UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALBANITA BARBOSA LEAL SERAFIM

# NOÇÕES DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

CAMPINA GRANDE – PB
2023

**ALBANITA BARBOSA LEAL SERAFIM**

# NOÇÕES DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

**Orientadora:** Prof.ª Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano

**CAMPINA GRANDE**
**2023**

S481n Serafim, Albanita Barbosa Leal.
Noções de vetores no ensino médio [manuscrito] / Albanita Barbosa Leal Serafim. - 2023.
42 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Vetores. 2. Operações. 3. Tratamento geométrico. 4. Ensino médio. I. Título

21. ed. CDD 515.73

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

ALBANITA BARBOSA LEAL SERAFIM

**NOÇÕES DE VETORES NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 29/06/2023

**BANCA EXAMINADORA**

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof.ª Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientadora)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Prof.ª Dra. Luciana Roze de Freitas

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ao meu pai, Inácio Gomes Barbosa (in memoriam), por sua dedicação, amor e luz em minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar força para seguir em frente nessa jornada.

À minha mãe, Eurides Guedes da Silva, pela sua compreensão, mesmo quando não pude visitá-la em muitos finais de semana.

À minha filha, Drielle Barbosa Leal Serafim, por me encorajar a cursar uma universidade mesmo em idade avançada.

Ao meu filho, Daniel Barbosa Leal Serafim, pelo seu apoio. Ao meu esposo, Manuel Leal Serafim, por sua paciência quando eu precisava estudar.

Aos meus colegas de curso: Anielly Sonaly Rodrigues, Alisson da Silva Apolinário, Lucas Beserra e Samara Vieira Frutuoso Silva, por estarem ao meu lado desde o início, principalmente nos momentos mais difíceis.

A todos os funcionários do departamento, da cantina, da xérox, da limpeza e da biblioteca por me tratarem com carinho.

A todos os meus professores do primeiro ao nono período do curso. Aos membros da banca, Mestre Castor da Paz Filho e doutora Luciana Roze de Freitas, pelas contribuições que me ajudaram positivamente.

E um agradecimento especial à minha professora e orientadora Kátia Suzana Medeiros Graciano. Ela sempre tinha um tempinho para nos ensinar fora do horário de aula quando a disciplina era muito complicada para nós. Sempre atenciosa e prestativa.

Enfim, agradeço à UEPB por ter sido acolhedora.

Se consegui enxergar mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes. Isaac Newton

# RESUMO

Este estudo aborda as dificuldades enfrentadas por estudantes universitários em disciplinas introdutórias de matemática, como Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, resultando em altas taxas de reprovação. Reconhecendo a importância da matemática em diversas áreas do conhecimento, o estudo destaca a necessidade de compreender os conceitos de vetores para descrever fenômenos físicos complexos. O objetivo é reduzir essas dificuldades, preparando os alunos desde o Ensino Médio com uma introdução clara ao Cálculo Vetorial, oferecendo noções de vetores como uma disciplina eletiva. O trabalho explora temas como a história dos quatérnios, a contribuição de William Rowan Hamilton, casos particulares de vetores, operações vetoriais e sua representação em sistemas cartesianos. Exemplos práticos são fornecidos para facilitar a compreensão. Espera-se que essa abordagem contribua para diminuir as taxas de reprovação em disciplinas de exatas no Ensino Superior, fornecendo uma base sólida em Cálculo Vetorial no Ensino Médio, preparando os alunos para desafios acadêmicos futuros.

**Palavras-Chave**: vetores; tratamento geométrico; operações; ensino médio.

## ABSTRACT

This study addresses the difficulties faced by higher education students in introductory mathematics courses such as Calculus, Analytical Geometry, and Linear Algebra, which often result in high failure rates. Recognizing the importance of mathematics as a fundamental science in various fields of knowledge, it emphasizes the need to understand the concepts of vectors to describe complex physical phenomena. The objective is to reduce these difficulties by preparing students from high school with a clear introduction to Vector Calculus, offering vector concepts as an elective subject. The work explores topics such as the history of quaternions, the contribution of William Rowan Hamilton, specific cases of vectors, vector operations, and their representation in Cartesian systems. Practical examples are provided to facilitate comprehension. It is expected that this approach will contribute to reducing failure rates in exact science courses in higher education, providing a solid foundation in Vector Calculus during high school and adequately preparing students for future academic challenges.



**Keywords:** vectors; geometric treatment; operations; high school.

## LISTA DE FIGURAS


**Figura 1 –** William Rowan Hamilton.................................................................. 16

**Figura 2 –** Reta r.................................................................................... 18

**Figura 3 –** Segmentos orientados..................................................................... 19

**Figura 4 –** Segmento oposto.......................................................................... 20

**Figura 5 –** Grandeza escalar - temperatura................................................ 20

**Figura 6 –** Grandezas vetoriais...................................................................... 21

**Figura 7 –** Representação geométrica de um vetor......................................... 22

**Figura 8 –** Vetor ...................................................................................... 23

**Figura 9 –** Vetores paralelos.......................................................................... 23

**Figura 10 –** Vetores iguais............................................................................ 24

**Figura 11 –** Vetores opostos.......................................................................... 24

**Figura 12 –** Vetor unitário............................................................................ 25

**Figura 13 –** Vetores ortogonais...................................................................... 26

**Figura 14 –** Vetores coplanares...................................................................... 26

**Figura 15 –** Adição de vetores - regra do triângulo......................................... 27

**Figura 16 –** Adição envolvendo três vetores..................................................... 27

**Figura 17 –** Adição de vetores- regra do paralelogramo.................................. 28

**Figura 18 –** Adição de vetores paralelos.......................................................... 29

**Figura 19 –** Subtração de vetores.................................................................... 29

**Figura 20 –** Vetores no plano ....................................................................... 30

**Figura 21 –** Módulo de um vetor ................................................................... 31

**Figura 22 –** Multiplicação de um vetor por um escalar...................................... 32

**Figura 23 –** Representação gráfica dos elementos do conjunto $R^2$.................. 33

**Figura 24 –** Vetor definido por dois pontos........................................................ 33

**Figura 25 –** Representação cartesiana dos elementos do conjunto $R^3$............. 34

**Figura 26 –** Vetores unitários dos eixos cartesianos......................................... 35

**Figura 27 –** Doze quadrados congruentes......................................................... 35

**SUMÁRIO**


| | | |
|---|---|---|
| **1** | **INTRODUÇÃO** | 12 |
| **2** | **UMA VIAGEM PELA HISTÓRIA DOS VETORES** | 14 |
| **2.1** | **Vetores** | 14 |
| **2.2** | **Biografia de William Rowan Hamilton** | 16 |
| **3** | **VETORES** | 18 |
| **3.1** | **Reta orientada** | 18 |
| **3.2** | **Segmento orientado** | 18 |
| **3.3** | **Segmento oposto** | 19 |
| **3.4** | **Grandezas escalares** | 20 |
| **3.5** | **Grandezas vetoriais** | 21 |
| **3.6** | **Vetor** | 21 |
| **3.7** | **Casos particulares de vetores** | 23 |
| ***3.7.1*** | ***Vetores paralelos*** | 23 |
| ***3.7.2*** | ***Vetores iguais*** | 23 |
| ***3.7.3*** | ***Vetor nulo*** | 24 |
| ***3.7.4*** | ***Vetores opostos*** | 24 |
| **3.7.5** | **Vetor unitário** | 25 |
| ***3.7.6*** | ***Versor de um vetor*** | 25 |
| ***3.7.7*** | ***Vetores ortogonais*** | 25 |
| ***3.7.8*** | ***Vetores coplanares*** | *26* |
| **3.8** | **Operações com vetores** | 26 |
| ***3.8.1*** | ***Adição de vetores – regra do triângulo*** | 26 |
| ***3.8.2*** | ***Propriedades da adição de vetores*** | 28 |
| ***3.8.3*** | ***Adição de vetores – Regra do paralelogramo*** | 28 |
| ***3.8.4*** | ***Adição de vetores paralelos*** | 28 |
| ***3.8.5*** | ***Subtração de vetores*** | 29 |
| ***3.8.6*** | ***Vetor no plano*** | 29 |
| ***3.8.7*** | ***Módulo de um vetor*** | 31 |
| ***3.8.8*** | ***Multiplicação de um vetor por um escalar*** | 31 |
| **3.9** | **Vetor no sistema cartesiano $R^2$ e $R^3$** | 32 |

| | | |
|---|---|---|
| ***3.9.1*** | ***O conjunto $R^2$*** ........................................................................... | 32 |
| ***3.9.2*** | ***Representação gráfica dos elementos do conjunto $R^2$***.................. | 32 |
| ***3.9.3*** | ***Vetor definido por dois pontos***........................................................ | 33 |
| ***3.9.4*** | ***O conjunto $R^3$*** ........................................................................................ | 33 |
| ***3.9.5*** | ***Representação gráfica dos elementos do conjunto*** $R^3$.................. | 34 |
| ***3.9.6*** | ***Vetores unitários dos eixos cartesianos***.......................................... | 34 |
| **4** | **CONSIDERAÇÕES FINAIS** ................................................................ | 39 |
| | **REFERÊNCIAS** ....................................................................... | 40 |

# 1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Vetorial é conhecida por ser um desafio para muitos estudantes do Ensino Superior, resultando em altas taxas de reprovação em disciplinas introdutórias como Cálculo, Geometría Analítica e Álgebra Linear. Essa dificuldade pode ser atribuída à demanda de conteúdo em curto prazo para assimilação, levando alguns alunos a desistir dos estudos.

No entanto, reconhece-se que a Matemática desempenha um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento e é essencial compreender as limitações das quantidades escalares na descrição de fenômenos físicos. É nesse contexto que os vetores surgem como ferramentas poderosas para capturar relações complexas entre objetos e movimentos.

O objetivo deste estudo é propor uma abordagem para introduzir os conceitos de Cálculo Vetorial no ensino médio, a fim de preparar melhor os alunos para o ensino superior.

Conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ou pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é fundamental reconhecer que a disciplina de Cálculo Vetorial representa um desafio significativo para muitos estudantes do Ensino Superior. Isso se reflete em altas taxas de reprovação em disciplinas introdutórias, tais como Cálculo, Geometría Analítica e Álgebra Linear.

Nesse contexto, a presente proposta tem como objetivo primordial a redução das elevadas taxas de reprovação em disciplinas introdutórias no âmbito universitário, com foco especial nas matérias relacionadas a Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Uma estratégia recomendada para atingir esse objetivo é a introdução de conceitos de vetores como parte de um currículo eletivo, levando em consideração o Novo Ensino Médio, essa disciplina entraria como Eletiva direcionado aos estudantes que manifestem interesse em prosseguir com carreiras acadêmicas nas disciplinas de ciências exatas. Essa abordagem proporcionaria aos alunos a oportunidade de construir uma base sólida em Cálculo Vetorial, de modo a prepará-los eficazmente para enfrentar as complexidades do Ensino Superior no futuro. Essa sugestão se fundamenta na premissa de que a familiarização com tais conceitos desde o Ensino Médio pode contribuir para um melhor desempenho acadêmico posterior.

A estrutura deste trabalho está organizada da seguinte forma: no segundo capítulo, apresenta-se uma breve história dos quatérnios, que foram a base para o desenvolvimento dos vetores. Em seguida, aborda-se a biografia de William Rowan Hamilton, que teve uma presença significativa nos estudos relacionados ao tema. No terceiro capítulo, mostra-se o conteúdo dos vetores, incluindo uma situação hipotética, casos particulares, operações com vetores e sua representação no sistema cartesiano $R^2$ e $R^3$. Além disso, serão fornecidos exemplos práticos para facilitar a compreensão e aplicação dos conceitos abordados.

Espera-se que essa proposta ajude a diminuir as reprovações em matérias de matemática no Ensino Superior. Ao dar aos alunos do Ensino Médio um bom entendimento de Cálculo Vetorial, eles estarão mais prontos para lidar com os estudos futuros, melhorando suas chances de sucesso nas suas carreiras.

# 2 UMA VIAGEM PELA HISTÓRIA DOS VETORES

No capítulo em questão, é oferecida uma contextualização histórica dos vetores, seguida pela exploração da biografia de William Rowan Hamilton e de seu impactante legado para o avanço do tema. Essa abordagem se baseia nas seguintes fontes de referência: Boyer (1996), Eves (2004) e Delgado (2010).

## 2.1 Vetores

A história dos vetores acredita-se que teve início no século XIX com William Rowan Hamilton e Herman Günther Grassmann, através do estudo mais aprofundado dos números complexos. Hamilton, foi um grande matemático, dedicou as duas últimas décadas de sua vida ao estudo dos quatérnions, o qual ele tratou como vetores**.**

> A origem dos quaternions de Hamilton é documentada em suas próprias palavras em seu diário, que ele escreveu no dia 16 de outubro de 1843 enquanto caminhava com sua esposa ao longo do Royal Canal em Dublin. A famosa equação "$i^2 = j^2 = k^2 = i\ j\ k = -1$" foi gravada em uma pedra do Brougham Bridge. (EVES, 2004, p.551).

Segundo Boyer (1996, p.405) "a contribuição mais famosa de Hamilton veio dos quatérnions por libertar a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, criando as bases da álgebra abstrata".

> De modo geral Hamilton tratou os quatérnions como vetores e essencialmente mostrou que formam espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Definiu a adição dos quatérnions e introduziu a noção de dois tipos de produtos, obtidos multiplicando um vetor por um escalar ou por outro vetor respectivamente; observou que o primeiro é associativo, distributivo e comutativo, ao passo que o segundo é associativo e distributivo apenas. Também discutiu o produto interior ("produto escalar") de dois ou mais vetores e provou seu bi linearidade. (BOYER 1996, pag. 405).

De acordo com Eves (2004, p.578), "os quatérnios de Hamilton e, até certo ponto, o cálculo de extensões de Grassmann foram idealizados por seus criadores como instrumentos matemáticos para a exploração do espaço físico".

Hamilton morreu em 1865 e sua obra "*Elements of Quaternions*" foi editada e publicada por seu filho no ano seguinte.

De acordo com Ainsworth (2013 apud Silva; Junior; 2020, p.2):

> Algumas outras definições como deslocamento, módulo, sentido, produto vetorial e escalar são as principais ferramentas utilizadas até hoje no controle de aviões caças e até mesmo como ferramentas importantes para o envio e controle de foguetes e satélites.

Segundo Rodrigues (2015 apud Silva; Junior; 2020, p.2) além do desenvolvimento dos conceitos de Geometria Analítica Vetorial na matemática o seu uso se dá nas mais diversas áreas como engenharia, arquitetura, física, arte, aeronáutica, computação etc.

> O conceito de espaço vetorial n-dimensional tinha recebido tratamento na Ausdehnungslehre de Hermann Grassmann, publicado na Alemanha em 1844.Grassmann também foi levado a seus resultados estudando a interpretação geométrica de quantidades negativas e a adição e multiplicação de segmentos orientados em duas e três dimensões. (BOYER, 1996, p.405).

Giusto Bellavitis (1832 apud Delgado; Frensel; Santo,2010 p.9) “publicou uma obra sobre Geometria onde apareceu explicitamente a noção de vetor".

> Dados dois pontos A e B do plano, Bellavitis considerou os segmentos AB e BA, de extremidades A e B, como objetos distintos. Ele adotou esta convenção porque o segmento de reta limitado pelos pontos A e B, pode ser percorrido de duas maneiras distintas: partindo de A para chegar até B, ou partindo de B para chegar até A.

“Bellavitis classificou os segmentos orientados por meio de uma relação que chamou de equipolência”. (BELLAVITIS, 1832 apud DELGADO; FRENSEL; SANTO, 2010, p.9).

Em suma, os vetores em matemática originaram-se da necessidade de capturar as complexas relações entre objetos e seu movimento, e continuam sendo uma ferramenta importante para descrever e analisar fenômenos físicos até hoje.

Eles representam as grandezas físicas cujo entendimento completo só é possível quando possuímos além do módulo da grandeza física a direção e o sentido no espaço.

Algumas das áreas da física em que os vetores desempenham um papel importante incluem: Mecânica, Eletromagnetismo, Termodinâmica, Óptica, Relatividade entre outras.

## 2.2 Bibliografia de William Rowan Hamilton

**Figura 1-** William Rowan Hamilton


**Fonte**: https://Mécanique-quantique / rappels de mécanique analytique (vetopsy.fr).

William Rowan Hamilton, nasceu em 1805 na cidade de Dublin, enfrentou adversidades precoces ao perder os pais e ser criado por seu tio. Sua educação foi rigorosa, com uma ênfase particular no campo da linguística. Desde cedo, Hamilton demonstrou ser uma criança prodígio, e aos 15 anos de idade teve um encontro marcante com Zerah Colburn, um jovem americano capaz de fazer cálculos instantaneamente, despertando assim o seu interesse pela matemática.

Impulsionado por sua paixão recém-descoberta, Hamilton mergulhou no estudo do livro *"Aritmética Universalis*" de Newton, o que o levou a dominar a Geometria Analítica e o Cálculo. Em seguida, ele se dedicou aos quatro volumes dos influentes livros "*Principia"* e "*Mecanique Celeste*" escritos por Laplace. Foi nessa jornada que Hamilton identificou um erro matemático significativo, o que o levou a escrever um artigo sobre o assunto em 1823.

Hamilton entrou no Trinity College, em Dublin, aos 19 anos. Aos 22 anos, quando ainda era aluno de graduação, foi indicado por unanimidade Astrônomo Real da Irlanda, diretor do Observatório de Dunsink e professor de Astronomia. Pouco depois baseado apenas na teoria matemática, prognosticou a Refração Cônica em cristais biaxiais, o que veio a ser confirmado experimentalmente pelos físicos.

Em 1833, apresentou à Academia Irlandesa um artigo de grande importância, no qual ele abordou a Álgebra dos Números Complexos como uma álgebra de pares ordenados de números reais. Essa definição revolucionária, proposta por Hamilton, continua sendo amplamente utilizada até os dias atuais.

Seu grande trabalho "*Treatise on Quaternions*" veio a público em 1853, ampliando "*Elements of Quaternions*". O estudo dos quatérnions abriu o caminho para a álgebra abstrata. Além de seu trabalho sobre os quatérnios, Hamilton escreveu sobre Óptica Dinâmica, a Solução das Equações de Quinto Grau, o Homógrafo de Uma Partícula em Movimento e Soluções Numéricas de Equações Diferenciais.

Hamilton deixou um legado notável em diversos campos, incluindo física e teoria das matrizes. Seu nome está associado a contribuições importantes, como as Funções Hamiltonianas e as Equações Diferenciais de Hamilton-Jacobi na física, além do Teorema, Equação e Polinômio de Cayley-Hamilton na teoria das matrizes. Ele também influenciou as recreações matemáticas, como o jogo Hamiltoniano com um dodecaedro regular.

Hamilton passou toda sua vida em Dublin, onde veio a falecer no ano de 1865, provavelmente em decorrência do alcoolismo, por sua infelicidade no casamento.

Sendo apresentado neste capítulo um pouco da vida do Matemático, Físico e Astrônomo William Rowan Hamilton, e sua grande contribuição para a evolução da Ciência.

# 3 VETORES

Neste capítulo aborda-se as definições, exemplos e figuras sobre reta orientada, segmento orientado e segmento oposto, grandezas escalares e grandezas vetoriais, será definido um Vetor, serão vistos casos particulares de vetores e serão desenvolvidas algumas operações com vetores, para uma melhor compreensão por parte do leitor. Como referências foram usados os autores: Julianelli (2008), Oliveira (2015), Silva (2020), Winterle. (2014).

## 3.1 Reta orientada

**Definição 1:** Uma reta pode ser percorrida por um de seus pontos em dois sentidos distintos. Orientar uma reta é escolher um destes dois sentidos de percurso como sendo positivo. Toda reta orientada é um eixo. Vemos na figura 2 a reta r.

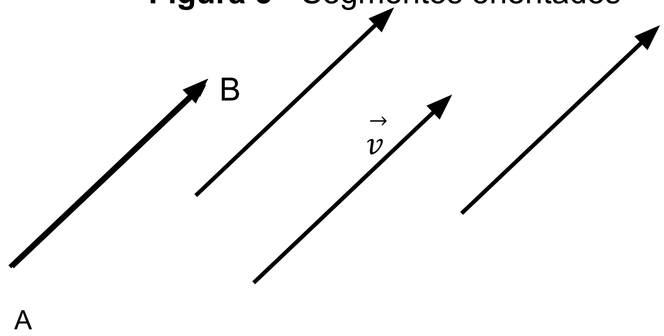
**Figura 2 - Reta r**


**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

## 3.2 Segmento orientado

**Definição 2:** Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. Na figura 3, todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor $\vec{v}$, que será indicado por $\vec{AB}$ ou B – A, onde A é a origem e B a extremidade do segmento.

**Figura 3** - Segmentos orientados




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

Com isso observamos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA e que podemos associar a noção de sentido a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua origem (ou ponto de partida) e o outro como sua extremidade (ou ponto de chegada). Um segmento orientado é caracterizado por:

**Direção:** A reta suporte

**Sentido:** de A para B

**Comprimento:** A distância entre A e B.

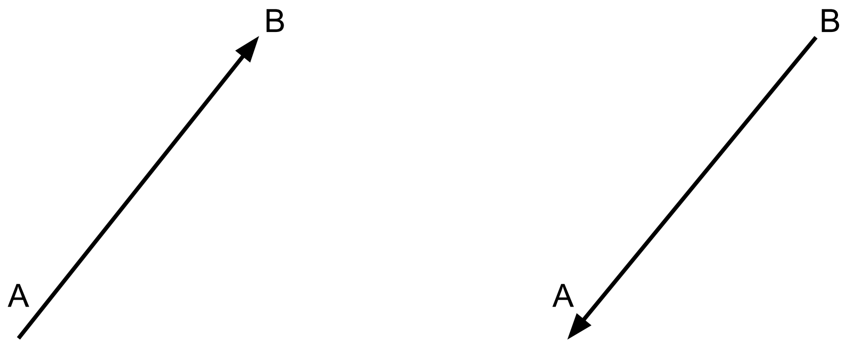
Se $A$ e $B$ são pontos coincidentes, então chamamos de segmento nulo e temos $AB \vee 0$. Observamos que a representação geométrica de um segmento nulo é um ponto, tendo em vista que seus pontos extremos são coincidentes. Como existem infinitas retas de diferentes direções que passam por um único ponto, temos que segmentos nulos não têm direção definida. O vetor nulo é indicado pelo $\vec{0}$, é um segmento cuja extremidade coincide com a origem como, $\vec{AA}, \vec{BB}$etc.

### 3.3 Segmento oposto

**Definição 3**: Se $\vec{AB}$ um segmento orientado, o segmento $\vec{BA}$é o oposto de$\vec{AB}$

Na figura 4, tem-se o segmento $\vec{AB}$e o oposto$\vec{BA}$.

**Figura 4** - Segmentos oposto




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

### 3.4 Grandezas escalares

**Definição 4:** As Grandezas Escalares são aquelas que podem ser escritas na forma de um número, seguido de uma unidade de medida. Em outras palavras, elas são completamente definidas se soubermos o seu valor, também chamado de módulo, e a forma como ela é medida. São espécies de grandezas escalares o comprimento, o tempo, a temperatura e a massa.

Na figura 5, tem-se um exemplo de Grandeza escalar a temperatura correspondente 39.0° c.

**Figura 5** - Grandeza escalar - temperatura

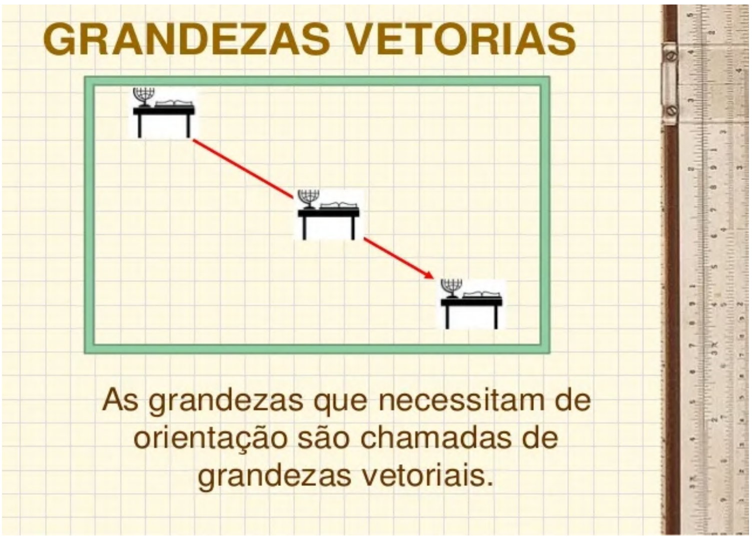

**Fonte**: https://www.preparaenem.com

## 3. 5 Grandezas vetoriais

**Definição 5:** As Grandezas vetoriais para serem perfeitamente caracterizadas necessitam conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade) sua direção e seu sentido. força, aceleração, posição, velocidade e quantidade de movimento são exemplos de Grandezas Vetoriais.

A figura 6, mostra-se um modelo de grandezas vetoriais a orientação de setas apontando na diagonal para baixo, que são os deslocamentos.

**Figura 6** - Grandezas vetoriais




**Fonte**: https://www.slideshare.net/experimentun/grandezas-vetoriais-61883749.

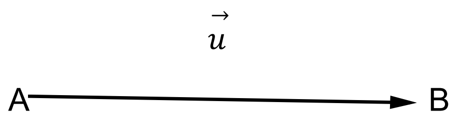
## 3.6 Vetor

**Definição 6:** Um vetor é uma grandeza matemática que possui módulo ou intensidade, direção e sentido. O módulo é o tamanho do vetor, sua direção é a mesma da reta suporte que o contém, e o sentido é para onde ele está apontado. Uma mesma direção possui dois sentidos.

Por exemplo: Na direção horizontal, temos o sentido para a direita e o sentido para a esquerda, enquanto na direção vertical, encontramos o sentido para cima e o sentido para baixo.

Um vetor é representado por uma seta com um ponto de origem (A) e uma extremidade (B). É comum indicar um vetor usando uma letra minúscula com uma seta sobre ela. Quando escrevemos $\vec{u} = \vec{AB}$, afirmamos que o vetor $\vec{u}$ é determinado pelo segmento orientado $\vec{AB}$, veja.

**Figura 7**- Representação geométrica de um vetor




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

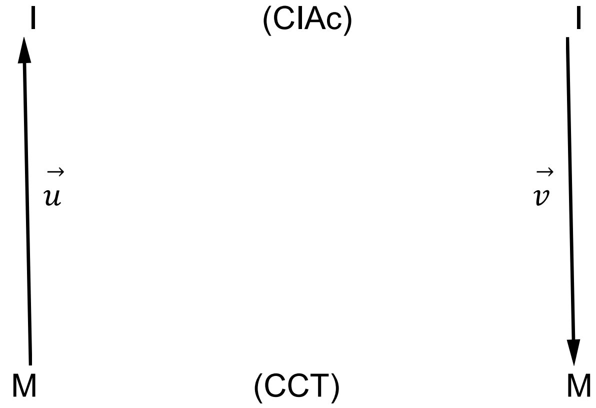
A seguir, apresentamos um exemplo do nosso cotidiano por meio de uma situação hipotética.

**Exemplo 1:** Na Universidade Estadual da Paraíba, Campus I, situada em Campina Grande/PB, é possível observar um cenário em que os alunos do curso de Matemática, pertencentes ao Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) e representados pelo vetor $\vec{u}$ , realizam um deslocamento em linha reta, partindo do prédio do CCT em direção ao edifício da Central de Integração Acadêmica (CIAc), que se encontra a poucos metros de distância. Esse deslocamento é necessário para que possam participar de aulas de diversas disciplinas.

De maneira análoga, os alunos do curso de Informática, representados pelo vetor $\vec{v}$, também precisam efetuar o mesmo percurso, no entanto, de maneira contrária em relação aos alunos do curso de Matemática. Isso ocorre igualmente para que possam assistir às aulas de suas respectivas disciplinas.

Observe que a origem do vetor $\vec{u}$ é o CCT representado pela letra M e a extremidade é a CIAc, representados pela letra I, já para o vetor $\vec{v}$ A origem é a CIAc, representada por I e a extremidade o CCT representado por M. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm módulos idênticos e compartilham a mesma direção vertical. No entanto, eles se distinguem por seus sentidos opostos: enquanto o vetor $\vec{u}$ aponta para cima, o vetor $\vec{v}$  segue na direção oposta, apontando para baixo. Veja a figura 8, temos $\vec{u}$ = $\vec{MI}$ e  $\vec{v} = \vec{\mathfrak{I}}$.

**Figura 8** - Vetor



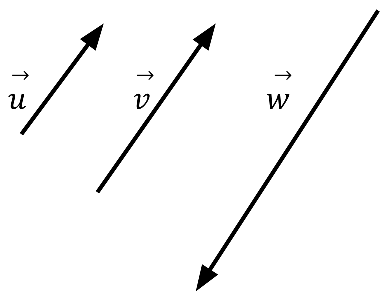

**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

## 3.7 Casos particulares de vetores

### *3.7.1 Vetores paralelos*

**Definição 7:** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, e indica-se por $\vec{u}$ //$\vec{v}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção. Na figura 9, tem-se $\vec{u}$ // $\vec{v}$ // $\vec{w}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem o mesmo sentido, enquanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tem sentido contrário ao de $\vec{w}$.

**Figura 9** - Vetores paralelos

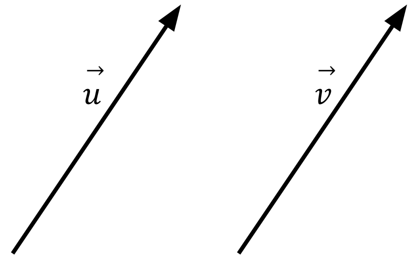



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

### *3.7.2 Vetores iguais*

**Definição 8:** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$são iguais se apresentarem mesmo módulo, a mesma direção e sentido.

**Figura 10** - Vetores iguais




**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2023.

O vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$ ambos com o mesmo módulo, isto é, $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ estão na mesma direção (diagonal) e no mesmo sentido (para cima).

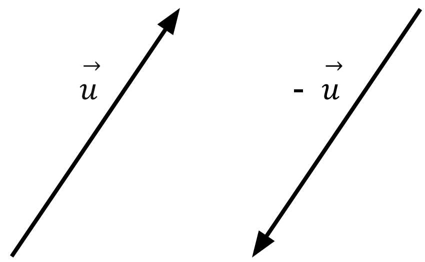
### *3.7.3 Vetor nulo*

**Definição 9:** Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo), que é indicado por $\vec{0}$ ou $\vec{AA}$ (a origem coincide com a extremidade). Pelo fato deste vetor não possuir direção e sentido definidos, considera-se o vetor zero paralelo a qualquer vetor.

### *3.7.4 Vetores opostos*

**Definição 10:** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são opostos se apresentarem o mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários. Na figura 11 o vetor $\vec{v}$ está sendo representado por - $\vec{u}$.

**Figura 11** - Vetores opostos



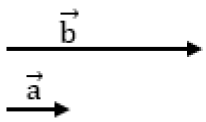

**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

Como pode-se observar na figura 11, o vetor $\vec{u}$ tem o mesmo módulo e a mesma direção do vetor -$\vec{u}$, porém o vetor $\vec{u}$ tem sentido oposto ao vetor -$\vec{u}$. O vetor resultante de dois vetores opostos é dado pela diferença de seus módulos.

### *3.7.5 Vetor unitário*

**Definição 11:** Um vetor é definido como unitário quando apresenta módulo igual a 1 (um). Se $\vec{a}$ unitário, então I $\vec{a}$ I = 1. Na figura 12, tem-se I $\vec{a}$I = 1 e I $\vec{b}$ I = 3, onde o $\vec{a}$ cabe 3 vezes em $\vec{b}$ .

**Figura 12** - Vetor unitário




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

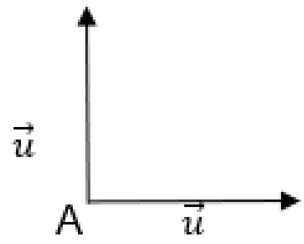
### 3.7.6 Versor de um vetor

**Definição 12:** Um versor de um determinado vetor $\vec{b}$ é um vetor unitário de mesma direção e sentido do vetor $\vec{b}$. Na figura 12, o vetor $\vec{a}$ tem o mesmo sentido e direção do vetor $\vec{b}$, logo o vetor $\vec{a}$ é chamado de versor do vetor $\vec{b}$.

### *3.7.7 Vetores ortogonais*

**Definição 13:** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (figura 13), são ortogonais, e indica-se $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. Ângulo reto é o ângulo cuja medida é de 90°.

**Figura 13** - Vetores ortogonais

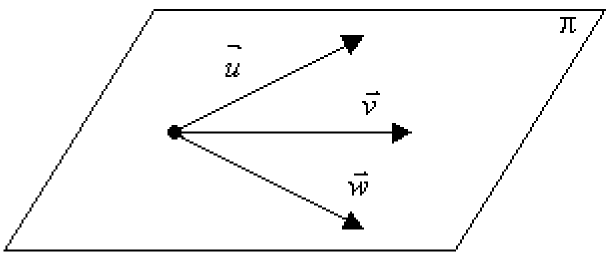



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

### *3.7.8 Vetores coplanares*

**Definição 14:** Dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano onde estes vetores estão representados. É importante observar que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer são sempre coplanares, pois basta considerar um ponto no espaço e, com origem nele, traçar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo ao plano **π**.

**Figura 14** - Vetores coplanares



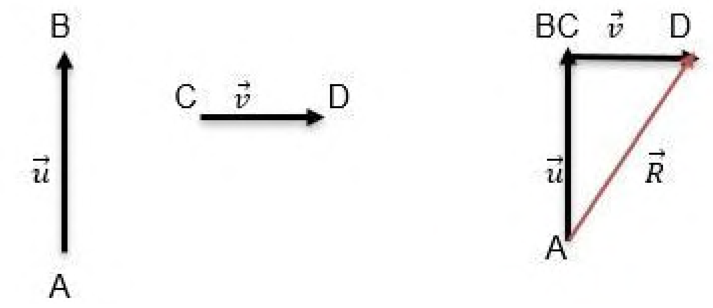

**Fonte**:https://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores4_3.php

## 3.8 Operações com vetores

### *3.8.1 Adição de vetores - Regra do Triângulo*

**Definição 15:** A adição de vetores é basicamente a união entre os vetores $\vec{u}$ + $\vec{v}$. Unindo-se a origem de um na extremidade do outro, e a origem do primeiro com a extremidade do último, obtendo o vetor resultante $\vec{R}$.

**Figura 15** - Adição de vetores - Regra do Triângulo

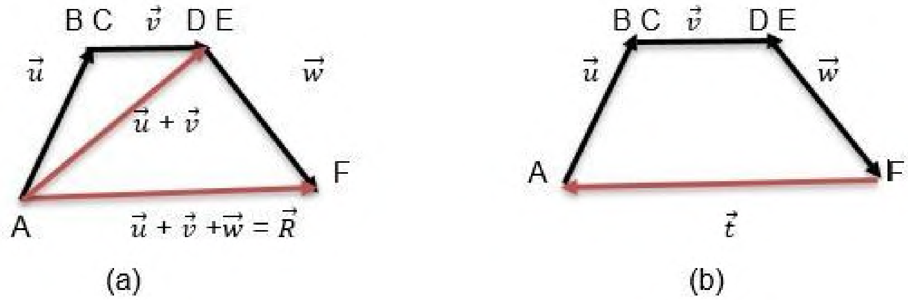



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

Na figura 15, a soma dos vetores $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = $\vec{R}$,sendo $\vec{u}$ representado pelo segmento $\vec{AB}$e $\vec{v}$ representado pelo segmento $\vec{CD}$, logo o vetor representado pelo segmento $\vec{AD}$ é por definição a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = $\vec{AD}$ , também podemos dizer que $\vec{AB}$ +$\vec{CD}$ = $\vec{AD}$.

No caso de somarmos três vetores ou mais, o procedimento é análogo.

**Figura 16** - Adição envolvendo três vetores




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

Na figura 16 (a), a soma dos vetores $\vec{u}$ + $\vec{v} + \vec{w}$ = $\vec{R}$, sendo, $\vec{u}$ + $\vec{v}$ representado pelo segmento $\vec{AB}$+ $\vec{CD}$ e $\vec{w}$ representado pelo segmento $\underline{EF}$, logo o vetor representado pelo segmento $\underline{AF}$ é por definição a soma dos vetores $\vec{u}$ , $\vec{v}e\vec{w}$, isto é $\vec{u}$ + $\vec{v} + \vec{w}$ = $\underline{AF}$, também podemos dizer que $\vec{AB}$ +$\vec{CD}$ + $\vec{EF}$= $\vec{AF}$. E na figura 16 (b) a soma dos vetores $\vec{u}$ + $\vec{v} + \vec{w}$ = $\vec{t}$, temos os vetores $\vec{u}$ , $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados pelos segmentos $\underline{AB}$, $\underline{CD}$ e $\underline{EF}$e o vetor resultante representado pelo segmento$\vec{FA}$ ou -$\vec{AF}$, logo a soma dos vetores $\vec{AB}$ +$\vec{CD}$ + $\vec{EF}$ + (- $\vec{AF}$= $\vec{0}$.

### *3.8.2 Propriedades da adição de vetores.*

Sendo $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

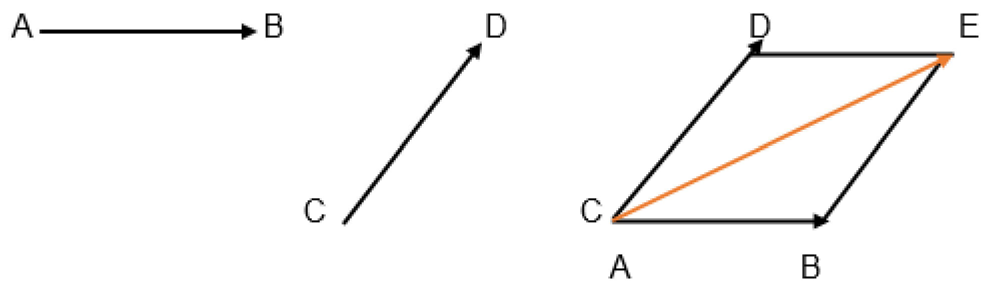
III) Elemento Neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Vetor oposto: $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$ ) = $\vec{0}$.

### *3.8.3 Adição de vetores - Regra do Paralelogramo*

**Definição 16:** Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ Figura 17, são desenhados de modo que suas origens coincidam em um mesmo ponto, isto é, A coincide com C. Em seguida, traçam-se os vetores paralelos $\vec{DE}$ a $\vec{AB}$ e $\vec{BE}$ a $\vec{CD}$, formando o paralelogramo ABED. O vetor $\vec{AE}$ (diagonal do paralelogramo) é o vetor soma $\vec{AB}$ + $\vec{CD}$.

**Figura 17** - Adição de vetores -Regra do Paralelogramo.

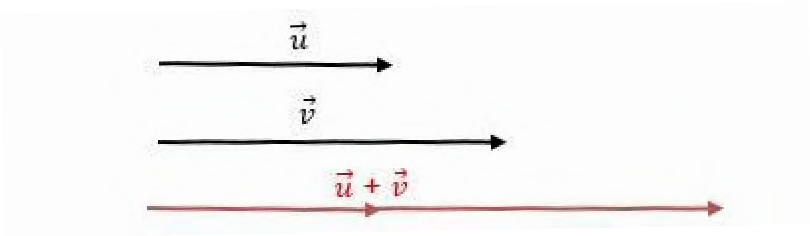



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

### *3.8.4 Adição de vetores paralelos*

**Definição 17:** Sendo os vetores $\vec{u}$ // $\vec{v}$ , a maneira de obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na figura 18 ( $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido).

**Figura 18** - Adição de vetores paralelos

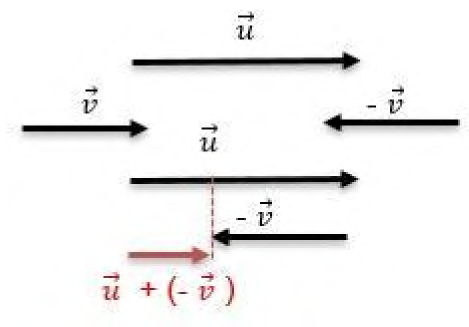



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

### *3.8.5 Subtração de vetores*

**Definição 18:** A subtração dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ Figura 19, dar-se apenas invertendo o sentido de um dos vetores.

**Figura 19** - Subtração de vetores




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

### *3.8.6 Vetores no plano*

**Definição 19**: Considerando dois vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto 0, sendo $r_1$ e $r_2$ retas contendo estes representantes, respectivamente, figura 20 (a). A figura 20 (b) ilustra uma situação em que $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são vetores não paralelos quaisquer e $\vec{v}$é um vetor arbitrário do plano determinado por $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. De modo geral para cada vetor $\vec{v}$ representados com a origem no mesmo plano de $v_1$ e $v_2$, existe uma só dupla de números reais $a_1$ e $a_2$, tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \quad (1)$$

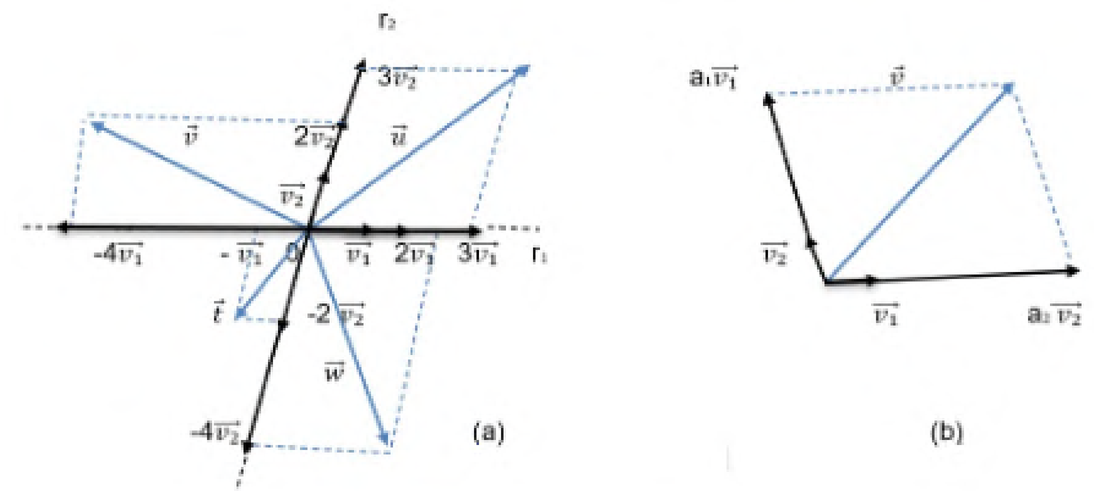
Os números $a_1$ e $a_2$ da igualdade (1) são chamados de componentes ou coordenadas.

O conjunto B= { $\vec{v_1}$ , $\vec{v_2}$ } é chamado de base do plano. Qualquer dos dois vetores constitui uma base no plano. Dada uma base qualquer no plano, todo vetor desse plano é combinação linear dos vetores dessa base. O vetor $\vec{v}$ da igualdade (1), pode ser representado por $\vec{v}$ = ($a_1$, $a_2$) $_B$ou $\vec{v}_B$= ($a_1$, $a_2$).

Na prática, as bases mais utilizadas são as ortonormais. Uma base {$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ } é dita ortonormal se os vetores forem ortogonais e unitários, isto é $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ e $|\vec{e_1}|$ = $|\vec{e_2}|$ 1=.

A base particularmente importante é a que determina o sistema cartesiano ortogonal x0y, chamada de base canônica, na qual x representa o eixo horizontal, 0 a origem e y representa o eixo vertical.

**Figura 20** - Vetores no plano




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

Os vetores $\vec{u}$ , $\vec{v}$, $\vec{t}$ e $\vec{w}$ , representados na figura 20 (a), são expressos em função de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ por

$\vec{u}$ = 3$\vec{v_1}$ + 3$\vec{v_2}$

$\vec{v}$ = -4$\vec{v_1}$ + 2$\vec{v_2}$

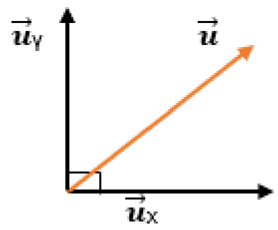
$\vec{t} = -\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$

$\vec{w} = 2\vec{v_1} - 4\vec{v_2}$

### *3.8.7 Módulo de um vetor*

**Definição 20:** O módulo ou intensidade de um vetor é o seu tamanho. É a parte escalar do vetor. Na figura 21, tem-se que o módulo do vetor $\vec{u}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como catetos, os módulos das suas componentes $\vec{u}_X$ e $\vec{u}_Y$.

**Figura 21**– Módulo de um vetor




. **Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023

Portanto, para determinação, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, figura 21,

$\vec{u}^2 = u_X^2 + u_Y^2$

$|\vec{u}| = \sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$

Sendo o vetor $\vec{u} = (3, -3)$.

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Portanto, $|\vec{u}| = 3\sqrt{2}$

### *3.8.8 Multiplicação de um vetor por um escalar*

**Definição 21:** Ao multiplicar um vetor $\vec{u}$ por um escalar k qualquer, será obtido um novo vetor com a mesma direção e módulo multiplicado por esse escalar. O sentido do novo vetor dependerá do sinal do escalar k, ou seja, se o sinal for positivo permanecerá o mesmo, se o sinal for negativo, haverá a inversão do sentido.

Observa-se na figura 22 que, para multiplicar um vetor por um escalar, é necessário um vetor $\vec{u} \neq 0$, ou seja $\vec{u} \neq \vec{0}$ (vetor nulo) e um número k$\neq$ 0, com k pertencente aos reais, obtendo o vetor múltiplo paralelo $\vec{v}$ = k$\vec{u}$ .

**Figura 22** - Multiplicação de um vetor por um escalar


**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

Desta forma:

a) O módulo | k$\vec{u}$ | = | k |. | $\vec{u}$ |, isto é, o comprimento de k$\vec{u}$ é igual ao comprimento de $\vec{u}$ multiplicado por | k |;

b) A direção de k $\vec{u}$ é igual direção de $\vec{u}$ portanto k$\vec{u}$ // $\vec{u}$

c) Sentido de k $\vec{u}$ e $\vec{u}$ tem o mesmo sentido se k > 0, e contrário se k < 0, se k=0 ou $\vec{u}$ = $\vec{0}$, então k $\vec{u}$= $\vec{0}$.

## 3.9 Vetor no sistema cartesiano $R^2$ e $R^3$

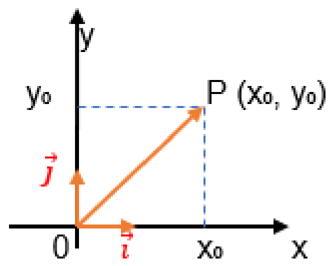
### *3.9.1 O conjunto $R^2$*

**Definição 22:** O conjunto $R^2$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais. $R^2$ = {(x, y) / x ϵ R e y ϵ R}.

### *3.9.2 Representação gráfica dos elementos do conjunto $R^2$*

**Definição 23:** Os elementos do conjunto $R^2$ podem ser representados num sistema de coordenadas ortogonais, conforme a figura 23. Sendo P ($x_0$, $y_0$) um ponto qualquer do $R^2$, o número $x_0$ é chamado de abscissa do ponto P e o número $y_0$ é denominado ordenada do ponto P. Os vetores unitários que apontam nas direções dos eixos cartesianos têm uma representação estabelecida como $\vec{i}$ e $\vec{j}$, sendo eles os vetores unitários dos eixos x e y, respectivamente. Esses vetores formam uma base ortonormal canônica, com $\vec{i}$ = (1,0) e $\vec{j}$ = (0,1).

**Figura 23** - Representação gráfica dos elementos do conjunto $R^2$

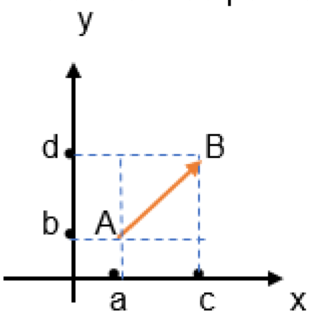



**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

### *3.9.3 Vetor definido por dois pontos*

**Definição 24:** Dados dois pontos A (a, b) e B (c, d), as coordenadas ou componentes do vetor $\vec{AB}$ são as medidas algébricas das projeções ortogonais do segmento orientado $\vec{AB}$, respectivamente, sobre os eixos coordenados x e y. Sabe-se que, o sinal da componente será positivo quando o sentido da projeção concordar com o sentido positivo do eixo; e negativo quando o sentido da projeção for oposto ao sentido positivo do eixo.

**Figura 24** – Vetor definido por dois pontos.




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

As coordenadas do vetor $\vec{AB}$ = (c - a, d - b) = B – A, onde o ponto A (a, b) e o ponto B (c, d), figura 24.

### *3.9.4 O conjunto R³*

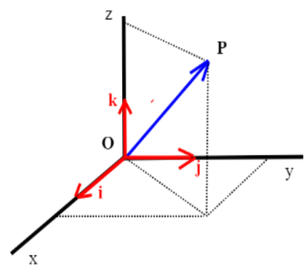
**Definição 25:** O conjunto R³ é o conjunto formado por todos os ternos ordenados (x, y, z), de números reais.

É representado por $R^3$ = ((x, y, z) / x, y, z ϵ R), onde: x é abscissa, y é a ordenada e z é a cota do P (x, y, z).

### *3.9.5 Representação cartesiana dos elementos do conjunto $R^3$.*

**Definição 26:** Serão utilizados três eixos tri-ortogonais 0x, 0y e 0z denominados respectivamente, de eixo das abscissas, eixos das ordenadas e eixo das cotas. Veja a representação de um ponto qualquer P ($x_0$, $y_0$, $z_0$) figura 25.

**Figura 25 -** Representação cartesiana dos elementos do Conjunto $R^3$.

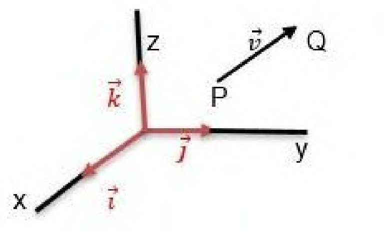



**Fonte:** www.infinitoteatrodelcosmo.it/2020/05/08/introduzione-agli-spazi-di-hilbert/

### *3.9.6 Vetores unitários dos eixos cartesianos*

**Definição 27:** Os vetores unitários que apontam nas direções dos eixos cartesianos têm uma representação estabelecida como $\vec{i}$ , $\vec{j}$ e $\vec{k}$, sendo eles os vetores unitários dos eixos x, y e z, respectivamente. Esses vetores formam uma base ortonormal canônica, com $\vec{i}$ = (1,0,0), $\vec{j}$ = (0,1,0) e $\vec{k}$= (0,0,1).

**Figura 26 -** Vetores unitários dos eixos cartesianos




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

Sejam os pontos P $(x_1, y_1, z_1)$, Q $(x_2, y_2, z_2)$ então o vetor $\vec{v} = \vec{PQ}$ é:

$\vec{PQ}$ = Q - P

$\vec{PQ} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$

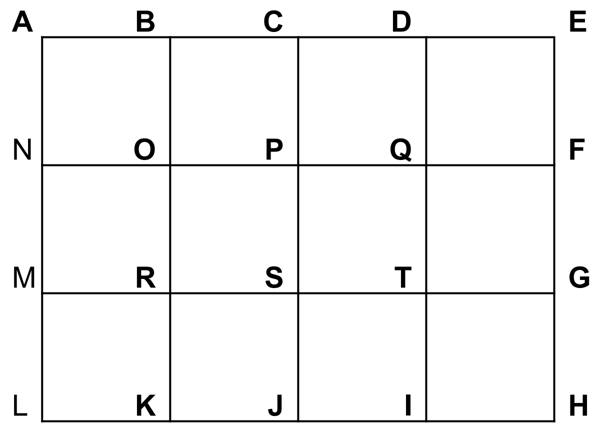
$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Os vetores representados por suas coordenadas têm esses valores como módulos das suas componentes nas direções x, y e z. Logo, esta representação também pode ser feita pelos unitários dessas direções.

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (x_2 - x_1\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

**Exemplo 2:** A figura 27 é constituída por doze quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Verificar se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações.

**Figura 27 –** Doze quadrados congruentes




**Fonte**: Elaborado pelo autor, 2023.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB}= \overrightarrow{DE}$ | f) $\overrightarrow{AH}$ // $\overrightarrow{MG}$ | k) $\overrightarrow{QF} \perp \overrightarrow{GH}$ |
| b) $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{QP}$ | g) $\overrightarrow{MG}$ // $\overrightarrow{NF}$ | i) $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{QI}$ |
| c) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{TG}$ | h) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{ID}$ | m) $\overrightarrow{AL} \perp \overrightarrow{EH}$ |
| d) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{JK}$ | i) $\overrightarrow{DP} = - \overrightarrow{QE}$ | n) $\lvert\overrightarrow{ES}\rvert$ 2 $=\lvert\overrightarrow{FT}\rvert$ |
| e) $\vec{\ }$ // $\overrightarrow{PS}$ | j) $\overrightarrow{TJ} = - \overrightarrow{GI}$ | o) $\lvert\overrightarrow{LD}\rvert = \lvert JF\rvert$ |

Respostas:

| | | |
|---|---|---|
| a) V | f) F | k) V |
| b) F | g) V | l) V |
| c) V | h) F | m) F |
| d) V | i) V | n) V |
| e) V | j) F | o) F |

**Exemplo 3:** De acordo com a figura 27 no exemplo 2, página 34 determine os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto N:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PJ}$ | b) $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QF}$ | c) $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP}$ | d) $\overrightarrow{NF} + \overrightarrow{FH}$ |
| e$\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{JP}$ | f) $\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$ | g) $\overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LI}$ | h) $\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{ON}$ |

Respostas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\overrightarrow{NJ}$ | b) $\overrightarrow{NF}$ | c) $\overrightarrow{NO}$ | d) $\overrightarrow{NH}$ |
| e) $\overrightarrow{NJ}$ | f) $\overrightarrow{NK}$ | g) $\vec{\ }$ | h) $\vec{O}$ |

**Exemplo 4:** Dados os pares ordenados A (7,5) e B (8, -2), calcule:

a) As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$

b) As coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$

Respostas:

a) $\overrightarrow{AB}$ = B - A

$\overrightarrow{AB}$ = (8, - 2) - (7, 5)

$\vec{AB}$ = (8 - 7, - 2 - 5)

$\vec{AB}$ = (1, - 7) ou $\vec{i}$ - 7$\vec{j}$

b) $\vec{BA}$ = A - B

$\vec{BA}$ = (7, 5) - (8, - 2)

$\vec{BA}$ = (7 - 8, 5 - (- 2))

$\vec{AB}$ = (-1, 7) ou - $\vec{i}$ + 7$\vec{j}$

**Exemplo 5:** Sejam os pontos P (3,2,4), Q (6, 5, -1) e R (7,8,9), determine os vetores:

a) $\vec{PQ}$

b) $\vec{PR}$

c) $\vec{QR}$

**Respostas**:

a) $\vec{PQ}$ = Q - P

$\vec{PQ}$ = (6,5,-1) - (3, 2, 4)

$\vec{PQ}$ = (6 - 3, 5 - 2, -1 - 4) ou $\vec{PQ}$= (6 - 3) $\vec{i}$ + (5 - 2) $\vec{j}$ + (-1 - 4) $\vec{k}$

$\vec{PQ}$ = (3,3, -5) ou $\vec{PQ}$ = 3 $\vec{i}$ + 3 $\vec{j}$ - 5 $\vec{k}$

b) $\vec{PR}$ = R - P

$\vec{PR}$ = (7,8,9) - (3,2,4)

$\vec{PR}$= (7 - 3, 8 - 2, 9 - 4) ou $\vec{PR}$= (7 - 3) $\vec{i}$ + (8 - 2) $\vec{j}$ + (9 - 4) $\vec{k}$

$\vec{PR}$= (4, 6, 5) ou$\vec{PR}$= 4 $\vec{i}$ + 6 $\vec{j}$ + 5 $\vec{k}$

c) $\vec{QR}$ = R - Q

$\vec{QR}$ = (7,8,9) - (6,5,-1)

$\vec{QR}$= (7 - 6, 8 - 5, 9 - (-1)) ou $\vec{QR}$= (7 - 6) $\vec{i}$+ (8 - 5) $\vec{j}$ + (9 +1) $\vec{k}$

$\vec{QR}$ = (1, 3, 10) ou $\vec{QR}$= 1$\vec{i}$ + 3 $\vec{j}$+ 10 $\vec{k}$

Neste capítulo, exploramos minuciosamente além das definições e os conceitos de Vetores, cinco exemplos práticos que ilustram de forma vívida como trabalhar com vetores. Esses exemplos têm o propósito de tornar o conceito de vetores mais acessível e aplicável, facilitando a compreensão e a aplicação desses conceitos em situações do mundo real. Ao examinar casos práticos de aplicação de vetores em fenômenos físicos e problemas matemáticos, você estará melhor preparado para utilizar esses conhecimentos em seu próprio estudo ou trabalho. Desta forma, você poderá encarar desafios complexos com confiança e precisão, usando os vetores como suas ferramentas para a compreensão e solução de problemas.

# 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, destacamos a importância de abordar as dificuldades enfrentadas pelos alunos do Ensino Superior na disciplina de Cálculo Vetorial. Propomos uma introdução clara e acessível a esse tema durante o Ensino Médio. A inclusão de noções de vetores como eletiva para alunos interessados em seguir carreiras acadêmicas na área de exatas mostrou-se uma abordagem promissora para prepará-los adequadamente para os desafios futuros.

Ao longo do trabalho, discutimos as limitações das quantidades escalares na descrição de fenômenos físicos e a importância dos vetores para capturar relações complexas entre objetos e movimentos. Abordamos diversos tópicos, como a história dos quatérnios, a contribuição de William Rowan Hamilton, casos particulares de vetores, operações com vetores e representação no sistema cartesiano $R^2$ e $R^3$. Através de exemplos práticos, buscamos proporcionar uma melhor compreensão e aplicação dos conceitos estudados.

É fundamental ressaltar que uma base sólida em Cálculo Vetorial durante o Ensino Médio vai além da redução das taxas de reprovação. Essa base é essencial para o desenvolvimento acadêmico dos estudantes, preparando-os para disciplinas mais avançadas e fornecendo as ferramentas necessárias para a compreensão de conceitos matemáticos e físicos mais complexos.

Diante dos resultados apresentados, é necessário o envolvimento de educadores, escolas e órgãos responsáveis pela elaboração dos currículos para implementar uma introdução ao Cálculo vetorial no Ensino Médio. Esperamos que este estudo seja um ponto de partida para futuras pesquisas e intervenções educacionais, visando melhorar o ensino do Cálculo Vetorial e formar estudantes mais preparados e motivados para seguir carreiras acadêmicas nas áreas de exata.

## REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996;

DELGADO, G. J. J. **Geometria Analítica I** v. único, 3ª ed., Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ,2010.

EVES, H**. Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004;

JULIANELLI, J. R**. Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008;

Ministério da Educação (Brasil). **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 20 de março de 2023.

OLIVEIRA, U.; VIEIRA, A. C. C.; JUNIOR, J. C. R. **Cálculo vetorial e geometria analítica.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Lexibon, 2015;

SILVA, N. F.; JÚNIOR, E. F. M. **O Tratamento Vetorial para Conceitos de Geometria Analítica do Ensino Médio usando o Geômetra.** Instituto Federal de Pernambuco, 2020;

Ministério da Educação (Brasil). Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Brasília: MEC. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em 24 de março de 2022

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica.** 2ª ed. Makron Books, 2014;
SLIDESHARE. **Grandezas Vetoriais**. Disponível em: https://www.slideshare.net/experimentun/grandezas-vetoriais-61883749. Acesso em: 28 de outubro de 2022;

Infinito Teatro del Cosmo. (2020, maio 8). **Introduzione agli spazi di Hilbert**. Em Infinito Teatro del Cosmo. Disponível em http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2020/05/08/introduzione-agli-spazi-di-hilbert/ Acesso em: 27 de março de 2023;

Vetopsy. (s.d.). Mécanique quantique: **Les postulats**. Em Vetopsy. Disponível em https://www.vetopsy.fr/mecanique-quantique/mecanique-quantique-postulats.php Acesso em: Acesso em: 17 de junho de 2021;

"Vetores" em **Só Matemática**. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2023. Consultado em 08/10/2023 às 22:10. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores4_3.php

PreparaENEM. (s.d.). **PreparaENEM**. Disponível em https://www.preparaenem.com/ Acesso em: 28 de outubro de 2022.