálculos com números complexos, especialmente quando trata-se das operações de multiplicação e divisão.

Exemplo 3.4. Seja $z = 2 - 2i$, temos

$$\rho = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} \text{ e } \arg(z) = \arctan\left(-\frac{2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{onde} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Assim,

$$z = \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ou,

$$z = \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Observação 3.1. A representação dos números complexos podem ser escritas das seguintes formas:

$$\underbrace{z = a + bi}_{Forma \quad algébrica} = \underbrace{z = (a, b)}_{Par \quad ordenado} = \underbrace{z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{Forma \quad polar}.$$

3.4.1 OPERAÇÕES NA FORMA POLAR

Vamos observar as operações de multiplicação, divisão e potenciação dos números complexos na forma polar.

Teorema 3.1. *Seja z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, tais que*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2)$$

então $z_1 \cdot z_2$ é dada por

$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)].$$

utilizando a propriedade distributiva, temos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2[\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i(\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) + i^2(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2[\underbrace{(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i \cdot \underbrace{(\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2)}_{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)}] \end{aligned}$$

usando a identidade triangular (6)*, tem-se*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Observação 3.2. Na multiplicação de dois números complexos na forma polar, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos.

Teorema 3.2. *Seja z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, tais que*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)$$

a divisão de z_1 por z_2 é dada da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\frac{\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_2 - i \cdot \operatorname{sen}\theta_2}\right)$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i(\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) - i^2(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2.}$$

utilizando das identidades trigonométricas, (6) *e* (5)*, temos:*

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) - (\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$

Observação 3.3. Na divisão de dois números complexos na forma polar, dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos.

Teorema 3.3. *Seja $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \theta)]. \tag{3.8}$$

Como na multiplicação de dois números complexos na forma polar, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Temos que:

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \ldots \rho}_{n \quad vezes} \cdot [\cos(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \quad vezes}) + i \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \quad vezes})]$$

Seja $n \in \mathbb{N}$, vamos usar o princípio da indução finita.

Para $n = 0$, temos:

$$\begin{cases} z^0 = 1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \\ \rho^0 \cdot [\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0)] = 1 \end{cases}$$

Supondo que Equação 3.8 é verdadeira para $n = k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$z^k = \rho^k \cdot [\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta)].$$

Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$. Assim

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^k \cdot [\cos(k \cdot \theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta) \cdot \rho \cdot [(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)]$$

$$= \rho^k \cdot \rho \cdot [(\cos(k\theta) \cdot \cos \theta - \operatorname{sen}(k\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta) + i(\cos(k\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos \theta \cdot \operatorname{sen}(k\theta))]$$

$$\rho^k \cdot \rho[\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta)]$$

$$= \rho^{k+1}[\cos(k+1)\theta) + i \operatorname{sen}(k+1)\theta)] \tag{3.9}$$

Observação 3.4. A equação acima é conhecida como **1º fórmula de De Moivre**[3]. Portanto, pelo princípio de indução que (Equação 3.9) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

[3] *Abraham De Moivre* (1667 - 1754) matemático, nasceu em Vitry-le-François, Champagne, França.

4 APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações dos números complexos e posteriormente alguns exercícios, assim como suas respectivas soluções, a fim de que possam ser usados para um aprofundamento do conteúdo. Esses exercícios foram selecionados das dissertações de mestrado de Feitosa (2013) e Lobo (2017).

4.1 GEOMETRIA

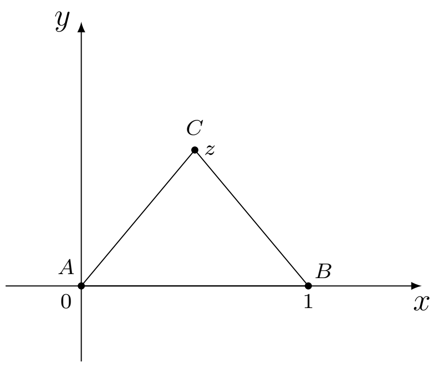
4.1.1 Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Teorema 4.1. ***(Lei dos Cossenos)*** *Seja ABC um triângulo. Então*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\hat{A}. \tag{4.1}$$

Demonstração. Supondo, sem perda de generalidade, que A é a origem do plano complexo, B está em 1 e C é representado pelo número complexo z, temos a Figura 12.

Figura 12 – Triângulo ABC



Fonte: Feitosa (2013, p.53).

Deste modo, com as coordenadas estabelecidas, temos que

$$|AB| = 1, \;\; |BC| = |z-1|, \;\; |AC| = |z| \;\text{ e }\; \hat{A} = \arg z.$$

Iniciando pelo lado direito de (4.1), temos:

$$\begin{aligned}|AB|^2+|AC|^2-2|AB||AC|\cos\hat{A} &= 1+|z|^2-2|z|\cos\arg z\\ &= z\bar{z}+1-2|z|\cdot\frac{Re(z)}{|z|}\\ &= z\bar{z}+1-2\frac{z+\bar{z}}{2}\\ &= z\bar{z}+1-z-\bar{z}\\ &= z(\bar{z}-1)-(\bar{z}-1)\\ &= (z-1)(\bar{z}-1)\\ &= |z-1|^2\\ &= |BC|^2.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2. ***(Lei dos Senos)*** *Seja ABC um triângulo. Então*

$$\frac{AB}{\text{sen}\hat{C}}=\frac{BC}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{AC}{\text{sen}\hat{B}}$$

Demonstração. Representando A, B e C pelos números complexos $0+0i, 1+0i, z=a+bi$, temos

$$\frac{AC}{\text{sen}\hat{C}}=\frac{|z|}{\frac{Im(z-1)}{|z-1|}}=\frac{|z||z-1|}{Im(z)}=\frac{|z-1|}{\frac{Im(z)}{|z|}}=\frac{|BC|}{\text{sen}\hat{A}}.$$

■

4.1.2 Problemas Geométricos

Exemplo 4.1. Seja um quadrado $ABCD$ de centro O e sejam J e N os pontos médios dos segmentos BO e CD, respectivamente. Prove que o triângulo AJN é isósceles[1] e retângulo.

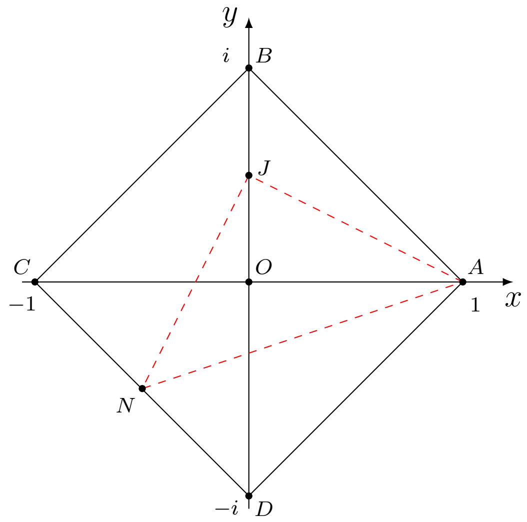
Resolução:

Considere o ponto O a origem do plano complexo e sejam as raízes quartas da unidade, $1, i, -1$ e $-i$, as coordenadas dos pontos A, B, C e D, respectivamente. Os pontos J e N são, respectivamente, $J=\frac{i}{2}$ e $N=\frac{-1-i}{2}$. Desta forma,

$$\frac{AJ}{JN}=\frac{1-\frac{i}{2}}{\frac{-1-i}{2}-\frac{i}{2}}=\frac{2-i}{-1-2i}=\frac{(-1-2i)i}{-1-2i}=i$$

[1] Triângulo isósceles é um polígono que apresenta três lados, sendo dois deles congruentes (mesma medida).

Figura 13 – Quadrado *ABCD*



Fonte: Adaptada de Feitosa (2013, p.58).

Então $AJ \perp JN$ e $AJ = NJ$.

4.2 FÍSICA

Números complexos são números que **não tem significado físico**, porém, são muito úteis para a resolução de determinadas equações.

4.2.1 Mecânica Quântica

4.2.1.1 Movimento livre de uma partícula

O movimento livre de uma partícula ao longo do eixo x, em uma única direção, é descrita pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

onde k é um número qualquer, pela identidade de Euler (B.2), temos

$$e^{ikx} = \cos{(kx)} + i\,\mathrm{sen}(kx).$$

Para se calcular a probabilidade de a partícula se encontrar em determinada região é preciso resolver uma integral do tipo:

$$\int_a^b \mid \psi(x) \mid^2 \mathrm{d}x.$$

Pela propriedade do conjugado item (3.2.3), sabemos que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, logo:

$$\int_a^b Ae^{ikx} \cdot Ae^{-ikx} \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow A^2 \int_a^b \mathrm{d}x = A^2(b-a).$$

O movimento livre de uma partícula ao longo do eixo x, nas duas direções, é descrito pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

É mais conveniente escrever a função acima em termos de seno e cosseno, aplicando a fórmula de Euler, fica da seguinte forma:

$$\psi(x) = A(\cos kx + i\,\mathrm{sen}kx) + B(\cos kx - i\,\mathrm{sen}kx)$$
$$\psi(x) = (A+B)\cos kx + (A-B)i\,\mathrm{sen}kx$$

Seja $C = (A+B)$ e $D = (A-B)i$, então:

$$\psi(x) = C(\cos kx) + D(\,\mathrm{sen}kx).$$

Esse exercício sobre a função de onda pode ser encontrado em: Professor Thiago.

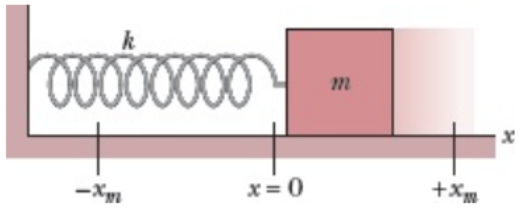
Caso os leitores desse TCC desejem estudar um pouco mais acerca da função de onda na mecânica quântica indica-se o livro de Griffiths (2011) no capítulo 1.

4.2.2 Oscilador Harmônico Simples

Um movimento harmônico simples é um tipo de movimento em que o corpo[2] descreve pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio. Na realidade quando a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio dizemos que a oscilação denomina-se **movimento harmônico simples**, abreviado por **MHS** (Young; Freedman, 2008).

[2] Em física, um corpo (algumas vezes chamado apenas de objeto) é a coleção de massas tomadas uma a uma. Por exemplo, uma bola de basebol pode ser considerada um objeto, mas ela também consiste de muitas partículas (partes de matéria).

Figura 14 – Bloco de massa m preso a uma mola de constante elástica k.



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p.220).

Na Figura 14 tem-se um bloco de massa m, que está preso a uma mola com constante k. Desconsiderando qualquer tipo de força, como o atrito, esse sistema descreve o Movimento Harmônico Simples, que oscila entre ($-x_m$ e $+x_m$), sujeito a uma força restauradora dada por:

$$F_R = -kx$$

onde k é a constante elástica da mola e x é a deformidade sofrida pela mola. Como F é a única força atuando, podemos aplicar a segunda lei de Newton ao sistema, teremos então:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow -kx = m \cdot a \Rightarrow -kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} + kx = 0.$$

Deste modo, chegamos a uma equação diferencial, linear, homogênia de segunda ordem dada por:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} + kx = 0. \tag{4.2}$$

aqui utilizaremos o método usual de resolução de uma equação diferencial linear de segunda ordem.

Supondo que $x(t) = e^{pt}$ seja solução, onde p é o parâmetro e t é o tempo. A equação diferencial linear de segunda ordem pode admitir até duas soluções. Conhecendo o valor de p podemos escrever a solução geral $x(t)$, como uma combinação linear na forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

onde x_1 e x_2 são soluções independentes e c_1 e c_2 constantes arbitrarias a serem determinadas pelas condições iniciais do problema.

Considerando que x_1 e x_2 admitem soluções na forma $x = e^{pt}$, vamos usar uma solução na EDO:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, t^2}\left(e^{pt}\right) + \frac{k}{m}e^{pt} = 0,$$

derivando, teremos:

$$p^2e^{pt} + \frac{k}{m}e^{pt} = 0 \Rightarrow e^{pt}\left(p^2 + \frac{k}{m}\right) = 0,$$

agora, dividindo a equação acima por e^{pt}, temos:

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0 \tag{4.3}$$

onde a equação (4.3) está na forma polinomial do segundo grau, resolvendo-a, temos:

$$p^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{k \cdot i^2}{m}} \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

no qual $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ é uma frequência angular de oscilação do sistema. Com isso, podemos fazer:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \qquad \text{(Frequência angular)}$$

deste modo, temos:

$$p = \pm iw \Rightarrow p' = i\omega \ \text{ e } \ p'' = -i\omega$$

com isso, as duas soluções independentes x_1 e x_1 podem ser expressas da seguinte forma:

$$x_1 = c_1e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x_2 = c_2e^{-i\omega t} \tag{4.4}$$

assim, a solução geral, será dada por:

$$x(t) = c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t} \tag{4.5}$$

onde c_1 e c_2 devem ser delimitados por meio das condições iniciais do problema

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Aplicando essas condições iniciais em (4.5), temos

$$x(0) = c_1e^{i\omega \cdot 0} + c_2e^{-i\omega \cdot 0} \Rightarrow x(0) = c_1 + c_2.$$

Aplicando a segunda condição inicial, $v(0) = v_0$. Lembrando que $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}x(t)$, ou seja, precisamos derivar a solução geral com relação ao tempo.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t}\right) \\ &= i\omega c_1e^{i\omega t} - i\omega c_2e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Aplicando a condição $v(0)$, temos que:

$$\begin{aligned} v(0) &= i\omega c_1 e^{i\omega\cdot 0} - i\omega c_2 e^{-\omega\cdot 0} \\ &= i\omega c_1 - i\omega c_2. \end{aligned}$$

Para $v(0) = v_0$, temos $i\omega c_1 - i\omega c_2 = 0$, com isso, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} i\omega c_1 - i\omega c_2 = v_0 \\ c_1 + c_2 = x_0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$c_1 + c_2 = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0 - c_2$$

daí, temos

$$\begin{aligned} i\omega(x_0 - c_2) - i\omega c_2 = v_0 &\Rightarrow i\omega[(x_0 - c_2) - c_2] = v_0 \\ &\Rightarrow i\omega[x_0 - 2c_2] = v_0 \\ &\Rightarrow x_0 - 2c_2 = \frac{v_0}{i\omega} \Rightarrow -2c_2 = \frac{v_0}{i\omega} - x_0 \\ &\Rightarrow 2c_2 = \frac{-v_0}{i\omega} + x_0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 = x_0 \Rightarrow c_1 + \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right) = x_0 &\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right) + x_0 \\ &\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Substituindo na solução geral, obtemos:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{i\omega t} + \left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t}\right] \tag{4.7}$$

Utilizando a fórmula de Euler (B.2), podemos reescrever a equação (4.7), por:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)(\cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)) + \left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)(\cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t))\right].$$

Agora efetuando a distributividade, temos:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{2}[&x_0\cos(\omega t) + ix_0\,\mathrm{sen}(\omega t) - i\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) - i^2\frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ &+ x_0\cos(\omega t) - ix_0\,\mathrm{sen}(\omega t) + i\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) - i^2\frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)] \end{aligned}$$

como $i^2 = -1$, podemos reduzir os termos semelhantes, obtemos então:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[2x_0\cos(\omega t) + 2\frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

como x_0, v_0 e ω são quantidades constantes, podemos fazer o seguinte:

$$x_0 = A\cos(\theta_0) \quad \text{e} \quad \frac{V_0}{\omega} = -A\,\text{sen}(\theta_0).$$

Deste modo, temos a seguinte expressão:

$$x(t) = A\cos(\theta_0)\cdot\cos(\omega t) - A\,\text{sen}(\theta_0)\cdot\,\text{sen}(\omega t)$$

utilizando o (6) cosseno da soma, temos:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{4.8}$$

que é a Solução Geral da Equação Diferencial do Oscilador Harmônico.

Ou seja, a solução da equação geral permite determinar a posição que o corpo oscilador está ocupando ao longo do eixo x em cada instante de tempo, onde:

A é a amplitude do movimento;

ω é a frequência angular de oscilação;

θ_0 é o ângulo inicial do movimento.

A solução geral da equação diferencial do oscilador harmônico simples também pode ser encontrada entrando no link:velezfísica.

Caso os leitores desse TCC desejem estudar um pouco a teoria das equações diferenciais sugere-se estudar as obras de Machado (2000), Boyce e Diprima (2006) e Bronson e Costa (2008).

4.3 Exercícios

Exemplo 4.2. (UFPE) Encontre o menor inteiro positivo n, tal que a potência $(\sqrt{3}+i)^n$ seja um número real.

Resolução:

Podemos escrever $z = a + bi$ na forma polar, ou seja, $z = \sqrt{3} + i$, para aplicarmos a 1º fórmula de De Moivre (3.9).

Representando z no plano complexo, encontramos

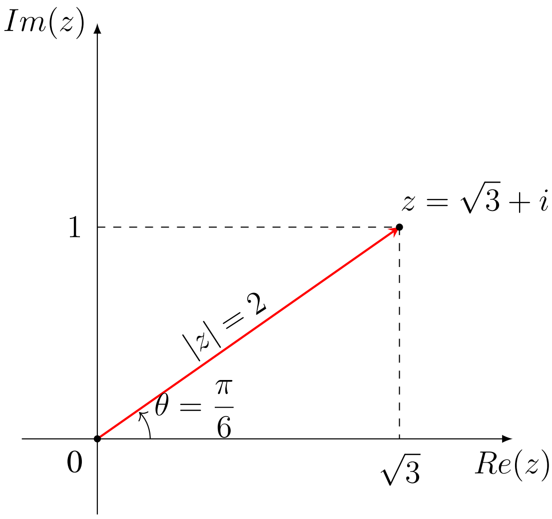
$$|z| = \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ e}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}.$$

concluímos então que $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$

Figura 15 – Representação de $z = \sqrt{3} + i$



Fonte: Adapatada Ferdinando Lobo, 2017, pg.67

Com isso, temos que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Aplicando a 1º fórmula de De Moivre, temos:

$$z^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right).$$

Para que z^n seja um número real, sua parte imaginária deve ser zero. Sendo assim, temos que:

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{n\pi}{6} = 0 + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 12k \\ n = 6 + 12k \end{cases}$$

note que as soluções de n podem ser combinadas numa única solução $n = 6k$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Como queremos o menor inteiro positivo n, tomemos $k = 1$, concluímos que $n = 6$.

Exemplo 4.3. **(ITA)** Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$.

a) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ numa equação polinomial do segundo grau.

b) Determine todas as raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

Resolução: a)

Se $z = x + \dfrac{1}{x}$, então $z^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$, ou seja,

$$z^2 = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2}{x^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Como $x = 0$ não é raiz da equação, podemos dividir $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ por x^2, obtendo $ax^2 + bx + c + \dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{x^2} = 0$, ou seja

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \Rightarrow a(z-2) + bz + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

Assim, chegamos a equação polinomial do segundo grau. **b)** Realizando a mudança de variável sugerido no item **a**, podemos então transformar a equação em uma equação polinomial do segundo grau. Seja $z = x + \dfrac{1}{x}$, como 0 não é raiz da equação podemos dividir $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ por x^2, obtendo $x^2 + 3x - 2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$, ou seja,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0 \Rightarrow (z^2 - 2) + 3z - 2 = 0 \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0.$$

Temos como raízes $z = 1$ ou $z = -4$. Como $z = x + \dfrac{1}{x}$, temos duas possibilidades:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

ou

$$x + \frac{1}{x} = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{3}.$$

Portanto, as raízes da equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$, são $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ e $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma breve história dos números complexos, as contribuições de matemáticos para o desenvolvimento deste conjunto e também para que fossem definitivamente aceitos na Matemática. Esta contextualização histórica é importante para a compreensão das dificuldades que o conteúdo dos números complexos enfrentam para serem apresentados.

Apresentamos a unidade imaginária, a fim de, em seguida, mostrarmos a definição quanto aos números complexos de forma clara e objetiva, bem como suas propriedades e operações, assim como suas representações, a fim de capacitar o leitor a realizar operações com os números complexos em todas as suas formas e representá-lo geometricamente.

Trazemos as aplicações dos números complexos, o que é um dos tópicos principais do trabalho, onde esperamos que estas aplicações, juntamente ao contexto histórico e teórico, sejam utilizados tanto por professores do ensino médio quanto pelos graduandos em matemática como material de apoio para seu ensino e aprendizagem.

Por fim, almejamos que este estudo possa enriquecer a compreensão daqueles que têm interesse em explorar esse tópico.

REFERÊNCIAS

AMORIM, J.; SEIMETZ, R.; SCHIMITT, T. **Trigonometria e números complexos**. [S.l.]: Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. Citado na página 21.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações difereenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Citado na página 46.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. Citado na página 14.

BRONSON, R.; COSTA, G. **Equações diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado na página 46.

FEITOSA, L. F. **Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, abril 2013. Citado nas páginas 39 e 41.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 15.

GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado na página 42.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. Citado na página 43.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática elementar: complexos, polinômios e equações**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005. Citado na página 27.

LOBO, F. C. G. D. **Números complexos, polinômios e equações algébricas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017. Citado na página 39.

MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas à física**. 2. ed. Ponta Grossa: UEPG, 2000. Citado na página 46.

PACIOLI, L. **Summa de Arithmetica geometria proportioni : et proportionalita...** Paganino de Paganini, 1523. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iqgPe49fhrsC>. Citado na página 17.

RIBEIRO, R. C. de N. **Números complexos: aplicações**. Tese (Doutorado) — [sn], 2015. Citado nas páginas 16 e 33.

ROQUE, T. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012. Citado nas páginas 16, 17 e 33.

SILVA, C. M. **Números complexos e aplicações ao Ensino Médio**. Vitória: [s.n.], 2019. Citado na página 17.

SILVA, M. I. A. d. A. M. **Os números imaginários:(um estudo sobre) a sua "realidade"**. Tese (Doutorado), 2005. Citado nas páginas 17 e 19.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física II: termodinâmica e ondas**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008. Citado na página 42.

ANEXO A – FÓRMULA DE CARDANO

Qualquer equação polinomial do terceiro grau pode ser escrita na forma reduzida da seguinte forma:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{A.1}$$

Seja $x = (a + b)$, reescrevendo a equação acima:

$$(a+b)^3 + p(a+b) + q = 0$$

desenvolvendo o cubo da soma,

$$x^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$x^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$x^3 = 3ab \cdot x + a^3 + b^3$$

$$x^3 - 3ab \cdot x - (a^3 + b^3) = 0 \tag{A.2}$$

As equações (Equação A.1) e (Equação A.2) são a mesma equação representadas de formas distintas. Então:

$$px = -3ab \cdot x$$

$$p = \frac{-3ab \cdot x}{x}$$

$$p = -3ab$$

$$-\frac{p}{3} = ab$$

Elevando ambos os membros ao cubo, temos:

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 = (ab)^3$$

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 = a^3b^3.$$

E

$$q = -(a^3 + b^3)$$

$$-q = a^3 + b^3$$

a^3 e b^3 são raízes de equação quadrática $x^2 + qx - \left(\frac{p^3}{3}\right) = 0$, resolvendo a equação quadrática, temos:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot (-\frac{p}{3})^3}}{2}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + 4 \cdot (\frac{p}{3})^3}{4}}$$

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot (-\frac{p}{3})^3}}{2}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$x = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Concluímos que:

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{e} \qquad b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Temos que $x = a + b$, logo, a solução para a Equação A.1 é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{A.3}$$

Equação A.3 é conhecida como **Fórmula de Cardano**.

ANEXO B – FÓRMULA DE EULER

Roger Cotes[1] (1682 - 1716) foi o matemático que teve a ideia de se medir um ângulo em radiano. Sua obra *Harmonia Mensurarum*, só foi publicada em 1722, anos depois do seu falecimento. Nela ele demonstrava a seguinte relação:

$$\ln(\cos(x) + i\,\text{sen}(x)) = ix \tag{B.1}$$

mais tarde, Leonhard Euler sabendo da existência desse resultado, publicou em 1748, seu livro (*INTRODUCTION in analysin INFINITORUM*), que mostrou uma demonstração alternativa para a relação de *Roger Cotes*, que é conhecida como a **Fórmula de Euler:**

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x). \tag{B.2}$$

Demonstração. A série do cosseno, seno e exponencial é dada da da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\text{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots
\end{aligned}$$

Partindo da série e^x, acrescenta-se a unidade imaginária a cada x, ou seja:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots$$

Sabemos que i se repete após i^4. Temos:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right]}_{\cos(x)} + i\underbrace{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right]}_{\text{sen}(x)}$$

□

[1] Foi um matemático inglês. Membro da Royal Society, conhecido por trabalhar conjuntamente com Isaac Newton, revisando a segunda edição de seu famoso livro, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, antes da publicação.

Ao substituir x por π, na fórmula de Euler, obtemos:

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i\,\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{0}$$

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{B.3}$$

Temos que a (Equação B.3) é conhecida como a **Identidade de Euler.**

ANEXO C – IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Utilizaremos no nosso trabalho alguma das identidades trigonométricas, e as apresentarei em seguida para enriquecer nosso trabalho.

1. **Identidades de quociente:**

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

2. **Identidades recíprocas:**

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)}.$$

3. **Identidades pitagóricas:**

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad \operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta), \quad \cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta).$$

4. **Identidades associadas à paridade:**

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta), \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}(\theta).$$

5. **Identidades de arcos complementares:**

$$\cos(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right);$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \qquad \cot(\theta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right);$$

$$\csc(\theta) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \qquad \sec(\theta) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

6. **Adição e subtração:**

Seno

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a),$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a).$$

Cosseno

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b),$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

Tangente

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)},$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}.$$