



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RENAN VICTOR OLIVEIRA LOURENÇO SANTOS

ASTROFÍSICA RELATIVÍSTICA: ESTRELAS ESTÁVEIS E UNIFORMES

CAMPINA GRANDE  
2024

**RENAN VICTOR OLIVEIRA LOURENÇO SANTOS**

**ASTROFÍSICA RELATIVÍSTICA: ESTRELAS ESTÁVEIS E  
UNIFORMES**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

**Área de concentração: Astrofísica.**

**Orientador: Jean Paulo Spinelly da Silva.**

**CAMPINA GRANDE  
2024**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237a Santos, Renan Victor Oliveira Lourenco.  
Astrofísica relativística [manuscrito] : estrelas estáveis e  
uniformes / Renan Victor Oliveira Lourenco Santos. - 2024.  
21 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -  
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,  
Departamento de Física - CCT. "

1. Astrofísica relativística. 2. Relatividade geral. 3. Estrelas  
com densidade uniforme. I. Título

21. ed. CDD 530

RENAN VICTOR OLIVEIRA LOURENÇO SANTOS

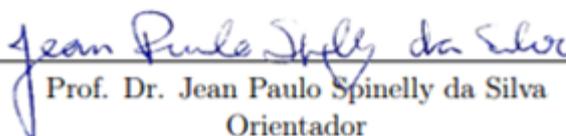
ASTROFÍSICA RELATIVÍSTICA: ESTRELAS ESTÁVEIS E UNIFORMES

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado à Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração:  
Astrofísica.

Aprovado em: 07/06/2024.

**Banca Examinadora**

  
Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Orientador



Prof. Dra. Gabriela Coutinho Luna (UEPB)  
Examinadora



Prof. Dra. Raissa Maria Pimentel Neves (UECE)  
Examinadora

Dedico esse trabalho à minha família e à  
minha namorada.

“Quem tem a Deus nada lhe falta. Só Deus  
basta.” **Santa Teresa D’Ávila**

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Evolução estelar</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>10</b>
3.1	O Espaço-tempo da Relatividade Geral . . . . .	10
3.2	Equações de Campo . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Astrofísica Relativística</b>	<b>13</b>
4.1	Equações diferenciais da estrutura estelar . . . . .	13
4.2	Estrelas de densidade uniforme . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>19</b>
	<b>Referências</b>	<b>19</b>
	<b>Agradecimentos</b>	<b>21</b>

# ASTROFÍSICA RELATIVÍSTICA: ESTRELAS ESTÁVEIS E UNIFORMES

Renan Victor Oliveira Lourenço Santos<sup>1</sup>

## RESUMO

A incorporação da Relatividade Geral como parte fundamental da astrofísica iniciou no século XX e permitiu grandes avanços no conhecimento do cosmos. Dessa integração surge a Astrofísica Relativística, a qual é responsável por novas descobertas do universo atualmente. Esse ramo que aplica as leis e os conceitos da física a objetos astronômicos nos permitiu compreender as etapas da evolução estelar, como também, o modelo cosmológico padrão que nos indica as características atuais do universo. Neste trabalho, estudaremos as quantidades que caracterizam uma estrela estável e uniforme. Especificamente, com base na Astrofísica Relativística, determinaremos a pressão e o campo gravitacional associados a um objeto estelar desse tipo.

**Palavras chave:** astrofísica relativística; relatividade geral; estrelas de densidade uniforme.

## ABSTRACT

The incorporation of General Relativity as a fundamental part of astrophysics began in the 20th century and allowed great advances in the knowledge of the cosmos. From this integration emerged Relativistic Astrophysics, which is responsible for new discoveries in the universe today. This branch that applies the laws and concepts of physics to astronomical objects has allowed us to understand the stages of stellar evolution, as well as the standard cosmological model that indicates the current characteristics of the universe. In this work, we will study the quantities that characterize a stable and uniform star. Specifically, based on Relativistic Astrophysics, we will determine the pressure and gravitational field associated with a stellar object of this type.

**Keywords:** relativistic astrophysics; general relativity; stars of uniform density.

## 1 Introdução

A primeira vez que surgiu a expressão “Astrofísica Relativística” foi por volta da metade do século XX relativa a descoberta dos quasares. No ano de 1965 houve o primeiro congresso no Texas intitulado como Simpósio de astrofísica relativística. Os resultados desse evento foram publicados no mesmo ano pela Universidade de Chicago com o título Fontes Quasi-Estelares e Colapso Gravitacional, e desde então, esse termo foi admitido na comunidade científica (Font, 2015).

---

<sup>1</sup>Graduando(a) em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

Esse campo da aplicação da física na astronomia utiliza como modelo para estudar o universo, a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Albert Einstein, pois as postulações clássicas e a lei da gravitação newtoniana não são capazes de explicar satisfatoriamente os fenômenos naturais envolvidos. A Relatividade Geral, desde a sua formulação, concedeu várias evidências importantes, como: os testes clássicos da anomalia da precessão do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional da luz ao passar próximo a um corpo massivo, a existência de buracos negros, entre outras contribuições.

Nos dias atuais, a TRG ainda está presente e fornece grandes colaborações para as novas descobertas científicas no universo. Por ela, foi possível explicar o colapso do núcleo de uma estrela massiva e compreender o ciclo de vida das estrelas, como também medir a variação do comprimento de onda pelo desvio gravitacional e obter modelos para analisar corpos do universo a longas distâncias.

Outra previsão dessa teoria foi a existência das ondas gravitacionais, detectadas 100 anos após sua publicação, as quais nos dá novos paradigmas para a compreensão do universo e sua formação. Essa gravidade relativística também é incorporada no estudo de transporte radiativo dos neutrinos e nas equações de estados microfísicos, como também é base para o Modelo Cosmológico Padrão que afirma que o universo é isotrópico e homogêneo em larga escala, que está em expansão e contém curvatura do espaço-tempo, modelo esse que concorda com a teoria do Big Bang (Janka, 2012; Oliveira e Saraiva, 2014; Font, 2015; Carmeli, 1982; Hubble, 1928).

Com o intuito de compreender a utilização da Astrofísica Relativística na descrição de uma estrela, o nosso objetivo é determinar a pressão e o campo gravitacional gerado por uma estrela estável e uniforme, a partir do pressuposto de que a TRG é a teoria da gravitação. Para tanto, estruturamos este trabalho da seguinte forma: na segunda seção veremos o nascimento, a evolução e o fim de uma estrela; na terceira, falaremos sobre a Relatividade Geral; na quarta e, por fim, aplicaremos a mesma para uma estrela de densidade uniforme e apresentaremos as nossas conclusões.

Ao longo deste artigo, usaremos o sistema de unidades no qual a velocidade de luz é igual a 1,  $c = 1$ , e adotaremos a assinatura  $(-, +, +, +)$  para a métrica.

## 2 Evolução estelar

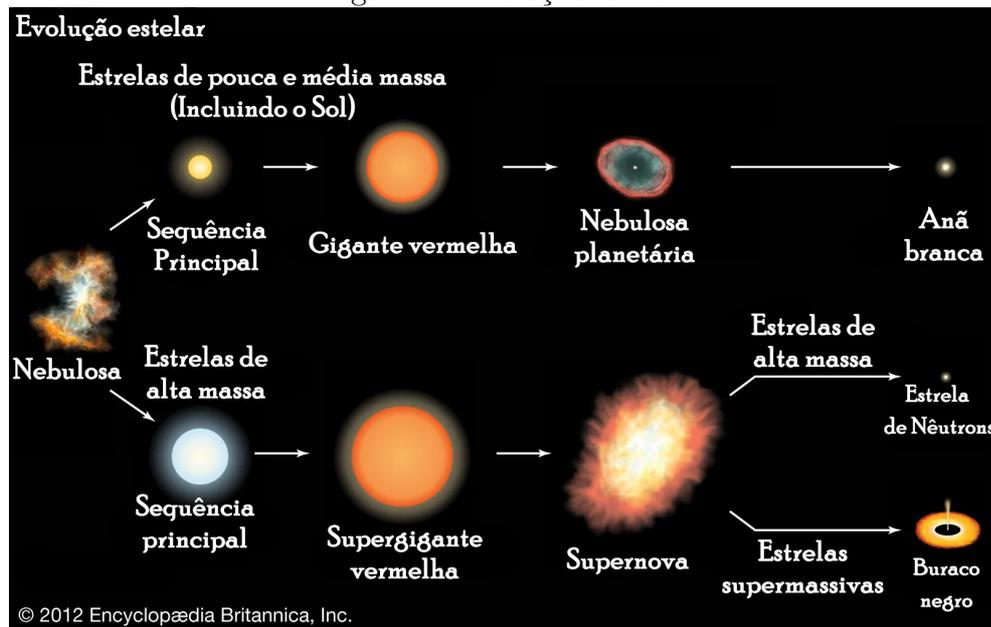
Estrelas são estruturas gasosas, constituídas basicamente por hidrogênio e hélio, e quase perfeitamente esféricas. Esses objetos são formados nas nuvens moleculares gigantes, que são os componentes dominantes de formação estelar. Essas regiões fornecem gás e poeira que são matérias-primas para o surgimento de novos astros. Por incrível que pareça, essas incubadoras são frias com temperaturas tão baixas como 10 K, mas muito densas e massivas. Geralmente, cada berço de estrela abrange tamanho de dezenas de anos-luz e massas de até 1 milhão de vezes maiores que a do Sol  $M_{\odot}$ , principalmente na forma de moléculas de hidrogênio (Leng, 2013).

Nesta fase, onde a estrela está em formação no berçário de nebulosa, quando é uma protoestrela, ela vai se tornar suficientemente densa pela compressão externa ou interna de uma nuvem gigante, conforme “cair sobre si mesma”. Dessa forma, a atração gravitacional superará a pressão do gás. Na medida em que isso ocorre, começa o colapso gravitacional, no qual os fragmentos gigantes de nuvens se desmoronam em componentes menores, até que os núcleos fiquem quentes o suficiente para o início da fusão nuclear, chamado de

sequência principal, a etapa mais longa da vida de uma estrela.

Por conseguinte, a temperatura e a pressão aumentarão dependendo do ritmo da contração, a medida em que a nebulosa se torna menor e mais densa, fará com que a protoestrela chegue a fase da sequência principal, nascendo assim uma estrela. As próximas etapas da vida do objeto celeste dependerão do quanto de massa o embrião de estrela contrai. Estrelas mais massivas tendem a percorrer todo o ciclo de vida, por outro lado, astros menores chegam a anãs brancas [Ver fig. 1] (Leng, 2013; Oliveira e Saraiva, 2014).

Figura 1: Evolução estelar



Fonte: Estrelas - Desmistificando a astronomia disponível em:

<https://desmistificandoastronomia.com.br/index.php/estrelas/> Acesso: 03/06/2024

- Sequência Principal

A fase da sequência principal é o estágio evolutivo mais longo da vida das estrelas. Quando são ainda nebulosas, ou seja, quando são imensas nuvens de gás compostas basicamente de hidrogênio e hélio, a matéria vai atraindo matéria pela gravidade. Dessa forma o gás vai sendo aumentado e concentrado em determinada região e cada vez mais a força gravitacional realimenta a concentração gasosa gerando uma compressão sobre aqueles átomos. Durante esta etapa, o astro está em equilíbrio estável e sua estrutura muda apenas porque sua composição química é gradualmente alterada pelas reações nucleares. Assim, a evolução ocorre numa escala de tempo nuclear (Schwarschild, 1958; Zeilik, 1994).

Por exemplo, para uma estrela do tamanho da massa do sol, a fase da sequência principal dura cerca de 10.000 milhões de anos. Já outras de maior porte evoluem mais rapidamente, porque irradiam muito mais energia. Desta maneira, para esse período, um objeto celeste 15 vezes maior que o Sol tem apenas cerca de 10 milhões de anos. Por outro lado, objetos menores têm uma vida útil mais longa, tal como uma estrela de  $0,25M_{\odot}$ , a qual passa cerca de 70 bilhões de anos nesta estação (Oliveira e Saraiva, 2014; Leng, 2013).

Como neste primeiro período o principal fator é o volume do corpo celeste, existe um limite superior e inferior para que esta etapa inicie. Se este volume se tornar muito grande a força gravitacional não consegue mais resistir a radiação pressão. Cálculos teóricos indicam uma massa limite de 120 milhões  $M_{\odot}$ , mas esse valor é incerto. Em contrapartida, estrelas abaixo de  $0,08M_{\odot}$  nunca ficam quentes suficientemente para que a queima de hidrogênio aconteça. Um exemplo desse limite inferior massivo são as Anãs Marrons (Leng, 2013).

Após o prosseguimento principal, os astros ainda enfrentam uma vida muito turbulenta e instável, cheio de explosões violentas que ejetam muito material, o que pode modificar sua estrutura interna drasticamente. Desse modo, para que a estrela fique madura, o equilíbrio hidrostático precisa ser desenvolvido, ou seja, a força de expansão precisa se igualar a força de compressão – assim o corpo celeste alcança a fase estável de sua vida (Kaufmann e Freedman, 1998).

Esses corpos ainda possuem outras possibilidades para se desenvolverem. Isso pode acontecer à medida em que eles vão queimando o seu combustível nuclear, onde a temperatura em seu centro aumenta, e assim evoluem para o que chamamos de gigante vermelha (Kaufmann e Freedman, 1998).

- Fase gigante

Nesta nova etapa, geralmente vivida por astros com volume próximo ao do Sol, a energia interna central continuará a subir e todo o núcleo de hélio terá uma temperatura uniforme devido à alta condutividade do gás gerado. Se a massa da estrela for maior que  $0,26M_{\odot}$  a temperatura central eventualmente atingirá cerca de 100 milhões de graus, o que é suficiente para o hélio queimar em carbono no processo triplo alfa (Kaufmann e Freedman, 1998; Leng, 2013).

Em estrelas de massa intermediária ( $0,8M_{\odot} < M_{\odot} < 10M_{\odot}$ ), a temperatura central é mais elevada, o que resulta numa densidade central mais baixa, onde o núcleo não é degenerado. Assim, a queima de hélio pode ocorrer de forma não catastrófica à medida que as regiões centrais se contraem. Como a importância da queima de hélio no núcleo aumenta, a estrela primeiro se afasta da gigante vermelha e ramifica-se em direção a cores mais azuis (Oliveira e Saraiva, 2014; Leng, 2013).

No fim desse estágio, a estrela pode começar a pulsar e fazer suas camadas exteriores ejetarem, se tornando uma nebulosa planetária, cujo núcleo é o que chamamos de Anã Branca. Este tipo de objeto tem diâmetro comparável ao da Terra, porém com quantidade de massa próxima a do Sol (Oliveira e Saraiva, 2014; Kaufmann e Freedman, 1998).

- Fim de uma estrela

Para o caso em que são formadas estrelas muito massivas, temos outras eventualidades para o ciclo de vida desses objetos. Estes corpos são raros de encontrar no universo, em alguns milhões de anos, consomem rapidamente o seu combustível. A título de exemplo, temos a moribunda e monstruosa Betelgeuse, cujo tamanho é maior que a órbita de Júpiter, classificada como uma supergigante vermelha (Leng, 2013).

Esse tipo imenso de astro possui temperatura tão alta e força gravitacional tão poderosa em seu interior, que são capazes de consumir e construir elementos químicos mais pesados como o ferro, na fusão nuclear. A medida que esses corpos têm seu combustível esgotado, e funde compostos pesados, a força gravitacional faz o núcleo colapsar. Este

enorme colapso faz crescer a temperatura e a pressão nas camadas mais externas de tal maneira que são expulsas violentamente, então a estrela tem explosão de supernova (Leng, 2013; Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen e Donner, 2017; Kaufmann e Freedman, 1998).

As supernovas produzem elementos químicos mais pesados que o ferro, como o ouro e prata, e os espalha para o universo onde se tornam parte de outras estrelas e planetas. A partir dessa magnífica explosão, cujo brilho se compara a galáxias inteiras, o objeto celeste tem duas probabilidades de transformação: Uma estrela de nêutrons ou um buraco negro (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen e Donner, 2017; Reis, 2022).

Na ocasião da estrela que colapsou e explodiu em supernova conter entre 10 a 25 massas solares irá surgir uma estrela de nêutrons, o segundo objeto mais denso do Universo, no qual uma caixa de fósforo de sua massa contém 3 bilhões de toneladas por estar tão comprimida. Por outro lado, caso o objeto colapsado que explode em hipernova, contenha acima de 25 massas solares, o resultado será um buraco negro, algo tão denso que nem mesmo a luz escapa (Oliveira e Saraiva, 2014; Kaufmann e Freedman, 1998; Rose, 1998).

### 3 Teoria da Relatividade Geral

A teoria da relatividade, proposta por Albert Einstein, modificou o que compreendíamos sobre espaço, tempo e gravidade. Ela é dividida em duas partes: a relatividade restrita e a relatividade geral.

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR) trata do movimento de objetos em velocidades próximas à da luz e do comportamento do espaço e do tempo em tais condições. Esta teoria é baseada em dois postulados principais: *princípio da relatividade*, o qual afirma que as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais; e o da *constância da velocidade da luz*, o qual estabelece que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento da fonte de luz ou do observador (Crawford, 1995; Eisberg e Resnick, 1979).

Uma consequência desses postulados é que, assim como as coordenadas, o tempo também se transforma quando passamos de um referencial inercial para outro que se move com uma velocidade relativa constante. Por conta disso, a TRR assume que cada observador inercial pode descrever os eventos físicos a partir de um diagrama quadridimensional de espaço-tempo plano, no qual a distância infinitesimal entre dois pontos é dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (1)$$

onde  $x^\mu = (t, x, y, z)$  são as coordenadas do espaço-tempo e  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é o tensor métrico de Minkowski.

A Relatividade Geral estende os princípios da Relatividade Restrita para incluir a gravidade e a aceleração. Nela, diferentemente da gravidade newtoniana, que é vista como uma força entre massas, a gravidade é descrita como uma curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa e energia (Dahmen, 2022).

Nesta seção, faremos uma discussão sobre o porquê do espaço-tempo ser curvo na TRG e apresentaremos as equações de campo dessa teoria.

#### 3.1 O Espaço-tempo da Relatividade Geral

Segundo a teoria newtoniana da gravitação, proposta no século XVII, uma distribuição

de massa com densidade  $\rho$  produz um campo gravitacional  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ , em que  $\Phi$ , o denominado potencial gravitacional, é solução da equação de Poisson

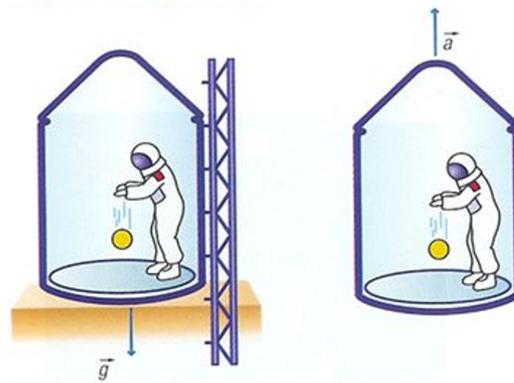
$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2)$$

Além disso, uma partícula de massa  $m$ , que se encontra na presença desse campo, sofre uma força  $\vec{F} = m\vec{g}$  e o seu movimento é descrito pela equação

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (3)$$

Já que  $m$  não consta na equação acima, podemos afirmar que o campo de gravidade possui a seguinte propriedade: todos os corpos, que se encontram sob sua influência, se movimentam igualmente, independentemente de sua constituição, desde que as condições iniciais sejam idênticas. Esta característica nos permite dizer que o movimento de um corpo em um sistema inercial, na presença de um campo gravitacional, é idêntico ao que acontece em um referencial não-inercial acelerado uniformemente, na ausência da gravitação [Ver fig. 2].

Figura 2: Equivalência entre campo gravitacional e referencial não inercial.



Fonte: Site Slide Player - Relatividade einsteiniana, 2015. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/3255549/> Acesso:20/05/2024

Nesse sentido, dizemos que o campo gravitacional é equivalente a um sistema de referência não inercial, o que é chamado *princípio de equivalência*. Contudo, é importante destacar que os campos, que tem por equivalentes referenciais não inercias (campos de inércia), não se comportam como os campos gravitacionais reais. De fato, diferentemente dos campos de inércia, que se anulam quando passamos para um referencial inercial, os campos gravitacionais reais não podem ser eliminados a partir de uma simples mudança de coordenadas. Na verdade, esta “eliminação” só seria possível numa região do espaço, suficientemente pequena, onde o campo real possa ser considerado uniforme. Dito de outra forma, o referido princípio só é válido localmente (Landau e Lifshitz, 1974).

Embora consiga explicar vários fenômenos, como, por exemplo, os movimentos dos planetas no sistema solar (Leis de Kepler), a teoria newtoniana apresenta algumas limitações. Uma delas é que ela falha ao tentar descrever o movimento de corpos na

presença de concentrações de massas, capazes de acelerá-los até velocidades próximas a da luz ( $c = 3 \times 10^8$  m/s).

Buscando evitar essa restrição, no ano de 1915 Albert Einstein apresentou a sua teoria relativística da gravitação, denominada Relatividade Geral. Na construção dessa teoria, ele tomou como base uma idéia simples: o princípio de equivalência também deveria ser válido no caso relativístico. Partindo dessa premissa e levando em conta que, no diagrama de espaço-tempo associado a um observador não inercial, o intervalo infinitesimal entre dois eventos é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4)$$

onde as 10 componentes do tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , são funções de coordenadas curvilíneas, Einstein concluiu que, assim como acontece com um campo de inércia, um campo gravitacional real também é representado por um tensor desse tipo.

Uma vez que o campo de inércia pode ser eliminado por uma transformação adequada do sistema de coordenadas, é sempre possível encontrarmos uma mudança de coordenadas que nos leve do referencial não inercial, descrito por (4), para um inercial, cujo intervalo  $ds$  é expresso por (1). Logo, como o espaço-tempo de Minkowski é plano, chegamos à conclusão que aquele que está associado a um sistema não inercial possui geometria plana. Por outro lado, como um campo gravitacional real não pode ser eliminado por nenhuma transformação, o espaço-tempo relacionado a um campo gravitacional real nunca pode ser reduzido ao de Minkowski e, portanto, é curvo. Nesse sentido, o campo gravitacional relativístico deve ser representado pelo tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , de um espaço-tempo curvo, cuja geometria é definida pelo conteúdo de matéria e energia presentes.

### 3.2 Equações de Campo

Enquanto a teoria newtoniana necessita apenas de uma equação para determinar o campo gravitacional, a TRG requer 10 equações de campo. Naturalmente, como, no limite de campo fraco, os resultados da Relatividade Geral devem concordar com aqueles previstos pela teoria de Newton, nesse limite, tais equações devem coincidir com a de Poisson (2).

Semelhantemente ao que acontece com a expressão matemática de Poisson, na qual um dos lados é proporcional a densidade de matéria  $\rho$  que produz o campo gravitacional, um lado das equações de campo da TRG precisa estar relacionada linearmente ao tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , já que sua componente 00 é proporcional a densidade de massa. Ao mesmo tempo, como na teoria relativística  $g_{\mu\nu}$  substitui o potencial  $\Phi$ , o outro lado deve ser expresso em termos de derivadas segunda ordem do tensor métrico. Pensando dessa forma, Einstein concluiu que as equações de campo da gravitação relativística são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

em que

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (6)$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7)$$

são os tensor e escalar de Ricci, respectivamente, onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g x^{\lambda}} \right) \quad (8)$$

são os símbolos de Christoffel, e  $\kappa$  é a constante gravitacional de Einstein.

A fim de que as equações de Einstein correspondam à de Poisson, no limite acima citado, essa constante deve ser  $\kappa = 8\pi G$  (Carmeli, 1982).

## 4 Astrofísica Relativística

A Astrofísica Relativística é um ramo da Física que estuda o Universo a partir da Teoria da Relatividade Geral, sendo, portanto, aplicada às situações nas quais a mecânica clássica e a lei da gravitação de Newton não são válidas. Os objetos que são investigados a partir dela possuem velocidades próximas a da luz, campos gravitacionais muito intensos ou pressões e densidades de energia muito altas. Como exemplo, podemos citar as estrelas de nêutrons e anãs brancas, os buracos negros e os quasares.

Vale salientar que astrofísica é diferente da cosmologia, pois esta tem foco a estrutura geral do universo e as leis que o regem em um sentido mais amplo.

Nesta seção, supondo que a TRG é a teoria da gravitação, obteremos, inicialmente, as equações diferenciais que envolvem as quantidades que definem a estrutura de uma estrela estável: o campo gravitacional (geometria do espaço-tempo) interno e externo, a pressão e a densidade de energia. Em seguida, resolveremos as referidas equações para o caso particular em que o objeto estelar possui uma densidade uniforme.

### 4.1 Equações diferenciais da estrutura estelar

Para estudarmos a estrutura de uma estrela que se encontra na sequência principal, isto é, que é estável sob o chamado equilíbrio hidrostático, usaremos um modelo no qual a consideraremos como uma esfera estática de raio  $R$  e massa  $M$ .

Devido a forma desse corpo celeste, a geometria do espaço-tempo, tanto interior quanto exterior, deve ser descrita por um elemento de linha esféricamente simétrico, isto é,

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (9)$$

onde  $A$  e  $B$  são funções arbitrárias da coordenada  $r$ , a qual representa a distância medida a partir do centro da distribuição. Por conta disso, escolhendo  $x^{\mu} = (t, r, \theta, \varphi)$ , temos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são dadas, respectivamente, por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^A, e^B, r^2, r^2 \sin^2 \theta) \quad (10)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{-A}, e^{-B}, 1/r^2, 1/r^2 \sin^2 \theta). \quad (11)$$

Consequentemente, utilizando (10) e (11) em (8), vemos que os símbolos de Christoffel não-nulos são:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{dA}{dr} e^{A-B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-B},$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r\text{sen}^2\theta e^{-B}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\text{e } \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \text{cotg}\theta. \quad (12)$$

Logo, substituindo (12) em (6), encontramos que os elementos diferentes de zero do tensor de Ricci são

$$R_{00} = \frac{e^{A-B}}{4r} \left[ -r \frac{dA}{dr} \frac{dB}{dr} + r \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 + 2r \frac{d^2A}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \right], \quad (13)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4r} \left[ r \frac{dA}{dr} \frac{dB}{dr} - r \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 - 2r \frac{d^2A}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \right], \quad (14)$$

$$R_{22} = \frac{e^{-B}}{2} \left( r \frac{dB}{dr} - r \frac{dA}{dr} + 2e^B - 2 \right) \quad (15)$$

e

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22}. \quad (16)$$

Diante disso, concluímos que o escalar de Ricci toma a forma:

$$R = \frac{e^{-B}}{2r^2} \left[ r^2 \frac{dB}{dr} \frac{dA}{dr} - r^2 \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 - 2r^2 \frac{d^2A}{dr^2} + 4r \frac{dB}{dr} - 4r \frac{dA}{dr} + 4e^B - 4 \right]. \quad (17)$$

De posse das components contravariantes dos tensores métrico e de Ricci, bem como do escalar de Ricci, seremos capazes de escrever os termos que surgem do lado esquerdo de cada uma das equações de campo de Einstein. Contudo, ainda nos restaria definir a forma do tensor energia momento para, assim, podermos determinar o lado direito de cada uma delas.

- Região interna

Para descrevermos a estrela, admitiremos que o seu interior ( $r \leq R$ ) é constituído por um fluido perfeito, o qual é representado pelo tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (18)$$

onde, por conta do modelo adotado, as densidade,  $\rho$ , e pressão,  $p$ , devem ser funções apenas de  $r$ ; por sua vez  $U^\nu \equiv dx^\nu/d\tau$  é a quadrivelocidade do fluido, sendo  $\tau$  o tempo próprio (Weinberg, 1972).

Como o vetor quadrivelocidade é tipo-tempo, as quantidades  $U^\mu$  obedecem à relação  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ . Então, estando o fluido em equilíbrio hidrostático, ou seja, com os seus elementos em repouso, segue que  $U^0 = (-g_{00})^{-1/2}$  e  $U^i = 0$ . No nosso caso, como estamos tratando com um objeto que se encontra nesse regime, temos que

$U_\nu = g_{\nu\mu}U^\mu = (-e^{-A/2}, 0, 0, 0)$ . Assim, usando a definição  $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$ , podemos mostrar que as componentes covariantes não-nulas do tensor energia-momento são

$$T_{00} = \rho e^A, \quad T_{11} = p e^B, \quad T_{22} = p r^2 \quad \text{e} \quad T_{33} = p r^2 \sin^2 \theta. \quad (19)$$

Finalmente, considerando  $\mu = \nu = 0$  e  $\mu = \nu = 1$  em (5) e utilizando as expressões (10), (13), (14), (17) e (19), chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$e^{-B} \left( \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G \rho \quad (20)$$

e

$$e^{-B} \left( \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G p. \quad (21)$$

É claro que, caso tomássemos  $\mu = \nu = 2$  e  $\mu = \nu = 3$  em (5), obteríamos mais duas equações diferenciais envolvendo as funções  $A$ ,  $B$ ,  $p$  e  $\rho$ . Porém, não o fizemos porque, além de serem idênticas, esse procedimento não nos traria novas informações.

Podemos reescrever a equação (20) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dr} (r e^{-B} - r) = -8\pi G \rho r^2. \quad (22)$$

Então, multiplicando-a por  $dr$  e integrando o resultado entre 0 e  $r$ , obtemos:

$$e^B = \left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}}{r} \right)^{-1}, \quad (23)$$

em que

$$\mathcal{M} = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \quad (24)$$

é uma função que representa a massa da estrela contida em uma esfera de raio  $r$ .

Substituindo, agora, (23) em (21), temos

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2G\mathcal{M}}{r^2} \left( 1 + \frac{4\pi r^3 p}{\mathcal{M}} \right) \left( 1 + \frac{2G\mathcal{M}}{r} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Logo, multiplicado ambos os lados por  $dr$ , integrando entre  $r$  e  $\infty$ , usando o fato que  $A(\infty) = 1$ , pois no infinito o espaço-tempo é plano, e aplicando a exponencial, encontramos:

$$e^A = \exp \left[ - \int_r^\infty \frac{2G\mathcal{M}}{r^2} \left( 1 + \frac{4\pi r^3 p}{\mathcal{M}} \right) \left( 1 + \frac{2G\mathcal{M}}{r} \right)^{-1} dr \right]. \quad (26)$$

Conforme podemos observar, das equações (23) e (26), para determinarmos a dependência explícita da métrica que descreve a região interior, precisamos conhecer como  $\rho$  e  $p$  se comportam com  $r$ . Naturalmente, isto requer que tenhamos mais duas equações

envolvendo essas quantidades. Uma delas, a chamada equação de estado, está relacionada ao tipo de estrela; enquanto que a outra é oriunda da equação de continuidade,

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\nu} T^{\alpha\mu} = 0. \quad (27)$$

De fato, tomando  $\mu = 0$  nesta expressão matemática, segue que:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(\rho + p)}{2} \frac{dA}{dr}, \quad (28)$$

ou ainda,

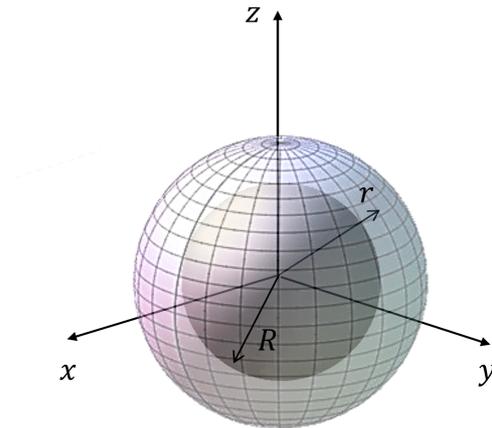
$$r^2 \frac{dp}{dr} = -GM\rho \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{\mathcal{M}}\right) \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (29)$$

Essa é a equação fundamental da astrofísica newtoniana com correções relativísticas gerais fornecidas pelos últimos três fatores.

- Região externa

Fora do objeto estelar ( $r > R$ ) o tensor energia-momento é nulo, pois não há matéria e energia. Isto significa que, nessa região, podemos utilizar os resultados obtidos acima, considerando  $p = 0$  e  $\rho = 0$ . Além do mais, como a massa da estrela está contida em uma esfera de raio  $R$  [Ver Fig. 3], a integral (24) será diferente de zero apenas entre 0 e  $R$ , e

Figura 3: Esfera de raio  $r$  envolvendo uma estrela cuja massa,  $M$ , está concentrada em uma região de raio  $R$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

a função  $\mathcal{M}$  corresponderá à  $M$ , ou seja,

$$\mathcal{M} = M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr, \quad r > R. \quad (30)$$

Por conseguinte, das equações (23) e (26), encontramos que os coeficientes  $g_{00}$  e  $g_{11}$  da métrica que representa o espaço-tempo externo são, respectivamente,

$$e^A = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (31)$$

e

$$e^B = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (32)$$

Esses resultados indicam que a geometria exterior à estrela é descrita pela métrica de Schwarzschild (Schwarzschild, 1958; Soares, 2013; Weinberg, 1972).

## 4.2 Estrelas de densidade uniforme

Supondo que a densidade estelar é uniforme e igual a  $\rho_0$ , segue, da expressão (24), que

$$\mathcal{M} = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}, \quad r \leq R. \quad (33)$$

Por conta disso, a equação (29) torna-se:

$$\frac{1}{(p + \rho_0)(p + \rho_0/3)} \frac{dp}{dr} = 4\pi Gr \left(1 - \frac{8\pi G\rho_0 r^2}{3}\right)^{-1}. \quad (34)$$

Assim, multiplicando (34) por  $dr$  e integrando da superfície  $r = R$ , em que  $p = 0$ , até um  $r$  qualquer, obtemos:

$$\frac{p + \rho_0}{3p + \rho_0} = \left(\frac{1 - 8\pi G\rho_0 R^2/3}{1 - 8\pi G\rho_0 r^2/3}\right)^{1/2}. \quad (35)$$

Como consequência, isolando a pressão e usando o fato que a densidade pode ser escrita como  $\rho_0 = 3M/4\pi R^3$ , obtemos que a pressão na região interior é

$$p = \frac{3M}{4\pi R^3} \left[ \frac{(1 - 2GM/R)^{1/2} - (1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2}}{(1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2} - 3(1 - 2GM/R)^{1/2}} \right]. \quad (36)$$

Levando em conta que a função  $\mathcal{M}$  possui comportamentos distintos nas regiões exterior ( $r > 0$ ) e interior ( $r \leq 0$ ), conforme podemos observar nas equações (30) e (33); que a pressão interna é dada por (36) e que, fora do objeto estelar,  $p = \rho = 0$ , a equação (26) nos fornece:

$$e^A = \exp \left[ \underbrace{-\frac{4GM}{R^3} \int_r^R \frac{(1 - 2GMr^2/R^3)^{-1/2} r}{-(1 - 2GMr^2/R^3) + 3(1 - 2GM/R)^{1/2}} dr}_I - \underbrace{2GM \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr}_II \right]. \quad (37)$$

Logo, usando o fato que as primeira e segunda integral são dadas por

$$I = -\frac{R^3}{4GM} \ln \left[ \frac{-\sqrt{1 - 2GM r^2/R^3} + 3\sqrt{1 - 2GM/R}}{2\sqrt{1 - 2GM/R}} \right]^2 \quad (38)$$

e

$$II = -\frac{1}{2GM} \ln \left( 1 - \frac{2GM}{R} \right), \quad (39)$$

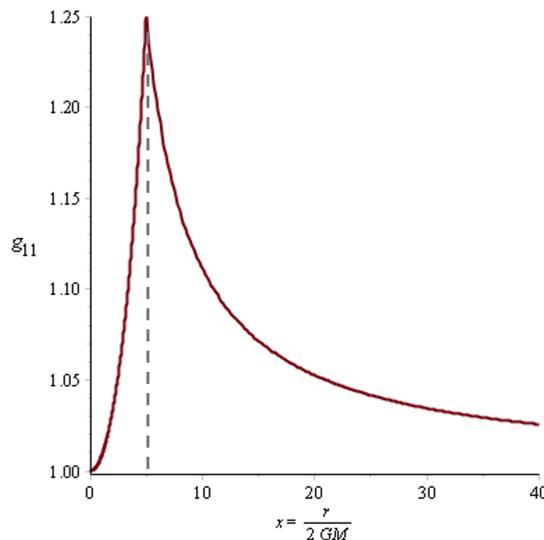
chegamos à conclusão que a componente 00 da métrica interior é

$$e^A = \frac{1}{4} \left[ 3 \left( 1 - \frac{2GM}{R} \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{2GM r^2}{R^3} \right)^{1/2} \right]^2. \quad (40)$$

Finalmente, utilizando (33) em (23), vemos que a componente 11 da métrica, que descreve a geometria da região interna, torna a seguinte forma:

$$e^B = \left( 1 - \frac{2MGr^2}{R^3} \right)^{-1}. \quad (41)$$

Figura 4: Gráfico de  $g_{11} = e^B$ , considerando  $x = r/2GM$  e  $R = 10GM$ . Nas regiões à esquerda e à direita da linha tracejada, localizada em  $r = R$  ( $x = 5$ ), a função é descrita por (41) e (32), respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Ao analisarmos a equação (36), percebemos que há um problema: a pressão torna-se infinita quando tomamos  $r = \sqrt{9R^2 - 4R^3/MG}$ . À princípio, poderíamos tentar contornar esta questão argumentando que uma simples mudança de coordenadas evitaria que a divergência acontecesse. Porém, isto não faria nenhum sentido, pois a pressão é uma quantidade escalar. Diante disso, só nos restaria argumentar que a solução não é válida para quaisquer valores de  $R$  e  $M$ . Realmente, mantendo o sistema de coordenadas

e impondo a restrição em que  $R > 9GM/4$ , vemos que a pressão será finita para todos os valores de  $r$ .

Da equação (32), observamos que a componente  $g_{11}$ , associada à geometria exterior, diverge no raio de Schwarzschild,  $r = r_{sc} = 2GM$ . Isto significa que há um horizonte de eventos em  $r = r_{sc}$  e que, se a massa estiver concentrada numa região com um raio menor que esse valor, a estrela se comportará como um *buraco negro* (Carroll, 1997). Contudo, como  $r_{sc} < 9GM/4$ , o objeto estelar não terá esse tipo de comportamento. De fato, da figura 4, vemos que a componente radial do tensor métrico é regular em todos os valores de  $r$ .

Vale salientar que este tipo de vínculo entre a massa e o raio não acontece apenas em estrelas de densidade uniforme. Por exemplo, no caso de uma estrela estável formada por um gás ideal de nêutrons,  $MG/R$  nunca será maior que  $0,36/0,32$  ou  $0,11$  (Weinberg, 1972).

## 5 Conclusão

Neste trabalho, visando compreender o papel da Astrofísica Relativística, estudamos o comportamento das quantidades que caracterizam uma estrela estável.

Na verdade, assumindo que objetos desse tipo podem ser modelados por esferas cujas pressão, densidade e campo gravitacional dependem apenas da distância ao centro, encontramos, a partir das equações de Einstein, duas equações diferenciais envolvendo essas grandezas e vimos que a métrica exterior é a de Schwarzschild.

Nesse momento, percebemos que, além dessas equações, necessitaríamos de uma equação de estado; algo que dependeria do tipo da estrela. Então, pensando em simplificar o problema e, evidentemente, resolver as referidas equações diferenciais, optamos por tratar com uma estrela que possui densidade uniforme.

Como consequência, vimos que os resultados, relacionados à região interior, só serão válidos se o raio e a massa obedecerem à desigualdade  $R > 9GM/4$ . Naturalmente, como o horizonte de eventos, associado a métrica de Schwarzschild ocorre em  $r_{sc} = 2GM$ , concluímos que esta restrição garante que a estrela não se comporta como um buraco negro.

Diante disso, concluímos dizendo que, embora as estrelas com densidade uniforme não existam, considerar uma dessas facilitou a nossa análise e nos permitiu obter soluções exatas para as equações diferenciais que emergem da aplicação da TRG à Astrofísica.

## REFERÊNCIAS

CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARROLL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. Santa Bárbara: University of California, 1997.

CRAWFORD, P. **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Fundação Calouste Gulbenkian, 1995.

DAHMEM, S. R. **Relatividade Geral: Teoria e Aplicações**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, nov. 2022.

EINSTEIN, A.; LIFSHITZ, E. **A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade especial e geral**, LePM, 2015.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979

FONT, José A. **Astrofísica Relativística**. Revista Espanhola de Física, Valência, v. 29, n. 4, p. 24-28, out./dez. 2015. Disponível em: <https://revistadefisica.es/index.php/ref/article/viewFile/2118/1703>. Acesso em: 18 maio de 2024.

FRANÇA, Urbano. **Fenomenologia de modelos cosmológicos com campos escalares exponenciais**. Dissertação de mestrado, Instituto de Física Teórica (IFT) da Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2004.

HUBBLE, E. **A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae**. Proceedings of the national academy of sciences, v. 15, n. 3, p. 168-173, 1929.

JANKA, H. T. **Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae**. Annual Review of Nuclear and Particle Science, v. 62, p. 407-451, jun./2012.

KARTTUNEN H.; KRÖGER P.; OJA H.; POUTANEN M.; DONNER K. J. **Fundamental Astronomy**. 6<sup>a</sup> edição. Springer, 2017.

KAUFMANN I, WILLIAM J.; FREEDMAN, R. A. **Universe**. 4th Edition. New York: W.H. Freeman and Company, 1998.

LANDAU, L. **The classical theory of fields**, Butterworth-Heinemann, 2013.

LENG K. R. **Essential Astrophysics**. Springer, 2013

NOVELLO, M. **Cosmologia**, Livraria da física, 2010.

OLIVEIRA, K. S.; SARAIVA, M. F. **O.Astronomia e Astrofísica**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 11 de fevereiro de 2014.

REIS, R. R.; SIFFERT, B. B. **Supernovas do tipo Ia e a expansão do Universo**. Cadernos de Astronomia, v. 3, n. 1, p. 21-21, 2022.

ROSE, W. K. **Advanced Stellar Astrophysics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

SCHWARZSCHILD, M. **Structure and Evolution of the Stars**. New York. Dover

Publications, 1958.

SOARES, D. **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas**, Universidade Federal De Minas Gerais, 2013.

Weinberg, S. Gravitation and Cosmology **Principles and Applications of the general theory of relativity**. John Wiley e Sons. Canadá, 1972).

ZEILIK, M. **Astronomy - The Evolving Universe**. New York. John Wiley e Sons, 1994.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me concedido força, saúde e inteligência para concluir esta etapa. Ele a todo instante está presente na minha vida e por isso sou grato.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, por todo esforço, dedicação e paciência. Agradeço por cada instrução tanto acadêmica como pessoal e profissional. É um grande docente no qual tenho como exemplo.

Aos meus pais, Reinaldo e Vanda, que me ensinaram a sempre me esforçar pelos meus sonhos através dos estudos.

A minha namorada, Maria Aparecida, por todo incentivo, cuidado, oração e presença nos momentos bons e ruins da minha vida.

Aos meus familiares, por celebrarem comigo as minhas conquistas.

Aos meus irmãos e amigos da Comunidade Católica Shalom, por cada oração e estímulo, é bom saber que nessa estrada não estou só.

A todos os professores do departamento de física, que contribuíram direta e indiretamente pela minha formação acadêmica.

A todos que contribuíram para minha formação.