UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

LAYLA BRITO MENDES

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E SUAS DEMONSTRAÇÕES

MONTEIRO
2023

LAYLA BRITO MENDES

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Dr. Natan de Assis Lima

MONTEIRO
2023

M538c Mendes, Layla Brito.
Cálculo diferencial e integral e suas demonstrações [manuscrito] / Layla Brito Mendes. - 2023.
86 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Natan de Assis Lima, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. Cálculo integral. 3. Aplicações derivadas. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Talita R. Bezerra - CRB - 15/970

Biblioteca José Rafael de Menezes

LAYLA BRITO MENDES

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Aprovada em: 28/11/23.

BANCA EXAMINADORA

Natan de Assis Lima

Prof. Dr. Natan de Assis Lima
Orientador

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Dr. Cladio Odair Pereira da Silva
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Robson Batista de Sousa

Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Examinador interno (CCHE/UEPB)

"E penso que é assim mesmo que a vida se faz: de pedaços de outras gentes que vão se tornando parte da gente também.

E a melhor parte é que nunca estaremos prontos, finalizados... Haverá sempre um retalho novo para adicionar a alma.

Portanto, obrigada a cada um de vocês, que fazem parte da minha vida e que me permitem engrandecer minha história com os retalhos deixados em mim.

Que eu também possa deixar pedacinhos de mim pelos caminhos e que eles possam ser parte das suas histórias.

E que assim, de retalho em retalho, possamos nos tornar, um dia, um imenso bordado de "nós" ."

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de verdadeira Vida. D'Ele e para Ele, são todas as coisas.

À Nossa Senhora, a quem devo minha toda gratidão! “Vosso coração é minha esperança na travessia desta vida."

Aos meus pais, Aline e Paulo Henrique, e aos meus avós Odete e Luís, Severina, cujo apoio constante e incentivo foram essenciais para que eu pudesse superar os desafios e me manter motivada durante toda a jornada acadêmica.

As minhas irmãs, Lívia e Lorena e aos meus tios Luísa e José Luiz *in memorian*. Vocês são a minha felicidade. Os presentes de Deus para mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Natan, pelas oportunidades concedidas, dedicação e paciência.

Aos membros da banca, Dr. Cladio Odair e Me. Robson, por aceitarem participar deste projeto e por suas valiosas contribuições ao longo do processo.

À André, meu amigo e namorado, por tanto amor, cuidado, força e confiança para seguir em frente, dia após dia, por sua parceria e paciência todo este tempo.

À minha família, amigos e benfeitores, o meu coração profundamente agradecido.

Aos meus colegas de turma Ana, Anderson, Antoniel, Daniel, Joice, Juliana, Milleny e Sidran, com quem compartilhei momentos de aprendizado e troca de ideias. Agradeço por todas as discussões construtivas e contribuições que enriqueceram meu trabalho.

Ao corpo docente, técnicos e funcionários do CCHE, pelo conhecimento transmitido.

Por fim, expresso minha gratidão a todas as fontes de referência, autores e pesquisadores cujas obras embasaram e enriqueceram meu estudo.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, meu muito obrigada.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."

(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos os pontos importantes de nossa pesquisa, que tinha como objetivo conhecer as demonstrações das propriedades dos Limites, das Derivadas e das Integrais, comentadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; de modo que, o desenvolvimento desta pesquisa está voltado para a análise da obtenção dos Teoremas importantes do Cálculo. Para tal, realizou-se um estudo bibliográfico e, posteriormente, procedeu-se com o desenvolvimento das demonstrações das propriedades e teoremas que envolvem esta teoria. A partir dos conceitos de Linearização e Diferenciais obteve-se uma definição concisa de Integrais Definidas e de suas propriedades, principalmente a definição e demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, um dos mais importantes para o Cálculo Integral.

Palavras-chave: Limite; Derivada; Integral; Teorema Fundamental do Cálculo; Cálculo Integral.

ABSTRACT

In this work, we present the key points of our research, which aimed to understand the proofs of the properties of Limits, Derivatives, and Integrals as taught in the Differential and Integral Calculus course. The development of this research is focused on the analysis of obtaining important Calculus theorems. To do so, a bibliographic study was conducted, followed by the development of proofs for the properties and theorems related to this theory. By utilizing concepts of Linearization and Differentials, we achieved a concise definition of Definite Integrals and their properties, particularly the definition and proof of the Fundamental Theorem of Calculus, one of the most significant results in Integral Calculus.

Key-words: Limit; Derivative; Integral; Fundamental Theorem of Calculus; Integral Calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O cálculo foi inicialmente desenvolvido para atender às necessidades matemáticas, sobretudo as de natureza mecânica, dos cientistas dos séculos XVI e $XVII$. Desde então, desempenhou um papel fundamental no avanço da ciência e da tecnologia. O cálculo se tornou uma poderosa ferramenta matemática, permitindo a compreensão e a modelagem de fenômenos complexos.

Thomas (2002) argumenta que o cálculo é a matemática dos movimentos e das variações. Onde há movimento e crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração o cálculo é a matemática a ser empregada.

O Cálculo Integral e Diferencial desempenha um papel central em diversas áreas do conhecimento, abrangendo desde a física e a engenharia até a economia etc. A importância do Cálculo Diferencial e Integral reside na capacidade de descrever quantitativamente o comportamento e as relações entre variáveis em sistemas contínuos. A força e relevância do Cálculo se manifestam na aplicação de conceitos essenciais, tais como limite, derivada e integral, que possibilitam a captura e quantificação de padrões e tendências em uma ampla gama de fenômenos em diversas áreas. Através de suas definições e propriedades, podemos determinar velocidade instantânea, aceleração, área, volume, massa, força, entre outras, sendo possível descrever, analisar e tirar conclusões sobre uma determinada grandeza em estudo.

O Cálculo Diferencial é baseado em três conceitos: limites, derivadas e diferenciação. O conceito de limite ocorre em muitas aplicações das ciências naturais, por exemplo, determinar a velocidade e a aceleração de um móvel, determinar a reta tangente à curva e determinar áreas de figuras planas (Clark; Lima, 2012). A definição do limite de uma função f é uma das ideias fundamentais que distinguem o Cálculo da Álgebra e da Geometria.

O conceito de Derivada surge naturalmente na análise de fenômenos físicos que envolvem grandezas que variam com o tempo como: inflação da moeda, a velocidade e aceleração de um foguete, dentre outros (Clark; Lima, 2012). As Derivadas são utilizadas para descrever a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto específico.

Segundo Maciel e Lima (2005), o Cálculo Integral concentra-se em dois conceitos principais: soma de Riemann e Integral Definida. A soma de Riemann é uma aproximação da área sob uma curva, dividindo-a em retângulos menores. A ideia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas, partindo do pressuposto de que elas podem ser "quebradas" em pequenos pedaços e, depois, soma-se a contribuição que cada parte dá. A relação entre o papel da derivada e da primitiva está contida no teorema fundamental do Cálculo, que é uma das mais importantes ideias do Cálculo.

As demonstrações que envolvem o Cálculo Integral e Diferencial são primordiais para o entendimento dos conceitos e o avanço na área. As suas demonstrações mais importantes envolvem: a regra da cadeia, que vai permitir calcular a derivada de funções compostas; a regra do produto, que permite calcular a derivada do produto de duas funções; e a regra do quociente, que permite calcular a derivada do quociente de duas funções.

Para Flemming e Gonçalves (2006) outras demonstrações importantes incluem o Teorema do Valor Médio que estabelece que, em um intervalo, existe pelo menos um ponto em que a taxa de variação de uma função é igual à sua variação média, e o Teorema de Rolle que estabelece que, se uma função é contínua em um intervalo e é igual a zero em seus pontos extremos, então existe pelo menos um ponto em que a derivada é igual a zero.

Este trabalho tem como objetivo explorar e analisar os fundamentos do cálculo integral e diferencial, investigando suas aplicações práticas e demonstrando seus teoremas, definições bem como sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico.

Para a realização desta pesquisa, foi utilizada a bibliografia sugerida pelo orientador voltada totalmente para o Cálculo, como exemplo: Cálculo A (Flemming; Gonçalves, 2006), Cálculo de uma variável Real (Clark; Lima, 2012), Análise Real: funções de uma variável (Lima, 2012), Introdução a Análise Real (Maciel; Lima, 2005). O tema desta pesquisa foi escolhido a partir do PIBIC, visando consolidar o trabalho realizado ao longo do programa, aprofundando-se em questões específicas e apresentar os resultados obtidos de forma sistemática e estruturada.

Essas fontes bibliográficas fornecem informações e embasamento teórico para o trabalho, permitindo ao pesquisador contextualizar o tema, identificar lacunas e desenvolver uma fundamentação teórica sólida. Essa pesquisa é considerada bibliográfica pois foi realizado um estudo de fontes relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral e suas demonstrações. Esse estudo é obtido por uma revisão de literatura, demonstrando as proposições, teoremas, através de uma definição formal.

Para Gil (2017), a pesquisa bibliográfica envolve uma busca, seleção e análise de fontes bibliográficas relevantes sobre um determinado tema. Ao realizar uma pesquisa bibliográfica, o pesquisador busca identificar e examinar publicações relevantes, como livros, artigos científicos, teses, relatórios e outros documentos.

É muito importante que tenhamos sempre um entendimento sobre as demonstrações dos teoremas e das propriedades dos limites, das derivadas e suas regras e das integrais, por entender que é impossível fazer matemática sem demonstrar resultados. Compreender de onde surgiu cada propriedade, cada fórmula e saber realizar corretamente as manipulações matemáticas para obtê-las.

Inicialmente, esta pesquisa foi desenvolvida no Programa de Iniciação Científica (PIBIC) no decorrer de 1(um) ano. Utilizar o projeto de pesquisa desenvolvido no PIBIC como Trabalho de Conclusão de Curso valoriza e aproveita o trabalho realizado durante o programa, permitindo explorar a fundo o tema de estudo, apresentando uma pesquisa de qualidade como parte integrante da formação acadêmica.

Esta pesquisa foi realizada em algumas etapas. Na primeira etapa, fizemos uma revisão bibliográfica para explorar e analisar a literatura existente sobre o tema, que fornece embasamento teórico contextualizando com o tema abordado na pesquisa. A segunda etapa, foi organizada e sintetizada os materiais encontrados, organizando-os de forma sistemática, destacando as principais ideias e informações encontradas para serem demonstradas posteriormente que estarão dispostos nos capítulos subsequentes. Por fim, foi realizada a demonstração dos resultados obtidos a partir da pesquisa bibliográfica dentre eles: teoremas e aplicações.

2 LIMITES DE FUNÇÕES

A seguir, apresentaremos uma abordagem intuitiva para a definição de limite, seguida pela análise das propriedades e teoremas convencionais relacionados a este conceito. Em etapas subsequentes, exploraremos a definição de continuidade de funções com base no conceito de limites.

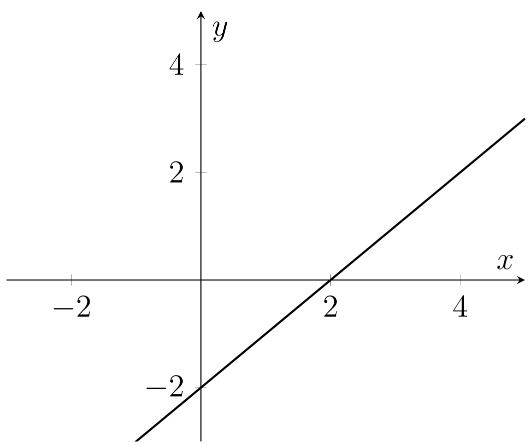
2.1 Noção Intuitiva de Limites

Definir o limite de um a função f é uma das ideias fundamentais que distinguem o Cálculo da Álgebra e da Geometria. Considere que um cientista que deseja obter quanto vale uma medida, quando a pressão do ar for igual a zero. Perceba que, é impossível obter o vácuo perfeito. Portanto, para abordar essa situação, é necessário utilizar medidas cada vez mais próximas de zero. Se os valores dessa medida se aproximam de um número específico, denotado por x, presume-se que, em um vácuo ideal, a medida teria o valor de x. Para começar esta seção, vamos explorar dois exemplos simples e intuitivos de limites.

Exemplo 2.1. Vamos tomar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x - 2$ quando os valores de x se encontram muito próximos de 2.

Solução: Inicialmente, observemos o gráfico da função:

Figura 1



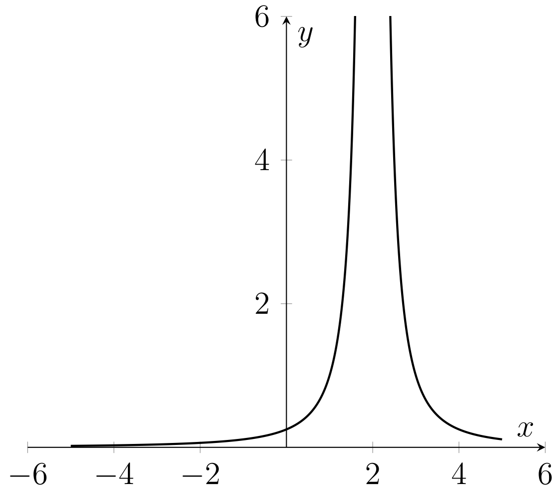
Fonte: Adaptado de (Flemming; Gonçalves, 2006)

Note que, quando nos aproximamos de 2 pelo lado direito, a função se encontra cada vez mais próximo de 0. Do mesmo modo, quando nos aproximamos de 2 pelo lado esquerdo. Perceba que, quando os valores de x se aproximam de 2, à esquerda e à direita, os valores de $f(x) = x - 2$ se aproximam de 0 então, podemos denotar como $\lim_{x \to 2} x - 2 = 0$.

Exemplo 2.2. Tomando função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ quando os valores de x se encontram próximos de 2.

Solução: Observe o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$:

Figura 2



Fonte: Adaptado de (Flemming; Gonçalves, 2006)

Analisando este exemplo, a partir do gráfico temos que, se fizermos os valores de x tão próximo de 2, o limite desta função tende para o infinito (positivamente). Podemos escrever como: $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Após desenvolver uma compreensão intuitiva dos limites, estamos preparados para formalizar e precisar sua definição, conforme apresentado por Thomas (2002).

Definição 2.1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 é L, escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

quando para todo real $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Simbolicamente, temos:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

ou seja, é possível tornar $f(x)$ próximo de L, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo x_0, mas diferente de x_0.

Exemplo 2.3. Temos que $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, se c é uma constante.

De fato, queremos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

Mas, como $f(x) = c$, basta tomar $\epsilon > 0$.

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon \ \therefore \ \lim_{x \to x_0} c = c$$

Exemplo 2.4. Temos que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Com efeito, $\epsilon > 0$, considere $\delta = \epsilon > 0$. Daí temos,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$$

Portanto, $|f(x) - x_0| < \epsilon$. E, assim, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Teorema 2.1. *(Unicidade do limite) O limite, quando existe, é único.*

Demonstração. Suponha que L_1 e L_2 são tais que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \ e \ \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$$

Por definição de limite, tem-se dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \ \delta_2\}$ temos:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isso nos dá $|L_1 - L_2| = 0$, logo $L_1 = L_2$.

■

Exemplo 2.5. Utilizando a definição de limite, prove que

$$\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2.$$

Pela definição, devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Neste caso,

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x - 1) - 2| < \epsilon$$

Pela desigualdade, $|(3x - 1) - 2| < \epsilon$, temos

$$|(3x - 1) - 2| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |3x - 1 - 2| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |3x - 3| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |3(x - 1)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 1| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, temos que se

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow 0 < |(3x - 1) - 2| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$.

Exemplo 2.6. Se a, b e x_0 são números reais, então $\lim_{x \to x_0}(a \cdot x + b) = ax_0 + b$.

Vamos fazer dois casos:

Para $a \neq 0$ temos, pela definição formal do limite que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon.$$

Obtendo δ através da desigualdade que envolve ϵ, temos:

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |ax + b - ax_0 - b| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |ax - ax_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |a \cdot (x - x_0)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |a| \cdot |x - x_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|}$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$ temos:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} (a \cdot x + b) = ax_0 + b.$

2.2 Propriedades dos limites

Teorema 2.2. *Se* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, *valem as seguintes propriedades:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L + M$

Demonstração. Queremos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon.$$

Note que, da hipótese, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1,\ \delta_2\}$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| =$$
$$= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon.$$

■

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L - M$

Demonstração. Queremos demonstrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) - g(x)) - (L - M)| < \epsilon$$

Da hipótese, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 >$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Tome $\delta = min\{\delta_1,\ \delta_2\}$

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow & |(f(x) - g(x)) - (L - M)| \\ & = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) - g(x)) - (L - M)| < \epsilon.$$

■

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L$; $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

Assim, se $0 < |x - x_0| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |cf(x) - cL| &= |c(f(x) - L)| \\ &= |c||f(x) - L| \\ &< |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$. ■

d) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2|M|}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2(1 + |M|)}$$

Para $\epsilon = 1$ existe $\delta_3 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_3$ tem-se $|f(x) - L| < 1$.

Daí,

$$|f(x) - |L| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L|.$$

Então tome $\epsilon = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ logo se $0 < |x - x_0| < \epsilon$ tem- se

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - M| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\
&= |f(x)(g(x) - M) + |M|(f(x) - L)| \\
&\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\
&\leq (1 + |L|) \cdot \frac{\epsilon}{2(1 + |L|)} + |M| \cdot \frac{\epsilon}{2|M|} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

■

e) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$, *desde que* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Demonstração. A partir da propriedade d. demonstrada acima, podemos concluir que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

Seja $\epsilon > 0$. Para demonstrarmos que $\lim_{x \to x_0} \Big(\frac{1}{g(x)}\Big) = \frac{1}{M}$ precisaremos demonstrar que existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$0 < |x \ - \ x_0| < \delta \Rightarrow \Big|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\Big| < \epsilon.$$

Uma vez que $|M| > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{M}{2}.$$

Então, temos que:

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M|.$$

Combinando com a desigualdade $|g(x) - M| < \dfrac{M}{2}$, obtemos:

$$\begin{gathered} ||g(x)| - \|M|| < \frac{|M|}{2} \Rightarrow \\ -\frac{|M|}{2} < ||g(x)| - |M|| < \frac{|M|}{2} \\ \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2} \\ |M| < 2 \cdot |g(x)| < 3|M| \\ \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}. \end{gathered}$$

Portanto, $0 < |x - x_0| < \delta_1$, implica em
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{M \cdot g(x)}\right| \leq \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot |M - g(x)| < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)|.$$
Uma vez que $(\frac{1}{2}) \cdot |M|^2\epsilon > 0$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que para todo x

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |M|^2.$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

$\blacksquare$

f) *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, *então* $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Como $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ temos que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < \epsilon.$$

E, portanto,

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|.$$

∎

g) $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^k = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^k = L^k$ *para qualquer inteiro positivo* $k \in \mathbb{N}^*$

Demonstração. Se $n = 2$, temos

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^2 = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = L \cdot L = L^2.$$

Suponhamos agora que é válido para $n = k$, isto é

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^k = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^k = [L]^k.$$

Agora, vamos mostrar que a desigualdade vale para $n = k + 1$. Tomando

$$g(x) = [f(x)]^k e f(x) = f(x).$$

Obtemos,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{k+1} = \lim_{x \to x_0} \{[f(x)]^k \cdot f(x)\}.$$

Devido ao item d, temos que

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{k+1} = \lim_{x \to x_0} [f(x)]^k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = L^k \cdot L = L^{k+1}.$$

Pelo Princípio de Indução Finita a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Proposição 2.1 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam* f, g *e* h *funções tais que*

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* x *próximo de* x_0*. Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ *então* $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$*.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que,

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, então, $0 < |x - x_0| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$, ou de forma equivalente, $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ e $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Pela hipótese, podemos concluir que $0 < |x - x_0| < \delta$ então

$$L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \epsilon.$$

Isto é,

$$L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Logo, se $0 < |x - x_0| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \epsilon$. Portanto, $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$. ∎

Proposição 2.2. *Sejam f e g tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq c$ para todo x próximo de x_0, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Então $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.*

Demonstração. Temos $|g(x)| \leq c$ em $0 < |x - x_0| < \delta$. Multiplicando essa desigualdade por $|f(x)|$ obtemos;

$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leq c \cdot |f(x)| \text{ em } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

ou seja,

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq c \cdot |f(x)| \text{ em } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

ou ainda,

$$-c \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq c \cdot |f(x)| \text{ em } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Agora, pela propriedade do módulo

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)| = |0| = 0.$$

Logo, utilizando o Teorema do Confronto obtemos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

∎

2.3 Limites Laterais

Para ter um limite L quando x se aproxima de a, uma função f deve ser bem definida em ambos os lados de a e seus valores $f(x)$ devem se aproximar de L quando x se aproxima de a de ambos os lados, à direita e à esquerda. Vamos começar com a definição de limite à direita, observe:

Definição 2.2. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (x_0, c). Podemos dizer que um número L é o limite à direita da função f quando para todo $\epsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que

$$x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Escrevemos,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

E, se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende a x_0 pela direita. Utilizando o símbolo $x \to x_0^+$ para indicar que os valores de x são maiores do que x_0.

Definição 2.3. Seja f uma função definida no intervalo aberto (b, x_0). Podemos dizer que um número L é o limite à esquerda da função f quando para $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que

$$x_0 - \delta < x < x_0.$$

Escrevemos,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

E, se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende a x_0 pela esquerda. Utilizando o símbolo $x \to x_0^-$ para indicar que os valores de x são menores do que x_0.

Exemplo 2.7. Dada a função $f(x) = 2+\sqrt{x-3}$. Determinar, se possível, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ *e* $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

Solução: A função f não está definida para $x \leq 3$. Portanto, não existe $\lim_{x \to 3^-} f(x)$. Agora, vamos calcular $\lim_{x \to 3^+} f(x)$. Aplicando as propriedades vistas anteriormente, temos que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2 + \sqrt{x-3}) = \lim_{x \to 3^+} 2 \ + \ \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 2 + 0 = 2.$$

Teorema 2.3. *Se f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente no ponto x_0, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.*

Demonstração. Vamos mostrar a condição suficiente. A condição necessária é consequência imediata dos limites envolvidos.

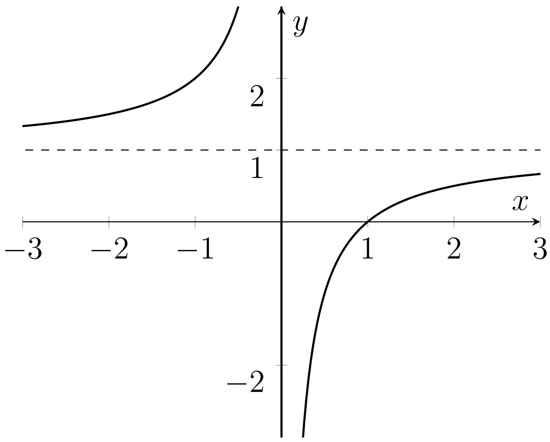
Temos que, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \epsilon$ ou equivalentemente $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Daí, $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x_0 - \delta < x < x_0$ e $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x_0 < x < x_0 + \delta$, o que implica, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. ■

2.4 Limites no Infinito

Vamos observar o comportamento da função $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ cujo gráfico é:

Figura 3



Fonte: Adaptado de (Flemming; Gonçalves, 2006)

Analisando o comportamento da função $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ para valores de x suficientemente grande, pode-se tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos. Similarmente, fazendo x decrescer ilimitadamente vemos que $f(x)$ se aproxima desse mesmo valor 1.

Definição 2.4. Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dizemos que

$$f : X \to \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando dado $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que, se $x > A$, tem-se:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Em termos de notação, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0; x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

De maneira análoga define-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, quando o domínio de f é ilimitado inferiormente: para todo $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Os limites para $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ são, de certa forma, limites laterais (à direita e à esquerda).

Teorema 2.4. *Se n é um número inteiro positivo, então:*

i.) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ii.) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demonstração. *i.*) Provaremos que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que se $x > A$ tem-se

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon \textit{ sempre que } x > A.$$

Através da desigualdade que envolve ϵ, escolhemos A. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{|x^n|} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x^n|}} < \sqrt[n]{\epsilon} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \sqrt[n]{\epsilon} \\
&\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}.
\end{aligned}$$

A desigualdade acima nos sugere $A = \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$. Portanto, temos que

$$x > A = \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon$$

e desta forma,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

ii, observe que, queremos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $B > 0$, tal que se $x < -A$ tem-se

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{|x^n|} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x^n|}} < \sqrt[n]{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}.\end{aligned}$$

Através da desigualdade acima, temos $A = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$. Logo, temos que se $x < -A$ temos:

$$|\frac{1}{x^n} - 0| < \epsilon$$

e desta forma

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

■

Para determinar o limite de uma função racional quando $x \to \pm\infty$, podemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador. O desfecho subsequente é influenciado pelos graus dos polinômios envolvidos. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 2.8. Calcule o $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{x+8}$. **Solução:** Colocando em evidência o termo de maior grau do numerador e denominador, temos

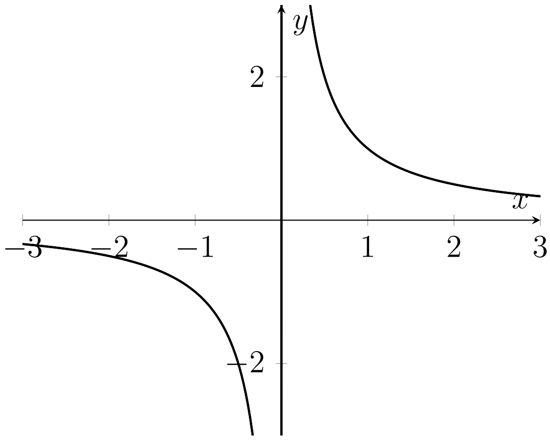
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x+8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\Big(2 - \dfrac{5}{x}\Big)}{x\Big(1 + \dfrac{8}{x}\Big)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

2.5 Limites Infinitos

Ao retomar a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ cujo gráfico é:

Analisando o gráfico acima intuitivamente, percebemos que, podemos fazer o valor de $f(x)$ crescer indefinidamente, tanto na direção positiva quanto na direção negativa, à medida que os valores de x se aproximam da origem.

Figura 4



Fonte: Adaptado de (Flemming; Gonçalves, 2006)

Definição 2.5. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0, exceto, possivelmente, em $x = x_0$.

1. Diz-se que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, quando para todo $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.
2. Diz-se que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, quando para todo $B > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < -B$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

Além das duas definições acima, consideramos os limites laterais infinitos e limites infinitos no infinito. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo, podemos dizer que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ se para qualquer $A > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < x < x_0 + \delta$.

A seguir, apresentamos um teorema muito utilizado no cálculo de limites infinitos.

Teorema 2.5. *Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:*

i.) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.$

ii.) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty,$ *se n é ímpar.*

Demonstração. i.). Devemos mostrar que para qualquer $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < x < \delta$, tem-se

$$\frac{1}{x^n} > A \text{ sempre que } 0 < x < \delta.$$

Utilizando a desigualdade que envolve A e, sabendo que as desigualdades abaixo são equivalentes, temos

$$\frac{1}{x^n} > A \Leftrightarrow x^n < \frac{1}{A} \Leftrightarrow x < \sqrt[n]{\frac{1}{A}}.$$

Tomando $\delta = \sqrt[n]{\frac{1}{A}}$, temos $\frac{1}{x^n} > A$ sempre que $0 < x < \delta$.

ii.). Dado $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{x^n} < -B$ sempre que $-\delta < x < 0$. Temos que n é ímpar então como $x \to 0^- \Rightarrow x^n < 0$ e $\sqrt[n]{x^n} = x$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} < -B &\Leftrightarrow x^n > \frac{1}{-B} \\ &\Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} > \frac{1}{\sqrt[n]{-B}} = \frac{-1}{\sqrt[n]{B}}, \quad \text{pois } n \text{ é ímpar} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-1}{\sqrt[n]{B}}. \end{aligned}$$

Fazendo $\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{B}}$ segue que $\frac{1}{x^n} < -B$ sempre que $-\delta < x < 0$. ∎

2.6 Propriedades dos Limites Infinitos

As propriedades dos Limites permanecem válidas para os limites infinitos, muito embora, devemos tomar cuidado ao combinar funções envolvendo esses limites. A seguir, traremos um Quadro 1 que nos dá um resumo dos fatos principais válidos para os limites infinitos, onde podemos ter $x \to x_0,\ x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to -\infty,\ x \to +\infty$.

Faremos algumas demonstrações.

Demonstração. **Item 01.** Sejam f e g tais que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$. Vamos provar que $\lim_{x\to x_0} h(x) = +\infty$.

Devemos mostrar que, dado $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Seja $A > 0$ qualquer. Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

Quadro 1 – Fatos válidos para limites infinitos.

	limf(x)	**limg(x)**	**h(x)**	**limh(x)**	**simbolicamente**
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)+g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x)-g(x)$	?	$(+\infty)-(+\infty)$ é **indeterminação**
03	$+\infty$	k	$f(x)+g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x)+g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x)\cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x)\cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k>0$	$f(x)\cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty\cdot k = +\infty,\ k>0$
08	$+\infty$	$k<0$	$f(x)\cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty\cdot k = -\infty,\ k<0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x)\cdot g(x)$	?	$\pm\infty\cdot 0$ **é indeterminação**
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ **é indeterminação**
12	$k>0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty,\ k>0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k>0$n	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty, k>0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ **é indeterminação**

Fonte: Adaptado de (Flemming; Gonçalves, 2006).

$f(x) > \dfrac{A}{2}$ sempre que $0 < |x \to x_0| < \delta_1$. Como $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > \dfrac{A}{2}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $h(x) = f(x) + g(x) > \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{2} = A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$ e desta forma $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = +\infty$

■

Os itens 03, 04 seguem de maneira análoga.

Demonstração. **Item 03.**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que

$0 < |x - x_0| < \delta_1$.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = k \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - k| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Então se $0 < |x - x_0| < \delta_2$ tem-se

$$-\epsilon + k < g(x) < \epsilon + k.$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ e dado $B = A + k - \epsilon$ segue que

$$f(x) + g(x) > A + k - \epsilon = B \text{ sempre } 0 < |x \to x_0| < \delta$$

Logo, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ ■

Demonstração. **Item 04.**

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < -A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - k|$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

$\Leftrightarrow -\epsilon + k < g(x) < k + \epsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ e dado $B = A - k + \epsilon > 0$ tem- se

$$f(x) + g(x) < -A + k - \epsilon = -B \text{ sempre } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) = g(x)) = -\infty$ ■

Demonstração. **Item 05.**

Sejam f e g tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Queremos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = +\infty$. Dado $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

Ao tomar $A > 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > \sqrt{A}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Como $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > \sqrt{A}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) > \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A \text{ sempre } 0 < |x - x_0| < \delta$$

e assim $\lim\limits_{x - x_0} h(x) = +\infty$ ■

Os itens 06, 07 e 08 seguem de maneira análoga.

Demonstração. **Item 06.**

Tomando f e g tais que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Queremos mostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -\infty$.

Dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Para $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > \sqrt{A}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

Para $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > -\sqrt{A}$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) > \sqrt{A} \cdot (-\sqrt{A}) = -A \text{ sempre } 0 < |x - x_0| < \delta$$

e, assim, $\lim\limits_{x - x_0} h(x) = -\infty$.

■

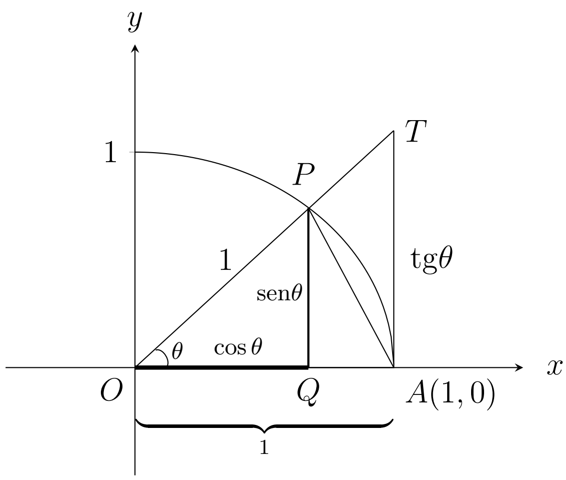
2.7 Dois Limites Fundamentais

Nesta seção iremos calcular dois limites trigonométricos fundamentais, que são de suma importância para caracterizar o cálculo de outros limites. Veja:

Proposição 2.3. *O* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\text{sen}x}{x}$ *é igual a* 1.

Demonstração. Inicialmente, considere uma circunferência de raio 1. Observe a figura abaixo.

Figura 5



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

Primeiramente, admitamos que $x > 0$. Na circunferência de raio 1, um ângulo θ é medido em radianos. Pela figura, podemos observar que

$$A_{OPQ} < A_{OPA} < A_{OTA}$$

onde A_{OPQ} é a área do triângulo OPQ, A_{OPA} é a área do setor circular OPA e A_{OTA} é a área do triângulo OTA. Seja $\text{sen}\theta$ a altura do triângulo A_{OPQ} e $\text{tg}\theta$ a altura do triângulo A_{OTA}, teremos:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{1} \text{ e } \text{tg}\theta = \frac{\text{tg}\theta}{1} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Então, temos $\overline{OQ} = \cos\theta$, $\overline{PQ} = \text{ sen}\theta$ e $\overline{AT} = \text{ tg}\theta$. De modo que,

$$A_{OPQ} < A_{OPA} < A_{OTA}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta < A_{OPA} < \frac{1}{2} \cdot \text{tg}\theta$$

Como a área do setor circular é a fração $\dfrac{\theta}{2 \cdot \pi}$ da área do círculo de raio 1, que é π, temos que a área do setor circular é $\dfrac{\theta}{2}$. A partir disso, encontramos

$$\frac{1}{2}\text{sen}\theta \cdot \cos\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1 \cdot \text{sen}\theta}{2 \cdot \cos\theta}$$
$$\text{sen}\theta \cdot \cos\theta < \theta < \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$
$$\cos\theta < \frac{\theta}{\text{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Agora, façamos $\theta = -y$ onde $y > 0$,

$$\frac{\text{sen}\theta}{\theta} = \frac{\text{sen}(-y)}{(-y)} = \frac{-\text{sen}y}{-y} = \frac{\text{sen}y}{y}.$$

Mas só irá ocorrer se $\theta \to 0^- \Leftrightarrow y \to 0^+$. Logo,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}y}{y} = 1,$$

então $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$ ■

Observação 2.1. De maneira análoga, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}x} = 1.$

A partir da proposição acima, podemos concluir que:

Teorema 2.6. *i.* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = 1$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{tg}x} = 1$

De fato, resolveremos o item *i*. Observe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

De maneira análoga, pode-se mostrar o item *ii*.

Proposição 2.4. *O* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ *é igual a* 0.

Demonstração. Temos,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)},$$

como $\cos^2 x - 1 = -\operatorname{sen}^2 x$, segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cdot (\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

■

2.8 Continuidade

Anteriormente, definimos $\lim_{x\to x_0} f(x)$ analisando o comportamento da função $f(x)$ para valores de x suficiente próximos de x_0. Em alguns casos é possível observar que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pode existir, mesmo que f não esteja definida no ponto x_0 ou, também, se f está definida em x_0 e $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(x_0)$.

Quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ diremos, de acordo com a definição abaixo, que f é contínua em x_0.

Definição 2.6. Dizemos que f é contínua no ponto x_0, se satisfazer as seguintes condições:

i.) f é definida em x_0 (isto é, $x_0 \in dom(f)$);

ii.) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe;

iii.) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Caso uma das três condições supracitadas não forem satisfeitas dizemos que a função f é descontínua no ponto x_0.

Exemplo 2.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Solução: Para que f seja contínua é necessário observar as 3 condições acima. Para este caso, observe que,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Pela definição

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Logo, a terceira condição não é satisfeita pois $2 \neq 1$. Então, f é descontínua em $x_0 = 1$.

Exemplo 2.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Solução: Calculando o limite da função temos que,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1 = f(0)$$

Portanto, satisfaz as condições para que haja continuidade. Então, f é contínua em $x_0 = 0$.

2.9 Propriedades das Funções Contínuas

Teorema 2.7. *Se as funções f, g são contínuas em x_0, então:*

i. *$f + g$ é contínua em x_0;*

Demonstração. Sendo f e g contínuas em x_0, temos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
&= f(x_0)+g(x_0) \\
&= (f+g)(x_0)
\end{aligned}
$$

■

ii. *$f-g$ é contínua em x_0;*

Demonstração. Sendo f e g contínuas em x_0, temos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) \\
\lim_{x\to x_0} g(x) &= g(x_0).
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) &= \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \\
&= f(x_0)-g(x_0) \\
&= (f-g)(x_0)
\end{aligned}
$$

■

iii. *$f\cdot g$ é contínua em x_0;*

Demonstração. Sendo f e g contínuas em x_0, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0), \\
\lim_{x\to x_0} g(x) &= g(x_0).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0)$$ ■

iv. $\dfrac{f}{g}$*, se $g \neq 0$ é contínua em x_0.*

Demonstração. Sendo f e g contínuas em x_0, temos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

E $g(x_0) \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$ ∎

Observação 2.2. Temos que

1. Uma função polinomial é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$;

2. Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio;

3. As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são contínuas para todo número real x;

Proposição 2.5. *Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ e g é contínua em b. Então: $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(b)$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(b)$, isto é, dado $\epsilon > 0$, devo exibir $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - g(b)| < \epsilon$. Dado $\epsilon > 0$, desde que

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$$

Existe $\delta_1 > 0$ tal que tem-se

$$0 < |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon$$

Por outro lado como $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, para esse $\delta_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |y - b| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$$

∎

Proposição 2.6. *Suponha que f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0.*

Demonstração. Como f é contínua em x_0, podemos aplicar a proposição anterior. Daí,

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] = g[f(x_0)] = (g \circ f)(x_0)$$

Logo, $g \circ f$ é contínua em x_0.

■

Definição 2.7. Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.

i Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, dizemos que f é contínua à direita no ponto a;

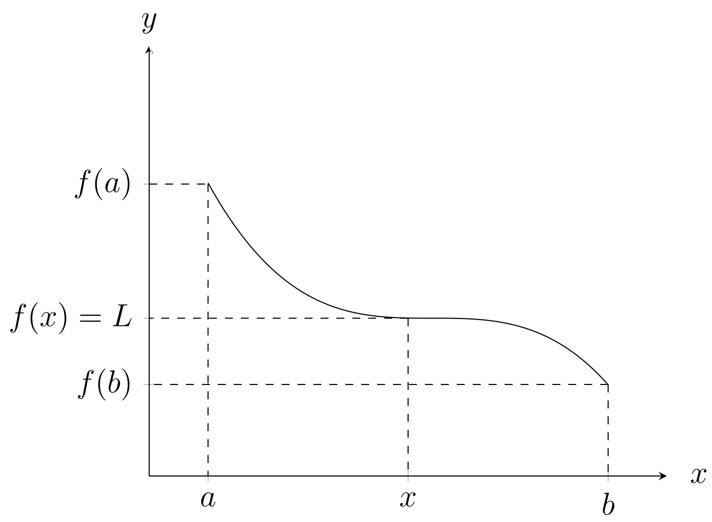
ii Se $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, dizemos que f é contínua à esquerda no ponto b;

iii Se f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a, b) e f é contínua à direita em a e à esquerda em b, dizemos que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2.10 Teorema do Valor Intermediário

Seja f contínua em $[a, b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou ainda $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = L$.

Figura 6

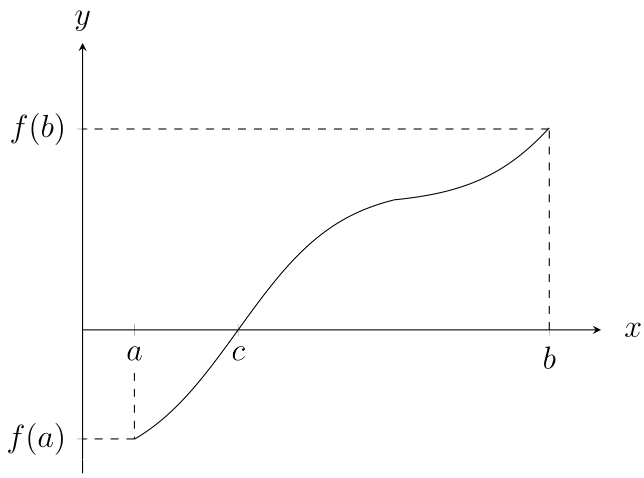


Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

Tal teorema nos mostra porque as Funções Contínuas em um intervalo muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico (Flemming; Gonçalves, 2006).

O Teorema do Valor Intermediário é muito utilizado para determinar o zero de funções,isto é, se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

Figura 7



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

3 DERIVADAS

Nesta seção, estudaremos a Derivada. O conceito de Derivada surge naturalmente na análise de fenômenos físicos que envolve grandezas que variam com o tempo como: inflação da moeda, a velocidade, a aceleração de um foguete, dentre outros. Inicialmente, veremos que ela representa a inclinação de uma curva no ponto.

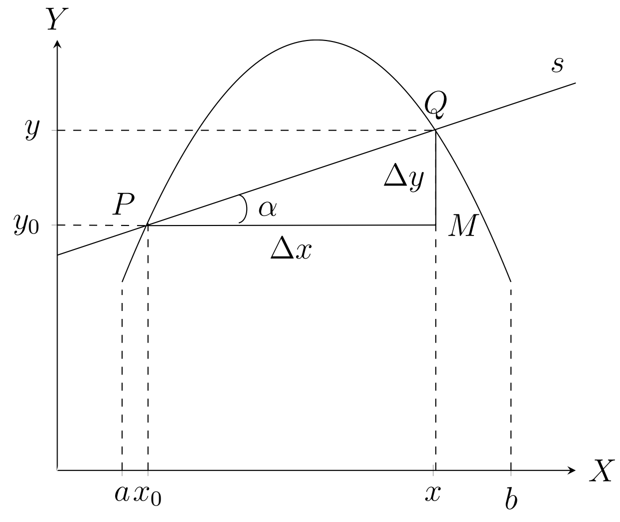
3.1 Inclinação a uma curva

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, posteriormente, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b) e sejam $P(x_0, y_0)$ e $Q(x, y)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$. Tomando s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo PMQ, note que a inclinação da reta (ou coeficiente angular de s) é dado por:

$$\tan\ \alpha \ = \ \frac{y - y_0}{x - x_0} \ = \ \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Figura 8



Fonte:Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

Agora, suponhamos que, P esteja fixo e Q se mova sobre a curva em direção a P, a inclinação de s irá variar.

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P e/ou inclinação da curva em P.

Definição 3.1. Dada uma curva $y = f(x)$ seja $P(x_0, y_0)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por:

$$m = f'(x_0) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{3.1}$$

quando o limite existe. Tomando $x = x_0 + h$ podemos reescrever a igualdade acima como

$$m = f'(x_0) \ = \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.2}$$

Se conhecermos a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

Exemplo 3.1. Seja $y = f(x) = x^2$ e $x_0 \ \in \mathbb{R}$ um ponto fixo.

Solução: Utilizando a definição, temos que

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2 \cdot x_0 + h = 2 \cdot x_0 \end{aligned}$$

Se, $x_0 = 1$, temos $f'(1) = 2$. Como x_0 é arbitrário, temos $f'(x) = 2x$ e a inclinação de $f(x) = x^2$ num ponto qualquer.

3.1.1 Equação da Reta Tangente

Se a função $f(x)$ é contínua em x_0, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_0, f(x_0))$ é:

i. A reta que passa por P tendo inclinação

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se esse limite existe. Neste caso, temos a equação

$$y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0)$$

ii. A reta $x = x_0$ se,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

for infinito.

3.1.2 A derivada de uma função num ponto

A derivada de $f(x)$ no ponto x_0, é denotada por $f'(x_0)$ (lê-se f linha de x_0) e é definida por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se esse limite existe. Também podemos escrever:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Através desse limite temos a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$. Logo, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0, representa a inclinação da curva nesse ponto.

3.1.3 A derivada de uma função

Denotamos a derivada de uma função por $f'(x)$ (lê-se f linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se existir.

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de deu domínio. Existem algumas outras notações que podem substituir $y' = f'(x)$, tais como:

i. $D_x f(x)$ (lê-se derivada de $f(x)$ com relação a x);

ii. $D_x y$ (lê-se derivada de y em relação a x);

iii. $\dfrac{dy}{dx}$ (lê-se a derivada de y em relação a x).

Exemplo 3.2. Dada $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.

Solução: Por definição,temos:

$$\begin{aligned} f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{5 \cdot (2+h)^2 + 6 \cdot (2+h) - 1 - (5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{26h + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (26 + h) = 26. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Dada $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ encontre $f'(x)$.

Solução: Pela definição temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aplicando na função dada, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)^{\frac{1}{3}} - f(x)^{\frac{1}{3}}}{h}.$$

Fazendo a troca de variáveis, Sejam $(x + h) = t^3$ e $x = a^3$. Então,

$$f'(x) = \lim_{t \to a} \frac{t - a}{t^3 - a^3} = \lim_{t \to a} \frac{1}{t^2 + a \cdot t + a^2} = \frac{1}{3 \cdot a^2}$$

Como $a = x^{\frac{1}{3}}$, vem que

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}.$$

A partir desse exemplo podemos observar que, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ é contínua em 0, mas $f(x) = \dfrac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}$ não é definida em 0.

3.2 Continuidade de funções deriváveis

Através do Exemplo 3.3, podemos concluir que $f(x)$ é contínua em x_0, o que não implica na existência de $f'(x_0)$. A recíproca porém é verdadeira, observe o teorema abaixo.

Teorema 3.1. *Toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Seja $f(x)$ uma função derivável em x_0. Vamos demonstrar que $f(x)$ é contínua em x_0, ou seja, demonstrar que as condições da Definição 2.6 são válidas. Isto é:

i. $f(x_0)$ existe;

ii. $\lim\limits_{x \to x_0}$ existe;

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.

Por hipótese $f(x)$ é derivável em x_0. Portanto, $f'(x_0)$ existe e

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Então $f(x_0)$ deverá existir para que o limite tenha significado. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \left[(x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] \\ &= \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \\ &= 0 + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Então, valem as condições i, ii e iii. Concluindo-se que $f(x)$ é contínua em x_0. ■

3.2.1 Derivadas laterais

Definição 3.2. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_0, então a derivada à direita de f em x_0 é denotada por $f'_+(x_0)$ e definida por:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso este limite exista.

Definição 3.3. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_0, então a derivada à esquerda de f em x_0 é denotada por $f'_-(x_0)$ e definida por:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso este limite exista.

A função é derivável em um ponto quando as derivadas à direita e à esquerda existem e são iguais, isto é, quando $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Quando as derivadas laterais existem e são diferentes num ponto x_0, dizemos que este é um ponto anguloso do gráfico da função.

3.2.2 Regras de derivação

A seguir, deduziremos várias regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição.

Proposição 3.1. *(Derivada de uma constante)*

Se c é constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Seja $f(x) = c$ então temos,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

■

Proposição 3.2. *(Regra da potência)*

Se n é um inteiro positivo e $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Demonstração. Seja $f(x) = x^n$ então temos,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Expandindo $(x+h)^n$ utilizando o binômio de Newton,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \dfrac{n\cdot(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + ... + n \cdot x \cdot h^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \left[nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + ... + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot h + ... + n \cdot x \cdot h^{n-2} + h^{n-1}\right] = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.3. *(Derivada do produto de uma constante por uma função) Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c \cdot f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = c \cdot f'(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, existe

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot f'(x). \end{aligned}$$

■

Proposição 3.4. *(Derivada de uma soma)*

Sejam f e g duas fuções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Daí temos,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-h(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.5. *(Derivada de um produto)*

Sejam as funções f e g e a função h seja definida por $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Se a $f'(x)$ e $g'(x)$ existem então temos:

$$h'(x) = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x).$$

Demonstração. Pela hipótese, temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Através da Propriedade 3.4, onde toda função que é derivável num ponto x vai ser contínua nesse ponto, podemos concluir que f é contínua em x. Então,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Temos:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}.$$

Agora, adicionando e subtraindo a expressão $f(x+h)\cdot g(x)$ ao numerador, temos que:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x-h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot [g(x+h)-g(x)] + g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x)\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x).
\end{aligned}$$

∎

Proposição 3.6. *(Derivada de um Quociente)*

Sejam f e g funções e h uma função definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, temos que:

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, temos que g é contínua e assim $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$. Daí,

$$\begin{aligned}
h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right].
\end{aligned}$$

Agora, vamos adicionar e subtrair $f(x) \cdot g(x)$ ao numerador. Veja.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\left(\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot g(x) - f(x) \cdot \left(\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\
&= \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(x) - \lim\limits_{h \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(x)} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}$$

∎

3.2.3 Regra da Cadeia

Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g(f(x))$ tem derivada que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ou

$$y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Demonstração. Demonstraremos supondo que existe um intervalo aberto I que contém x, tal que

$$\Delta u = f(x+h) - f(x) \neq 0 \text{ sempre que } (x+h) \in I \text{ e } h \neq 0. \tag{3.3}$$

Isto se aplica para um grande número de funções, mas não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante tal condição não é satisfeita. Neste caso, podemos provar a fórmula. De fato, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ e $y = g(f(x)) = g(c)$ é constante. Assim, $y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição 3.3. Como $y = g(f(x))$, temos:

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h},$$

se esse limite existir. Considerando primeiro o quociente,

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

Seja $\Delta u = f(x+h) - f(x)$. Então Δu depende de h e $\Delta u \to 0$ quando $h \to 0$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x+\Delta u)) - g(f(x))}{h} \\ &= \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{h}. \end{aligned}$$

Através da condição 3.3, $\Delta u \neq 0$ em um intervalo aberto contendo x. Então, podemos dividir e multiplicar o quociente $\dfrac{g(u+\Delta u) - g(u)}{h}$ por Δu. Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{h} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \\ &= \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{h} \\ &= \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) + g(f(x))}{h} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= g'(u) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

■

Proposição 3.7. *Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então*

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Demonstração. Se fizermos $y = u^n$, onde $u = g(x)$ e aplicando a regra da cadeia, temos que:

$$y'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \text{ ou } \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Pode-se generalizar a regra da potência como: Se $u = g(x)$ é uma função derivável e r é um número racional não nulo qualquer, então

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^r = r \cdot [g(x)]^{r-1} \cdot g'(x).$$

Ou ainda,

$$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'.$$

■

Proposição 3.8. *Se $f(x) = x^{-n}$ onde n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, então*

$$f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$

Demonstração. Note que, podemos escrever x^{-n} como $\frac{1}{x^n}$. Através da Proposição 3.6, temos que, $f(x) = 1 \cdot x^n$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot +n \cdot x^{+n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-n \cdot x^{+n-1}}{x^{2n}} \\ &= -n \cdot x^{+n-1} \cdot x^{-2n} = -n \cdot x^{-n-1}. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2. *(Derivada da função inversa)*

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admita uma função inversa $x = g(y)$ que seja contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer x que pertence ao intervalo (a, b), então $g = f^{-1}$ é derivável e vale:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demonstração. Considerando $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Nós podemos observar que, como f possui uma inversa, se $h \neq 0$ então $f(x+h) \neq f(x)$ portanto, $\Delta y \neq 0$. Como f é contínua quando $h \to 0$ temos que Δy também tende a zero. Do mesmo modo, quando $\Delta y \to 0$, $h = g(y + \Delta y) - g(y)$ também tende a zero.

Daí, temos

$$h \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0.$$

Por outro lado, para qualquer $y = f(x)$ vale a identidade:

$$\frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{(x+h) - x}{f(x+h) - f(x)} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}.$$

Como $f'(x)$ existe é $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ temos:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Podemos concluir que, $g'(y)$ existe e vale $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. ■

3.3 Derivadas Sucessivas

Seja f uma função derivável definida em um determinado intervalo. Sua derivada de f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, de fato, pensar na derivada da função f'.

Definição 3.4. Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por $f''(x)$ (lê-se f-duas linhas de x) ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Exemplo 3.4. Seja $f(x) = x^3$. Então $f'(x) = 3x^2$. Daí, $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$, para todo $n \geq 4$.

3.4 Derivadas das Funções Trigonométricas

A seguir, iremos calcular as derivadas de algumas funções trigonométricas.

Proposição 3.9. *(Derivada da função seno)*

Se $y = \operatorname{sen} x$ *então* $y' = \cos x$.

Demonstração. Seja $y = \text{sen}x$, aplicando a definição de limite, temos,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}x}{h}$$

Para desenvolver este limite, utilizaremos a fórmula trigonométrica:

$$\text{sen}\; p - \text{sen}\; q = 2\,\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h \to 0} \frac{2\,\text{sen} \cdot \left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \cdot \frac{h}{2}} \right) \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos(x) = \cos(x).
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.10. *(Derivada da função cosseno)*

Se $y = \cos x$ *então* $y' = -\text{sen}x$.

Demonstração. Seja $y = \cos x$, utilizando a definição de limite, temos,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Utilizando a fórmula trigonométrica abaixo,

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Então,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{x+h+x}{2}\right)\cdot\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{x+h-x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{2\cdot\dfrac{h}{2}}\\
&= -2\cdot(\,\mathrm{sen}x)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = -\,\mathrm{sen}x.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.11. *(Derivada da Função Tangente)*

Se $y = \tan x$ *então* $y' = \sec^2 x$.

Demonstração. Note que, $\tan x = \dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos x}$, portanto, utilizando a regra do quociente, temos

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \,\mathrm{sen}x\cdot(-\,\mathrm{sen}x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}$$

■

As demais funções trigonométricas podem ser definidas a partir das funções seno e cosseno, e, portanto, podemos empregar as regras de derivação para determinar suas derivadas. Similarmente, encontramos:

- Se $y = cotgx$ então $y' = -cosec^2 x$;
- Se $y = secx$ então $y' = secx\cdot\,\mathrm{tg}x$;
- Se $y = cosecx$ então $y' = -cosecx\cdot cotgx$.

3.4.1 Derivada das Funções Elementares

Proposição 3.12. *(Derivada da Exponencial)*

Se $y = e^x$ *então* $y' = e^x$.

Demonstração. Por definição $e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 2,718...$

Tomando, $x = \frac{1}{t}$, podemos fazer uma mudança de variáveis,

$$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

Agora, utilizando a definição de derivada,

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

aplicando no caso particular, onde $y = e^x$, encontramos

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}.\end{aligned}$$

Realizando uma mudança de variáveis tomando $e^h - 1 = t$ e isolando e^h,

$$e^h = t+1 \Rightarrow \ln e^h = \ln(t+1) \Rightarrow h = \ln(t+1).$$

Substituindo,

$$(e^x)' = e^x\lim_{h\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}.$$

Pela propriedade de logaritmo, segue que

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\\ &= e^x\frac{\lim_{h\to 0} 1}{\lim_{h\to 0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}\\ &= e^x\frac{1}{\ln(\lim_{h\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}})}\\ &= e^x\frac{1}{\ln e} = e^x.\end{aligned}$$

■

Proposição 3.13. *(Derivada de* $\ln x$ *)*

Se $y = \ln x$ *então* $y' = \frac{1}{x}$.

Demonstração. Utilizando a definição de derivada, segue que

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Daí,

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

Utilizando uma das propriedades de ln temos,

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Tomando $t = \dfrac{h}{x}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{xt} \cdot \ln(1+t) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \\
&= \frac{1}{x} \ln \lim_{h\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\
&= \frac{1}{x} \ln e \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.14. *(Derivada da Função Logarítmica)*

Se $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ *então* $y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$; $(a > 0 \ \ e \ \ a \neq 1)$

Demonstração. Pela definição tem-se que,

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \dfrac{x+h}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \\
&= \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{\frac{h}{h}}{\frac{x}{h}}\right)\right] \\
&= \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{x}{x}}\right] \\
&= \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right].
\end{aligned}
$$

Observe que, $\lim\limits_{h\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = e$. Daí, segue que

$$
y' = \frac{1}{x} \log_a e.
$$

■

Proposição 3.15. *(Derivada da Função Exponencial)*

Se $y = a^x$ *então* $y' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Demonstração. Seja $y = a^x$ aplicando a definição de Derivada, tem-se

$$
\begin{aligned}
y' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.
\end{aligned}
$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$ então, tem-se:

$$
y' = a^x \ln a.
$$

■

3.4.2 Funções Trigonométricas Inversas

A seguir apresentaremos algumas funções trigonométricas inversas, tais como:

$$arccos\ x, arcsen\ x, arctg\ x$$

Proposição 3.16. *(Derivada da função arco seno)*

Seja $f : [-1,1] \to \Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ *definida por* $f(x) = arcsenx$*. Então* $y = f(x)$ *é derivável em* $(-1,1)$ *e*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração. Sabemos que $y = arcsenx \Leftrightarrow x = \text{sen}y$ para todo $y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.
Como $(\text{sen}y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer y que pertença a $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, através do Teorema 3.2, segue que

$$y' = \frac{1}{(\text{sen}y)'} = \frac{1}{\cos y} \tag{3.4}$$

Como, para qualquer y que pertence a $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ temos $\cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y}$. Realizando a substituição, temos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}.$$

Como $\text{sen}y = x$ temos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para} \quad x \in (-1,1).$$

∎

Proposição 3.17. *(Derivada da função arco cosseno)*

Seja $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ *definida por* $f(x) = arccosx$ *então* $y = f(x)$ *é derivável em* $(-1,1)$ *e*

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração. Utilizando a relação $arccosx = \dfrac{\pi}{2} - arcsenx$ e a proposição anterior (Derivada da função arco seno), temos,

$$y' = \Big(\frac{\pi}{2} - arcsenx\Big)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \text{para } x \in (-1,1).$$

Para x que pertence ao intervalo $(-1,1)$. ∎

Proposição 3.18. *(Derivada da função arco tangente)*

Seja $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *definida por* $f(x) = arctgx$ *então* $y = f(x)$ *é derivável e é igual a*

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Demonstração. Sabemos que,

$$y = arctgx \Leftrightarrow x = \tan y \ , \ y \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big)$$

Como a $(\tan y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer y que pertença ao intervalo $\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big)$, pelo Teorema 3.2, temos que,

$$y' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, obtemos:

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}.$$

Ao substituir $\tan y$ por x, temos que,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

■

As demais Funções Trigonométricas Inversas possuem derivadas dadas por:

- Se $y = arccotgx$ então $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.
- Se $y = arc\,\text{sen}x, |x| \geq 1$ então $y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, |x| > 1$.
- Se $y = arccosecx, x \geq 1$ então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, |x| > 1$.

4 APLICAÇÕES DE DERIVADAS

A seguir, apresentaremos algumas das mais importantes aplicações das Derivadas. Podendo utilizá-las para calcular valores extremos de funções, determinar e analisar o formato de gráficos, calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem a zero como também, determinar numericamente em que ponto uma função é igual a zero.

Definição 4.1. (Máximo absoluto, mínimo absoluto)

Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c), \text{ para qualquer } x \text{ em } D.$$

e um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c), \text{ para qualquer } x \text{ em } D.$$

Máximos e mínimos absolutos são chamados extremos absolutos, também denominados como extremos globais, para diferenciar dos extremos locais.

Teorema 4.1. *(Teste do Valor Extremo)*

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ então f assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$. Isto significa que existem pontos x_1, x_2 em $[a, b]$ tais que,

$$f(x_2) = max f(x), x \in [a, b]$$

e

$$f(x_1) = min f(x), x \in [a, b].$$

A demonstração deste teorema demanda um entendimento aprofundado do sistema de números reais, razão pela qual sua apresentação não será abordada neste contexto.

Teorema 4.2. *(Teorema da Derivada Primeira para Extremos locais)*

Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c, então

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração. Para demonstrar que $f'(c)$ é zero em um extremo local, primeiro temos que provar que $f'(c)$ não pode ser positiva e nem pode ser negativa.

Suponhamos que f tenha um valor máximo local quando $x = c$, de modo que $f(x) - f(c) \leq 0$, para qualquer x próximo de c. Como c é um ponto interior do domínio de f, $f'(c)$ é definida pelo limite bilateral

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Isso significa que ambos os limites, à direita e à esquerda, existirão quando $x = c$ e serão iguais a $f'(c)$. Analisando os limites separadamente, tem-se:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{4.1}$$

De maneira semelhante,

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{4.2}$$

Juntas as equações 4.1 e 4.2 implicam que $f'(c) = 0$. ■

O Teorema 4.2 diz que a primeira derivada de uma função é sempre zero em um ponto interior onde ela tenha valor extremo local e sua derivada definida. Então, os únicos locais onde uma função f pode ter valores extremos são em seus pontos interiores onde $f' = 0$, pontos interiores onde f' não exista e nas extremidades do domínio de f.

Definição 4.2. (Ponto Crítico)

Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um ponto crítico de f.

Note que, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades.

Teorema 4.3. *(Teorema de Rolle)*

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior (a, b), Se,

$$f(a) = f(b) = 0$$

então, há pelo menos um ponto c em (a, b) no qual

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração. Como f é contínua tem máximos e mínimos absolutos em $[a, b]$. Todavia, isso pode ocorrer apenas onde:

1. Em pontos interiores onde f' é zero;

2. Em pontos interiores onde f' não existe;

3. Nas extremidades do domínio da função a, b.

Por hipótese, f tem derivada em cada ponto do interior de $[a, b]$, ou seja, a possibilidade 2 acima é não ocorre. Logo, ficamos com os pontos interiores onde $f'(c) = 0$, além das extremidades de a e b. Se o máximo ou o mínimo ocorrerem num ponto c entre a e b então $f'(c) = 0$ de acordo com o teorema anterior, encontramos um ponto para o teorema de Rolle.

Se o máximo e mínimo absolutos estão nas extremidades então, como $f(a) = f(b)$ deve ser uma função constante $f(x) = f(a) = f(b)$ para qualquer x que pertença a $[a, b]$. Assim $f'(x) = 0$ e o ponto c podem ser tomados em qualquer lugar no interior de (a, b)

■

Teorema 4.4. *(Teorema do Valor Médio)*

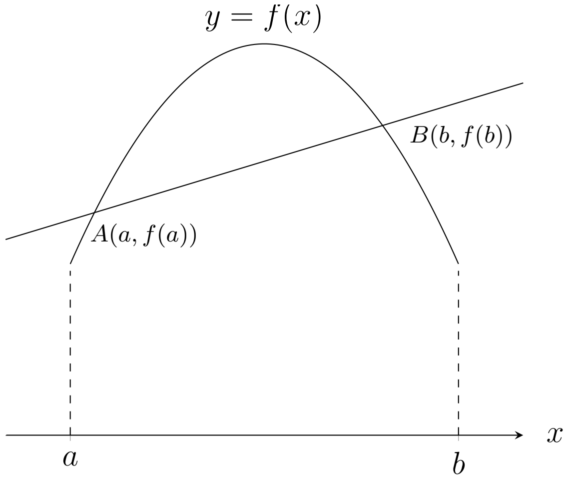
Suponha que $y = f(x)$ seja contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e seja derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe um número c no intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos observar a interpretação geométrica deste teorema.

O teorema do Valor Médio estabelece que, se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe, pelo menos, um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$. Observe:

Figura 9



Fonte: Adaptado de Thomas (2002)

Considere $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$. A equação da reta PQ é

$$y - f(a) = \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big) \cdot (x - a).$$

Tomando $y = h(x)$ temos que:

$$h(x) = \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big) \cdot (x - a) + f(a).$$

Note que, $h(x)$ é uma função polinomial, então $h(x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.

Ao considerar a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Esta função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante PQ. Daí, temos:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

Pelo Teorema de Rolle, a função $g(x)$ satisfaz tais hipóteses:

1. $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$;

2. $g(x)$ é derivável em $[a, b]$ já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$;

3. $g(a) = g(b) = 0$, pois

$$g(a) = f(a) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big) \cdot (a - a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big) \cdot (b - a) - f(a) = 0.$$

Então, existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

temos,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Desta forma, obtemos,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Corolário 4.1. (Funções com derivadas nulas são constantes) Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo (a, b), então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$, onde C é uma constante.

Demonstração. Queremos demonstrar que f tem valor constante no intervalo (a, b). Fazemos isso mostrando que, se x_1, e x_2, são dois pontos quaisquer em (a, b), então $f(x_1) = f(x_2)$. Numerando x_1, e x_2, da esquerda para a direita, teremos $x_1 < x_2$. Assim f satisfaz a hipótese do teorema do valor médio no intervalo $[x_1, x_2]$: é derivável em qualquer ponto de $[x_1, x_2]$ e, portanto, contínua em qualquer ponto também. Dessa forma,

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

em algum ponto c entre x_1 e x_2. Como $f' = 0$ ao longo de (a, b), essa equação se traduz em:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \quad f(x_2) - f(x_1) = 0 \ \ e \ f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

■

A relação entre duas funções que tenham derivadas idênticas ao longo de um intervalo ficará explicita no próximo corolário que nos diz que seus valores no intervalo guardam uma diferença constante entre si.

Corolário 4.2. (Funções com a mesma função derivada diferem por uma constante)

Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto de x de um intervalo aberto (a, b), então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b).

Demonstração. Para cada ponto $x \in (a, b)$, a derivada da função diferença é

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Assim, $h(x) = C$ em (a, b). Isto é, $f(x) - g(x) = C$ em (a, b), então $f(x) = g(x) + C$.

■

Os Corolários 4.1 e 4.2 também podem ser aplicados quando o intervalo aberto (a, b) não é finito.

4.1 Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função contínua f, tal que f seja derivável em qualquer ponto de um determinado intervalo que contenha c, exceto o próprio ponto c. Ao mover-se no decorrer de c, da esquerda para direita, temos:

1. Se f' muda de negativa para positiva em c, então f possui um mínimo local em c;

2. Se f' muda de positiva para negativa em c, então f possui um máximo local em c;

3. Se f' não muda de sinal em c, ou seja, f' é positiva ou negativa em ambos os lados de c, então c não é um extremo local de f.

Demonstração. Inicialmente, vamos observar o item 1. Note que, como o sinal de f' muda de negativo para positivo em c, existem dois números a e b tais que, $f > 0$ em (a, b) e em $f' > 0$ em (c, b). Se $x \in (a, c)$ então temos:

$$f(c) < f(x),$$

pois $f' < 0$ implica que f está decrescendo em $[a, c]$. Se $x \in (c, b)$ então temos:

$$f(x) > f(c),$$

pois $f' > 0$ implica que f está crescendo em $[c, b]$. Portanto, $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in (a, b)$. Logo, f possui um mínimo local em c.

Agora, observando o item 2, o sinal de f' muda de positivo para negativo em c. Existem dois números a e b, tais que $f' < 0$ em (a, c) e em $f' < 0$ em (b, c).

Se $x \in (a, c)$ então temos:

$$f'(c) > f(x)$$

pois $f' > 0$ implica que f está subindo em $[a, c]$. Se $x \in (b, c)$ então temos:

$$f(x) > f(c),$$

pois $f' < 0$ implica que f está caindo em $[b, c]$. Portanto, $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x \in (a, b)$. Logo, f possui um máximo local em c.

A parte (3) pode ser provada de maneira análoga. □

4.1.1 Teste da Segunda Derivada para Extremos Locais

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$;

2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$;

3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função pode ter máximo, mínimo local ou nenhum dos dois.

Demonstração. Para o item 01.

Tem-se que, $f''(c) < 0$, então $f(x) < 0$ em algum intervalo aberto I que contenha o ponto c, uma vez que f'' é contínua. Portanto, f' é decrescente em I. Como $f(c) = 0$, o sinal de muda de positivo para negativo em c, de modo que apresenta um máximo local em c, de acordo com o teste da primeira derivada.

Vamos provar o item 2. Se $f''(c) > 0$ então $f''(x) > 0$ em algum intervalo aberto I que contenha c, uma vez que f'' é contínua.

Logo, f' é crescente em I. Como $f'(c) = 0$, o sinal muda de negativo para positivo em c, de modo que f apresenta um mínimo local em c. Analogamente, pode-se fazer o item 1.

Para provar o item 3, considere as seguintes funções:

$$y = x^4 \ ; \ y = -x^4 \ e \ y = x^3.$$

Para cada uma dessas funções a primeira e a segunda derivadas são nulas em $x = 0$. Apesar disso, neste ponto a função $y = x^4$ apresenta um mínimo local, $y = -x^4$ apresenta um máximo local e $y = x^3$ é crescente em qualquer intervalo aberto que contenha $x = 0$, ou seja, o teste falha.

Para compreender este teste precisamos conhecer f'' apenas em c, e não em um intervalo em torno de c, mas esse teste torna-se inconclusivo quando $f'' = 0$ ou f'' não existe.

Juntas f' e f'' mostram o formato do gráfico da função, ou seja, onde os pontos críticos se localizam, o que acontece com cada um deles, onde a função é crescente ou decrescente, comportamento da curva.

É através dessas informações que utilizamos para esboçar um gráfico de uma função que capte todos os aspectos-chaves. ■

4.2 Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital, atualmente nomeada em homenagem a Guillaume de L'Hôpital, é uma importante ferramenta no cálculo diferencial. Ela foi inicialmente desenvolvida por John Bernoulli e publicada pela primeira vez por Guillaume de L'Hôpital, um nobre francês, em seu pioneiro texto introdutório de Cálculo Diferencial. Esta regra é utilizada para calcular limites de frações em que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero ou a infinito. Ela desempenha um papel fundamental na resolução de problemas desafiadores no campo da matemática.

Se funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são ambas nulas em $x = a$ a substituição resulta em $0/0$ o que representa uma expressão sem determinação numérica imediata. Utilizamos esta forma $0/0$ para indicar uma situação de indeterminação. Por vezes, é possível encontrar limites que levam a essa forma por meio de cancelamento ou manipulações algébricas. A regra de L'Hôpital nos proporciona um método para resolver tais indeterminações, permitindo calcular os limites usando derivadas. Abordagens alternativas para limites que levam a formas indeterminadas também podem ser empregadas.

Teorema 4.5. *(Regra de L'Hôpital - primeira forma)*

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração. Para realizar essa prova, vamos analisar a partir de $f'(a)$ e $g'(a)$, ou seja, de trás para frente.

Observe.

$$\begin{aligned}
\frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

■

Existe também a forma mais forte da regra de L'Hôpital, cuja demonstração baseia-se no teorema do valor médio de Cauchy. Este teorema passa a envolver duas funções em vez de uma.

Inicialmente, provaremos o teorema de Cauchy e, posteriormente, mostraremos como ele leva à regra de L'H'ôpital (forma mais forte).

Teorema 4.6. *(Teorema do valor médio de Cauchy)*

Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, derivavéis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração. Provemos primeiro que $g(a) \neq g(b)$. Se $g(b)$ fosse igual a $g(a)$, o teorema do valor médio resultaria em:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0,$$

para algum c entre a e b,o que não é verdade, pois $g'(x) \neq 0$ em (a, b). Agora, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)].$$

A função h satisfaz as hipóteses citadas no teorema de Rolle em $[a, b]$, pois,

1. Como f e g são contínuas em $[a, b]$, h é contínua em $[a, b]$;

2. Como f e g são deriváveis em $[a, b]$, h é derivável em (a, b);

3. $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe um $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Como $h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g'(x)$ temos

$$f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right]g'(c) = 0.$$

Como $g'(c) \neq 0$ reescrevemos como

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Agora, conseguiremos provar a regra de L'Hôpital em sua forma mais forte, veja.

Teorema 4.7. *(Regra de L'Hôpital) (forma mais forte)*

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então temos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o limite do lado direito da desigualdade exista.

Demonstração. Suponhamos que x se situe a direita de a. Então, $g'(x) \neq 0$, aplicando o teorema do valor médio de Cauchy ao intervalo fechado de x a a, vamos ter um número c entre a e x tal que,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Como $f(a) = g(a) = 0$, teremos então

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Note que,quando $x \to a$, $c \to a$ porque c está entre a e x. Então:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Que estabelece a regra de L'Hôpital para x que se aproxima de a por cima. Para o x que se aproxima de a de baixo para cima pode ser provado pela aplicação do teorema do valor médio de Cauchy ao intervalo fechado $[x, a], x < a$. ■

5 PRIMITIVAS E TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

5.1 Primitivas

Anteriormente, estudamos como encontrar a derivada de uma função. Todavia, alguns problemas exigem que recuperemos a função a partir da sua derivada. Por exemplo, um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de vírus está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento futuro. Note que, na situação acima, o problema é encontrar uma função $F(x)$ cuja derivada é uma função conhecida $f(x)$. Se tal função F existir, será denominada primitiva.

Definição 5.1. Uma função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x em I.

Exemplo 5.1. Determine a primitiva da função $f(x) = 2x$.

Solução: Note que $F(x) = x^2$, pois $F'(x) = 2x$. Contudo, a função $F(x) = x^2$ não é a única função cuja derivada é $2x$. Observe a que derivada da função $x^2 + 1$. A derivada de $x^2 + 1$ é $2x$. Assim como $x^2 + c$ para quaisquer constante c, se $F(x) = x^2 + 1$, temos $F'(x) = 2x$. Assim se $F(x) = x^2 + c$ onde c é constante temos $F'(x) = 2x$.

Veja a proposição abaixo.

Proposição 5.1. *Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.*

Demonstração. Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, temos que $F'(x) = f(x)$. Assim,

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x),$$

onde $G(x) = F(x) + c$ é uma primitiva de $f(x)$.

Então, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I, então a primitiva mais geral de $F(x)$ em I é

$$F(x) + c,$$

donde c é constante arbitrária. ■

As primitivas possuem algumas propriedades que serão úteis para os cálculos, observe a proposição abaixo:

Proposição 5.2. *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ primitivas das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e k é uma constante; então temos:*

1. *A primitiva de $kf(x)$ é $kF(x) + c$, onde k é constante;*

Demonstração. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então,

$$F'(x) = f(x)$$

Desse modo, temos:

$$[k \cdot F](x) = kF'(x) = kf(x).$$

■

2. *A primitiva de $f(x) + g(x)$ é $F(x) + G(x) + c$.*

Demonstração. Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente, então:

$$F'(x) = f(x) \text{ e } G'(x) = g(x).$$

Daí, segue que

$$(F(x) + G(x) + c) = [F + G]'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Logo, a primitiva de $f + g$ é $F(x) + G(x) + c$. Para demonstrar a diferença, segue-se de maneira análoga. ■

5.2 Integral Indefinida

Um símbolo especial é utilizado para denotar o conjunto de todas as primitivas de uma função $f(x)$.

Definição 5.2. (Integral indefinida, integrando)

O conjunto de todas as primitivas de f é a integral indefinida de f com relação a x, denotada por

$$\int f(x)\, dx$$

onde $\int$ é o símbolo da integral. A função $f(x)$ é o integrando da integral e x é a variável de integração.

A partir da definição acima, decorre que:

1. $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x);$

2. $\displaystyle\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções.

Proposição 5.3. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ e k uma constante, então:*

1. $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$

Demonstração. Se $F(x)$ é primitiva de $f(x)$. Então,

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) + c)' = f(x).$$

Logo, $k \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}[k \cdot (f(x) + c)]' &= k \cdot (F(x) + c)' \\ &= k \cdot (F'(x) + 0) \\ &= k \cdot F'(x) = k \cdot f(x).\end{aligned}$$

Daí,

$$\int f(x)\,dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot F(x) + kc = k[F(x) + c] = k \int f(x)\,dx.$$

■

2. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Demonstração. Sejam $F(x)$ e $G(x)$ primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, então $F(x) + G(x)$ é uma primitiva da função $(f(x) + g(x))$ pois

$$[F + G]'(x) = [F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x))\,dx &= [F(x) + G(x)] + c \\ &= [F(x) + c] + [G(x) + c] \\ &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

■

5.2.1 Integração

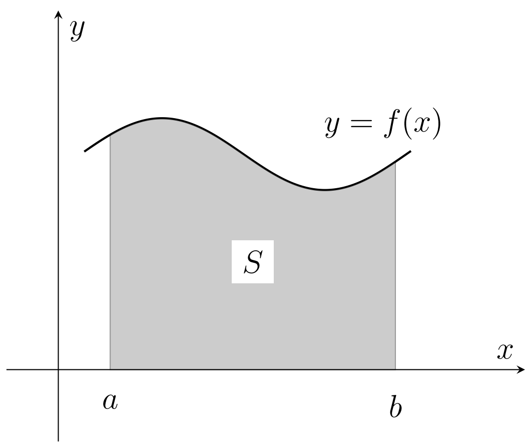
A ideia básica da integração é que muitas quantidades podem ser calculadas se são quebradas em pequenos pedaços e, depois, soma-se a contribuição que cada parte dá. A relação entre o papel da derivada e da primitiva, está contida no teorema fundamental do Cálculo, que é uma das mais importantes ideias do Cálculo.

5.2.1.1 Somas de Riemann

Georg Friedrich Bernhar Riemann foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise à teoria do limite das aproximações finitas. A seguir, introduziremos o conceito da soma de Riemann que é fundamental para a teoria da integral definida.

Considerando uma função arbitrária f definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Observe a Figura 10.

Figura 10



Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2006)

Agora, podemos subdividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos, e formarmos somas. Para tanto temos, $P = x_0, x_1, ..., x_n$, entre a e b, sujeitos a condição de que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

O conjunto

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

é chamado de partição do intervalo $[a, b]$. A partição P divide $[a, b]$ em n subintervalos fechados,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n].$$

O k-ésimo subintervalo de P é $[x_{k-1}, x_k]$, sendo k um inteiro entre 1 e n e seu comprimento é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Agora, em cada subintervalo, construímos um retângulo que tem base no eixo x e toca a curva em um determinado ponto $(c_k, f(c_k))$. Em cada um dos subintervalos, pode-se formar o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Quando $f(c_k) > 0$ o resultado do produto é a área de um retângulo e quando $f(c_k) < 0$ o produto é um número negativo, oposto da área de um retângulo que começa no eixo x e se estende até o número negativo $f(c_k)$. Por fim, ao somar todos esses produtos obtemos:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k,$$

a qual é chamada Soma de Riemann de f em $[a, b]$.

5.2.2 Integral Definida

Os subintervalos da partição P não devem, necessariamente, ter o mesmo comprimento. Denotamos $||P||$ o comprimento do maior subintervalo da partição, ou seja, $||P|| = max_{1<k<n}\{x_k - x_{k-1}\}$. Este número é chamado norma da partição de P.

Quando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua pode-se provar que existe o limite

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Neste caso, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ e escrevemos,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Quando cada partição tem n subintervalos iguais, cada um com comprimento $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$, também escrevemos,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Na $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ temos que a é o limite inferior da integral, b é o limite superior da integral, $\displaystyle\int$ sinal de integral ou interação, $f(x)$ é a função integrando, e dx indica que estamos integrando com respeito a variável x de integração.

Teorema 5.1. *(Existência de Integrais Definidas) Todas as funções contínuas são integráveis. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.*

Observação 5.1. Quando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e positiva então a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de $f(x)$ limitadas pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos x.

O teorema a seguir estabelece sete propriedades das integrais, dadas como regras que elas satisfazem. Tais propriedades são muito úteis no Cálculo das integrais.

Teorema 5.2. *Quando f e g são integráveis no intervalo $[a, b]$, a integral definida satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Ordem de integração :* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. *Intervalo de largura zero:* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. *Multiplicação por constante:*
$\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ *e para* $k = 1$, $\displaystyle\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Demonstração. Como f é derivável em $[a, b]$ existe o

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Então podemos escrever,

$$\begin{aligned}\int_a^b k \cdot f(x)\,dx &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k = \\ &= k \cdot \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k = \\ &= k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, pode-se fazer para $k = -1$. ■

4. *Soma e subtração:* $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Demonstração. Como f e g são integráveis em $[a, b]$, existem os limites,

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Que, por definição é $\int_a^b f(x)\,dx$. Como também g é derivável em $[a, b]$. Daí temos o limite,

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(c_k) \cdot \Delta x_k \text{ que é a } \int_a^b g(x)\, dx.$$

Então, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Big(f(c_k) \pm g(c_k)\Big) \cdot \Delta x_k \\
&= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \pm \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(c_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

■

5. *Aditividade:* $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

Demonstração. Para demonstração dessa regra, vamos considerar uma partição no intervalo $[a, b]$ de tal forma que c seja um ponto da partição, ou seja, $c = x_k$, para algum k.

Podemos dizer que dividimos o intervalo $[a, b]$ da seguinte forma $[a, c], [c, b]$ em $(n - r)$ subintervalos. Escrevendo as somas de Riemann, temos:

$$\sum_{k=1}^{r} f(c_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=r+1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=r+1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Pela definição de integral,temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \lim_{||P|| \to 0} (\sum_{k=1}^{r} f(c_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=r+1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k) \\
&= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{r} f(c_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=r+1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

■

6. *Se f tem o valor máximo $maxf$ e o valor mínimo $minf$ em $[a, b]$ então*

$$(b - a)minf \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b - a)maxf.$$

Demonstração. Pela regra, a integral de f em $[a,b]$ nunca é menor que o valor mínimo de f vezes o comprimento do intervalo e nunca maior do que o valor máximo de f vezes o comprimento do intervalo. A razão é que para cada divisão de $[a,b]$ e para cada escolha dos pontos c_k,

$$\begin{aligned}
(minf)\cdot(b-a) &= minf\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a\\
&= \sum_{k=1}^{n} minf\cdot\Delta x_k && \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k && \min f \leq f(c_k)\\
&\leq \sum_{k=1}^{n} maxf\cdot\Delta x_k && f(c_k)\leq \text{máx}f\\
&= maxf\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \\
&= maxf\cdot(b-a). &&
\end{aligned}$$

Todas as somas de Riemann para f em $[a,b]$ satisfazem a desigualdade

$$minf(b-a)\leq\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq maxf(b-a).$$

Por isso, seu limite, a integral também satisfaz. ■

7. *Se* $f(x)\geq 0$ *em* $[a,b]$ *então* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *para todo* $x\in[a,b]$.

Demonstração. Como $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$ segue que

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{||P||\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

■

8. *Se* $f(x)\geq g(x)$ *em* $[a,b]$ *então* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$, *para todo* $x\in[a,b]$.

Demonstração. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $f(x) - g(x) \geq 0$. Então, pelas propriedades anteriores, temos:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx.$$

já que a integral é linear, temos:

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$$

■

Corolário 5.1. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então vale,

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demonstração. Temos que, $g - f$ é contínua em $[a, b]$ e $g(x) - f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, pela Propriedade **8.**, temos

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

■

5.3 Teoremas Fundamentais do Cálculo

A seguir, apresentaremos os teoremas mais importante do cálculo integral, são eles: Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo. O Teorema do Valor Médio afirma que uma função contínua num intervalo fechado assume seu valor médio ao menos uma vez no intervalo. O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem esse nome, devido a ligação que ele faz entre as operações de derivação e integração, tal como, ao conhecer uma primitiva de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida.

Teorema 5.3. *(Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas)*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que,

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Demonstração. Sendo f contínua, assume seu mínimo m e seu máximo M em pontos do intervalo $[a, b]$, ou seja, tem-se

$$m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$$

e pelo Corolário 5.1 temos que,

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a),$$

ou ainda

$$m \leq \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

Daí, $\dfrac{1}{(b - a)} \cdot \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \in [m, M]$ e como f assume todos os valores entre m e M em $[a, b]$, segue-se do Teorema do Valor Médio Para Integrais Definidas que f deve assumir o valor $\dfrac{1}{(b - a)} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$ em algum ponto $c \in [a, b]$, ou seja,

$$f(c) = \frac{1}{(b - a)} \cdot \int_a^b f(x)\, dx.$$

Então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$ para algum $c \in [a, b]$. ■

5.3.1 Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1

Se $f(t)$ for uma função integrável, a integral definida de a até x representa uma função F. O valor de F em x é dado pela expressão resultante da integração de $f(t)$ no intervalo $[a, x]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.1}$$

Para cada valor da variável independente x, há um valor claramente definido associado à função, que, neste caso, corresponde à integral de f de a até x.

A Equação 5.1 nos fornece um caminho para definir novas funções bem como descrever soluções de equações diferenciais. Tal Equação 5.1 Estabelece uma relação entre integrais e derivadas. Se f for contínua, então F será derivável de x cuja derivada é f. Para cada valor de x,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Essa concepção é tão importante que constitui a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 5.4. *(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1) Se f é contínua em $[a, b]$, então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

é derivável em todo $x \in [a, b]$ e,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{5.2}$$

Demonstração. Para demonstrar este Teorema, vamos utilizar a definição de Derivada diretamente à função $F(x)$. Isso significa, mostrar que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \tag{5.3}$$

Ao substituir $F(x+h)$ e $F(x)$ por suas integrais definidas, o numerador da equação 5.3 torna-se

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Pela propriedade das integrais, temos que,

$$F(x+h) + F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dt,$$

de modo que a equação 5.3 se torna

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas, o valor da equação 5.4 é um dos tomados por f no intervalo que une x a $x+h$. Para algum número c nesse intervalo,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c). \tag{5.5}$$

Pode-se descobrir o que acontece para $\frac{1}{h}$ multiplicado pela integral de $h \to 0$ vendo o que acontece com $f(c)$ quando $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x). \tag{5.6}$$

Então, retomando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

5.3.2 Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo mostra como calcular integrais definidas diretamente a partir de Primitivas.

Teorema 5.5. *(O Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2)*

Se f é contínua em todo $x \in [a,b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. A parte 1 deste Teorema nos mostra que existe uma primitiva de f, isto é,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Daí, quando F for qualquer primitiva de f então $F(x) = G(x) + C$ para alguma constante C.Logo,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

■

Para Thomas (2002), qualquer integral definida de qualquer função contínua f pode ser calculada sem tomar os limites, sem calcular somas de Riemann e geralmente sem esforço, desde que uma primitiva de f possa ser encontrada. Se você puder imaginar como isso era feito antes desse teorema (e também antes dos computadores), quando aproximações por meio de somas tediosas eram a única alternativa para resolver muitos problemas do mundo real, então você pode imaginar como o cálculo foi considerado milagroso.

6 CONCLUSÃO

Ao concluir esta pesquisa, torna-se evidente a significativa importância do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no que diz respeito à compreensão de suas demonstrações.

No decorrer desta, conseguimos demonstrar os teoremas e proposições que constituem os pilares do Cálculo Diferencial e Integral.

Acreditamos firmemente que as demonstrações aqui desenvolvidas não apenas consolidam nosso entendimento, mas também têm o potencial de servir como valioso material de apoio para aqueles que aspiram aprofundar seus estudos nesta área.

REFERÊNCIAS

CLARK, M. R.; LIMA, O. A. **Cálculo de Funções de uma Variável Real**. Teresina: EDUFPI, 2012. Citado nas páginas 13 e 14.

FLEMMING, D. M.; GONçALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2006. Citado nas páginas 14, 16, 17, 27, 30, 32, 34, 40, 41, 42 e 75.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017. Citado na página 15.

LIMA, E. L. **Análise Real vol. 1**: Funções de uma variável. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado na página 14.

MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. **Introdução a Análise Real**. Campina Grande: EDUEPB, 2005. Citado nas páginas 13 e 14.

THOMAS, G. B. **Cálculo**: Volume 1. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. Citado nas páginas 13, 17, 64 e 84.