UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FISÍCA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FISÍCA

EVELIN TATIANE MENDES TORQUATO

UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

CAMPINA GRANDE
2023

EVELIN TATIANE MENDES TORQUATO

UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Fisíca.

Área de concentração: Física geral

Orientador: Alex da Silva.

CAMPINA GRANDE
2023

M538b Mendes, Evelin Tatiane dos Santos.
Uma breve revisão sobre as equações de maxwell [manuscrito] / Evelin Tatiane dos Santos Mendes. - 2023.
23 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Alex da Silva, Coordenação do Curso de Física - CCT. "

1. Campo elétrico. 2. Equações de Maxwell. 3. Eletromagnetismo. 4. Física geral. I. Título

21. ed. CDD 530

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

EVELIN TATIANE MENDES TORQUATO

UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Fisíca.

Área de concentração: Física Geral

Aprovada em: 01/12/2023.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Alex da Silva
Orientador

Profa. Dra. Ruth Brito de Figueiredo Melo
Examinadora

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Examinador

Aos meus pais, Adalberto e Kátia, pelo amor e cuidado, DEDICO.

”O mundo pode estar completamente louco e a vida pode ser um trabalho em vão; mas prefiro ser bobo do que preguiçoso, e não desistiria da vida por causa da dor.” **George Bernard Shaw**

SUMÁRIO

UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Evelin Tatiane Mendes Torquato[1]

RESUMO

O presente trabalho aborda o desenvolvimento de estudos relacionados a eletricidade, desde as primeiras considerações até o que conhecemos hoje em termos de teoria. O campo elétrico é uma das bases da física que relaciona a interação entre cargas. Exploraremos a lei de Gauss que relaciona o fluxo elétrico através de uma superfície fechada com cargas contidas nela, fornecendo uma forma eficiente de calcular o campo elétrico em situações de simetria. Essa lei é uma das quatro equações de Maxwell para o eletromagnetismo. A lei de Ampère que relaciona os campos magnéticos e corrente elétrica. A lei de Faraday da indução eletromagnética, também equação de Maxwell, descreve como um campo magnético variável no tempo gera uma corrente elétrica, mostrando a correlação entre os campos elétricos e os campos magnéticos. As equações de Maxwell unificam a teoria do eletromagnetismo, descrevendo como campos elétricos e campos magnéticos se relacionam e se propagam. As quatro equações dessa teoria estabelecem bases para a eletricidade, o magnetismo, as ondas eletromagnéticas e vários outros fenômenos observados na natureza. As implicações das equações de Maxwell revolucionaram a compreensão da natureza da luz como uma onda eletromagnética, além de serem essenciais para o desenvolvimento da tecnologia moderna, incluindo a telecomunicação, a eletrônica e a geração de energia. Dessa forma o estudo do campo elétrico, das leis de Gauss, Ampère e Faraday, juntamente com as equações de Maxwell, não só são fundamentais para entendermos a natureza, mas também impulsionam as inovações tecnológicas até os dias atuais.

Palavras chave: Campo elétrico; Equações de Maxwell; Eletromagnetismo; Física geral.

ABSTRACT

The present work addresses the development of studies related to electricity, from its earliest considerations to what we know today in terms of theory. The electric field is one of the cornerstones of physics that relates to the interaction between charges. We will explore Gauss's Law, which correlates the electric flux through a closed surface with charges contained within it, providing an efficient way to calculate the electric field in situations of symmetry. This law is one of the four Maxwell's equations for electromagnetism. Faraday's Law of electromagnetic induction, also a Maxwell equation, describes how a time-varying magnetic field generates an electric current, illustrating the correlation between electric and magnetic fields. Maxwell's equations unify the theory of electromagnetism, describing how electric and magnetic fields relate to and propagate each other. The four equations of this theory establish the foundation for electricity, magnetism, electromagnetic waves, and various other phenomena observed in nature.

[1]Graduando(a) em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

The implications of Maxwell's equations revolutionized the understanding of light as an electromagnetic wave, besides being essential for the development of modern technology, including telecommunication, electronics, and power generation. Therefore, the study of the electric field, Gauss's and Faraday's laws, along with Maxwell's equations, are not only fundamental for understanding nature but also drive technological innovations to this day.

Keywords: Electric field; Maxwell's equations; Electromagnetism; General physics.

1 Introdução

Durante séculos, a humanidade buscou compreender os mistérios com respeito ao universo, e foi por meio de estudos detalhados e meticulosos avanços na física que nos aproximamos de uma compreensão mais profunda das forças fundamentais que regem o nosso mundo. O estudo do eletromagnetismo, em particular, revelou-se uma peça essencial nesse quebra-cabeça cósmico.

Explorando trabalhos de renomados físicos, como Griffiths, Halliday, e Reitz, deparamo-nos com um legado de descobertas e conhecimentos que moldaram o entendimento contemporâneo do eletromagnetismo. A fundamentação teórica deste trabalho, baseou-se na exploração dos trabalhos publicados nos livros citados e de outros artigos divulgados a respeito do tema, absorvendo esses conhecimentos dispostos como um alicerce sólido para a investigação.

A compreensão do campo elétrico juntamente com a lei de Gauss, nos mostram como calcular interações de distribuições de cargas. A lei de Faraday estabelece a relação entre campos magnéticos variáveis e a indução de corrente elétrica. A lei de Ámpere, relaciona campo magnético e corrente elétrica. Essas leis foram fundamentais para a construção das equações de Maxwell. Estas equações, fruto do trabalho de James Clerk Maxwell, representam a síntese das descobertas anteriores, unificando os fenômenos elétricos e magnéticos e fornecendo uma estrutura para o eletromagnetismo.

As implicações dessas equações extrapolaram os limites da física teórica, permeando áreas como a engenharia, a comunicação, a medicina e a tecnologia, moldando fundamentalmente a maneira como percebemos e interagimos com o mundo ao nosso redor. Desde a revolução na teoria eletromagnética até os avanços práticos, as equações de Maxwell contribuiram para uma compreensão mais profunda da natureza.

Ao explorar as contribuições da física para a construção das equações de Maxwell e as ramificações que essas equações provocaram na física após sua publicação, buscamos aqui fazer uma revisão bibliográfica a cerca da construção dos conceitos, elétricos e magnéticos, que contribuíram para o eletromagnetismo.

2 Eletricidade

De acordo com Cindra e Teixeira (2005), as primeiras observações de fenômenos elétricos registrados, ocorreram em torno de 600 a.C. na Grécia Antiga. Tales de Mileto observou que uma pedra (âmbar), possuía a propriedade de atrair pequenos objetos quando atritada. Após esse período os estudos a respeito desse tema vieram a progredir somente em torno do século XVII. O termo elétrico foi introduzido por Willian Gilbert, que fazia estudos a respeito dos fenômenos magnéticos em geral e do magnetismo terrestre. O termo elétrico deriva-se da palavra grega Elektron, que significa âmbar. No século XVIII, experimentos notáveis e essenciais para o desenvolvimento de teorias elétricas e magnéticas foram conduzidos por cientistas como Benjamin Franklin, Charles-Augustin de Coulomb, Alessandro Volta e Hans Christian Oersted. Franklin investigou a natureza da eletricidade, cunhou termos como "carga positiva" e "carga negativa" e propôs a teoria do fluido elétrico. Coulomb estabeleceu a Lei de Coulomb, descrevendo a força entre as cargas elétricas. Volta criou a pilha voltaica, através da interação de diferentes materiais metálicos, que antecedeu a bateria. E Oersted descobriu que uma corrente elétrica cria um campo magnético ao redor de um condutor, e um campo magnético pode gerar uma corrente elétrica.

Rocha (2009) afirma que, Michael Faraday, no início do século XIX, desenvolveu experimentos cruciais para o eletromagnetismo. Ele descobriu a indução eletromagnética, formalizou o estudo de linhas de força do Campo Elétrico e formulou leis fundamentais para a eletroquímica e para o eletromagnetismo. Faraday estabeleceu a base para a geração de energia elétrica através da indução eletromagnética. James Clerk Maxwell, posteriormente, unificou as equações de eletricidade e magnetismo em quatro equações diferenciais, conhecidas como Equações de Maxwell. Ele também postulou que a luz é uma forma de onda eletromagnética. Ao final do século XIX foram feitas aplicações práticas, que resultou na invenção do telégrafo de Chappe, a lâmpada incandescente de Thomas Edison, entre outros, desenvolvidas a partir dos princípios do eletromagnetismo.

Nessa seção iremos explorar o desenvolvimento de conceitos básicos da eletricidade a respeito de cargas elétricas e suas interações. O estudo dessas interações fornecidos através da lei de Coulomb, estudaremos o cálculo do campo elétrico de cargas pontuais, de densidade de cargas e o cálculo através da lei de Gauss.

2.1 Cargas elétricas

"Carga é uma propriedade elétrica das partículas atômicas que compõem a matéria, medida em Coulomb (C)"(Sadiku, 2013, p. 5). Antes de Benjamin Franklin, as cargas eram consideradas como eletricidade vítrea para cargas positivas e eletricidade resinosa para cargas negativas. Tais informações dadas pela propriedade de atrair corpos ou repulsá-los. O termo positivo e negativo só passou a ser usado após Franklin denominá-los dessa forma.

As cargas podem ser encontradas em qualquer corpo. Quando em seu estado natural (equilíbrio), não tem nenhuma interação entre si ou com o meio externo, mas se esse corpo for eletrizado, passa a interagir com o meio, repulsando ou atraindo pequenos corpos. Para esse corpo ser eletrizado, ele precisa passar por ao menos um dos três processos de eletrização, por atrito, contato ou indução. Sendo a eletrização por atrito a mais comum de ser demonstrada visualmente. Durante o processo de eletrização o corpo carregado pode adquirir dois sinais de cargas, determinados pela quantidade de elétrons ou prótons que ela possua. O próton é comumente conhecido como carga positiva, caracterizado por atrair corpos em repouso ou cargas opostas. Já os elétrons são as cargas negativas. Há também os nêutrons, que são as cargas neutras. Cargas de sinais opostos se atraem, visto na figura (1) e cargas de mesmo sinal se repelem, como mostra a figura (2) (Hallyday, 1984; Young e Freedman, 2015).

Um corpo só está eletricamente carregado quando há um desequilíbrio das cargas. Se

Figura 1: Cargas de sinais contrários.

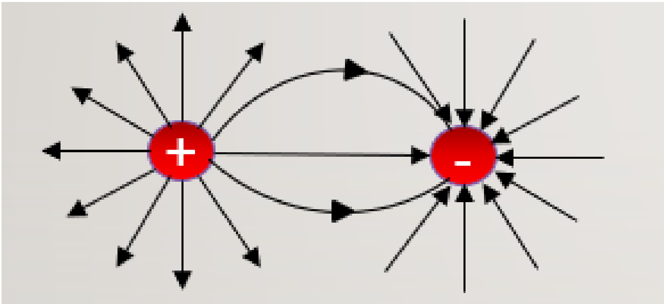
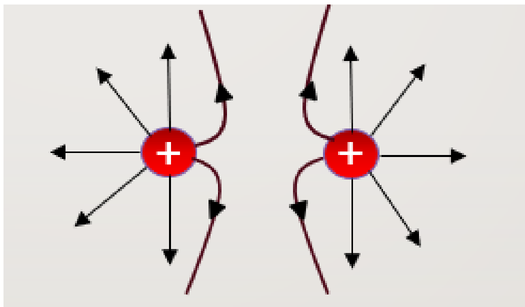


Figura 2: Cargas de sinais iguais.



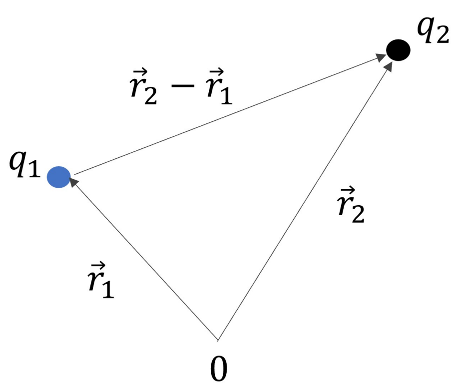
Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

tem mais elétrons do que prótons, este corpo está carregado negativamente. Quando há mais prótons do que elétrons, então o corpo está carregado positivamente. Os melhores condutores são os metais, embora se tenha outros condutores como o corpo humano, água, etc. Os matérias que não conduzem eletricidade são conhecidos como dielétricos ou isolantes, como o plástico, vidro, ebonite, etc (Hallyday, 1984; Young e Freedman, 2015).

2.2 Lei de Coulomb

De acordo com Young e Friedman (2015), vemos que ao final do século XVIII, Coulomb utilizou uma balança de torção afim de estudar sobre as forças de interação entre partículas carregadas. Para cargas puntiformes onde a carga é muito menor do que a distância r que os separa, Coulomb notou que a força elétrica entre eles é proporcional a $1/r^2$, ou seja, se a distância r dobrar, a força reduz a um quarto do valor inicial, caso a distancia r reduza pela metade, a força entre os corpos será quatro vezes maior do que a inicial. Esta força elétrica depende das cargas. Para realizar seu experimento, Coulomb dividiu uma carga em duas partes iguais, separadas a uma distância que será melhor vista na figura (3). Com isso ele verificou que a força elétrica entre as duas cargas q_1 e q_2 é proporcional a cada uma das cargas e proporcional ao produto das duas cargas.

Figura 3: Localização das cargas.



Fonte: Spinelly, 2023.

"Desse modo, Coulomb estabeleceu a relação conhecida como Lei de Coulomb: O módulo da força elétrica entre duas cargas puntiformes é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas"(Young e Friedman, 2015, p. 9). Em termos matemáticos, podemos expressar essa relação como sendo:

$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \ , \tag{1}$$

onde o vetor $\vec{F}$ é a força exercida pelas cargas, q_1 e q_2 são as cargas, $|\vec{r_2} - \vec{r_1}|$ é a distância entre elas, r_1 localiza a carga q_1 e r_2 localiza q_2, k é a constante de proporcionalidade cujo valor vai depender do sistema de unidades utilizado no problema.

A direção da força de qualquer uma das cargas sempre será ao longo da linha reta que passa pelas cargas. Se q_1 e q_2 tiverem o mesmo sinal, as forças serão repulsivas, se os sinais forem opostos, então as forças serão atrativas. Como o estudo da quantização das cargas foi realizado por Coulomb, então dessa forma a unidade de medida utilizada para representar a quantidade de cargas em uma partícula é Coulomb (C). A constante k da equação da força elétrica que envolve as cargas consideramos como sendo $1/4\pi\varepsilon_0$, onde ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo que vale aproximadamente 8,85x10^{-12} C^2/Nm^2. Logo, o valor de $k = 9,0.10^9$ Nm^2/C^2 (Young e Friedman, 2015).

2.3 O campo elétrico

O campo elétrico atua em uma região, que possui uma ou mais cargas elétricas, tal como o campo magnético atua nos arredores de um imã. Não conseguimos observá-lo a olho nu, mas a sua presença é notada experimentalmente. Se temos uma carga q_0^+ exercendo uma força de repulsão em outra carga q_1^+, essa força que repulsa age no vazio, não precisa de um meio para se propagar, nem precisa de contato carga-carga. Esta concepção mostra uma interação direta entre as cargas. Analisando uma carga em um ponto qualquer, que tem suas linhas de campo ao redor de si, ao colocarmos outra carga de prova próximo a esse campo, ela vai sofrer interferência, mesmo que não esteja em contato direto. Assim podemos dizer que o campo elétrico é uma região do espaço onde qualquer carga de prova que penetrar sofre uma força de natureza elétrica. Ainda podemos notar que a carga de prova também possui um campo que influencia e atua em relação a carga principal, gerando uma força contrária -$\vec{F}$. Se a carga q_2^+ se mover, a carga q_1^+ irá sentir esse movimento, pois está sofrendo influência do campo elétrico de q_2^+. A carga q_1^+ irá sentir o movimento de q_2^+ através de uma perturbação do campo elétrico, que se propaga com velocidade da luz no vazio (Halliday, 1982).

Utilizando uma carga de prova q_2^+ localizada na origem, para estudarmos a interação do campo elétrico e definí-lo, vamos medir a força elétrica $\vec{F}$ atuante sobre o corpo. Podemos definir o valor de $\vec{F}$ em função do campo elétrico como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2^+} \ . \tag{2}$$

O campo $\vec{E}$ é um vetor devido a força $\vec{F}$ também ser um vetor, já a carga q_2^+ é um escalar com valor constante. A direção do campo $\vec{E}$ será a mesma de $\vec{F}$. O campo elétrico é medido por N/C por conta da razão $\vec{F}/q_2^+$ (Halliday, 1982).

Em uma carga positiva as linhas de campo têm o sentido para fora da carga, vista na figura (5), já a carga negativa, figura (4), o campo terá sentido para dentro da carga.

Figura 4: Carga negativa

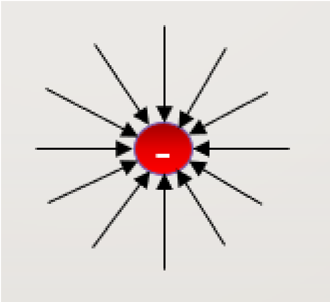
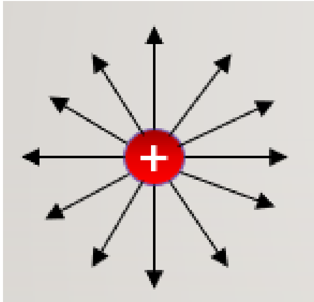


Figura 5: Carga positiva



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

O campo elétrico $\vec{E}$, diminui a medida que a distância para a carga aumenta, nesse caso ele não é constante. Se medirmos o campo a uma distância qualquer pela direita da carga dará o mesmo valor se medirmos na mesma distância do outro lado da linha (Halliday, 1982).

Para calcularmos o campo elétrico, utilizaremos inicialmente uma carga puntiforme q_1. Para fazermos o cálculo teremos que colocar uma carga de prova q_2, assim pela lei de Coulomb, fica:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \ , \tag{3}$$

onde $|\vec{r_2} - \vec{r_1}|$ é a distância entre as cargas.

Tomando a figura 3 como exemplo, a carga q_2 gera um campo ao seu redor, então a carga q_1 sentirá a interação do campo produzido por q_2, assim a intensidade do campo elétrico na carga q_2 é dada por:

$$\vec{E}(\vec{r_2}) = \frac{\vec{F}}{q_2} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r_2}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \ . \tag{4}$$

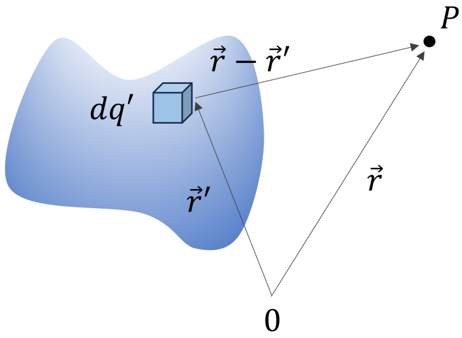
Como foi citado anteriormente a direção de $\vec{E}$ é a mesma da força $\vec{F}$, já o sentido dependerá do sinal da carga. Se tivermos vários campos $\vec{E}$ em um sistema, devemos encontrar o campo de cada carga e depois calcular o campo resultante $\vec{E}_R$ fazendo a somatória de todos campos calculados (Halliday, 1984).

De acordo com o Griffits (1999) a definição de campo elétrico $\vec{E}$ já estabelecida, assumimos que a fonte do campo é uma série de cargas puntiformes discretas. Se ao invés disso, tivermos uma carga distribuída continuamente em uma região, a soma dessas cargas se tornaria uma integral. Visualizando a figura 6 nota-se uma distribuição de cargas, e vamos utilizar a quantidade dq para realizarmos o cálculo do campo nessa distribuição, onde o vetor que localiza a carga é chamado de r. A equação se dará da forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}(\vec{r} - \vec{r'}) \ . \tag{5}$$

Ainda afirma o Griffits (1999), que dependendo da forma em que a carga é distribuída podemos obter o campo $\vec{E}$ através da densidade de carga, que é específica para cada forma de distribuição, seja uma linha, uma superfície ou em um determinado volume.

Figura 6: Densidade de cargas



Fonte: Spinelly, 2023.

- Se a carga estiver distribuída em uma linha, com carga por unidade de comprimento ρ, então $dq' = \rho dl'$.
- Se a carga estiver distribuída em uma superfície com carga por unidade de área σ, então $dq' = \sigma da'$.
- Se a carga estiver preenchendo um volume com carga por unidade de volume ρ, então $dq' = \rho dv'$.

O campo elétrico em suas distribuições:

- Linear:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{r'})dl'}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{6}$$

- Superficial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r'})da'}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{7}$$

- Volumétrica:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})dv'}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{8}$$

2.4 Lei de Gauss

Segundo o Griffits (1999), a lei de Gauss relaciona a carga elétrica contida em uma superfície fechada, denominada superfície Gaussiana, e o fluxo elétrico que atravessa a mesma. A superfície pode ter qualquer forma, tomando uma simetria para melhor se adequar ao problema. A superfície deve ser fechada, dessa forma podemos distinguir pontos que estão dentro da superfície, fora ou sobre a superfície.

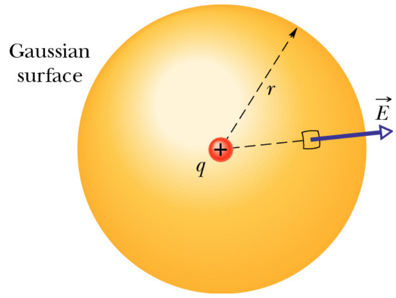
Iniciamos calculando o fluxo elétrico, que nada mais é do que a representação das linhas de campos organizadas de forma simétrica, quanto mais distante da superfície da carga, menos intensidade se tem. O cálculo se dá a partir da equação:

$$\phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da, \tag{9}$$

onde Φ_E é o fluxo elétrico, $\vec{E}$ é o campo e $\hat{n}$ é o vetor unitário.

Já vimos como calcular o campo elétrico de uma distribuição de carga, e com isso vemos que pode ser complicado caso tenha uma integral trabalhosa. Para facilitar esse cálculo podemos introduzir os conceitos de divergência e rotacional em $\vec{E}$. Calcularemos o divergente de $\vec{E}$ a partir da equação de campo de uma distribuição superficial.

Figura 7: Superfície Gaussiana.



Fonte: Halliday, 1984.

Se tivermos com uma carga pontual q na origem, considerando uma superfície esferica entendemos que $da = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\varphi \hat{r}$. O fluxo de $\vec{E}$ através de uma esfera de raio r, representado na figura (7), é:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot r^2 \text{sen}\theta d\theta d\varphi \hat{r}, \tag{10}$$

Tomando uma carga de valor constante, a equação fica:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}\theta d\theta d\varphi, \tag{11}$$

Resolvendo as integrais, o resultado será:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{12}$$

Generalizando a carga pontual para o somatório de cargas fica:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{13}$$

Essa é a forma integral da lei de Gauss. O grande diferencial dessa equação é não depender da superfície e sim da carga total do interior (Griffits, 1999).

Além de termos a lei de Gauss na forma integral, podemos transformá-la em uma equação diferencial aplicando o teorema de Gauss, conhecido como teorema da divergência.

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_v \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) dv. \tag{14}$$

Sabendo que q pode ser escrito em função da densidade de cargas, então:

$$q = \int_v \rho dv, \tag{15}$$

então:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv, \tag{16}$$

.

Usando o teorema da divergência demonstramos que:

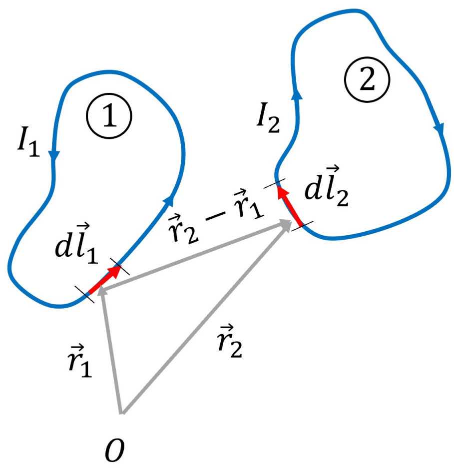
$$\int_v \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \ . \tag{17}$$

Essa é a lei de Gauss na forma diferencial que representa uma das equações de Maxwell para o eletromagnetismo (Griffits, 1999).

3 Lei de Ampère

Antes de mostrar a lei de Ampère vamos demonstrar a lei de Biot-Savart para compreender-mos como se deu o seu desenvolvimento. Conforme Reitz (1982), Oersted havia descoberto que correntes produzem interação magnética.

Figura 8: Interação magnética em dois circuitos de corrente



Fonte: Spinelly, 2023.

Ampère fez alguns experimentos, e notou que a força atuante sobre o circuito 2, gerada pelo circuito 1, como mostra na figura (8), era:

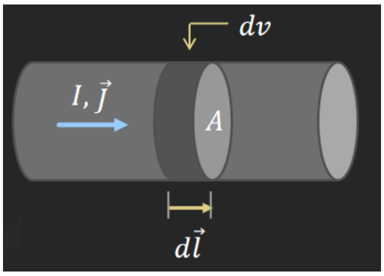
$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \Rightarrow \vec{F}_2 = I_2 \oint_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}\left(\vec{r}_2\right) \ , \tag{18}$$

onde,

$$\vec{B}\,(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l_1} \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \ . \tag{19}$$

Usando as seguintes considerações demonstradas na figura (9): onde $Id\vec{l} = \vec{J}dv$, assim

Figura 9: Fio condutor homogêneo.



Fonte: Spinelly, 2023.

da equação (19), temos:

$$\vec{B}\,(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}\,(\vec{r_1}) \times (\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} dv_1. \tag{20}$$

Com essas informações podemos calcular a lei circuital de Ampère, aplicando o rotacional do campo $\vec{B}$ em relação a r_2, usando a propriedade a seguir:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})\vec{F} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}. \tag{21}$$

Usando na equação (20):

$$\vec{\nabla}_2 \times \vec{B}(\vec{r_2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left\{ \left[\vec{\nabla}_2 \cdot \left(\frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \right) \right] \vec{J}\,(\vec{r_1}) - \left[\vec{J}\,(\vec{r_1}) \cdot \vec{\nabla}_2 \right] \left(\frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \right) \right\} dv_1 \ . \tag{22}$$

Realizando os cálculos dessa expressão, produz:

$$\vec{\nabla}_2 \times \vec{B}\,(\vec{r_2}) = \mu_0 \vec{J}\,(\vec{r_2}) \ \ . \tag{23}$$

Essa equação é conhecida como a forma diferencial da lei de Ampère, para calcularmos a forma integral, basta aplicar o teorema de Stokes, resultando em:

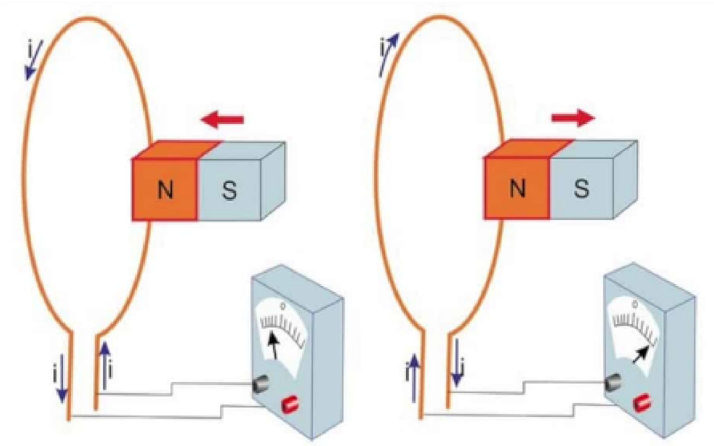
$$\int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \tag{24}$$

A fórmula diferencial da lei de Ampère, foi utilizada por Maxwell para compor as equações do eletromagnetismo, sendo posteriormente corrigida por ele, pois havia uma inconsistência relacionada a corrente estacionária formulada por Ampère (Reitz, 1982).

4 Lei de Faraday

Griffits (1999) afirma que Faraday realizando experimentos com imãs e fios, observou que ao realizar o movimento em um imã próximo à um condutor, surgia uma corrente elétrica. Assim ele verificou que ao ocorrer esse movimento com o imã, gerava-se um campo magnético em função do tempo em que ocorre esse deslocamento, como mostra a figura (10). Quando há esse fluxo magnético, há a detecção de uma discreta corrente elétrica formada por esse fluxo.

Figura 10: Experimento de Faraday.



Fonte: Curado, 2023.

Para calcular essa taxa de fluxo, Faraday utilizou as seguintes relações:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t} \ , \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \tag{25}$$

Um campo magnético que varia no tempo, induz um campo elétrico.

O campo elétrico induzido é responsável pela corrente que passa na espira quando passa o imã por ela. Dessa forma a expressão do fluxo será dada por:

$$\varepsilon = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}, \tag{26}$$

Assim $\vec{E}$ está relacionado a alteração em $\vec{B}$ pela equação:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \ . \tag{27}$$

Esta é a lei de Faraday na forma integral, o sinal negativo na equação vem da lei de Lenz, que afirma que o fluxo magnético se opõe a corrente elétrica (Griffits, 1999).

Em Halliday (1984), é exposto que a lei de Lenz mostra partindo da conservação de energia, na qual o campo magnético variando no tempo, gera uma corrente e esta será direcionada em um sentido no qual tente anular o fluxo magnético que passa por ela. Quando o campo magnético esta se afastando do circuito, a corrente seguirá o sentindo para que restaure o fluxo magnético. Por isso o sinal é negativo, pois a corrente se opõe ao campo afim de restaurá-lo ou aniquilá-lo.

A forma diferencial é feita aplicando o teorema de Stokes, que mostra:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S}, \tag{28}$$

Substituindo a equação (28) em (27), produz:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] \cdot d\vec{S} = 0 \ , \tag{29}$$

Sabemos que $d\vec{S} \neq 0$, logo a igualdade acima só será satisfeita se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ . \tag{30}$$

Essa é a forma diferencial da Lei de Faraday, mostrando que na natureza campos magnéticos variáveis no tempo produz o campo elétrico. Essa equação representa uma das equações de Maxwell do eletromagnetismo.

Para a eletrostática, temos a característica de cargas estacionárias, logo não tem fluxo de campo magnético, assim:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \ . \tag{31}$$

Lei de Faraday para eletrostática, afirmando que as linhas de força, que representam o campo $\vec{E}$, são radiais (Griffits, 1999).

5 As Equações de Maxwell

Segundo o Griffits (1999), antes de Maxwell dar início aos seus trabalhos em relação ao eletromagnetismo, já era conhecido algumas equações da eletrostática e equações que relacionavam o campo elétrico e o campo magnético. Assim ele reuniu as equações para o eletromagnetismo, que são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho; \tag{32}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \tag{33}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}; \tag{34}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{35}$$

Conjunto * de equações.

Como Maxwell era um bom físico, ele notou uma incosistência na lei de Ampère, pois da forma que está ela só pode ser aplicada à correntes estacionárias. Então Maxwell fez uma correção na equação (34), Maxwell percebeu a equação de continuidade, que descreve fenômenos envolvendo cargas e correntes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{36}$$

Se tomarmos $\vec{J}$ estacionária, $\rho = cte \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Então:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \tag{37}$$

Aplicando o divergente na equação (34) em ambos os lados temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \tag{38}$$

Sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times = 0$, logo chegamos a equação (37). Daí Maxwell observa a Lei de Gauss, equação (32) e aplica a parcial em função de t, em ambos os lados:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{39}$$

Usando o resultado da equação (36), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0, \tag{40}$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$ representa os campos que flutuam no tempo.

Maxwell chamou $\vec{J}_D$ de corrente de deslocamento.

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} = \vec{J}_D \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0. \tag{41}$$

Logo para lei de Ampère usando as considerações da equação (41), produz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}. \tag{42}$$

Com a correção feita por Maxwell na equação da lei de Ampère, o conjunto de equações *, ficaram conhecidas como equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

$$\begin{gathered} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

A partir dessas equações se deu o desenvolvimento da teoria eletromagnética.

Para os fenômenos eletrostáticos, usamos a lei de Gauss equação (32) e a lei de Faraday, equação (31). Para os fenômenos magnetostáticos usamos a equação de ausência de monopolos magnéticos, equação (33) e a lei de Ampère antes da correção, equação(34) (Griffits, 1999).

5.1 As equações de Maxwell sem fontes

Usando a consideração de não termos carga, nem corrente elétrica, logo consideramos que $\rho = \vec{J} = 0$. Assim podemos esboçar as equações de Maxwell como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \tag{44}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0;$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0; \tag{45}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Conforme Reitz (1982) Maxwell mostrou, com algumas manupulações matemáticas, as equações de ondas eletromagnéticas que são:

- Para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{46}$$

- Para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{47}$$

5.2 Implicações na física a partir do eletromagnetismo de Maxwell

Maxwell fez a publicação do seu trabalho em 1868. Assim que o seu trabalho começou a ser notado no meio científico, foi-se questionado o meio de propagação das ondas eletromagnéticas, pois até então as ondas conhecidas se propagavam por meio material..

De acordo com Rocha (2009) Hertz estudou a teoria de Maxwell e elaborou um experimento para verificar a existência das ondas eletromagnéticas. Ele fez o experimento e concluiu que as ondas eletromagnéticas realmente existem na natureza, observou também o efeito fotoelétrico, que posteriormente foi comprovado por Einstein. Em 1887 dois físicos chamados Michelson e Morley fizeram um experimento com o intuito de descobrir a existência do éter, pois seria o meio de propagação das ondas eletromagnéticas, mas ao realizar o experimento eles constataram que o Éter não existia, mesmo que houvesse alguma dúvida quanto a teoria do eletromagnetismo não poderia ser contestada, pois no experimento de Hertz já havia sido comprovada a propagação de ondas eletromagnéticas.

Além do problema frente o meio de propagação das ondas eletromagnéticas. Segundo Ramos (2016) houve uma divergência entre as equações de Maxwell e a as transformações de Galileu, que são:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{e} \quad t' = t. \tag{48}$$

O que se conhecia da Física na época, exemplo a mecânica Newtoniana, era invariante frente as transformações de Galileu. Essas transformações mostravam dois observadores, em seus sistemas de referência distintos a uma velocidade constante. O que era observado em um sistema, era igualmente observado no outro, ou seja, descrevia a mesma física. Como as equações de Maxwell não apresentavam essa característica foi preciso que Einstein, Poincaré, Minkowski, Lorentz e outros físicos observassem quais eram as leis de transformações que deixavam invariante a teoria de Maxwell. Após os estudos em resolver esse problema, encontraram as transformações que atualmente conhecemos como as transformações de Lorentz, expostas a seguir:

$$x' = \gamma\,(x - vt)\,, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{e} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{49}$$

onde

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \tag{50}$$

em que v é a velocidade da partícula, c é a velocidade da luz e γ é o fator de Lorentz. Se a velocidade da partícula tender a velocidade da luz, logo o fator de Lorentz tenderá a zero, isso mostra que nenhuma partícula que tenha massa pode atingir a velocidade da luz. Agora no caso de uma partícula à velocidade muito menor que a velocidade da luz, então a razão v/c tenderá a zero e voltaremos as transformações de Galileu pois o $\gamma = 1$, assim analisamos o sistema de forma clássica. Com as transformações de Lorentz passamos a ter um espaço de quatro dimensões, tendo em vista que nas transformações de Galileu só tinham três dimensões (x, y, z). Agora o tempo passa a ser uma coordenada desse espaço. Esse espaço de quatro ou mais dimensões é chamado de espaço de Minkowski ou espaço relativístico.

6 Considerações finais

Neste trabalho exploramos a complexidade da física eletromagnética. Desde os primeiros estudos estabelecidos por figuras notáveis como Gauss, Faraday e Ampère, com suas leis e considerações sobre campo elétrico e ampo magnético, até a teoria do eletromagnetismo expressas nas Equações de Maxwell, testemunhamos o surgimento de um campo científico que moldou não apenas a física, mas também as bases de inúmeras inovações que permeiam nosso mundo moderno.

As equações de Maxwell foram testadas por meios de experimentos e estudos realizados por diversos físicos que o sucederam e investigavam fenômenos dessa natureza, com esses experimentos realizados, tiveram uma melhor compreenção da teoria do eletromagnetismo . Com isso surgiram novas teorias físicas a partir das equações de Maxwell e por isso, essas equações são de fundamental importância para a ciência.

As aplicações práticas do eletromagnetismo são vastas e impactantes. Desde a revolução na tecnologia de comunicação até os avanços médicos, a influência do eletromagnetismo é onipresente. Os dispositivos eletrônicos que utilizamos diariamente, como smartphones, computadores e sistemas de energia, são todos derivados das descobertas e compreensões oferecidas pela teoria eletromagnética. A transmissão de informações, a geração de energia, a medicina diagnóstica por imagens e até mesmo a automação de processos industriais são áreas que se beneficiam das aplicações dessa teoria.

Além disso, a compreensão do eletromagnetismo também desempenha um papel crucial em pesquisas científicas contemporâneas, desde a exploração espacial até os avanços na nanotecnologia, derivado da mecânica quântica. Os estudos sobre o comportamento dos campos elétricos em diferentes escalas, seja no nível macrocósmico dos astros ou no microcosmo das partículas elementares, continuam a desafiar e ampliar nossos conhecimentos sobre o universo.

Então ao encerrar este estudo sobre as contribuições da física para as Equações de Maxwell, é importante reconhecer não apenas o legado teórico dessas equaçõe,s que tanto nos auxiliaram e auxiliam até hoje, mas também a infinidade de inovações e aplicações que elas proporcionaram. O eletromagnetismo é uma força motriz que impulsiona o progresso humano, moldando o curso da história e delineando o futuro da ciência e da tecnologia, foi fundamental para a história do desenvolvimento tecnológico da atualidade.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. AMGH Editora. 2013

CINDRA, José Lourenço; TEIXEIRA, Odete Pacubi Baierl. **A evolução das ideias relacionadas aos fenômenos térmicos e elétricos: algumas similaridades**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 22, n. 3, p. 379-399, 2005.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; KRANE, Kenneth S. **Fundamentos da Física, Vol. 3**. LTC, 1984.

RAMOS, I. R. O. et al. **et al. Sobre a indução do campo eletromagnético em referenciais inerciais mediante transformações de Galileu e Lorentz**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 39, 2016.

REITZ J. R., MILFORD F. J., CHISTY R. W. **Fundamentos da Teoria eletromagnética**. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982.

ROCHA, José Fernando Moura. **O conceito de"campo"em sala de aula: uma abordagem histórico-conceitual**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, p. 1604.1-1604.17, 2009.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física III, Sears e Zemansky: eletromagnetismo**. Pearson, 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sua infinita bondade e cuidado desde sempre comigo, pela força que me deu para persistir e não me deixar desanimar.

Aos meus pais, Adalberto e Kátia, que me apoiaram e me deram palavras de motivação sempre que eu não a encontrava, por se dedicarem ao máximo, da forma que podiam, para manter nossa família, posso considerar que tudo o que fiz foi por vocês.

Aos meus irmãos, Aluska e Adalto, que não viam a hora desse dia chegar e que me apoiaram nessa escolha de ser física. Aos meus sobrinhos, em seus olhos inocentes encontrei ânimo para seguir a jornada, quando estava difícil. A Doce Aline, o meu Miguelito, e meu afilhado Anthony.

Ao meu esposo Alan, me apoiou nos meus dias de ansiedade e desespero, que vi-brou comigo nas minhas melhores notas e que sempre acreditou no meu potencial. Eu te amo Alan, obrigada por permanecer comigo pacientemente durante toda essa jornada.

Aos meus familiares que me perguntavam: E teu curso? Vai terminar não? Eu sabia que a torcida era grande para que isso acontecesse. Minhas tias Cinicleide e Magnólia, obrigada. Aos meus primos, que são tantos, mas eu sei de cada um que torcia por mim. Minhas avós, Nevinha e Victória (in memoriam).

Aos meus amigos, a todos vocês muito obrigada, por segurarem a minha mão quando eu precisava. São muitos amigos,que carrego em todos os lugares que vou, eu agradeço a cada um de vocês. Meus colegas de turmas, Patrick que sempre me estressou com seus sumiços, Thalia, Anafaby, Vitória e Gabi por vários momentos de desespero nas disciplinas para resolver listas e estudar para avaliações, esses momentos tornaram a jornada mais leve, e várias outras pessoas que estiveram juntos encarando a corrida pelo diploma. A Tia Cris por fornecer amor e carinho no seu atendimento e os melhores pães com ovo que já comi. Obrigada!

Aos meus pets, Birunga e margarida que com sua presença tornaram minha vida mais encatadora.

Agradeço também ao meu orientador Alex, por ser essa fonte de saber infinita, foi pela sua docência que eu descobri o meu encanto pela ciência. Me orientou de todos os passos que eu deveria dar e me conduziu no desenvolvimento desse trabalho.

A todo o corpo docente do departamento de física que tem professores brilhantes, em especial a Ana Roberta que pra mim foi como uma mãe, Jean por toda sua paciência e dedicação em ensinar, que também se mostrou como um pai em momentos de partilha, e muitos outros que contribuíram de forma qualitativa na minha formação. Aos professores que se disponibilizaram para compor a banca, Ruth e Jean, vocês são professores brilhantes. Muito obrigada.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram nessa minha jornada e que não foram citados aqui, saibam que sou grata a todos.