UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

LEANDRO DE SOUSA VAZ

SÉRIES DE POTÊNCIAS: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, TEÓRICOS E APLICAÇÕES PRÁTICAS EM FÍSICA

PATOS

2024

LEANDRO DE SOUSA VAZ

SÉRIES DE POTÊNCIAS: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, TEÓRICOS E APLICAÇÕES PRÁTICAS EM FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática no Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

PATOS

2024

V393s Vaz, Leandro de Sousa.
Séries de potências [manuscrito] : Fundamentos matemáticos, teóricos e aplicações práticas em Física / Leandro de Sousa Vaz. - 2024.
67 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.
"Orientação : Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA. "

1. Equação de Hermite. 2. Equação diferencial. 3. Ensino de Matemática. I. Título

21. ed. CDD 515.252

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 COBIB/UEPB

LEANDRO DE SOUSA VAZ

SÉRIES DE POTÊNCIAS: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, TEÓRICOS E APLICAÇÕES PRÁTICAS EM FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática no Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em: 28/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Ademir Benteus Pampu

Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE GINALDO DE SOUZA FARIAS
Data: 28/06/2024 20:07:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Bruno Alexandre Rodrigues

Universidade Estadual de Londrina (UEL)

A todos os meus familiares e amigos que me incentivaram e ajudaram em minha caminhada acadêmica, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Primeiramente a Deus, por tudo que tem feito e por todas as oportunidades que me concedeu.

Aos meus pais, por todo o carinho e incentivo na minha caminhada escolar e acadêmica.

Aos meus irmãos, pela companhia de todos os dias mesmo nos dias mais difíceis.

Aos meus avós maternos, pelo acolhimento em momentos turbulentos e pelo incentivo em continuar sempre perseverante.

Aos meus avós paternos, pelas comemorações e por me terem como exemplo de neto.

Aos meus familiares em geral, por tudo que fizeram por mim ao longo dos meus 23 anos de vida.

À minha professora de matemática do 1º ano do Ensino Médio, Rayanne Maia, cuja competência e incentivo foram fundamentais para que eu descobrisse minha vocação na licenciatura em matemática.

Ao meu amigo e colega Leonardo Felix, pela companhia. Juntos, passamos por muitos perrengues, e sem ele, meus dias na universidade seriam com certeza menos divertidos.

Aos professores da UEPB campus Patos, por todos os ensinamentos ao longo desses quatro anos e meio, nos quais adquiri muito conhecimento e a certeza de que escolhi a profissão perfeita para mim.

Aos professores da banca, Me. José Ginaldo de Souza Farias e Dr. Bruno Alexandre Rodrigues, por aceitarem contribuir com suas avaliações para este trabalho.

E, especialmente, ao meu orientador, Dr. Ademir Benteu Pampu, por todo incentivo, dedicação e paciência ao longo deste processo.

“A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas”

Albert Einstein

RESUMO

Este Trabalho irá abordar a análise das séries de potências e suas aplicações na matemática aplicada, especialmente no estudo de funções elementares (seno, cosseno, exponencial e logarítmica) e equações diferenciais ordinárias. O estudo inicia-se com uma introdução às séries numéricas, detalhando conceitos como limite, série geométrica, teste da série alternada, convergência absoluta e teste da razão. Esses conceitos fundamentais são essenciais para compreender as séries de potências e sua aplicabilidade em diferentes contextos matemáticos. A segunda parte do trabalho foca nas séries de potências propriamente ditas, incluindo sua representação de funções e processos de derivação e integração. As séries de Taylor e Maclaurin recebem destaque, evidenciando como essas ferramentas matemáticas são utilizadas e mostrando que são mais que meros conceitos teóricos. Na terceira parte, o estudo avança para as equações diferenciais ordinárias (EDOs), abordando a ordem e linearidade dessas equações, bem como a solução em séries de potências em pontos ordinários. Esta seção é de extrema importância para demonstrar a aplicabilidade prática das séries de potências na resolução de EDOs, o que é ilustrado de forma mais aprofundada na análise da Equação de Hermite. A Equação de Hermite, de grande relevância na física matemática, que é o foco da quarta parte, é apresentada como uma aplicação significativa das séries de potências. A resolução dessa equação, que surge em diversos contextos da física e matemática aplicada, é detalhada, mostrando como as séries de potências são utilizadas para encontrar sua solução. Esse exemplo reforça a importância dessas séries tanto na teoria quanto na prática, destacando sua utilidade na representação e análise de funções reais (a imagem sendo um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Palavras-Chave: Equação de Hermite; Equação diferencial; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work will address the analysis of power series and their applications in applied mathematics, especially in the study of elementary functions (sine, cosine, exponential and logarithmic) and ordinary differential equations. The study begins with an introduction to numerical series, detailing concepts such as limit, geometric series, alternating series test, absolute convergence, and ratio test. These fundamental concepts are essential for understanding power series and their applicability in various mathematical contexts. The second part of the work focuses on power series themselves, including their representation of functions and processes of differentiation and integration. Taylor and Maclaurin series are highlighted, demonstrating how these mathematical tools are used and showing that they are more than mere theoretical concepts. In the third part, the study advances to ordinary differential equations (ODEs), addressing the order and linearity of these equations, as well as power series solutions at ordinary points. This section is crucial for demonstrating the practical applicability of power series in solving ODEs, which is illustrated more deeply in the analysis of the Hermite Equation. The Hermite Equation, of significant importance in mathematical physics, is the focus of the fourth part and is presented as a significant application of power series. Solving this equation, which arises in various contexts of applied physics and mathematics, is detailed to show how power series are used to find its solution. This example reinforces the importance of these series both in theory and in practice, highlighting their utility in the representation and analysis of real functions (the image being a subset of $\mathbb{R}$, $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Keywords: Hermite Equation; Differential Equation; Mathematics Education.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CCEA	Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UEL	Universidade Estadual de Londrina
PB	Paraíba
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial

LISTA DE SÍMBOLOS

∞	Infinito
$=$	Igual
$\neq$	Desigual
$!$	Fatorial
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\approx$	Aproximadamente
$\forall$	Para todo
$\sqrt{}$	Raiz
$\in$	Pertence
$\subset$	Contido
∂	Diferencial Parcial
$\mathbb{N}$	Números Naturais
$\mathbb{R}$	Números Reais
$+$	Mais/ Positivo
$-$	Menos/ Negativo
$\pm$	Mais ou Menos
$\cdot$	Vezes
Σ	Somatório/ Sigma
$\int$	Integral
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
f	Função
$\| \ \|$	Módulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A análise de séries de potências e suas aplicações é um assunto fundamental na matemática aplicada, com grande importância em áreas como física e engenharia. Neste trabalho, exploraremos o valor das séries de potências, especialmente as séries de Taylor e Maclaurin, na representação e análise de funções reais, além de sua aplicação na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Um exemplo clássico é a Equação de Hermite, que surge na solução da equação de onda unidimensional e em problemas de mecânica quântica. Essa equação pode ser resolvida usando séries de potências, destacando a importância prática e teórica dessas séries na modelagem de fenômenos físicos complexos.

O objetivo deste trabalho é fornecer um material didático de qualidade destinado a alunos universitários interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre Séries de Potências e suas diversas aplicações

Por meio deste trabalho, não apenas apresentaremos os fundamentos teóricos das séries de potências e suas aplicações, mas também demonstraremos sua relevância em contextos práticos, como na resolução de EDOs e na representação de funções. A compreensão desses conceitos é essencial para o progresso da matemática e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento.

2 ANÁLISE DE SÉRIES DE POTÊNCIAS E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, iremos explorar como as séries de potências, juntamente com as séries de Taylor e Maclaurin, desempenham um papel fundamental na matemática e nas ciências. Elas nos permitem representar funções reais de forma mais simples, o que é muito importante para analisar funções em pontos específicos, tornando cálculos mais fáceis e aproximando funções complicadas por meio de polinômios.

2.1 Séries Numéricas

Nesta seção, será dado uma breve introdução ao conceito de séries numéricas como forma de relembrar alguns dos conteúdos que serão abordados neste capítulo. Recordaremos os conceitos básicos de convergência de séries numéricas e alguns de seus principais critérios.

2.1.1 Convergência

Para que nosso objetivo neste capítulo seja alcançado, é necessário que revisemos o que é a convergência de uma série. Primeiramente, iremos ver uma noção intuitiva, para introduzir a revisão.

Suponha que temos a sequência

$\{2n\}_{n=1}^{+\infty} = \{2; 4; 6; 8; \cdots\}$,

se quiséssemos somar os termos dessa sequência, como ficaria? Considere S_n como uma soma dos r primeiros termos da sequência, sendo S_1 a soma do primeiro termo da sequência, S_2 a soma dos dois primeiros termos da sequência, e assim por diante.

$$S_1 = 2$$
$$S_2 = 2 + 4$$
$$S_3 = 2 + 4 + 6$$
$$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8$$
$$\vdots$$

com isso, temos a sequência $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{S_1; S_2; S_3; S_4; \cdots\}$. Dada uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ podemos formar $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ fazendo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n,\ \forall n \geq 2$$

Podemos ainda escrever usando outra notação, a qual será utilizada neste trabalho. Veja:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Quando denotarmos o símbolo Σ (sigma), saberemos que estamos falando de uma soma que se iniciará em $i = 1$ até $i = n$ dos termos a_i, dessa forma, quando vermos essa simbologia, chamada de somatório, saberemos que está se referindo a uma soma, na qual as parcelas da soma serão a_i, e a quantidade de parcelas será dada pelo índice n .

Diremos que os termos da série são $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$. Definiremos ainda que a_n é o termo geral da série. Por fim, afirmaremos que S_n é a soma parcial da série.

Agora, tendo em vista esse pequeno resumo sobre séries, iremos adentrar o real objetivo dessa subseção, onde faremos a seguinte pergunta sobre o estudo de séries: O que acontece com a soma parcial S_n quando ela possui um número infinito de parcelas? Considere o exemplo: Quais as somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$?

$$S_1 = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$$

$$S_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = 0{,}75$$

$$S_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0{,}875$$

$$S_4 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}9375$$

Se continuássemos com as somas parciais, no S_{10}, teríamos algo como

$$S_{10} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = 0{,}9990234375$$

Perceba, que fazendo as somas parciais desta série, temos uma impressão de que quando maior for o nosso n, mais próximo de 1 ficaremos. Porém, na matemática, não podemos viver de impressão, mas sim de algo confirmado, porém como afirmar essa impressão? Observe o seguinte:

$$S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

vamos multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}\cdot S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)$$

usando a propriedade distributiva, temos:

$$\frac{1}{2}\cdot S_n = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

perceba que em $\frac{1}{2}\cdot S_n$, foi excluído o $\frac{1}{2^1}$ e acrescentado o $\frac{1}{2^{n+1}}$ da nossa primeira soma parcial, então podemos representar $\frac{1}{2}\cdot S_n$ como:

$$\frac{1}{2}\cdot S_n = S_n - \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

isolando o S_n, temos:

$$\frac{1}{2}\cdot S_n = S_n - \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{S_n - \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \left(S_n - \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{2}{1}$$

$$S_n = 2\cdot S_n - \frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^{n+1}}$$

$$S_n = 2S_n - 1 + \frac{2}{2^n\cdot 2}$$

$$S_n = 2S_n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$S_n - 2S_n = -1 + \frac{1}{2^n}$$

$$-S_n = -1 + \frac{1}{2^n} \quad \cdot(-1)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Agora que obtemos $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, podemos perceber que:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$$

Então, confirmamos agora aquela nossa impressão, que $S_n = 1$. Vamos representar da forma

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 1$$

Agora que já vimos a noção intuitiva da soma de uma série, veremos nesse momento sua definição.

Definição: Dado uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, definimos a série

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

considerando

$S = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} a_i).$

Chamaremos S de soma da série. Se S for finito, diremos que a série é convergente. Se S for infinito, diremos que a série é divergente.

Teorema 2.1.1: Para uma série $\sum a_n$:

i) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n) \neq 0$ ou $\lim_{n\to\infty} (a_n)$ não existe, então a série diverge.

ii) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$, isso não garante que a série converge. Neste caso, outros testes de convergência devem ser aplicados.

O Teorema 2.1.1 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 640).

Exemplo 2.1.2: Verifique se a série abaixo converge ou diverge:

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n.$

Como $\lim_{n\to\infty} (2^n) = \infty$, então pelo Teorema 2.1.1 essa série é divergente.

2.1.2 Série Geométrica

Uma Série Geométrica é uma série da forma

$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k,$

Veja que, se $|r| < 1$, então

$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k = \frac{a}{1-r},$

sendo a a nossa primeira parcela da soma infinita e r a razão, neste caso, dizemos que a Série Geométrica converge, por outro lado se $|r| \geq 1$, então a Série Geométrica diverge.

Porém, devemos tomar cuidado com essa notação, pois se $k \neq 0$, ela não funcionará. Como, de acordo com a série apresentada, nosso numerador é a , ou seja, é a primeira parcela da nossa soma, qualquer número que k assuma diferente de 0 , não daria certo com a notação apresentada.

Para compreendermos melhor essa situação, vamos ver um exemplo:

$\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$

Perceba que nossa primeira parcela é 1 , e a razão $\frac{1}{2}$. Veja que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, logo ela converge para 2 . Um dos métodos simples para sabermos para qual número uma série geométrica converge, basta utilizarmos a fórmula:

$$S = \frac{primeiro\ termo\ da\ soma}{razão}$$

$S = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2.$

Iniciando a soma em $k = 2$, como irá ficar a nossa soma?

$$\sum_{k=2}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Perceba que a soma continua convergente, porém o número a qual a série converge mudou, veja:

$S = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Note que a nossa série não converge mais para 2 , mas sim, para $\frac{1}{2}$. Logo, devemos tomar cuidado ao utilizarmos a fórmula da série geométrica, quando $k \neq 0$.

2.1.3 Teste da Série Alternada

Nesta subseção, veremos um teste de grande importância para a compreensão desse capítulo, pois muitas vezes, encontraremos séries nas quais os termos estão alternando de sinal. Em uma série alternada, os termos são alternados entre positivos e negativos, a qual podemos escrever na forma:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n.$

Onde $b_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Note que em uma série alternada, sempre terá um termo que fará o termo geral da nossa série alternar de sinal, e esse termo multiplicará o restante do termo geral, que chamamos de b_n. A pergunta que fica é: como saber se uma série alternada é convergente?

Teorema 2.1.2: Se a série alternada

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \quad b_n > 0,$

satisfaz

i) $b_{n+1} \leq b_{n,}\ \forall n \in \mathbb{N}$ e

ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n) = 0,$

então a série é convergente.

O Teorema 2.1.2 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 658).

Exemplo 2.1.3: Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge ou diverge.

Observe que

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$

vamos verificar se ela satisfaz as condições do teorema 2.1.2.

i) Os termos $b_n = \frac{1}{n}$ são decrescentes, ou seja, $b_{n+1} \leq b_{n,}\ \forall n$. Isto é verdade, pois $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Como ambas as condições do teorema 2.1.2 foram satisfeitas, podemos concluir que a série converge.

2.1.4 Convergência Absoluta e Condicional

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ for convergente. O termo empregado “absoluto” não significa ser algo irrefutável, mas utilizamos essa palavra para nos referirmos ao módulo.

Teorema 2.1.3: Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

i) Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

ii) Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teorema 2.1.3 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 650).

Exemplo 2.1.4: Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Como na definição, vamos calcular o módulo de a_n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \left|\frac{(-1)^1}{1^2}\right| + \left|\frac{(-1)^2}{2^2}\right| + \left|\frac{(-1)^3}{3^2}\right| + \left|\frac{(-1)^4}{4^2}\right| + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = |-1| + \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{9}\right| + \left|\frac{1}{16}\right| + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Podemos perceber que a nossa série com o módulo, ficou no formato

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

para sabemos se esta série converge ou diverge, iremos utilizar o Teste da Integral, isto é, o teorema 2.1.3. Para aplicamos o Teste da Integral, precisamos comparar a série com a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Então, agora iremos calcular a integral de $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx\right) = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

Portanto, a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge. Pelo Teste da Integral, como a integral converge, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ também converge. Como essa série com módulo é convergente, chamamos ela de absolutamente convergente. Porém, lembre-se que converge a série com o módulo, mas será que sem o módulo, essa série continua convergente? Isso é o que veremos. Utilizando o Teste da Série Alternada na série sem o módulo, vamos ver se $b_{n+1} \leq b_n$.

$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2}$, pois $n^2 \leq n^2 + 2n + 1$

Como temos n^2 dos dois lados e depois da desigualdade temos mais parcelas, é natural afirmarmos que essa desigualdade está correta, então pelo Teste da Série Alternada, o primeiro critério é satisfeito. Vamos testar agora se ela converge também no segundo critério.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Como a série satisfaz os dois critérios do teste da série alternada, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Agora, veja algumas informações importantes sobre convergência absoluta. Podemos provar que se uma série for absolutamente convergente ela também será convergente. Porém, isso não implica dizer que uma série convergente é absolutamente convergente. Se uma série for convergente, mas não for absolutamente convergente, ela será chamada de condicionalmente convergente, veja o exemplo.

Exemplo 2.1.5: Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é condicionalmente convergente.

Utilizando o Teorema 2.1.2, vamos verificar o item i), para $n \geq 1$:

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Isso mostra que b_n é uma sequência decrescente.

Vamos verificar o item ii):

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Como ambas as condições do Teorema 2.1.2 foram satisfeitas, esta série converge. Mas será que ela continuará sendo convergente se aplicamos o valor absoluto? Vamos verificar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Perceba que a série encontrada é a série harmônica, que é conhecida por ser divergente. Portanto, está série é condicionalmente convergente, pois ela converge satisfazendo o Teorema 2.1.2, mas diverge aplicando o valor absoluto.

2.1.5 Teste da Razão

Adentraremos agora em um dos mais importantes testes de convergência para séries de potências. Ao invés de sempre precisarmos de conferir se uma série é absolutamente convergente, para saber se essa mesma série é convergente, podemos usar o teste da razão.

Teorema 2.1.4: Dado uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

I) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

II) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou for infinito, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

III) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o teste da razão é inconclusivo.

O Teorema 2.1.4 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 662).

Exemplo 2.1.5: Verifique se a série converge ou diverge:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n}$.

Então, a primeira coisa que devemos fazer é substituir n por $n+1$ na série para podemos aplicar o Teorema 2.1.4. Se $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$, então $a_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}}{n+1}$. Substituindo na fórmula, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}}\right|,$$

empregando a propriedade da divisão de frações, que diz que, quando temos uma divisão de frações, repetimos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n}\right|.$$

Aplicando a propriedade da potenciação, que dize que, quando houver uma multiplicação de mesma base, repete-se a base e soma os expoentes, mas no nosso caso, faremos o inverso. Como temos $(-2)^{n+1}$, podemos reescrevê-lo como $(-2)^n \cdot (-2)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n\cdot(-2)}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n}\right|$$

Sabendo que o numerador e o denominador possuem um fator $(-2)^n$, podemos simplificar. Fazendo $n \to \infty$, podemos retirá-los do módulo, pois ele será positivo.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-2)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n\cdot(-2)}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Então, como $L > 1$, essa série é divergente.

Agora, que já foi entendido como é empregado o teste da razão, podemos aplicar nas demais séries que serão apresentadas nesse capítulo.

2.2 Séries de Potências

Definimos uma série de potências como uma série que pode ser escrita por

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_0 \cdot x^0 + C_1 \cdot x^1 + C_2 \cdot x^2 + \cdots,$

no qual x é uma variável, isto é, consideramos $x \in \mathbb{R}$, e os valores C_n são os coeficientes. Nas séries numéricas, quando havia apenas coeficientes, usávamos diversos testes de convergência, porém em séries de potências temos uma variável $x,$ para cada valor de $x,$ a série de potências pode ser convergente ou divergente. Diferente das séries numéricas, nas séries de potências a convergência e divergência irá depender da variável x.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} n$, é definido como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

Esta série é divergente. Porém, como antes citado, a série de potência é diferente, portanto, tornando-a em série de potência, acrescentando a variável x^n, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \cdots$$

Pode-se perceber que ao acrescentar x^n, a série pode ser convergente, dependendo do valor de x .

Utilizando o teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot x^{n+1}}{n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot x^n \cdot x}{n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}\cdot|x|$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} = |x|\cdot 1 = |x|$$

Portanto, pelo teste da razão, para que essa série seja convergente, o resultado do limite, sendo ele $|x|$, precisa ser menor que 1, ou seja, $-1 < x < 1$.

Exemplos particulares da série $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$.

Tome $x > 1$, ou seja, tomemos $x = 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n = 0 + 2 + 8 + 24 + \cdots$.

Logo, sendo $x > 1$, a série é divergente.

Agora tome $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \cdots$.

Logo, sendo $-1 < x < 1$, a série é convergente. Feito isso, iremos estudar séries de potências mais detalhadamente.

No geral, uma série de potência pode ser escrita da forma

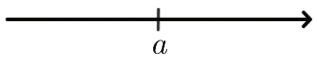
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n$,

a qual, é chamada de série de potência centrada em a , a qual significa que a expansão da função é feita em torno do ponto $x = a$, ou seja, a é o ponto de referência.

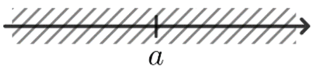
Teorema 2.2.1: Para a série de potência no formato $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n$, temos três possibilidades:

I. A série converge apenas quando $x = a$;
II. A série converge para todo valor de x;
III. Existe um número positivo R, tal que a série converge para $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$, sendo R chamado de raio de convergência.

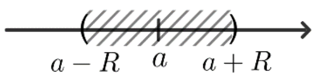
Representação na reta real do intervalo de convergência da possibilidade I:



Representação na reta real do intervalo de convergência da possibilidade II:



Representação na reta real do intervalo de convergência da possibilidade III:

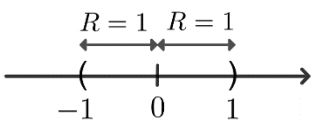


O Teorema 2.2.1 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. A42).

Para melhor compreensão, pegaremos novamente a série $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$, a qual está centrada em 0. Sabendo que ela converge quando $-1 < x < 1$, temos:

$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (x-0)^n$,

ou seja, do centro até as extremidades a qual ela converge, o $R = 1$.



Logo, entende-se que para todos os valores de -1 a 1 a série converge, porém, nas extremidades não podemos afirmar com certeza, por conseguinte tem-se a necessidade de testarmos se $x = -1$ e $x = 1$ também são valores que fazem a série convergir.

Para $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 1^n = 0 \cdot 1^0 + 1 \cdot 1^1 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 1^n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

Logo, como $\lim_{n\to\infty}(n \cdot 1^n) = \infty$, a série é divergente.

Para $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (-1)^n = 0 \cdot (-1)^0 + 1 \cdot (-1)^1 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (-1)^n = 0 - 1 + 2 - 3 + \cdots$$

Logo, pelo teste da série alternada, a série é divergente. Então, a série dada converge para $-1 < x < 1$.

Agora, aplicaremos os conhecimentos obtidos para resolvermos os seguintes exemplos: determinar para quais valores de x elas convergem, seu raio e intervalo de convergência.

Exemplo 2.2.1: Determine para quais valores de x a série abaixo converge, juntamente com seu raio e intervalo de convergência:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot x^n$.

Utilizando o teste da razão, temos:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{an}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^{n+1}}{(-1)^n\cdot n\cdot x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(-1)\cdot(n+1)\cdot x^n\cdot x}{(-1)\cdot n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-x\cdot(n+1)}{n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} = |x| \cdot 1 = |x|$, então, essa série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Isso significa que o raio de convergência é $R = 1$. Sabemos que a série converge no intervalo $(-1,1)$, mas antes de afirmarmos o intervalo de convergência, temos que testar a convergência nas suas extremidades.

Para $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot 1^n$$

Observe que temos 1^n, ou seja, como $1^n = 1$. Nossa série ficará assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n = -1 + 2 - 3 + \cdots$.

Pelo teste do termo principal, como não existe $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot n$, a série diverge.

Para $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot (-1)^n$$

Observe que temos $(-1)^n \cdot (-1)^n$, ou seja, podemos reescrever essa operação como$(-1)^{2n}$. Nossa série ficará assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} \cdot n = (-1)^{2\cdot 1} \cdot 1 + (-1)^{2\cdot 2} \cdot 2 + (-1)^{2\cdot 3} \cdot 3 + \cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} \cdot n = 1 + 2 + 3 + \cdots$.

Logo, como $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} \cdot n = \infty$, a série é divergente.

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot x^n$ converge quando $-1 < x < 1$. Se enquadrando na possibilidade III do Teorema 2.2.1.

Exemplo 2.2.2: Determine para quais valores de x a série abaixo converge, juntamente com seu raio e intervalo de convergência:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Utilizando o teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n \cdot x}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

Então essa série converge para todos os valores de x. Portanto, o raio de convergência é $R = \infty$. Logo, o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$, se enquadrando na possibilidade II do teorema 2.2.1.

Exemplo 2.2.3: Determine para quais valores de x a série abaixo converge:

$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$.

Utilizando o teste da razão, temos:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{an}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\cdot x^{n+1}}{n!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot n!\cdot x^n\cdot x}{n!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)\cdot x| = |x|\cdot \lim_{n\to\infty}(n+1) = |x|\cdot\infty = \infty$. Então, essa série é convergente apenas para $x = 0$, pois para quaisquer outros valores de x, a série será infinita, se enquadrando na possibilidade I do Teorema 2.2.1.

2.3 Representação de Funções como Séries de Potências

Antes de adentrarmos na derivação e integração de séries de potências, é necessário primeiro, que conheçamos como é representada uma função como séries de potências. Introduziremos esse conteúdo com um exemplo, o qual já somos capazes de resolver.

Exemplo 2.3.1: Qual o raio e o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$?

Como estudado na seção 2.1, poderíamos utilizar o teste da razão para descobrirmos o raio e o intervalo de convergência, porém há algo que pode facilitar nosso resultado, que é perceber que nossa série é uma série geométrica que possui a forma

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$,

e essa série é convergente quando $-1 < r < 1$, e quando esse requisito for cumprido, o resultado dessa soma será

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

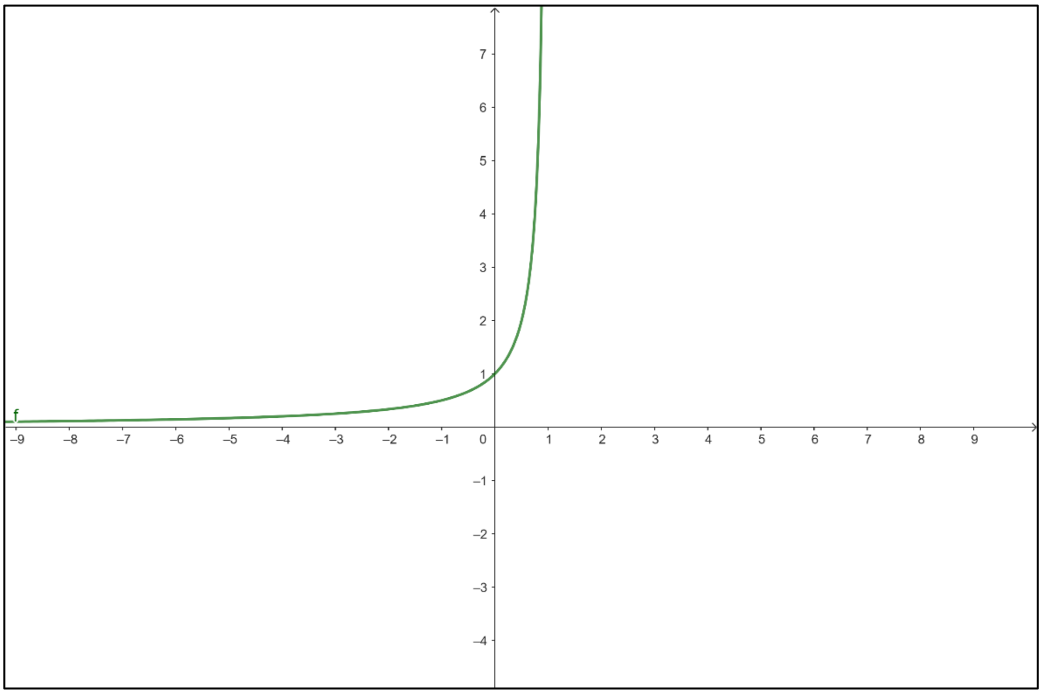
Logo, como no exemplo, nossa série é uma Série Geométrica. Usaremos essa informação para determinar o raio e o intervalo de convergência. Então, pelo teste da série geométrica, nossa série converge para $-1 < x < 1$ e possui o raio de convergência $R = 1$ com intervalo de convergência $(-1,1)$.

Seguindo as regras da série geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Logo, podemos concluir que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$.

Se chamarmos $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, então acabamos de comprovar, que uma função pode ser representada como uma série de potências.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Gráfico 2.3.1: Função $f(x) = \frac{1}{1-x}$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

O gráfico representa a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Com isso, utilizando infinitas parcelas da série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, podemos chegar nessa igualdade.

A partir de agora, iremos adentrar nas representações de funções como séries de potências, algo na forma

$$f(x) = C_n \cdot (x - a)^n.$$

Exemplo 2.3.2: Represente a função $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

1º Passo: Deixar nossa função o mais próximo possível do formato $f(x) = \frac{1}{1-x}$

.

Como na função do exemplo temos um sinal positivo no denominador, temos que transformá-lo em um sinal negativo. Para isso, note que

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^3)},$$

observe que a função permanece com a mesma estrutura.

2º Passo: Identificar a razão.

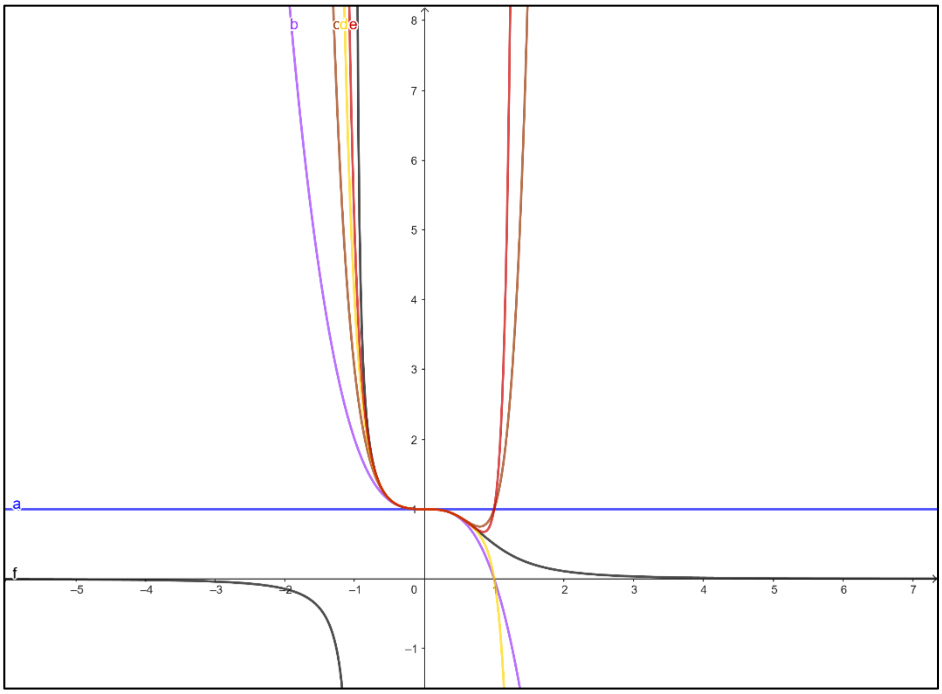
A razão sempre será o número a qual está no denominador e sendo subtraído de 1. Assim, nossa razão será $r = -x^3$.

3º Passo: Substituir $r = -x^3$ na nossa série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 \cdot x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{3n}$$

Para verificar graficamente que nossa função $f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{3n}$. Tomamos apenas cinco parcelas da série encontrada, $n = 0,\ n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$. Para melhor visualização, chamaremos cada parcela da nossa série como uma função $a(x) = 1,\ b(x) = 1 - x^3,\ c(x) = 1 - x^3 + x^6,\ d(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9,\ e(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12}$

Gráfico 2.3.2: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{3n}$, comparado com a função $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024).

Observe que quanto mais parcelas da nossa soma acrescentamos, mais próxima ela fica da função original, demonstrada na cor preta.

4º Passo: Encontrar o intervalo de convergência.

Sabendo que a nossa razão é $r = -x^3$, temos que $|-x^3| < 1$. Logo,

$-1 < x^3 < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{(-1)} < \sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{1} \Rightarrow -1 < x < 1$

Então, o intervalo de convergência é $(-1,1)$.

A função coincide com a série de potência apenas no intervalo que a série converge.

Exemplo 2.3.3: Represente $f: (-3,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3-x}$ como a soma de uma série de potência e encontre o intervalo de convergência.

Utilizando os mesmos passos do exemplo 1, temos:

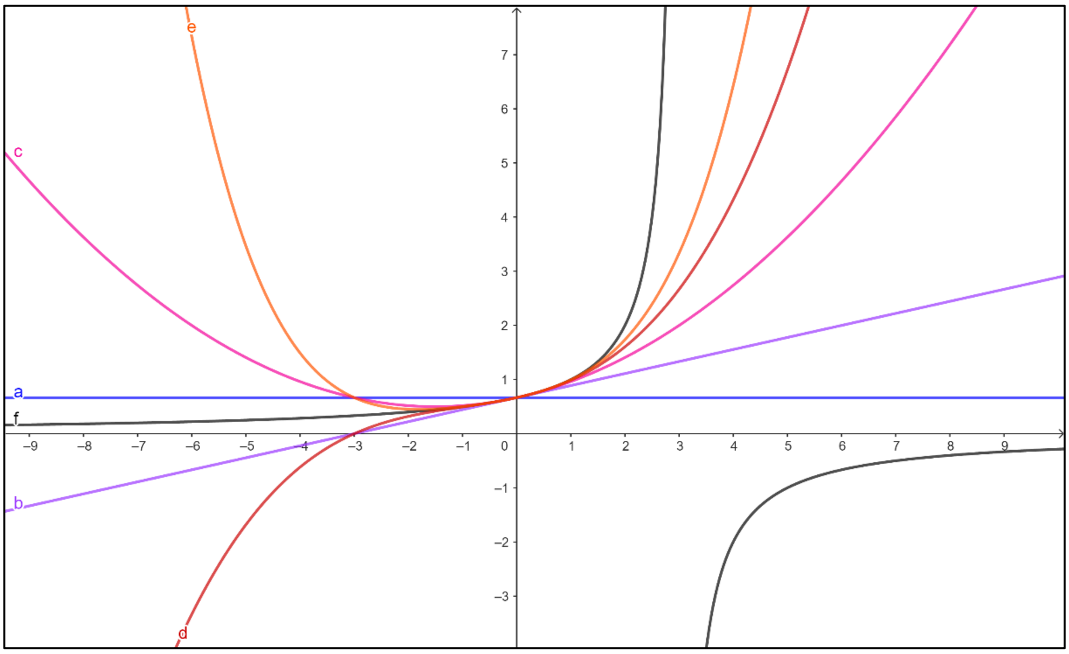
$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{x}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3^{n+1}}$$

A série converge quando $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, isto é, $|x| < 3$. Assim, o intervalo de convergência é $(-3,3)$.

Para verificar graficamente que a nossa função $f(x) = \frac{2}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3^{n+1}}$. Tomamos apenas cinco parcelas da série encontrada, $n = 0,\ n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$. Para melhor visualização, chamaremos cada parcela da nossa série como uma função $a(x) = \frac{2}{3}$, $b(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x}{9}$, $c(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{2x^2}{27}$, $d(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{2x^2}{27} + \frac{2x^3}{81}$, $e(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{2x^2}{27} + \frac{2x^3}{81} + \frac{2x^4}{243}$.

Gráfico 2.3.3: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3^{n+1}}$, comparado com a função $f(x) = \frac{2}{3-x}$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

Observe que quanto mais parcelas da nossa soma acrescentamos, mais próxima ela fica da função original, demonstrada na cor preta.

2.4 Derivação e Integração de Séries de Potências

Entendido sobre a representação de funções como séries de potências, com exemplos específicos, iremos agora introduzir o conceito de derivação e integração de séries de potências. Iniciaremos essa subseção com um teorema bastante importante.

Teorema 2.4.1: Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n . (x-a)$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função $f(x)$ definida por $f(x) = C_0 + C_1 \cdot (x-a) + C_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + C_n \cdot (x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n$, é diferenciável, portanto contínua no intervalo $(a-R,\ a+R)$ e

i) $f'(x) = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot (x-a) + 3 \cdot C_3 \cdot (x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot C_n \cdot (x-a)^{n-1}$

ii) $\int f(x)dx = C + C_0 \cdot (x-a) + C_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + C_2 \cdot \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$,onde C é uma constante.

O Teorema 2.4.1 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 675).

Os raios de convergência das séries de potências nas equações i) e ii) são ambos iguais a R , ou seja, $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)$ possuem raios de convergência iguais.

Para melhor compreensão, podemos reescrever os resultados de i) e ii) da seguinte forma:

I) $\frac{d}{dx}[\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[C_n \cdot (x-a)^n]$

Pois podemos derivar uma série de potência termo a termo, da mesma forma que fazemos com os polinômios.

A derivada da soma é a soma das derivadas, ou seja, podemos permutar os símbolos de derivada e somatório.

II) $\int [\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (n-a)^n]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int C_n \cdot (x-a)^n dx\right]$

Pois, a integral da soma é a soma das integrais, quando se trata de uma soma finita de parcelas, porém o resultado visto acima, diz que isso vale também para funções que são representadas por séries de potências.

Exemplo 2.4.1: Represente $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como a soma de uma série de potência e encontre o raio de convergência.

Como visto na seção 2.1.2, iremos transformar a função em uma série parecida com a série geométrica.

Podemos perceber que $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ é a derivada da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Para chegarmos a esse resultado, basta utilizarmos a regra do quociente ou a regra da cadeia. Então temos:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Para encontrarmos a série de potência da derivada dessa função, basta derivarmos termo a termo.

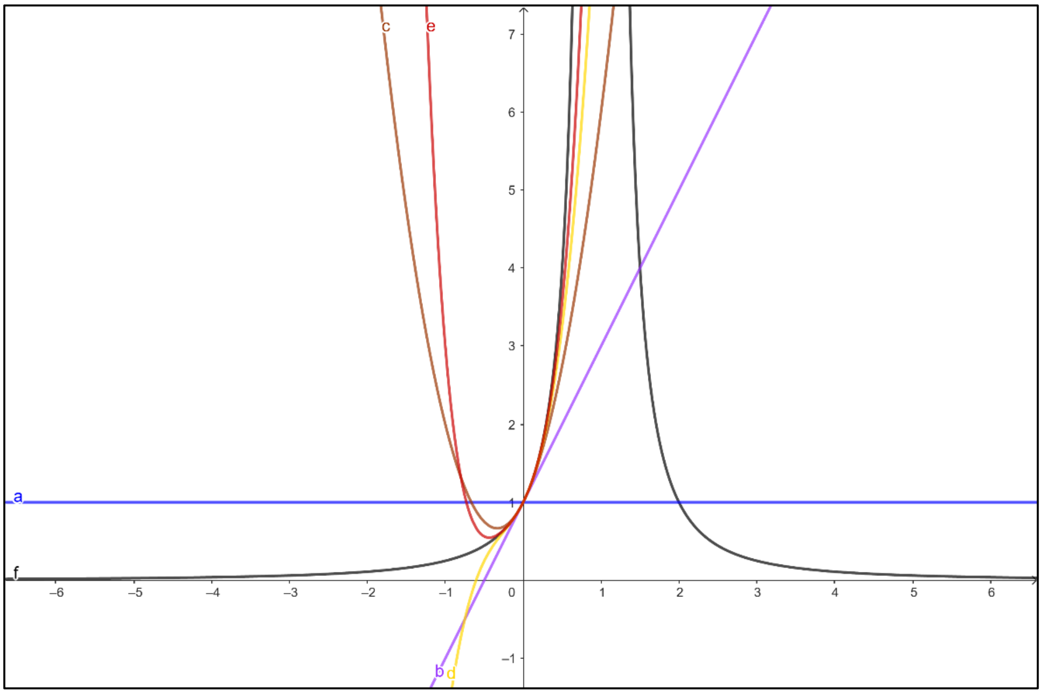
$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

Logo, a representação da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ em série de potência é $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

De acordo com o teorema 2.4.1, se $f(x)$ possui $R = 1$, $f'(x)$ também possui $R = 1$.

Gráfico 2.4.1: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$, comparado com a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

Exemplo 2.4.2: Represente $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$ como a soma de uma série de potências e encontre o seu raio de convergência.

De forma direta, não conseguimos observar uma forma de transformar essa função, na função $f(x) = \frac{1}{1-x}$, como na seção anterior. Se pensarmos bem, e utilizarmos nossos conhecimentos prévios sobre derivação e integração, podemos observar que $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$. Logo,

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) + C$$

Sabendo dessa informação, segue nossa representação

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n$$

E isso vale para $|-x| < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$ com o raio de convergência $R = 1$. Como o raio $R > 0$, podemos usar a propriedade de integração, exposto no início dessa subseção.

Sabendo que a nossa representação ficou

$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1) \cdot x^n$,

iremos integrar dos dois lados

$\int \frac{1}{1+x} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1) \cdot x^n \, dx$,

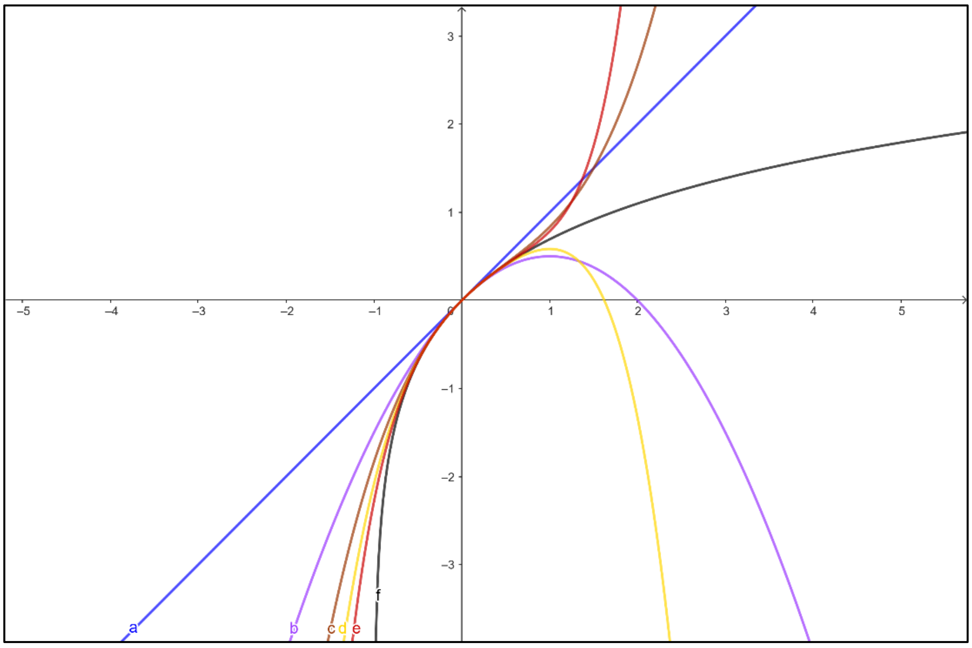
utilizando a propriedade ii) do terorema 2.4.1, a integral da soma é a soma das integrais, segue

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n \, dx$$

$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Portanto, encontramos a representação de funções no formato de séries de potências, usando a integração. Nesse caso, pelo teorema 2.4, o raio permanece sendo $R = 1$.

Gráfico 2.4.2: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$, comparado com a função $f(x) = \ln(1+x)$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

2.5 Série de Taylor e Maclaurin

Antes de adentrarmos na série de Taylor e Maclaurin, é importante frisarmos nossa base para seu entendimento, que são as séries de potências.

No geral, uma série de potência no formato

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n = C_0 \cdot (x-a)^0 + C_1 \cdot (x-a)^1 + C_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots$$

é chamada de série de potência centrada em a .

Na subseção anterior, representamos funções em séries de potências, as quais eram semelhantes a série geométrica. Mas, de forma geral, quais são as funções que podemos representar como séries de potências? Ou seja, dada uma função qualquer, eu consigo representá-la como uma série de potência, mesmo ela não sendo semelhante com uma série geométrica? Isso é o que iremos descobrir.

Vamos começar supondo que $f(x)$ possa ser representada como uma série de potência, temos:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot (x-a)^1 + C_2 \cdot (x-a)^2 + C_3 \cdot (x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R.$$

Como essa série está centrada em a, iremos descobrir o que acontece com essa função quando substituir $x = a$.

$$f(a) = C_0 + C_1 \cdot (a-a)^1 + C_2 \cdot (a-a)^2 + C_3 \cdot (a-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f(a) = C_0$$

Substituindo $x = a$, anularemos quase todas as nossas parcelas, sobrando apenas o C_0. Então, se uma função pode ser escrita como uma série de potência centrada em a , a função $f(a)$ vale o próprio coeficiente C_0.

Derivando agora nossa função inicial, temos:

$$f'(x) = [C_0 + C_1 \cdot (x-a)^1 + C_2 \cdot (x-a)^2 + C_3 \cdot (x-a)^3 + \cdots]', \quad |x-a| < R$$

$$f'(x) = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot (x-a) + 3 \cdot C_3 \cdot (x-a)^2 + 4 \cdot (x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Agora, o que acontece quando substituímos novamente x por a ?

$$f'(a) = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot (a-a)^1 + 3 \cdot C_3 \cdot (a-a)^2 + 4 \cdot (a-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f'(a) = C_1$$

Derivando novamente, teremos:

$$f''(x) = 2 \cdot C_2 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 \cdot (x-a)^1 + 3 \cdot 4 \cdot (x-a)^2 + 4 \cdot 5 \cdot (x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f''(a) = 2 \cdot C_2 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 \cdot (a-a)^1 + 3 \cdot 4 \cdot (a-a)^2 + 4 \cdot 5 \cdot (a-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f''(a) = 2 \cdot C_2$$

Derivando pela terceira vez, temos:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot C_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x-a)^1 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (x-a)^2 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot C_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (a-a)^1 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (a-a)^2 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

$$f'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot C_3$$

Observe que se continuarmos derivando, irá aparecer um padrão. De forma resumida, temos a quarta, quinta e sexta derivada, respectivamente:

$$f^{(iv)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot C_4$$

$$f^{(v)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot C_5$$

$$f^{(vi)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot C_6.$$

Se formos derivando e substituindo $x = a$

$$f^{(n)}(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots n \cdot C_n = n! \cdot C_n,$$

ou seja, podemos notar que nossa função se comporta como $f^{(n)}(a) = n! \cdot C_n$. Como queremos representar nossa função como uma série de potência, no formato $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)$, só nos interessa descobrir C_n, note

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot C_n$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = C_n$$

Assim, $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Se a função for infinitamente diferenciável e tiver uma representação em séries de potências, ela vai ser da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Pois substituímos $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, no somatório $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-a)^n$.

Essa série que encontramos, é chamada de Série de Taylor, desde que ela seja centrada em a .

Particularmente chamada de Série de Maclaurin, quando $a = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Exemplo 2.5.1: Encontre a Série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Como devemos encontrar a série de Maclaurin, sabemos então que $a = 0$.

1º Passo: Encontrar um padrão nas derivadas.

$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \qquad f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \qquad f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

2º Passo: Substituir na Série de Maclaurin $f^{(n)}(0) = 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Então, essa é a função representada na série de Maclaurin.

3º Passo: Encontrar o raio de convergência.

Para isso, podemos usar o teste da razão.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$= |x|\cdot 0 = 0$$

Pelo teste da razão, essa série converge para todos os valores de x . Portanto, o raio de convergência é $R = \infty$.

Então, o que exatamente significa essa representação? Vamos supor que queiramos saber quanto vale $e^{0,5}$. É conveniente aproximarmos $e^{0,5}$ na função encontrada no 2º passo, pois ela está centrada em 0 , ou seja, e^x ao redor de zero, pode ser aproximado pela função encontrada. Mas, antes temos que justificar a igualdade $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Teorema 2.5.1: Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-$ésimo$ grau de f em a e

$$\lim_{n\to\infty}\left(R_n(x)\right) = 0$$

para $|x-a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

O Teorema 2.5.1 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 682).

Para demonstrar que $\lim_{n\to\infty}\left(R_n(x)\right) = 0$ para uma função específica f, costumamos utilizar o seguinte teorema:

Teorema 2.5.2: (Desigualdade de Taylor) se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ para $|x-a| \leq d$.

O Teorema 2.5.2 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. 682).

Utilizando esses dois teoremas somos capazes de mostrar que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin. Repare nas substituições que serão feitas na fórmula

$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ para $|x-a| \leq d$

Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n, se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, $e^x \leq M$.

$|R_n(x)| \leq \frac{e^x}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ para $|x-a| \leq d$

Tendo em vista que $a = 0$ ($|x-0| \leq d$), d é qualquer número positivo e $|x| \leq d$, então $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \leq e^d$.

$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ para $|x| \leq d$

Veja que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Ao aplicar os teoremas 2.5.1 e 2.5.2, é útil frequentemente usar o fato a seguir.

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ para todo número real x.

Com isto, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Teorema 2.5.3: (Teorema do confronto) se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(h(x)\right) = L$$

Então

$$\lim_{x\to a}\left(g(x)\right) = L$$

O Teorema 2.5.3 é demonstrado no livro "Cálculo, volume 2" por STEWART, J (p. A37).

De acordo com o Teorema 2.5.3, isso é válido para todos os valores de x. Portanto, pelo Teorema 2.5.1, a função é igual à soma de sua série de Maclaurin, ou seja,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Provada esta igualdade, vamos substituir $x = 0{,}5$.

$$e^{0,5} = f(0{,}5) = \frac{0{,}5^0}{0!} + \frac{0{,}5^1}{1!} + \frac{0{,}5^2}{2!} + \frac{0{,}5^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{0,5} = f(0{,}5) = 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + \frac{1}{48} \approx 1{,}646$$

Calculando o valor aproximado de $e^{0,5}$, com o auxílio de uma calculadora, encontramos que $e^{0,5} \approx 1{,}648$. Logo, encontramos uma aproximação muito boa, utilizando apenas quatro parcelas da nossa série.

Exemplo 2.5.2: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em $a = 1$.

1º Passo: Encontrar um padrão nas derivadas.

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad f^{(n)}(x) = e^x$$
$$f(1) = e^1 \quad f'(1) = e^1 \quad f''(1) = e^1 \quad f^{(n)}(1) = e^1$$

2º Passo: Substituir na Série de Taylor $f^{(n)}(1) = e$.

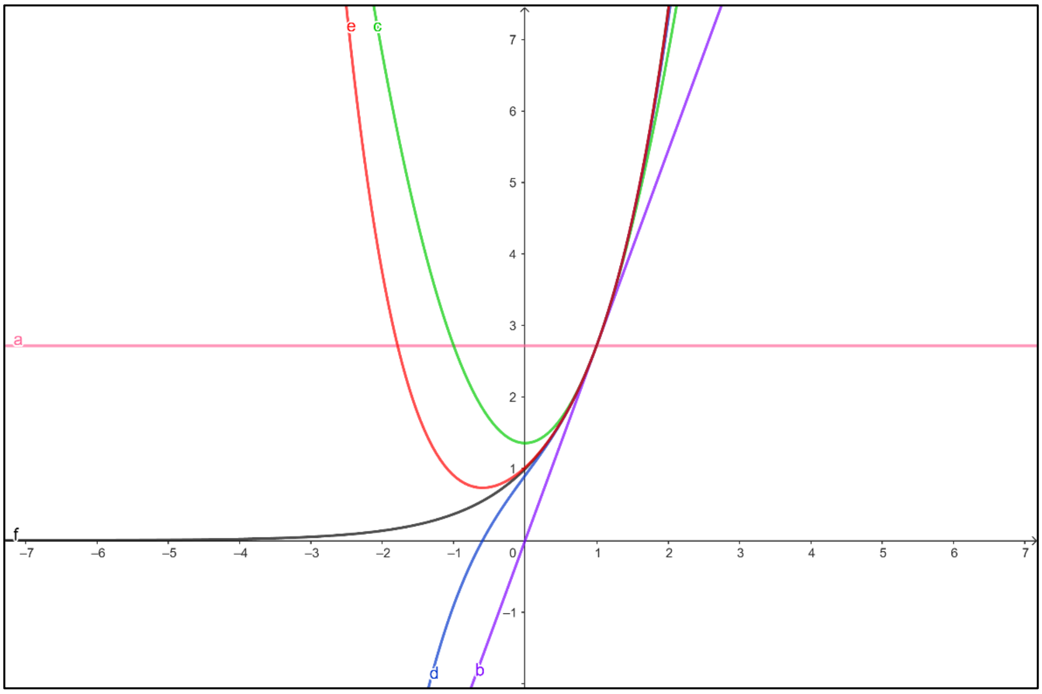
$$C_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{e}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} \cdot (x-1)^n$$

Então, essa é a função representada na Série de Taylor.

O exemplo não pediu o raio de convergência, porém ele poderia ser descoberto utilizando do mesmo método do exemplo 2.5.1.

Gráfico 2.5.1: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} \cdot (x-1)^n$, comparado com a função $f(x) = e^x$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024).

Exemplo 2.5.3: Encontre a Série de Maclaurin da função $f(x) = sen(x)$.

Se é uma Série de Maclaurin, então $a = 0$. Vamos encontrar o padrão.

$f(x) = sen(x) \qquad f'(x) = \cos(x) \qquad f''(x) = -sen(x) \qquad f'''(x) = -\cos(x)$

$f(0) = sen(0) = 0 \quad f'(0) = \cos(0) = 1 \quad f''(0) = -sen(0) = 0 \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1$

Se derivarmos novamente, voltaremos para $sen(0) = 0$.

Então ficou da seguinte forma:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1$$

Podemos observar que quando a derivada é par nossa função é igual a 0, e quando é ímpar, ele alterna entre 1 e -1.

Seguindo o formato da Série de Maclaurin, para descobrirmos C_n, temos:

$$C_n = f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + f^{iv}(0) + f^{v}(0) + \cdots$$

$$C_n = \frac{0}{0!} \cdot x^0 + \frac{1}{1!} \cdot x^1 + \frac{0}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \cdots$$

$$C_n = \frac{1}{1!} \cdot x^1 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \cdots$$

Como os sinais estão alternando, então $C_n = (-1)^n$.

Como o denominador possui apenas números ímpares, então

$$C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Como o x está sempre com expoente ímpar, então

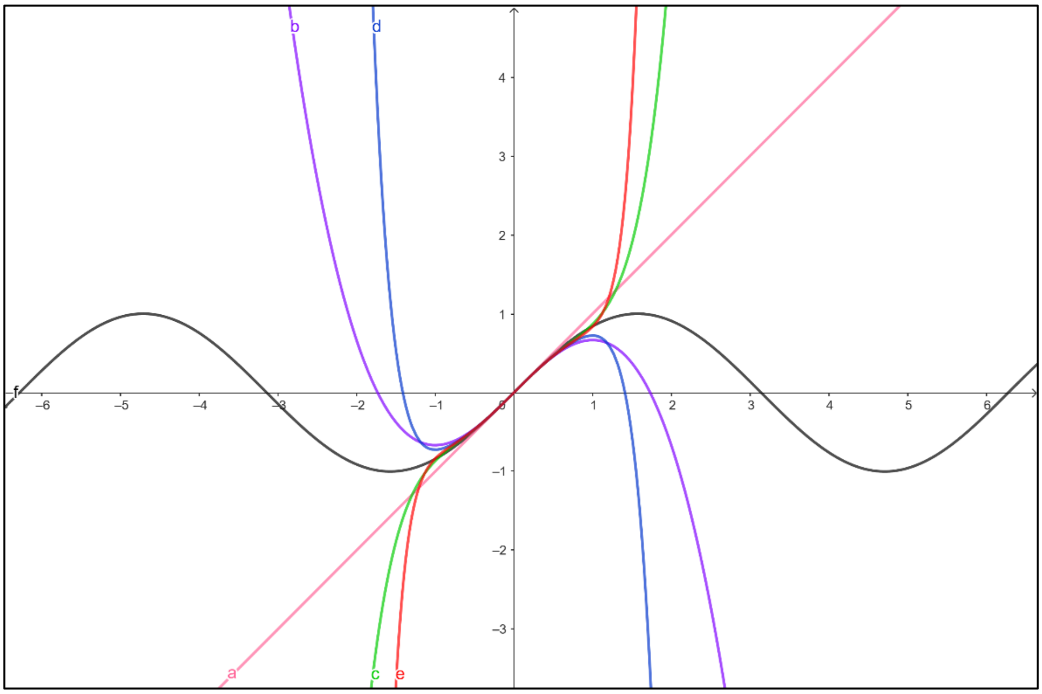
$$C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Logo, nossa representação da função $f(x) = sen(x)$ em Série de Maclaurin, ficou assim:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot x^{2n+1}$$

Seguindo os mesmos passos da função exponencial, conseguimos também provar que a função é igual a série encontrada, porém não provaremos neste trabalho.

Gráfico 2.5.2: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot x^{2n+1}$, comparado com a função $f(x) = sen(x)$.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

Exemplo 2.5.4: Encontre a Série de Taylor da função $f(x) = \ln(x)$ centrada em $a = 2$.

Para melhor compreensão do exemplo, iremos formar a série em etapas.

Se é uma série centrada em $a = 2$, vamos encontrar o padrão.

$f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$f(2) = \ln(2)$ $f''(2) = \frac{1}{2}$ $f''(2) = -\frac{1}{4}$ $f'''(2) = \frac{2}{8}$ $f^{iv}(2) = -\frac{6}{16}$

Seguindo o formato da Série de Taylor

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para descobrirmos C_n, temos

$$C_n = f(2) + f'(2) + f''(2) + f'''(2) + f^{iv}(2) + \cdots$$

$$C_n = \ln(2) + \frac{1}{2 \cdot 1!} - \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{2}{8 \cdot 3!} - \frac{6}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

Agora, é só multiplicar $C_n \cdot (x - a)^n$.

$$C_n = \ln(2) + \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot (x-2)^1 - \frac{1}{4 \cdot 2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{2}{8 \cdot 3!} \cdot (x-2)^3 - \frac{6}{16 \cdot 4!} \cdot (x-2)^4 + \cdots$$

Como o nosso $f(2)$ é muito diferente do restante, iremos colocá-lo fora da nossa soma.

Podemos perceber que o sinal está alternando então temos $(-1)^n$, e o sinal começa positivo, então ao invés de colocarmos $(-1)^n$, colocamos $(-1)^{n+1}$.

$$\ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

No numerador, podemos perceber que ela está seguindo um padrão de fatorial, ficaremos com $n!$. Porém, perceba que as duas primeiras parcelas se iniciam com 1, então ao invés de colocarmos $n!$, colocaremos $(n-1)!$, assim nosso numerador iniciará em $(n-1)! = (1-1)! = 0! = 1$ e a segunda parcela $(2-1)! = 1! = 1$. No denominador, ela é escrita como potências de 2, pois $f'(2) = 2^1, f''(2) = 2^2, f'''(2) = 2^3, f^{iv}(2) = 2^4$, então temos

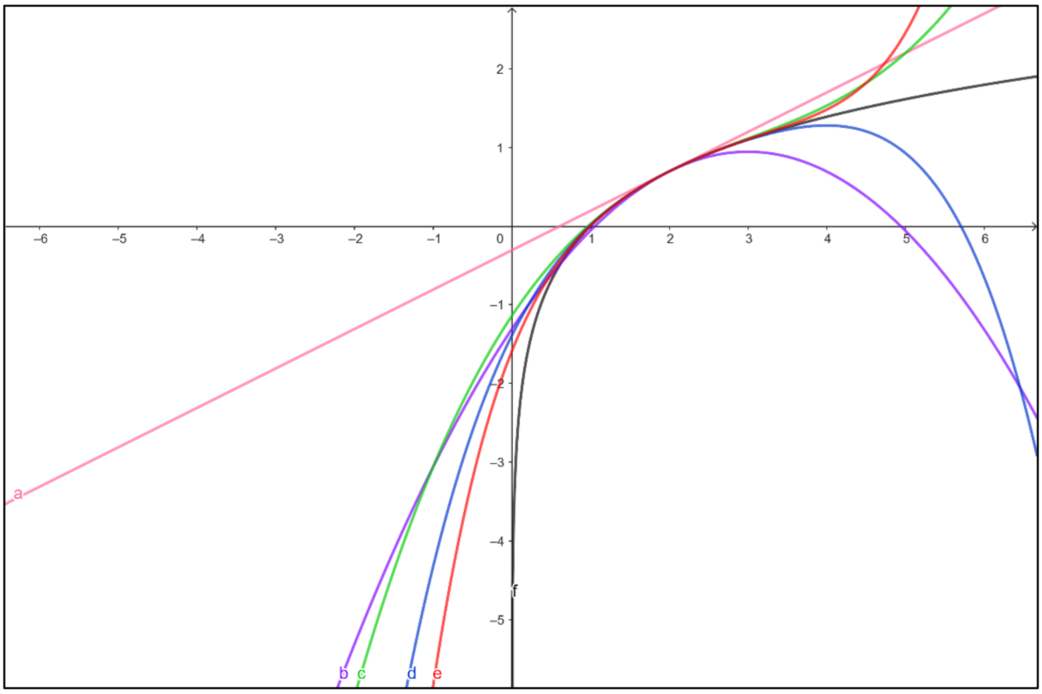
$\ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{2^n}$,

acompanhado das potências de 2, temos outro fatorial. Além disso, nos resta só acrescentar o $(x-2)^n$.

$$\ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{2^n \cdot n!} \cdot (x-2)^n$$

Então essa é a Série de Taylor de nossa função.

Gráfico 2.5.3: Soma das 5 primeiras parcelas da série $\ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{2^n \cdot n!} \cdot (x-2)^n$**, comparado com a função** $f(x) = \ln(x)$**.**



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024).

OBS.: Nem sempre iremos conseguir representar uma função como uma Série de Maclaurin, pois há alguns critérios para que isso possa ocorrer. São elas:

• A Série de Maclaurin só converge para a função original apenas em uma região limitada ao redor de $x = 0$. Fora dessa região, a série pode divergir ou representar uma função completamente diferente.

• A função deve possuir derivadas de todas as ordens em torno de $x = 0$ e essas derivadas devem ser bem-comportadas. Funções que possuem singularidades, descontinuidades ou outras propriedades não analíticas em torno de $x = 0$ não podem ser representadas por séries de Maclaurin.

• Funções definidas apenas em um intervalo finito, podem não ser representáveis por séries de Maclaurin.

Vejamos agora um exemplo de uma função que não pode ser representada como uma Série de Maclaurin. Iremos utilizar o quarto exemplo dessa subseção.

Exemplo 2.5.5: Encontre a Série de Maclaurin da função $f(x) = \ln(x)$.

Primeiramente, devemos derivar nossa função, como o exemplo pede a Série de Maclaurin, então $a = 0$ para encontrar um padrão.

$f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

Podemos perceber que nosso $f(0)$ não está definido, portanto não conseguimos representar essa função com $a = 0$, ou seja, uma Série de Maclaurin.

Em contrapartida, temos o exemplo 2.5.1, que é uma das representações em séries mais conhecidas e úteis em matemática. Estou falando do

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ela converge para todos os valores de x, o que significa que podemos usar essa série para calcular e^x para qualquer valor de x, não apenas para valores próximos a zero.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função incógnita, sua variável independente e derivadas da função incógnita, podendo ser escrita na forma

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad n \geq 1.$$

Antes de analisarmos exemplos de EDO's, vamos primeiro entender o que significa essa definição. Para melhor compreensão, iremos utilizar algo que já conhecemos para exemplificar. Tome a função $y = f(x)$, podemos perceber que essa escrita significa que nosso y é a variável dependente e x é a variável independente, pois o valor de y depende do valor de x. Com nossas EDO's, funciona da mesma forma, com a estrutura $\frac{dy}{dx}$, onde y depende de x.

Veja os exemplos abaixo e verifique se são ou não EDO´s.

Exemplo 3.1: $\frac{dy}{dt} - 5y = 1$

Para identificarmos uma EDO, temos que saber se nossa variável dependente depende de apenas uma variável independente. Perceba que nossa variável dependente y, depende de apenas uma só variável independente t, logo é uma EDO.

Exemplo 3.2: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Veja que essa equação não é uma EDO, pois u possui duas variáveis independentes, y e x.

Agora que entendemos como identificar uma EDO, vamos adentrar mais a fundo nesse conteúdo.

3.1 Ordem de uma EDO

A ordem de uma EDO é dada pela mais alta derivada da função incógnita presente na equação. Veja os exemplos.

Exemplo 3.1.1: $4x \cdot \frac{dy}{dx} + y = x$

Perceba que a derivada de ordem mais alta nessa equação é $\frac{dy}{dx}$, logo é uma EDO de $1^{\underline{o}}$ ordem.

Exemplo 3.1.2: $\frac{d^2y}{dt^2} + sen(y) = 0$

Veja que a derivada de ordem mais alta nessa equação é $\frac{d^2y}{dt^2}$, logo é uma EDO de $2^{\underline{o}}$ ordem.

Exemplo 3.1.3: $x^3 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \cdot \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

Note que a derivada de ordem mais alta nessa equação é $\frac{d^3y}{dx^3}$, logo é uma EDO de $3^{\underline{o}}$ ordem.

Uma observação importante, é que uma derivada de $1^{\underline{a}}$ ordem pode ser representada como y', assim como uma derivada de $2^{\underline{a}}$ ordem pode ser representada como y'', notação que usamos no capítulo anterior.

3.2 Linearidade de uma EDO

Uma EDO é dita linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

onde cada coeficiente depende apenas da variável x e a variável dependente y e todas as suas derivadas são de $1^{\underline{a}}$ ordem. Veja os exemplos:

Exemplo 3.2.1: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,\frac{dy}{dx} + y = 0$

Perceba que cada coeficiente depende de x e que todas as potências da variável y são de $1^{\underline{a}}$ ordem. Portanto, é uma EDO linear.

Exemplo 3.2.2: $y'' + 2xy' + y = x$

Note que a nossa equação só está escrita de outra forma, mas a maneira de se identificar a linearidade de uma EDO permanece a mesma. Veja que cada coeficiente depende de x e que todas as potências da variável y são de 1ª ordem. Portanto, é uma EDO linear.

Exemplo 3.2.3: $y \cdot y'' - 2y' = x$

Podemos perceber que no caso dessa equação, temos um y como coeficiente que multiplica nossa derivada y'', em outras palavras, isso significa dizer, que essa equação não depende exclusivamente de x. Então, essa EDO é dita não-linear.

Exemplo 3.2.4: $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$

Veja que y está elevado ao quadrado, ou seja, seu expoente é 2 e não 1. Então, essa EDO é dita não-linear.

Observe que para uma EDO seja linear, ela tem que cumprir esses dois requisitos, ou seja, se ela cumprir um e não o outro, ela vai ser dita não-linear.

3.3 Soluções em Séries de Potências: Ponto Ordinário

Considere uma equação no seguinte formato

$P(x) \cdot y'' + Q(x) \cdot y' + R(x) \cdot y = 0,$

um ponto x_0 é ordinário quando $\frac{Q(x)}{P(x)}$ e $\frac{R(x)}{P(x)}$ são funções analíticas no ponto x_0. Chamamos de função analítica, quando $\frac{Q(x)}{P(x)}$ e $\frac{R(x)}{P(x)}$ podem ser desenvolvidas em séries de potências no ponto x_0 e coincidem na Série de Taylor. Nesta seção, não iremos desenvolver o Ponto Singular: $P(x_0) = 0$, apenas o Ponto Ordinário: $P(x_0) \neq 0$, pois nosso objetivo é desenvolver essas funções em Séries de Potências.

Nesta seção, teremos uma preferência por EDOs com coeficientes polinomiais. Para ser caracterizado um ponto ordinário, $P(x) \neq 0$, veja o exemplo.

Exemplo 3.3.1: $(x^2 - 1) \cdot y'' + 2xy' + 6y = 0, \quad P(x_0) \neq 0$

Perceba que $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = 2x$ e $R(x) = 6$. Lembre-se da informação dada anteriormente, $P(x) \neq 0$. Quais valores de x irão zerar nosso $P(x)$? Simples, basta igualarmos $P(x) = 0$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Então, para que nosso $P(x) \neq 0$, $x \neq \pm 1$. Logo, quando estivermos falando de coeficientes polinomiais, iremos simplesmente fazer esse teste. Será que podemos dizer que x_0 pode ser igual a 0? Claro que podemos, pois todos os $x \neq \pm 1$ podem ser um ponto ordinário.

Sabendo disso, adentremos agora no conteúdo principal dessa seção.

Seja uma EDO

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$

se $x = x_0$ for um ponto ordinário dessa EDO, podemos encontrar a solução dessa EDO no formato de série de potências centrada em x_0:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - x_0)^n$$

Teorema 3.3.1: Se x_0 for um ponto ordinário da equação diferencial

$$P(x) \cdot y'' + Q(x) \cdot y' + R(x) \cdot y = 0$$

ou seja, se $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ e $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ forem analíticas em x_0, então a solução geral será

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$

em que a_0 e a_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são duas soluções em séries de potências que são analíticas em x_0. As soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, o raio de convergência de cada uma das soluções em série y_1 e y_2 é pelo menos tão grande quanto o mínimo dos raios de convergência das séries para p e q.

O Teorema 3.3.1 é demonstrado no livro "Equações Diferenciais Elementares de Problemas de Valor de Contorno" por Boyce (seção 5.3).

Exemplo 3.3.2: Resolva a seguinte EDO no formato de séries de potências:

$y'' - 2xy' + 2y = 0$ com as seguintes condições, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

1º Passo: Supor que a nossa EDO com as condições iniciais pode ser representada como uma série de potencias.

Para que possamos fazê-la o mais simples possível, iremos tomar $x_0 = 0$, temos:

$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$.

Iremos agora encontrar a primeira derivada dessa série, para isso devemos saber de algumas informações, como por exemplo, iremos derivar essa série em relação a x e não a n, pois o n é o nosso índice da soma. Temos:

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1}$.

Perceba que a derivada de x^n é $n \cdot x^{n-1}$. Veja que se continuarmos com $n = 0$, nossa soma irá zerar, então iremos iniciar com $n = 1$. Derivemos novamente:

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$.

Perceba que a derivada de x^{n-1} é $(n-1) \cdot x^{n-2}$. Veja que se continuarmos com $n = 1$, nossa soma irá zerar, então iremos iniciar com $n = 2$.

2º Passo: Substituir o y, a primeira derivada y' e a segunda derivada y'' pelas séries encontradas.

Tínhamos: $y'' - 2xy' + 2y = 0$

Substituído, termos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = 0$$

Iremos agora organizar para ficar mais fácil de se trabalhar. Perceba que temos um $2x$ multiplicando a série, então podemos colocá-la dentro da série em questão para manipularmos o x, pois assim, podemos calcular $x \cdot x^{n-1} = x^{1+n-1} = x^n$. Da mesma forma acontece com o 2 que multiplica com a terceira série. Temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n = 0$$

3º Passo: Fazer com que os nossos índices n, comecem no mesmo lugar.

Observe que na primeira série temos x^{n-2} e a série inicia-se em $n = 2$, logo $x^{2-2} = x^0$. Na segunda série temos x^n e a série inicia-se em $n = 1$, logo x^1. Na terceira série temos x^n e a série iniciasse em $n = 0$, logo x^0.

Como nossos x , começam em lugares diferentes, para podemos deixá-los iguais, vamos tomar o x com a maior potência, portanto x^1. Para que possamos fazer isso, temos que fazer com que as nossas duas séries comecem com n maiores, ou seja, na primeira série $n = 3$, pois ficaríamos com $x^{3-2} = x^1$ e na terceira série $n = 1$, pois ficaríamos com x^1. A pergunta é: como é que fazemos isso? Relembre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Veja que começamos com $n = 0$, para que comecemos em $n = 1$, basta retirarmos a primeira parcela da soma, então será isso que faremos.

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = C_2 \cdot 2 \cdot (2-1) \cdot x^{2-2} + C_3 \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot x^{3-2} + \cdots$$

$$C_2 \cdot 2 \cdot (2-1) \cdot x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = C_3 \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot x^{3-2} + \cdots$$

Logo, nossa primeira série será reescrita como

$$C_2 \cdot 2 \cdot (2-1) \cdot x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$C_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$2 \cdot C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Fazendo da mesma forma na terceira série, teremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n = 2 \cdot C_0 \cdot x^0 + 2 \cdot C_1 \cdot x^1 + \cdots$$

$$2 \cdot C_0 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n = 2 \cdot C_1 \cdot x^1 + \cdots$$

Logo, nossa terceira série será reescrita como

$$2 \cdot C_0 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n$$

$$2 \cdot C_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n$$

$$2 \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n$$

Portanto, ao final de tudo, teremos:

$$2 \cdot C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot n \cdot x^n + 2 \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n = 0$$

4º Passo: Reindexar a série para que todos os termos começarem com o mesmo índice.

Perceba que o n da primeira série é $n = 3$, ou seja, o único $n \neq 1$, portanto temos que fazer algumas manipulações para que a primeira série comesse com $n = 1$. Para isso, vamos chamar um $k = n - 2$, pois substituindo $n = 3$, teremos $k = 3 - 2 \Rightarrow k = 1$.

Vamos substituir $k = n - 2$ tendo em vista também que $n = k + 2$.

$$I_1 = 2 \cdot C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2} \cdot (k+2) \cdot (k+2-1) \cdot x^k$$

$$I_1 = 2 \cdot C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2} \cdot (k+2) \cdot (k+1) \cdot x^k$$

Agora que entendemos o que aconteceu, podemos voltar a nossa substituição $n = k$, pois manipulamos tanto o $k = 1$ quanto o $C_{k+2} \cdot k + 2 \cdot (k+1) \cdot x^k$, não alterando o resultado.

Teremos então:

$$2 \cdot C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot n \cdot x^n + 2 \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \cdot x^n = 0$$

5º Passo: Somar todas as séries.

Agora, como temos nas nossas séries, x com expoentes iguais e n iniciando no mesmo número, podemos somar todas as séries.

$$2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n - 2 \cdot C_n \cdot n \cdot x^n + 2 \cdot C_n \cdot x^n = 0$$

Como x^n está multiplicando todos os termos da nossa série, podemos colocá-lo em evidência.

$$2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2 \cdot C_n \cdot n + 2 \cdot C_n) \cdot x^n = 0$$

6º Passo: Aplicar as relações de recorrência.

Como queremos que nossa equação zere, cada termo dela, deve ser igual a 0. Porém, como vimos no início desta subseção, $x^n \neq 0$, temos:

$2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_0 = 0$ e $C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2 \cdot C_n \cdot n + 2 \cdot C_n = 0$

A partir dessas relações de recorrência, conseguimos agora escrever uma forma genérica de escrever os coeficientes da nossa série. Antes disso, iremos utilizar as condições do enunciado do exemplo, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Com isso, iremos conseguir encontrar alguns coeficientes sem muita dificuldade. Para isso, vamos utilizar as séries que representam o y e o y' para sabermos como elas poderão nos ajudar.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_0 + C_1 \cdot x^1 + C_2 \cdot x^2 + \cdots$$

Pela nossa condição inicial $y(0) = 0$, todos os nossos termos irão zerar, menos o C_0, logo $y(0) = C_0 = 0$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1} = C_1 + C_2 \cdot 2 \cdot x^1 + C_3 \cdot 3 \cdot x^2 + \cdots$$

Pela nossa condição inicial $y'(0) = 1$, todos os nossos termos irão zerar, menos o C_1, logo $y(0) = C_1 = 1$. Isso significa que já temos o valor de dois coeficientes. Substituindo agora o $C_0 = 0$ e o $C_1 = 1$, nos valores de recorrência, temos:

$$2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_0 = 0$$
$$2 \cdot C_2 + 2 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot C_2 = 0$$
$$C_2 = 0$$

Temos agora o valor de três coeficientes. Vamos agora manipular a segunda equação dos valores de recorrência isolando o C_{n+2}, para assim, descobrirmos C_3.

$$C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n-1) - 2 \cdot C_n \cdot n + 2 \cdot C_n = 0$$
$$C_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n-1) = 2 \cdot C_n \cdot n - 2 \cdot C_n$$
$$C_{n+2} = \frac{2 \cdot C_n \cdot n - 2 \cdot C_n}{(n+2) \cdot (n+1)}$$
$$C_{n+2} = \frac{2 \cdot C_n \cdot (n-1)}{(n+2) \cdot (n+1)}$$

Vamos descobrir o C_3. Podemos fazer a seguinte manipulação: $C_3 = C_{1+2}$, ou seja, podemos dizer que $n = 1$, pois $C_{n+2} = C_{1+2}$. Lembre-se também que $C_1 = 1$, temos:

$$C_3 = C_{1+2} = \frac{2 \cdot C_1 \cdot (1-1)}{(1+2) \cdot (1+1)} = 0$$

$$C_3 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{6}$$

$$C_3 = 0$$

Utilizando da mesma manipulação, vamos descobrir C_4, lembrando que $C_2 = 0$.

$$C_4 = C_{2+2} = \frac{2 \cdot C_2 \cdot (2-1)}{(2+2) \cdot (2+1)}$$

$$C_4 = \frac{2 \cdot 0 \cdot 1}{12}$$

$$C_4 = 0$$

Utilizando da mesma manipulação, vamos descobrir C_5, sabendo também que $C_3 = 0$

$$C_5 = C_{3+2} = \frac{2 \cdot C_3 \cdot (3-1)}{(3+2) \cdot (3+1)}$$

$$C_5 = \frac{2 \cdot 0 \cdot 2}{20}$$

$$C_5 = 0$$

Perceba que todos nos nossos coeficientes irão zerar, pois utilizam em suas fórmulas, os coeficientes anteriores que valem 0. Então, o único coeficiente diferente de 0 é o C_1.

7º Passo: Escrever a solução.

Como foi estabelecido

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$$

Como possuímos um único coeficiente diferente de 0, temos:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_1 \cdot x^1$$

Como $C_1 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_1 \cdot x^1 = 1 \cdot x = x$$

Portanto, $y = x$ é a solução para a nossa EDO, que satisfaz as condições iniciais. Lembrando que tivemos uma coincidência onde apenas um coeficiente não iria zerar, porém se não houvesse essa coincidência, a forma de resolver seria a mesma explicada neste exemplo.

4 EQUAÇÃO DE HERMITE

A equação de Hermite é uma ferramenta matemática valiosa na física, especialmente na mecânica quântica e na teoria do calor. Em mecânica quântica, os polinômios de Hermite, que são soluções polinomiais da equação de Hermite, aparecem nas soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico quântico, ajudando a entender muitos sistemas físicos.

Na teoria do calor, os polinômios de Hermite resolvem a equação do calor, essencial para entender a condução térmica. Em óptica e física estatística, as funções de Hermite-Gaussianas descrevem feixes de laser e distribuições de probabilidade em sistemas gaussianos. Além disso, essas funções são úteis em métodos numéricos, permitindo a aproximação eficiente de outras funções.

A seguinte equação é denominada equação de Hermite:

$y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que a solução geral da equação de Hermite é

$$y(x) = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x),$$

em que

$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\lambda - 2.(2k-2)) \cdots \lambda}{(2k)!} \cdot x^{2k},$

$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\lambda - 2.(2k-1)) \cdots (\lambda - 2)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$

Antes de iniciarmos a nossa resolução, perceba que a equação de Hermite é bastante similar ao exemplo 3.3.2, ou seja, os passos a serem seguidos para a resolução desta equação serão os mesmos.

Primeiramente, devemos calcular a primeira e segunda derivada de $y(x)$, para então assim, substituirmos na equação $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Substituindo, temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

Para simplificarmos nossa equação, iremos multiplicar o $2x$ e o λ as suas respectivas séries.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot 2x \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = 0$$

Iremos utilizar a propriedade da multiplicação de bases iguais na segunda série nos termos $x \cdot x^{n-1} = x^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_n \cdot n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = 0$$

Com o intuito de conseguirmos deixar o x em evidência, iremos fazer algumas manipulações matemáticas para termos um expoente de tal modo que se inicie no mesmo número, pois na primeira série, como o somatório inicia-se em $n = 2$, nosso expoente será 0 , portanto $x^{n-2} = x^{2-2} = x^0$.

De forma análoga acontece com nosso terceiro somatório, como $n = 0$, nosso expoente será 0 , portanto $x^n = x^0$. Nosso próximo objetivo é fazer com que nosso expoente se inicie em 1 , assim nas três séries, teremos x^1.

Pegando agora a primeira série

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Para que $x^{n-2} = x^1$, teremos um $n = 3$. Para que isso ocorra, devemos retirar a primeira parcela da nossa soma, assim nosso somatório se iniciará de $n = 3$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = a_2 \cdot 2 \cdot (2-1) \cdot x^{2-2} + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = 2 \cdot a_2 + \cdots$$

$$2 \cdot a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Pegando agora a terceira série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n$$

Para que $x^n = x^1$, termos um $n = 1$. Para que isso ocorra, faremos o mesmo procedimento que acabamos de fazer.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = a_0 \cdot \lambda \cdot x^0 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = \lambda \cdot a_0 + \cdots$$

$$\lambda \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n$$

Após esses procedimentos, teremos:

$2 \cdot a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_n \cdot n \cdot x^n + \lambda \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = 0$

Agora, com o intuito de podermos somar os três somatórios, devemos torná-los iguais, ou seja, possuir um n na qual se inicie no mesmo número, logo no nosso caso, $n = 1$. Perceba que apenas o primeiro somatório possui um $n \neq 1$, logo faremos algumas manipulações matemáticas para tornarmos o $n = 1$.

Observe que queremos transformar o $n = 3$ em $n = 1$, então tomaremos um $k = n - 2$ e $n = k + 2$.

Pegando o primeiro somatório para a manipulação

$$2 \cdot a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$2 \cdot a_2 + \sum_{k+2=3}^{\infty} a_{k+2} \cdot (k+2) \cdot (k+2-1) \cdot x^{k+2-2}$$

$$2 \cdot a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} \cdot (k+2) \cdot (k+1) \cdot x^k$$

Com isso, podemos agora retornar para $k = n$.

$$2 \cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n$$

Portanto, nossa equação ficará:

$2 \cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_n \cdot n \cdot x^n + \lambda \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \lambda \cdot x^n = 0$

Agora que tudo já foi feito, iremos juntar os nossos somatórios.

$$2 \cdot a_2 + \lambda \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n - 2 \cdot a_n \cdot n \cdot x^n + a_n \cdot \lambda \cdot x^n = 0$$

Agora vamos colocar o x^n em evidência.

$$2 \cdot a_2 + \lambda \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2 \cdot a_n \cdot n + a_n \cdot \lambda] \cdot x^n = 0$$

Após isso, vamos agora aplicar o valor de recorrência.

$2 \cdot a_2 + \lambda \cdot a_0 = 0$ e $a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2 \cdot a_n \cdot n + a_n \cdot \lambda = 0,\ n \in \mathbb{N}$

Vamos descobrir quanto vale a_2. Pegue o primeiro valor de recorrência.

$$2 \cdot a_2 + \lambda \cdot a_0 = 0$$
$$2 \cdot a_2 = -\lambda \cdot a_0$$
$$a_2 = -\frac{\lambda}{2} \cdot a_0$$

Pegue agora o segundo valor de recorrência.

$$a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2 \cdot a_n \cdot n + a_n \cdot \lambda = 0$$
$$a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) = 2 \cdot a_n \cdot n - a_n \cdot \lambda$$
$$a_{n+2} = \frac{2 \cdot a_n \cdot n - a_n \cdot \lambda}{(n+2) \cdot (n+1)}$$
$$a_{n+2} = \frac{2 \cdot n - \lambda}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot a_n$$

Vamos agora descobrir quanto vale a_3, mas perceba que não possuímos um a_3 nos valores de recorrência explicitamente, mas temos um a_{n+2}, como $n = 1$, teremos a_{1+2} ou seja, a_3.

$$a_{n+2} = \frac{2 \cdot n - \lambda}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot a_n$$
$$a_{1+2} = \frac{2 \cdot 1 - \lambda}{(1+2) \cdot (1+1)} \cdot a_1$$
$$a_3 = \frac{2 - \lambda}{3 \cdot 2} \cdot a_1$$

Desta mesma forma iremos descobrir os demais.

$$a_{n+2} = \frac{2 \cdot n - \lambda}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot a_n$$
$$a_{2+2} = \frac{2 \cdot 2 - \lambda}{(2+2) \cdot (2+1)} \cdot a_2$$
$$a_4 = \frac{4 - \lambda}{4 \cdot 3} \cdot a_2$$

Perceba que na nossa equação temos um a_2 que já sabemos seu valor, então iremos substituir, e isso ocorrerá também nas demais.

$$a_4 = \frac{4 - \lambda}{4 \cdot 3} \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \cdot a_0$$
$$a_4 = \frac{(4 - \lambda) \cdot (-\lambda)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_0$$

$a_{3+2} = \frac{2 \cdot 3 - \lambda}{(3+2) \cdot (3+1)} \cdot a_3$ $a_{4+2} = \frac{2 \cdot 4 - \lambda}{(4+2) \cdot (4+1)} \cdot a_4$

$a_5 = \frac{6-\lambda}{5\cdot4} \cdot a_3$ $\qquad\qquad$ $a_6 = \frac{8-\lambda}{6\cdot5} \cdot a_4$

$a_5 = \frac{6-\lambda}{5\cdot4} \cdot \frac{2-\lambda}{3\cdot2} \cdot a_1$ $\qquad\qquad$ $a_6 = \frac{8-\lambda}{6\cdot5} \cdot \frac{(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{4\cdot3\cdot2} \cdot a_0$

$a_5 = \frac{(6-\lambda)\cdot(2-\lambda)}{5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_1$ $\qquad\qquad$ $a_6 = \frac{(8-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_0$

Se continuassemos fazendo essas operações, saberíamos que

$a_7 = \frac{(10-\lambda)\cdot(6-\lambda)\cdot(2-\lambda)}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_1$ e $a_8 = \frac{(12-\lambda)\cdot(8-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_0$

Neste momento, já somos capazes de identificar um padrão para a_{2k} e a_{2k+1}. Primeiro, iremos fazer algumas manipulações matemáticas para encontrar o resultado desejado. Pereba que a_2 pode ser reescrita desta forma:

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2} \cdot a_0$$

colocando o (-1) em evidência,

$$a_2 = \frac{(-1)^1 \cdot \lambda}{2} \cdot a_0$$

e no denominador, como $2 = (2.1)!$, temos

$a_2 = \frac{(-1)^1\cdot\lambda}{(2\cdot1)!} \cdot a_0.$

Da mesma forma faremos com os demais.

O a_4 ficará:

$a_4 = \frac{(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{4\cdot3\cdot2} \cdot a_0,$

colocando o (-1) em evidência,

$a_4 = \frac{(-1)^2\cdot(\lambda-4)\cdot\lambda}{4\cdot3\cdot2} \cdot a_0.$

No numerador, temos que $4 = 2\cdot(2\cdot2-2)$, e no denominador, temos que $4! = (2\cdot2)!$, então ficará

$a_4 = \frac{(-1)^2\cdot\left(\lambda-2\cdot(2\cdot2-2)\right)\cdot\lambda}{(2.2)!} \cdot a_0.$

Faremos agora com a_6:

$a_6 = \frac{(8-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_0,$

Colocando o (-1) em evidência, temos:

$a_6 = \frac{(-1)^3\cdot(\lambda-8)\cdot(\lambda-4)\cdot\lambda}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} \cdot a_0,$

no numerador, temos que $8 = 2\cdot(2\cdot3-2)$, no denominador, temos que $6! = (2\cdot3)!$, então

$a_6 = \frac{(-1)^3\cdot\left(\lambda-2\cdot(2\cdot3-2)\right)\cdot\left(\lambda-2\cdot(2.2-2)\right)\cdot\lambda}{(2\cdot3)!} \cdot a_0,$

já podemos perceber um padrão, mas vamos continuar no a_8 para não restarem dúvidas,

$$a_8 = \frac{(12-\lambda)\cdot(8-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(-\lambda)}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}\cdot a_0$$

colocando o (-1) em evidência, temos:

$$a_8 = \frac{(-1)^4\cdot(\lambda-12)\cdot(\lambda-8)\cdot(\lambda-4)\cdot\lambda}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}\cdot a_0,$$

no numerador, temos que $12 = 2\cdot(2.4-2)$, no denominador, termos que $8! = (2\cdot4)!$, então

$$a_8 = \frac{(-1)^4\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot4-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot3-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot2-2)\big)\cdot\lambda}{(2\cdot4)!}\cdot a_0.$$

Agora, observe que tanto no numerador como no denominador, temos produtos de 2 com um número que sempre faria de acordo com meu a, chamaremos ele de k (número natural), quando meu a_2, $k=1$; a_4, $k=2$; a_6, $k=3$; a_8, $k=4$ e assim sucessivamente, perceba também, que à medida que meu a diminui, o k também diminui. Como por indução, já verificamos que vale, assumiremos agora que também vale para a_{2k}

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\cdot\big(\lambda-2\cdot(2k-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-1)-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-2)-2)\big)\cdots\lambda}{(2k)!}\cdot a_0$$

Supondo isto válido para um k, vamos analisar $a_{2(k+1)}$.

Pela relação de recorrência

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{2\cdot2k-\lambda}{(2k+2)\cdot(2k+1)}\cdot a_{2k}.$$

Agora, substituindo a hipótese de indução (que é a fórmula de a_{2k}), temos:

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\ &= \frac{2.2k-\lambda}{(2k+2)\cdot(2k+1)} \\ &\cdot\left[\frac{(-1)^k\cdot\big(\lambda-2\cdot(2k-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-1)-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-2)-2)\big)\cdots\lambda}{(2k)!}\right]\cdot a_0 \end{aligned}$$

colocando o (-1) em evidência no primeiro fator do numerador

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\ &= \frac{(-1)\cdot(\lambda-2.2k)}{(2k+2)\cdot(2k+1)} \\ &\cdot\left[\frac{(-1)^k\cdot\big(\lambda-2\cdot(2k-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-1)-2)\big)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2\cdot(k-2)-2)\big)\cdots\lambda}{(2k)!}\right]\cdot a_0 \end{aligned}$$

calculando agora esse produto, temos:

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{(-1)\cdot(-1)^k\cdot(\lambda-2\cdot2k)\cdot\big(\lambda-2\cdot(2k-2)\big)\cdots\lambda}{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!}\cdot a_0$$

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \left(2 \cdot (k+1)\right)\right) \cdot \left(\lambda - 2 \cdot (2k-2)\right) \cdots \lambda}{(2k+2)!} \cdot a_0$$

Provado por indução os índices pares, vamos agora provar para os índices ímpares da mesma forma.

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3 \cdot 2} \cdot a_1$$

colocando o (-1) em evidência

$$a_3 = \frac{(-1) \cdot (\lambda - 2)}{3 \cdot 2} \cdot a_1$$

no numerador, $3! = (2 \cdot 1 + 1)!$

Para a_5:

$$a_5 = \frac{(6-\lambda) \cdot (2-\lambda)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_1$$

colocando o (-1) em evidência

$a_5 = \frac{(-1)^2 \cdot (\lambda-6) \cdot (\lambda-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_1,$

no numerador, perceba que $6 = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)$, no denominador, $5! = (2.2 + 1)!$, substituindo, temos:

$$a_5 = \frac{(-1)^2 \cdot \left(\lambda - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)\right) \cdot (\lambda - 2)}{(2 \cdot 2 + 1)!} \cdot a_1$$

Para a_7:

$$a_7 = \frac{(10-\lambda) \cdot (6-\lambda) \cdot (2-\lambda)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_1$$

colocando o (-1) em evidência

$a_7 = \frac{(-1)^3 \cdot (\lambda-10) \cdot (\lambda-6) \cdot (\lambda-2)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_1,$

no numerador, percaba que $10 = 2 \cdot (2 \cdot 3 - 1)$, no denominador, $7! = (2 \cdot 3 + 1)!$, substituindo, temos:

$$a_7 = \frac{(-1)^3 \cdot \left(\lambda - 2 \cdot (2 \cdot 3 - 1)\right) \cdot \left(\lambda - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)\right) \cdot (\lambda - 2)}{(2 \cdot 3 + 1)!} \cdot a_1$$

Agora, de maneira análoga a justificativa de a_{2k}, a_{2k+1} será:

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k \cdot \left(\lambda - 2 \cdot (2k-1)\right) \cdot \left(\lambda - 2 \cdot \left(2 \cdot (k-1) - 1\right)\right) \cdots (\lambda - 2)}{(2k+1)!} \cdot a_1$$

Da mesma forma, acontece com a prova da indução.

Sabendo das fórmulas gerais de a_{2k} e a_{2k+1}, podemos substituir esses valores na série $y(x)$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cdot x^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-2)\big) \cdots \lambda}{(2k)!} \cdot a_0 \cdot x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-1)\big) \cdots (\lambda - 2)}{(2k+1)!} \cdot a_1 \cdot x^{2k+1}$$

O somatório inicia-se em $k = 1$, então faremos o seguinte processo. Perceba que temos duas séries, na qual uma contém a_{2k} que depende de a_0 e a_{2k+1} que depende de a_1. Veja:

$$\big(a_{2k} \cdot a_0 \cdot x^{2k}\big) + \big(a_{2k+1} \cdot a_1 \cdot x^{2k+1}\big)$$

$$\begin{aligned}(a_{2\cdot 0} \cdot a_0 \cdot x^{2\cdot 0} + a_{2\cdot 1} \cdot a_0 \cdot x^{2\cdot 1} + a_{2\cdot 2} \cdot a_0 \cdot x^{2\cdot 2} + \cdots)\\ + (a_{2\cdot 0+1} \cdot a_1 \cdot x^{2\cdot 0+1} + a_{2\cdot 1+1} \cdot a_1 \cdot x^{2\cdot 1+1} + a_{2\cdot 2+1} \cdot a_1 \cdot x^{2\cdot 2+1} + \cdots)(a_0 + a_2\\ \cdot a_0 \cdot x^2 + a_4 \cdot a_0 \cdot x^4 + \cdots) + (a_1 \cdot x + a_3 \cdot a_1 \cdot x^3 + a_5 \cdot a_1 \cdot x^5 + \cdots)\end{aligned}$$

colocando o a_0 e o a_1 em evidência, temos:

$$a_0(1 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + \cdots) + a_1(x + a_3 \cdot x^3 + a_5 \cdot x^5 + \cdots)$$

portanto,

$$\begin{aligned}a_0 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-2)\big) \cdots \lambda}{(2k)!} \cdot x^{2k}\right) + a_1\\ \cdot \left(x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-1)\big) \cdots (\lambda - 2)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)\end{aligned}$$

como $y(x) = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x)$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-2)\big) \cdots \lambda}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \big(\lambda - 2 \cdot (2k-1)\big) \cdots (\lambda - 2)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

Agora, iremos mostrar que se $\lambda = 4N$, para $N = 1,2,\cdots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas polinômios pares de x. Vamos mostrar também que se $\lambda = 2 \cdot (2N + 1)$, para $N = 1,2,\cdots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N + 1$ contendo apenas potências ímpares de x .

Perceba, nos valores encontrados nos a_{2k}, que a_2 depende de a_0, a_4 depende de a_2, a_6 a_4, e assim sucessivamente. Isso significa, que se substituirmos o $\lambda = 4N$ com $N = 1,2,\cdots$, teremos $a_{2k} = 0$, observe:

$$a_4 = \frac{(4 - \lambda) \cdot (-\lambda)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_0$$

$$a_4 = \frac{(4 - 4) \cdot (-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_0$$

$$a_4 = \frac{0 \cdot (-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot a_0$$

$$a_4 = 0$$

Se $a_4 = 0$, portanto, $a_6 = 0,\ a_8 = 0,\ a_{10} = 0$, pois todos eles dependem de a_4, e isso implica que todos os $a_{2k} = 0$, exceto o a_{2k} com $k = 1$, então $a_{2k} = 0$ com $k = N + 1,\ N + 2, \cdots$, teremos, portanto, que $y_1(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2$, um polinômio de grau no máximo 2 .

Agora, o que acontece se substituirmos $\lambda = 2 \cdot (2N + 1)$ em $y_2(x)$? Teremos o mesmo resultado, na qual $a_{2k+1} = 0$. Veja:

$$a_5 = \frac{(6-\lambda)\cdot(2-\lambda)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = \frac{\big(6-2\cdot(2N+1)\big)\cdot\big(2-2\cdot(2N+1)\big)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = \frac{\big(6-2\cdot(2\cdot 1+1)\big)\cdot\big(2-2\cdot(2\cdot 1+1)\big)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = \frac{(6-2\cdot 3)\cdot(2-2\cdot 3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = \frac{(6-6)\cdot(2-6)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = \frac{0\cdot(-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot a_1$$

$$a_5 = 0$$

De forma análoga a resolução anterior, como todos os valores de $a_{2k+1} = 0$ dependem de a_5, logo $a_{2k+1} = 0$ exceto o a_3. Portanto, $a_{2k+1} = 0$ com $k = N + 1,\ N + 2, \cdots$, portanto teremos que $y_2(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$.

Para título de curiosidade, iremos mostrar dois exemplos de duas soluções polinomiais para nossa equação.

Exemplo 4.1: Utilizando a relação de recorrência, mostre uma solução polinomial de $y_2(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$ para $\lambda = 3$.

A relação de recorrência para os índices ímpares é dada por

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = \frac{2\cdot 2(k+1)-\lambda}{(2k+3)\cdot(2k+2)}\cdot a_{2k+1}$$

como queremos descobrir a_3, temos:

$$a_{2k+3} = a_{2\cdot 0+3} = a_3 = \frac{2\cdot 2(0+1)-3}{(2\cdot 0+3)\cdot(2\cdot 0+2)}\cdot a_{2\cdot 0+1}$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 2-3}{3\cdot 2}\cdot a_1$$

$a_3 = \frac{1}{6} \cdot a_1$.

substituindo na equação, temos:

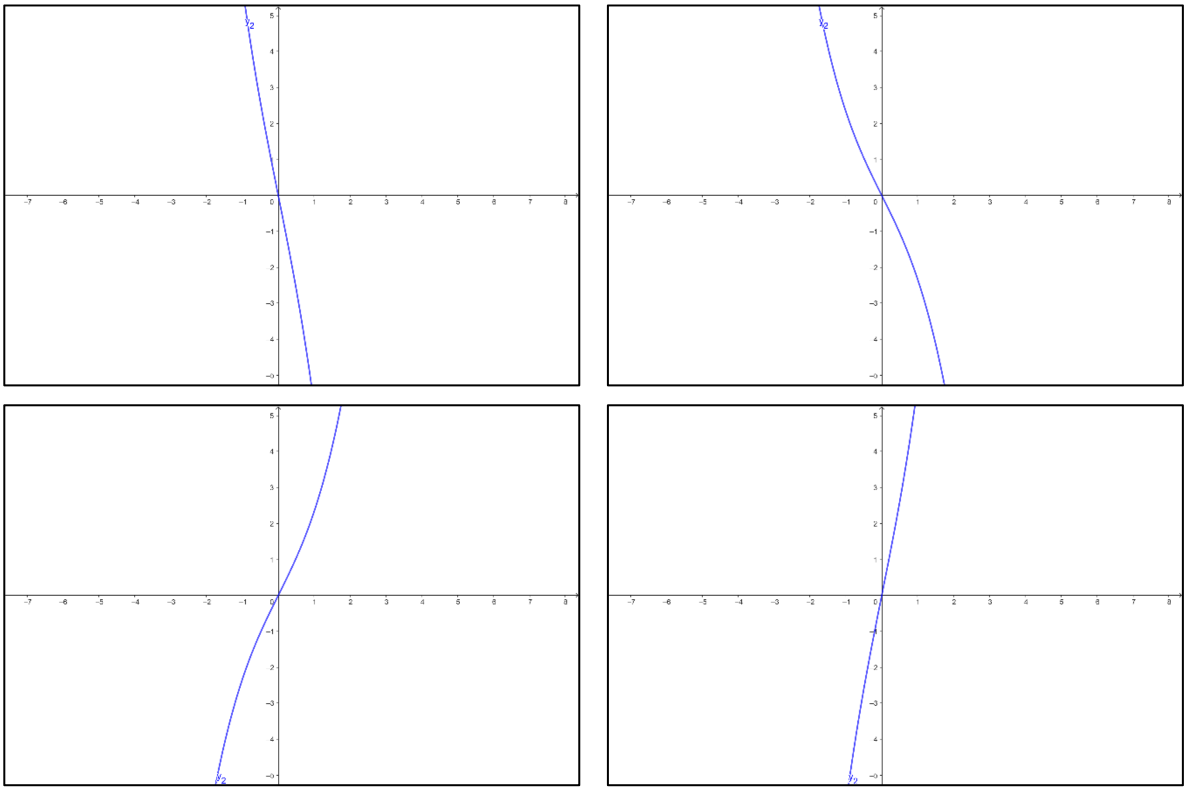
$$y_2(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$$

$$y_2(x) = a_1 \cdot x + \frac{1}{6} \cdot a_1 \cdot x^3$$

colocando o a_1 em evidência

$$y_2(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{x^3}{6}\right).$$

Gráfico 4.2: Representação gráfica de $y_2(x) = a_1 \cdot \left(x + \frac{x^3}{6}\right)$ para $\lambda = 3$, quando $a_1 = -5$, $a_1 = -2$, $a_1 = 2$ e $a_1 = 5$, respectivamente.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

Exemplo 4.2: Utilizando a relação de recorrência, mostre uma solução polinomial de $y_1(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4$ para $\lambda = 4$.

A relação de recorrência para os índices pares é dada por

$$a_{2k+2} = \frac{2 \cdot 2k - \lambda}{(2k+2) \cdot (2k+1)} \cdot a_{2k}$$

como queremos descobrir a_2 e a_4, respectivamente, temos:

$$a_{2k+2} = a_{2\cdot 0+2} = a_2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0 - 4}{(2 \cdot 0 + 2) \cdot (2 \cdot 0 + 1)} \cdot a_{2\cdot 0}$$

$$a_2 = \frac{-4}{2} \cdot a_0$$

$$a_2 = -2 \cdot a_0$$

Para a_4:

$$a_{2\cdot1+2} = \frac{2\cdot2\cdot1-4}{(2\cdot1+2)\cdot(2\cdot1+1)} \cdot a_{2\cdot1}$$

$$a_{2k+2} = a_{2\cdot1+2} = a_4 = \frac{2\cdot2\cdot1-4}{(2\cdot1+2)\cdot(2\cdot1+1)} \cdot a_{2\cdot1}$$

$$a_4 = \frac{4-4}{4\cdot3} \cdot a_2$$

$$a_4 = \frac{0}{12} \cdot (-2) \cdot a_0$$

$$a_4 = 0$$

substituindo na equação, temos:

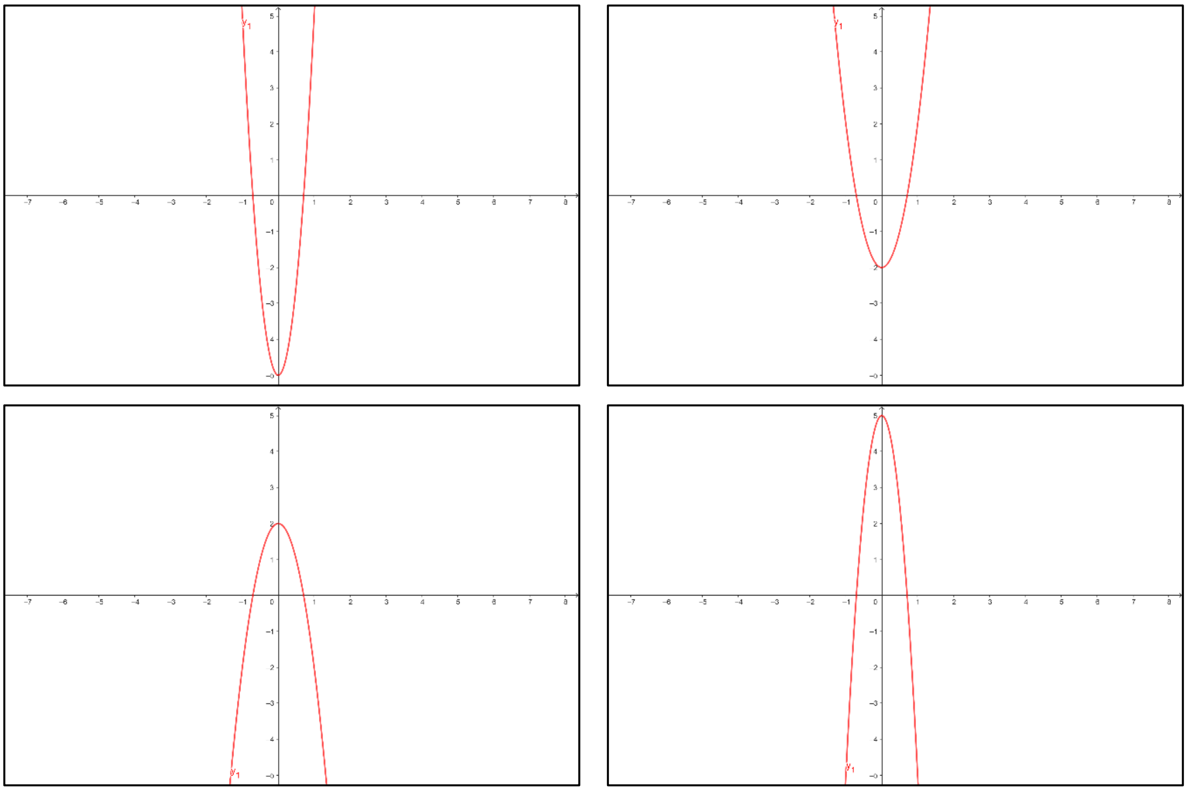
$$y_1(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4$$

$$y_1(x) = a_0 - 2 \cdot a_0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^4$$

colocando o a_0 em evidência

$$y_1(x) = a_0 \cdot (1 - 2x^2)$$

Gráfico 4.2: Representação gráfica de $y_1(x) = a_0 \cdot (1 - 2x^2)$ para $\lambda = 4$, quando $a_0 = -5$, $a_0 = -2$, $a_0 = 2$ e $a_0 = 5$, respectivamente.



Fonte: Elaborado por VAZ, L. S. (2024)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste Trabalho permitiu uma análise aprofundada sobre a relevância das séries de potências na matemática aplicada, especialmente na representação de funções reais e equações diferenciais ordinárias. Através do estudo das séries de Taylor e Maclaurin, foi possível demonstrar como essas ferramentas matemáticas são essenciais na modelagem de fenômenos físicos complexos e na solução de problemas em diversas áreas como física e engenharia.

O trabalho realizado mostrou que as séries de potências não são apenas conceitos teóricos, mas possuem aplicações práticas significativas, como evidenciado na resolução da Equação de Hermite. Este exemplo destacou a importância dessas séries tanto na teoria quanto na prática, reforçando sua utilidade na representação e análise de funções reais.

Além disso, a compreensão e aplicação dos conceitos abordados neste trabalho são fundamentais para o progresso da matemática e suas diversas aplicações. A análise e resolução de equações diferenciais ordinárias através de séries de potências são apenas algumas das muitas aplicações possíveis, demonstrando a versatilidade e indispensabilidade dessas ferramentas matemáticas.

Conclui-se, que este estudo não apenas apresentou os fundamentos teóricos das séries de potências e suas aplicações, mas também exemplificou sua relevância prática, contribuindo para uma melhor compreensão e aplicação desses conceitos na matemática aplicada. O conhecimento adquirido através deste trabalho será de grande valor para futuras pesquisas e aplicações na área de matemática e ciências afins, reafirmando a importância contínua do estudo das séries de potências.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., & MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** (V. de M. Iorio, Trad., 11ª ed.). Rio de Janeiro: LTC, 2020.

LIMA, E. L. **Curso de análise, Vol. 1.** 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SANTOS, R. J. **Introdução às equações diferenciais ordinárias.** Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. Tradução da 7ª edição norte-americana. Tradução por EZ2 Translate. Revisão técnica por Ricardo Miranda Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2013.