



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FILIP NIVALDO DA SILVEIRA MARACAJÁ

BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO EM  $(2 + 1)$  DIMENSÕES

CAMPINA GRANDE  
2024

**FILIP NIVALDO DA SILVEIRA MARACAJÁ**

**BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO EM  $(2 + 1)$  DIMENSÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

**Área de concentração: Relatividade Geral.**

**Orientador: Jean Paulo Spinelly da Silva.**

**CAMPINA GRANDE  
2024**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M299b Maracaja, Filip Nivaldo da Silveira.  
Buraco negro não comutativo em (2+1) dimensões  
[manuscrito] / Filip Nivaldo da Silveira Maracaja. - 2024.  
20 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -  
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,  
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física - CCTS. "

1. Buracos negros. 2. Relatividade geral. 3. Não  
comutatividade. I. Título

21. ed. CDD 530

FILIP NIVALDO DA SILVEIRA MARACAJÁ

BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO EM (2 + 1) DIMENSÕES

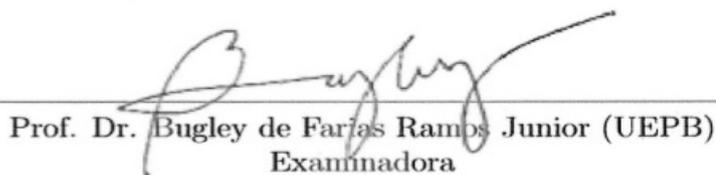
Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

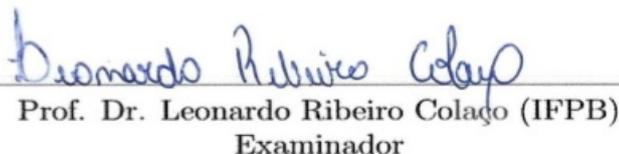
**Área de concentração: Relatividade Geral.**

Aprovada em: 01/07/2024.

**Banca Examinadora**

  
Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva  
Orientador

  
Prof. Dr. Bugley de Farias Ramos Junior (UEPB)  
Examinadora

  
Prof. Dr. Leonardo Ribeiro Colaço (IFPB)  
Examinador

Dedico esse trabalho a Deus e aos meus pais,  
sem eles nada seria possível.

”O universo não foi feito à medida do ser humano, mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente.” **Carl Sagan**

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Buracos Negros</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>10</b>
3.1	Espaço-Tempo Curvo . . . . .	11
3.2	Equações de Campo . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Solução de Buraco Negro em uma Geometria Não Comutativa Tridimensional</b>	<b>13</b>
4.1	Espaço-Tempo Não Comutativo . . . . .	13
4.2	Métrica Anti De Sitter Não Comutativa . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>18</b>
	<b>Referências</b>	<b>19</b>
	<b>Agradecimentos</b>	<b>20</b>

# BURACO NEGRO NÃO COMUTATIVO EM $(2 + 1)$ DIMENSÕES

Filip Nivaldo da Silveira Maracajá<sup>1</sup>

## RESUMO

Este trabalho apresenta a obtenção da métrica de um buraco negro em um espaço-tempo tridimensional não comutativo, considerando a presença da constante cosmológica nas equações de campo de Einstein. Após uma breve revisão sobre buracos negros e relatividade geral, o estudo introduz o conceito de espaço-tempo não comutativo e discute a métrica Anti-de Sitter não comutativa (AdSNC). Através de cálculos detalhados, o trabalho deriva a métrica AdSNC e analisa a existência de horizontes de eventos, característicos de buracos negros. A pesquisa conclui que, para determinados valores da massa, o espaço-tempo AdSNC possui um horizonte de eventos, indicando a presença de um buraco negro. O raio do horizonte aumenta com a massa e diminui com o parâmetro de não comutatividade, sugerindo que a concentração de massa em uma região influencia o tamanho do buraco negro.

**Palavras chave:** Buracos Negros; Relatividade Geral; Não comutatividade.

## ABSTRACT

This work presents the derivation of the metric of a black hole in a three-dimensional noncommutative spacetime, considering the presence of the cosmological constant in Einstein's field equations. After a brief review of black holes and general relativity, the study introduces the concept of noncommutative spacetime and discusses the noncommutative anti-de Sitter metric (AdSNC). Through detailed calculations, the work derives the AdSNC metric and analyzes the existence of event horizons, characteristic of black holes. The research concludes that, for certain values of mass, the AdSNC spacetime has an event horizon, indicating the presence of a black hole. The radius of the horizon increases with mass and decreases with the noncommutative parameter, suggesting that the concentration of mass in a region influences the size of the black hole.

**Keywords:** Black Holes; General Relativity; Noncommutativity.

## 1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) proposta por Einstein em 1915, considerada uma das áreas mais importantes da física moderna, revolucionou nossa compreensão sobre gravidade. Contrastante a visão clássica de Newton, Einstein propôs que a gravidade é resultado da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, e

---

<sup>1</sup>Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

é representada pelo denominado tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$  (Weinberg, 1972; Carmeli, 1982; D’Inverno, 1992; Carrol, 1997).

Pouco tempo após a publicação da TRG, Karl Schwarzschild (1916) resolveu as equações de campo dessa teoria e encontrou o tensor métrico (métrica) que descreve a geometria exterior à uma massa esfericamente simétrica sem rotação. Além de prever fenômenos como o desvio da luz e a precessão do periélio de Mercúrio, essa solução propõe a existências dos chamados buracos negros, que seriam regiões do espaço-tempo em torno da massa onde a curvatura é tão intensa que nada, nem mesmo a luz, poderia escapar. Com o passar dos anos, outros autores como Roy Kerr (1963) e Ezra Newman (1965) também obtiveram soluções que previam esses objetos. Um aspecto importante é que, independentemente da distribuição de matéria e energia que produzem os buracos negros, as métricas associadas são caracterizadas por uma singularidade central, onde as leis da física conhecidas deixam de ser aplicáveis, e um horizonte de eventos, que marca a fronteira além da qual a fuga é impossível.

Na década de 90, buscando unificar a relatividade geral com os princípios da mecânica quântica, Alain Connes (1994) introduziu a ideia de geometrias não comutativas. Essas geometrias surgem de extensões da álgebra tradicional, onde as coordenadas do espaço-tempo não comutam, permitindo a incorporação de efeitos quânticos na estrutura do espaço-tempo. Este avanço possibilita uma descrição mais detalhada e precisa dos fenômenos gravitacionais em escalas extremamente pequenas, como as próximas ao comprimento de Planck, onde a gravidade quântica se torna relevante. Ao desafiar a noção clássica de um espaço-tempo contínuo e suave, as geometrias não comutativas oferecem novas perspectivas para a compreensão das singularidades, como os buracos negros, e a origem do universo.

Neste trabalho, considerando a presença da constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, o nosso objetivo é determinar a geometria espaço-temporal tridimensional e não comutativa, gerada por uma massa puntiforme, conhecida como a métrica de Anti De Sitter não comutativa. Antes, porém, na seção 2 realizaremos uma breve revisão sobre buracos negros e na seção 3 faremos uma abordagem sucinta a cerca de TRG.

Ao longo deste artigo, usaremos o sistema de unidades no qual a constante universal da gravitação,  $G$ , e a velocidade da luz,  $c$ , são iguais a 1, e adotaremos a assinatura  $(+, -, -, -)$  para a métrica.

## 2 Buracos Negros

A história dos buracos negros, um dos elementos mais fascinantes do nosso Universo, começa ainda no âmbito da teoria gravitacional newtoniana com John Michell (1773) e Pierre Laplace (1799) ponderando que, se possível a existência de corpos massivos, chamados de estrelas negras, extremamente densos em nosso Universo, a velocidade mínima para que elementos possam escapar dos campos gravitacionais gerados por esses corpos massivos teria de ser infinita e, portanto, nem mesmo a luz, por sua natureza corpuscular à época, seria capaz de escapar. Tais previsões colapsaram em virtude das comprovações experimentais realizadas por Young que corroboraram para a compreensão da natureza ondulatória da luz (Machado, Tort, 2016). Tempos mais tarde, em dezembro de 1915, um mês após a publicação das equações de Einstein, o

astrofísico Karls Schwarzschild recebera uma cópia do artigo publicado por Einstein sobre a teoria da relatividade geral, apresentando em 1916 a primeira solução exata para as equações tensoriais einsteinianas, trazendo consigo a previsão da existência de elementos semelhantes aos previstos por John Michell e Pierre Laplace (Alberto, 2016; Kolata, 2019), batizados de Buracos Negros por Jhon Wheeler (Thorne, 1995).

### • Vida e Morte Estelar

A idealização teórica dos buracos negros de Schwarzschild tratava-se apenas de previsões matemáticas sem evidências observacionais ou processos físicos que explicassem o surgimento desses elementos no cosmos. Tal problema foi solucionado por Oppenheimer e Snyder em 1939, com a publicação do artigo “On continuous gravitational contraction”, descrevendo o processo o qual estrelas com massas relevantes colapsariam e se tornariam buraco negros (Oppenheimer, Snyder, 1939; Thorne, 1995; Almeida, 2020).

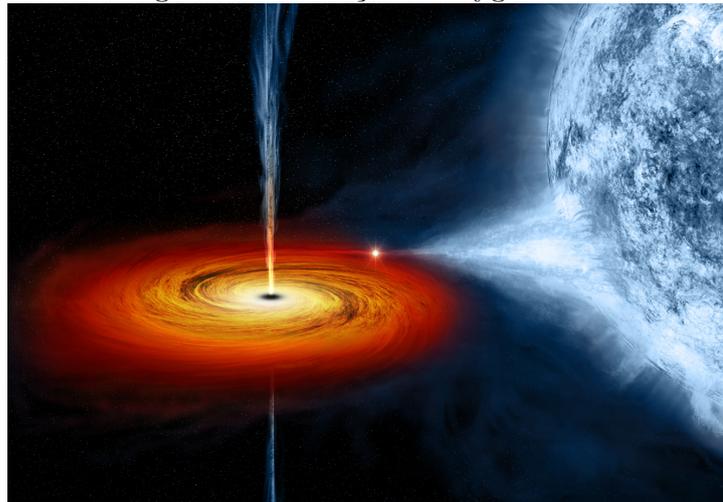
Simplificadamente, o surgimento de estrelas ocorre através do colapso de densas nuvens de gás e poeira interestelar que começam a contrair-se sob a influência de sua própria gravidade. À medida que essa compressão aumenta, a energia potencial da nuvem converter-se-á em calor e a temperatura no núcleo da nuvem aumentará “exponencialmente” dando início a reações nucleares. Uma das consequências diretas desse processo é que a energia liberada nessas reações nucleares acaba por desacelerar o processo de colapso gravitacional atingindo o “equilíbrio hidrostático”. No entanto, como esperado, a temperatura aumentará em função da pressão gravitacional, dando início a reações adicionais as quais, em um tempo finito, encerrarão, pois os recursos energéticos estelares serão consumidos. Nesse momento, o colapso gravitacional continuará aumentando drasticamente a temperatura e a densidade nuclear resultando, de acordo com sua massa solar, em uma explosão de supernova, formando novas estrelas ou buracos negros. Estrelas com massa inicial de até oito massas solares serão, em seu processo final, estrelas anãs brancas; já aquelas que tiverem massas entre oito a vinte e cinco massas solares se tornarão estrelas de nêutrons ou buracos negros (Arany-Prado, 2006; Impey, 2018; Kolata, 2019; Rezzola, 2023).

### • Detecção de Buracos Negros

Estabelecido o arcabouço teórico que prevê a existência de buracos negros, bem como os processos físicos nucleares que possibilitariam estrelas de converterem-se em buracos negros durante o processo de morte estelar, inicia-se uma corrida científica para encontrar evidências sobre a existência de buracos negros. Em 1946, após a Segunda Guerra Mundial, Herbert Friedman e sua equipe iniciaram, pioneiramente, estudos sobre raios-X espaciais, utilizando espectrógrafos levados ao espaço por foguetes V-2 alemães capturados após o fim da guerra. Tempos mais tarde, em 1978, Riccardo Giacconi e sua equipe lançaram o telescópio de raios-X chamado Einstein, revolucionando a compreensão sobre o Universo ao revelar a existência de estrelas de nêutrons e do primeiro sistema binário detectado a conter um buraco negro, chamado de Cygnus X-1, pertencente a constelação Cygnus localizada na Via Láctea. O Cygnus X-1 é um sistema binário onde uma estrela supergigante azul orbita um buraco negro, figuradamente representado na Figura 1 (Arany-Prado, 2006; Impey, 2018; Kolata, 2019; Rezzola, 2023).

Em abril de 2019, décadas após a primeira detecção de buracos negros, Shepard Doleman, astrofísico americano e sua equipe com mais de 200 pesquisadores anunciaram

Figura 1: Ilustração de Cygnus X-1

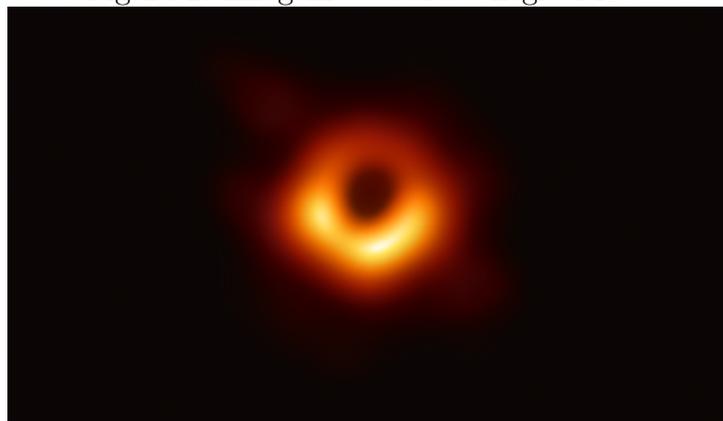


Fonte: [https://chandra.harvard.edu/photo/2011/cygx1/cygx1\\_ill.jpg](https://chandra.harvard.edu/photo/2011/cygx1/cygx1_ill.jpg)

ao mundo um feito aparentemente impossível: fotografar um buraco negro, objeto ao qual nem mesmo a luz consegue escapar de sua intensa gravidade (Impey, 2018; Rezzola, 2023).

A fotografia virtual de um buraco negro, a qual podemos observar na Figura 2, foi realizada pelo projeto histórico Event Horizon Telescope (EHT) - um conjunto de rádios telescópios astronômicos sincronizados e espalhados por todo planeta, virtualmente operando como um único telescópio com dimensões semelhantes às do planeta Terra, o qual mapeou, mediu e processou ondas de rádio emitidas pela galáxia M87, convertendo-as em imagem (Rezzola, 2023).

Figura 2: Imagem do buraco negro M87\*



Fonte:

<https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole>

A imagem retrata a sombra de um buraco negro circundada por um anel de plasma a milhares de graus kelvin colidindo de forma caótica a velocidades extremas e emitindo radiação próximo ao horizonte de eventos do buraco negro supermassivo (6,5 bilhões de massas solares) M87\*, localizado na galáxia de Messier 87, distante 55 milhões de anos-luz da Terra (Impey, 2018).

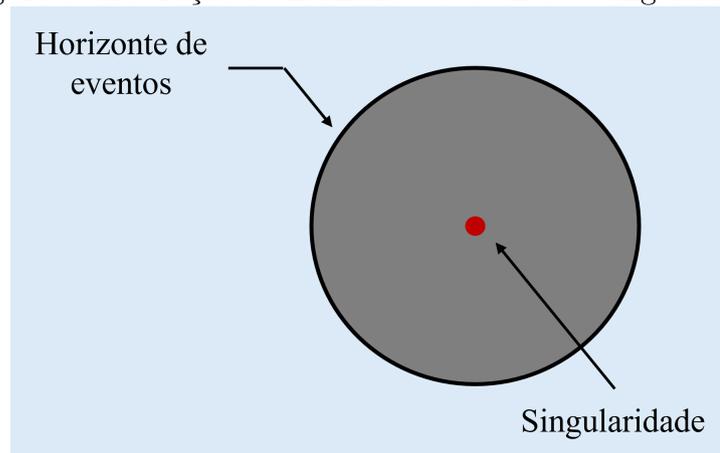
### • Anatomia dos Buracos Negros

A primeira solução exata, para as equações de Einstein, trouxe a previsão teórica da existência de uma quantidade chamada “raio de Schwarzschild”, expressa por

$$r_{sh} = 2M, \quad (1)$$

que associa um determinado raio a objetos massivos. Caso seja possível compactar um objeto, ao ponto de sua circunferência tornar-se menor ou igual a  $r_{sh}$ , esse se comportará como um buraco negro. Portanto, em acordo com as previsões teóricas da solução de Schwarzschild, a medida que o núcleo de uma estrela desmorona no processo de implosão gravitacional, atingindo o valor crítico de densidade associado ao raio de Schwarzschild para o objeto, será formado o Horizonte de Eventos: superfície imaginária esférica e fronteira, onde todas as partículas, radiação ou observadores que a atravessam não poderão mais sair. (Thorne, 1995; Weigert, 2017; Impey, 2018). Após o surgimento do Horizontes de Eventos, que caracterizam de fato o surgimento de buracos negros, o colapso gravitacional continuará até atingir a condição matemática de densidade infinita e volume nulo, chamada, singularidade. Podemos, simbolicamente, representar essas estruturas na Figura 3.

Figura 3: Ilustração do horizonte de eventos e singularidade



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

## 3 Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915, revolucionou nossa compreensão sobre gravidade, espaço e tempo. Uma das principais inovações dessa teoria é a descrição da gravidade como curvatura do espaço-tempo em virtude da presença de massa e (ou energia).

A curvatura espaço-temporal é um conceito que tem sido extensivamente estudada e confirmada por experimentos de alta complexidade, como, por exemplo, a constatação da previsão teórica do desvio da luz em expedição realizada por Eddington e Dyson na cidade de Sobral (Brasil), durante o eclipse de 29 de maio de 1919 (Matsuura, 2019), e a detecção de ondas gravitacionais provenientes de um sistema binário de estrelas de nêutrons (evento GW170817), pelos detectores LIGO e Advanced VIRGO Detectors (Abbott, et al. 2016).

### 3.1 Espaço-Tempo Curvo

No século XVII Isaac Newton propôs a chamada *teoria da gravitação newtoniana*, onde afirmou que dois corpos massivos interagem por meio de uma força atrativa denominada força gravitacional. Segundo ele, quando uma partícula de massa  $m$  é colocada em uma posição  $\vec{r}$  na presença de uma distribuição de massa de densidade  $\rho(\vec{r})$ , essa força é dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}, \quad (2)$$

onde  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$  é o campo gravitacional, sendo  $\Phi(\vec{r})$  o potencial escalar, o qual é solução da equação de Poisson (Symon, 1986),

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}). \quad (3)$$

Um aspecto que vale ser destacado é que essa teoria satisfaz ao chamado *princípio da equivalência*, o qual afirma que, localmente, um campo gravitacional é equivalente a um referencial não inercial. Dito de outra forma, em uma pequena região do espaço, é impossível fazer uma distinção entre o efeito produzido por um referencial não inercial, na ausência da gravitação, e aquele que é gerado por uma distribuição de massa, em um referencial inercial. Outro ponto importante é que a proposta newtoniana só é válida em situações nas quais as velocidades envolvidas são muito menores que a da luz ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s) (Carmeli, 1982).

Com o intuito de sanar esta limitação e elaborar uma teoria relativística da gravitação, Einstein partiu de uma ideia simples: assumiu que mesmo quando as partículas, que se movem na presença de uma certa distribuição, atingem velocidades próximas a da luz, o princípio da equivalência deverá permanecer válido.

Em uma teoria relativística, um observador utiliza um diagrama quadridimensional de espaço-tempo para localizar os *eventos físicos*. Se o observador for inercial, o espaço-tempo será plano e o intervalo infinitesimal entre dois pontos pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (4)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  é o tensor métrico de Mikowski e  $x^\mu = (t, x, y, z)$  são as coordenadas cartesianas. Por outro lado, se for não inercial, a distância infinitesimal será a mesma mas não poderá ser expressa como a soma dos quadrados das diferenciais das coordenadas. Na verdade, o referido intervalo será dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (5)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico, o qual é função das coordenadas curvilíneas  $x^\mu$ , semelhantemente ao que acontece em um espaço-tempo curvo. Contudo, podemos sempre encontrar uma transformação de coordenadas que leve a equação (5) à forma (4) e, por conta disso, dizemos que a geometria do espaço-tempo de observador não inercial também é plana.

Diante do exposto, podemos afirmar que os diagramas quadridimensionais associados aos observadores inercial e não inercial são caracterizados pelos tensores  $\eta_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ , respectivamente. Partindo desse entendimento e considerando que o princípio da equivalência é válido para casos relativísticos, Einstein propôs que, de forma equivalente

ao que acontece em um referencial não inercial (campo de inércia), a gravitação é um desvio na métrica do espaço-tempo plano (métrica de Minkowski), sendo representada por  $g_{\mu\nu}$ . Segundo ele, essa métrica não é fixada arbitrariamente como acontece na relatividade especial, mas depende da distribuição de matéria local. Além disso, diferentemente do que acontece em um referencial não inercial, um campo gravitacional não pode ser eliminado globalmente por meio de uma transformação de coordenadas, e sua métrica só poderá ser reduzida à forma de Minkowski numa região finita do espaço (Carmeli, 1982).

## 3.2 Equações de Campo

Uma vez que o tensor  $g_{\mu\nu}$  é simétrico, a teoria de Einstein necessita de 10 equações para descrever o campo gravitacional associado a uma determinada configuração de massa e energia. Além do mais, como a teoria newtoniana é válida para os casos em que as velocidades são baixas comparadas com a da luz, no limite de campo fraco as equações da TRG devem concordar com a de Poisson. Dito de outra forma, quando a aceleração de uma partícula, produzida por uma distribuição de massa e energia, não for suficiente para que ela atinja velocidades próximas a da luz, as teorias relativísticas e não relativísticas devem coincidir.

Por conta disso, o lado esquerdo das equações deve conter derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico, em analogia ao operador Laplaciano no campo de potencial  $\Phi$ ; enquanto que o lado direito deve ser dado por um objeto que descreva a quantidade de matéria e energia presentes, de forma semelhante à densidade  $\rho$ .

Entendendo que, em uma teoria relativística, o conteúdo de matéria e energia é dado pelo tensor energia momento,  $T_{\mu\nu}$ , o qual satisfaz a equação de continuidade, e que, em um espaço-tempo curvo, o tensor expresso em termos de derivadas segundas do campo é o de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}, \quad (6)$$

Einstein concluiu que o tensor métrico deve ser solução das equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Nas equações acima,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g x^{\lambda}} \right) \quad (8)$$

são os símbolos de Christoffel,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é o chamado escalar de Ricci e  $\kappa = 8\pi$  (Carmeli, 1981; Carrol, 1987).

- Constante Cosmológica

Em 1917 Einstein propusera um modelo cosmológico derivado da TRG para um universo estático. Sua proposta para explicar como corpos celestes permaneciam estáveis gravitacionalmente perpassara, com razoável aproximação, por um universo homogêneo para descrever como a distribuição de matéria e geometria do espaço-tempo dar-se-á sob condições de equilíbrio do Universo einsteiniano. Sua conjectura sobre a homogeneidade do universo foi satisfeita ao implementar um fator numérico ( $\Lambda$ ) que fisicamente simboliza um elemento de repulsão gravitacional anulando a atração que deveria colapsar o

universo einsteiniano gravitacionalmente. Por não haver instrumentos e experimentos que pudessem corroborar com a inserção de um fator que, para um universo estático, garantiria a estabilidade gravitacional dos corpos massivos, o meio encontrado por Einstein, à época, simbolizara apenas um mero artifício matemático para adequar suas equações de campo ao modelo de Universo estático. Este fator foi nomeado de “constante cosmológica” ( $\Lambda$ ) onde as equações de campo da TRG tomaram a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Ainda em 1917, a proposta cosmológica de Universo relativístico concebida por Einstein torna-se objeto de estudo de Willem De Sitter (1872 – 1934), levando-o a propor um novo modelo de cosmos com constante cosmológica  $\Lambda > 0$  e tensor energia-momento  $T_{\mu\nu} = 0$ , conhecido como Universo De Sitter. O Universo De Sitter, diferentemente do modelo einsteiniano, preconiza um universo dinâmico (em expansão) sem presença de matéria (ou energia) onde galáxias representam corpos de prova neste Universo, possuindo em comum a constante cosmológica do modelo einsteiniano.

## 4 Solução de Buraco Negro em uma Geometria Não Comutativa Tridimensional

A relatividade geral descreve e explica a natureza da gravidade como propriedade geométrica do espaço-tempo quadri-dimensional na presença de corpos massivos ou qualquer forma de energia. Contudo, em casos específicos, é útil, seja por permitir um tratamento matemático menos laborioso ou por permitir explorar e ressignificar sistemas físicos, estudar como estes sistemas se comportam em dimensões reduzidas. Nesta seção, determinaremos a geometria gerada por uma “massa puntiforme” localizada na origem, em uma geometria tridimensional (duas espaciais e uma temporal) não comutativa. Nosso propósito é encontrar uma solução que corresponda à métrica Anti De Sitter (AdS) quando o parâmetro de não comutatividade for nulo. Por conta disso, resolveremos as equações de Einstein com a constante cosmológica negativa.

### 4.1 Espaço-Tempo Não Comutativo

O espaço-tempo não comutativo presente na teoria da relatividade geral é um conceito interessante e desafiador que vai de encontro à visão clássica do espaço-tempo como uma estrutura contínua e suave. A motivação para a investigação dessa abordagem vem da busca por uma compreensão dos fenômenos em escalas extremamente pequenas, onde os efeitos quânticos se tornam relevantes e as diferenças entre a relatividade geral e a mecânica quântica se tornam evidentes. Os primeiros estudos nesse campo foram realizados por uma equipe notável de físicos e matemáticos que exploraram as implicações da não comutatividade na descrição do espaço-tempo.

Um dos líderes na pesquisa sobre o espaço-tempo não comutativo na relatividade geral foi o cientista John Madore, cuja contribuição fundamental estabeleceu os fundamentos teóricos para a compreensão dessa abordagem (Madore, 1992). Madore elaborou uma estrutura matemática utilizando álgebra não comutativa para descrever o espaço-tempo

em escalas extremamente diminutas, onde as coordenadas do espaço-tempo não obedecem à propriedade de comutatividade.

Além disso, o importante papel desempenhado pelo estudioso Alain Connes foi fundamental na introdução da geometria não comutativa no campo da física teórica, proporcionando uma perspectiva inovadora acerca da essência do espaço-tempo quântico (Connes, 1994). Suas pesquisas foram responsáveis por estabelecer as conexões entre a álgebra não comutativa e a geometria diferencial, abrindo caminho para uma compreensão aprofundada das estruturas geométricas presentes em espaços não comutativos.

Um outro valioso colaborador para o domínio foi o cientista da física Nathan Seiberg, que, em conjunto com Edward Witten, concebeu a hipótese das variedades não comutativas e estudou as suas consequências para a física de partículas e para a gravidade quântica (Seiberg e Witten, 1999). Seiberg e Witten provaram como a teoria das variedades não comutativas pode surgir de forma natural a partir de teorias de campo em dimensões mais elevadas, proporcionando assim uma nova perspectiva acerca da relação entre geometria e física.

Do ponto de vista formal, a não comutatividade é incluída quando promovemos as coordenadas  $x^\mu$  e  $x^\nu$  ao nível de operadores hermitianos  $\hat{x}^\mu$  e  $\hat{x}^\nu$ , de tal maneira que:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (10)$$

onde  $\Theta^{\mu\nu}$  são as componentes de uma matriz real anti-simétrica constante, com dimensão de área, e  $\mu\nu = (0, 1, 2, \dots, D - 1)$ , em que  $D$  é a dimensão do espaço-tempo (Fresneda, 2008).

Essa não comutatividade nos leva a uma relação de incerteza, dada por:

$$(\Delta x^\mu)^2 (\Delta x^\nu)^2 \geq \left( \frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2, \quad (11)$$

ou ainda,

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |(\Theta)^{\mu\nu}|. \quad (12)$$

Consequentemente, devido o fator de não comutatividade,  $\Theta^{\mu\nu}$ , presente na equação acima, dizemos que a ideia de ponto não faz sentido. Na verdade, quanto maior for a precisão na medida de uma coordenada, mais imprecisas serão as medições das outras. Sendo assim, é impossível medirmos com precisão a posição de uma partícula.

## 4.2 Métrica Anti De Sitter Não Comutativa

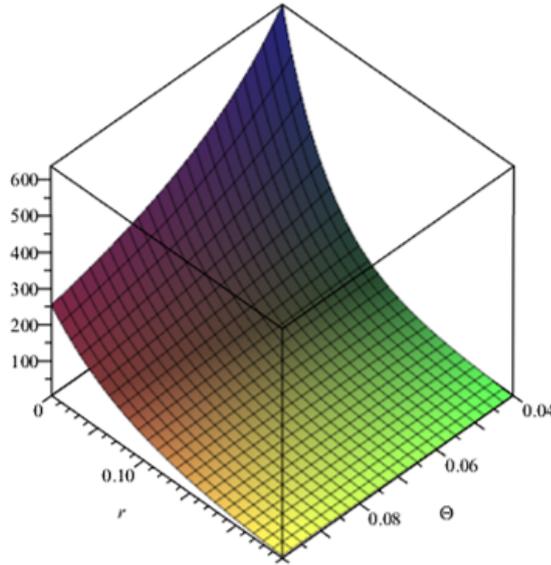
Em virtude do princípio de incerteza, dado pela equação (12), em uma geometria não comutativa um ponto é visto como um “borrado”. Sendo assim, nesse tipo de espaço-tempo, a densidade associada a uma massa puntiforme deve ser representada por uma distribuição circularmente simétrica que, no limite em que o parâmetro da não comutatividade é nulo, se comporta como um delta de Dirac.

Logo, seguindo esse critério, assumiremos que a referida massa é descrita pela distribuição (Liang e Liu, 2012):

$$\rho_\Theta(r) = \frac{M\sqrt{\Theta}}{2\pi(r^2 + \Theta)^{3/2}}, \quad (13)$$

onde  $M$  é a massa espalhada e  $\Theta$  é o parâmetro da não comutatividade. Embora não seja única, essa distribuição torna-se uma delta de Dirac quando tomamos o limite  $\Theta \rightarrow 0$ . De fato, conforme vemos na Figura 4, a medida que reduzimos o valor de  $\Theta$ , a função torna-se cada vez mais concentrada e elevada na origem ( $r = 0$ ). Além do mais, independente do valor do parâmetro  $\Theta$ , a integral dessa função sobre todo o espaço resulta em  $M$ .

Figura 4: Comportamento da função  $\rho_\Theta$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

Para resolvermos as equações de Einstein e, por consequência, encontrarmos a deformação do espaço-tempo gerada por (13), devemos escrever a métrica de maneira que ela se adapte à simetria da distribuição. Por essa razão, admitiremos que o elemento de linha que descreve o espaço-tempo em questão é circularmente simétrico, isto é,

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\varphi^2, \quad (14)$$

ou ainda

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (15)$$

onde  $x^\mu = (t, r, \varphi)$  e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Utilizando as componentes covariantes do tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ , dadas pela equação (16), e lembrando que as contravariantes,  $g^{\mu\nu}$ , são as componentes da inversa dessa matriz, vemos que os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{A'}{B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad (17)$$

em que a “linha” é uma representação da derivada com relação a  $r$ . Então, usando essas expressões em (6), temos que as componentes não-nulas do tensor de Ricci são:

$$R_{00} = \frac{1}{4AB^2r} [2rAA''B - rB(A')^2 - rAA'B' + 2AA'B] , \quad (18)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4A^2Br} [-2rABA'' + rB(A')^2 + rAA'B' + 2A^2B'] \quad (19)$$

e

$$R_{22} = \frac{r}{2AB^2} [-A'B + AB'] . \quad (20)$$

O que nos permite concluir que o escalar de Ricci é

$$R = \frac{1}{2A^2B^2r} [2rAA''B - rB(A')^2 - rAA'B' + 2AA'B - 2A^2B'] . \quad (21)$$

Assim, fazendo  $\mu = \nu = 0$  e  $\mu = \nu = 1$  em (9) e usando os resultados acima, chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\frac{1}{2} \frac{B'}{B^2r} - \Lambda = \kappa T_0^0 \quad (22)$$

e

$$-\frac{1}{2} \frac{A'}{ABr} - \Lambda = \kappa T_1^1 . \quad (23)$$

Embora a hipótese de uma métrica que possui simetria circular tenha nos permitido escrever o lado esquerdo das equações de Einstein, as expressões acima deixam claro que ainda precisamos conhecer, pelo menos, as componentes  $T_0^0$  e  $T_1^1$  do tensor energia-momento. Caso contrário, não seríamos capazes de encontrar  $A(r)$  e  $B(r)$  e, por conseguinte, determinar a geometria.

Para encontrarmos a forma do tensor  $T_\nu^\mu$  devemos usar o fato que, devido à simetria, a métrica não comutativa deve possuir a propriedade  $g_{00} = -1/g_{11}$ , assim como acontece no caso usual ( $\Theta = 0$ ). Levando esse fato em consideração e usando a conservação da energia, a qual é expressa pela equação

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu T^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_\mu^\alpha = 0, \quad (24)$$

obtemos:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho_\Theta, \rho_\Theta, \rho_\Theta + r\partial\rho_\Theta) . \quad (25)$$

Uma vez que, em  $(2 + 1)$  dimensões, a relatividade geral não possui um limite newtoniano, não há um valor específico que devemos atribuir à constante  $\kappa$ . Então, diante dessa liberdade de escolha, tomaremos arbitrariamente  $\kappa = 2\pi$ . Se além disso considerarmos que a constante cosmológica é negativa, ou seja,  $\Lambda = -l^{-2}$ , a utilização de (25) na equação (22) nos levará ao seguinte resultado:

$$B(r) = \left[ \frac{1}{B(0)} - 2M \left( 1 - \sqrt{\frac{\Theta}{r^2 + \Theta}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \right]^{-1} . \quad (26)$$

No limite em que  $\Theta \rightarrow 0$ , a expressão acima deverá concordar com aquela que seria obtida no caso em que a geometria é comutativa. Logo, para que isto aconteça, devemos tomar  $B(0) = 1/M$ , o que nos leva à

$$B(r) = \left[ -M \left( 1 - \sqrt{\frac{\Theta}{r^2 + \Theta}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \right]^{-1}. \quad (27)$$

De posse deste resultado, partiremos agora para a determinação de  $A(r)$ . À princípio, para obtermos tal coeficiente, poderíamos substituir (27) em (23) e efetuar mais uma integração. Porém, esse procedimento nos levaria à cálculos tediosos. Também poderíamos encontrar  $A(r)$  a partir da resolução da equação diferencial que surge após subtrairmos (23) de (22), que, inclusive, é um procedimento mais simples. Assim, com o intuito de simplificarmos os cálculos, seguiremos a segunda opção. Fazendo isso, obtemos:

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \ln(AB) = 0 \Rightarrow A = \frac{\chi}{B}, \quad (28)$$

sendo  $\chi$  uma constante de integração. E, como consequência, temos

$$A(r) = \chi \left[ -M \left( 1 - \sqrt{\frac{\Theta}{r^2 + \Theta}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \right]. \quad (29)$$

Finalmente, substituindo (27) e (28) em (14) e efetuando a redefinição  $t \rightarrow t/\sqrt{\chi}$  na variável temporal, encontramos

$$ds^2 = \left[ -M_{\Theta}(r) + \frac{r^2}{l^2} \right] dt^2 - \left[ -M_{\Theta}(r) + \frac{r^2}{l^2} \right]^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2, \quad (30)$$

onde

$$M_{\Theta}(r) = 2\pi \int_0^r \rho_{\Theta}(r) r dr = M \left( 1 - \sqrt{\frac{\Theta}{r^2 + \Theta}} \right) \quad (31)$$

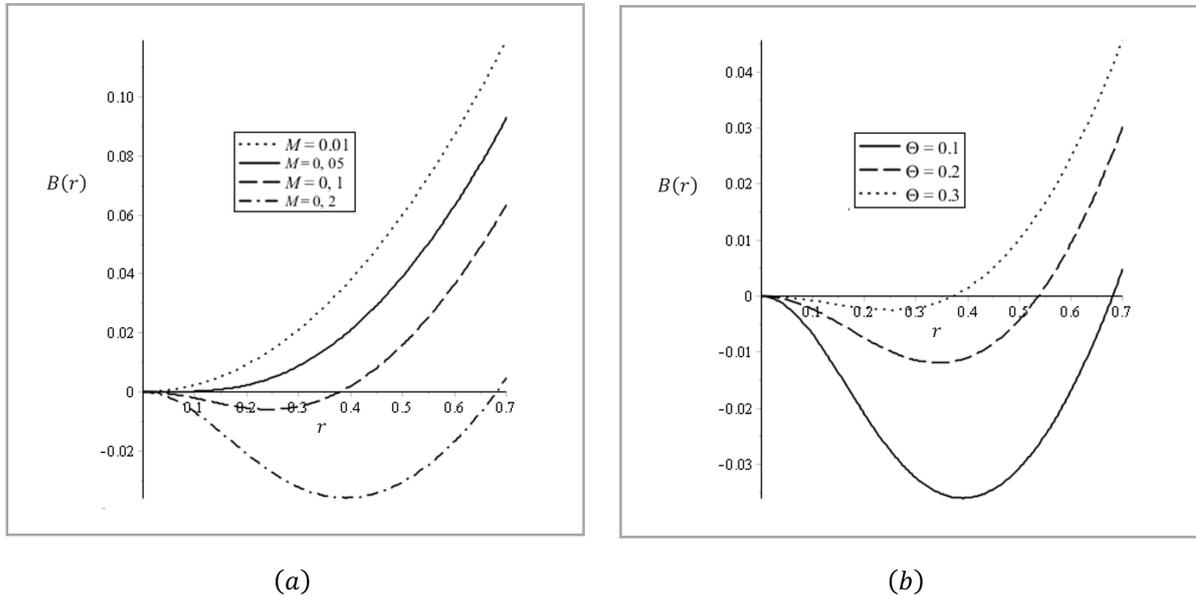
é a massa espalhada em um “disco” de raio  $r$ . Podemos observar que, no limite em que  $\Theta \rightarrow 0$ , este elemento de linha corresponde aquele que descreve o espaço-tempo anti De Sitter. Sendo assim, denotaremos este resultado por solução anti De Sitter não comutativa (AdSNC).

### • Horizonte de Eventos

Nosso objetivo agora é verificar se esta solução descreve um buraco negro. Para tanto, analisaremos a situação na qual  $B(r) = 0$ , condição que caracteriza a existência do horizonte de eventos. Contudo, devido a forma da equação que surge ao impormos essa condição, ao invés de realizarmos uma abordagem algébrica, faremos uma discussão numérica à partir do comportamento da função  $B(r)$ .

Conforme podemos ver no gráfico da Figura 5(a), para determinados valores da massa,  $M$ , o espaço-tempo AdSNC possui um horizonte. Na verdade, ao fixarmos os valores dos parâmetros  $\Theta$  e  $l$ , temos que, a partir de um valor mínimo da massa sempre haverá um horizonte e, por consequência, um buraco negro. Também observamos que quanto maior for a massa maior será o raio do buraco negro. Por outro lado, a partir da Figura 5(b), podemos perceber que, fixando os valores de  $M$  e  $l$ , o raio do horizonte diminuirá ao aumentarmos o valor de  $\Theta$ . Isto indica que, quanto maior for a influência da não comutatividade, menor será o buraco negro.

Figura 5: (a) Comportamento da função  $B(r)$  para alguns valores de  $M$ , considerando  $\Theta = 0.1$  e  $l = 2$ . (b) Comportamento da função  $B(r)$  para alguns valores de  $M$ , considerando  $\Theta = 0.1$  e  $l = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024.

## 5 Conclusão

Neste trabalho, com o intuito de compreender o papel da não comutatividade na curvatura de um espaço-tempo, resolvemos, nesse tipo de geometria e em  $2 + 1$  dimensões, as equações de Einstein, com constante cosmológica negativa, para uma distribuição de massa constituída por uma única partícula.

Para incluirmos a não comutatividade, assumimos que a partícula, outrora representada por uma densidade de massa proporcional à delta de Dirac, deve ser descrita por uma função de  $r$  que, na situação particular na qual a geometria é comutativa, deverá corresponder à delta.

Seguindo esse procedimento chegamos à chamada métrica anti de Sitter não comutativa e observamos que, a partir de um determinado valor da massa, haverá sempre um horizonte de eventos, indicando a presença de um buraco negro. Também percebemos que o raio do horizonte aumenta com a massa do buraco negro e diminui com o parâmetro de não comutatividade. Esse resultado sugere que a concentração de massa em uma região influencia diretamente o tamanho do buraco negro, sendo a não comutatividade um fator que restringe esse crescimento.

Concluimos esse artigo afirmando que os resultados apresentados corroboram a ideia de que a não comutatividade desempenha um papel crucial na física de buracos negros, oferecendo uma nova perspectiva para a compreensão da estrutura do espaço-tempo em escalas quânticas. No entanto, este estudo é apenas um passo inicial na exploração das implicações da não comutatividade na relatividade geral. Outras pesquisas podem investigar, por exemplo, a termodinâmica de buracos negros não comutativos e a estabilidade da métrica AdSNC. Além disso, como não há nenhuma condição que restrinja o comportamento da função que descreve a densidade de massa, esse estudo pode ser

realizado para outras distribuições.

## REFERÊNCIAS

ALBERTO, S. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild.** Disponível: em <https://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0191>. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº4, e4201 (2016).

ARANY-PRADO, Lilia Irmeli. **À luz das estrelas.** 2. ed. Edição da autora, 2017.

ASCHIERI, P. et al. **Noncommutative Gravity.** Classical and Quantum Gravity, v. 22, n. 12, p. 3571-3592, 2005.

CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.** Capa dura. 650 páginas. Inglês. Wiley–Blackwell, 1982. ISBN: 0 – 471 – 86437 – 4.

CARROL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity.** San Francisco: University of California, 1997.

CONNES, A. **Noncommutative Geometry.** New York: Academic Press, 1994.

D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's Relativity.** 1st edition. Oxford University Press, New York, 1992.

IMPEY, Chris. **Einstein's Monsters: The Life and Times of Black Holes.** W.W. Norton Company, 2019.

KOLATA, James J. **Neutron Stars, Black Holes and Gravitational Waves.** Morgan Claypool Publishers, 2019.

MACHADO, R. R.; TORT, A. C. **Michell, Laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do Ensino Médio.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, n. 2, e2314, 2016.

MATSUURA, Oscar T. **O eclipse de Sobral e a deflexão gravitacional da luz predita por Einstein.** Khronos, Revista de História da Ciência, n. 7, p. 81-139, 2019. Disponível em: <http://revistas.usp.br/khronos>. Acesso em: 28 jun. 2024.

OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. **On Continued Gravitational Contraction.** Physical Review, v. 56, n. 5, p. 455-459, 1 set. 1939.

REZZOLLA, Luciano. **The Irresistible Attraction of Gravity: A Journey to Discover Black Holes.** Cambridge University Press, 2023.

SCHWARZSCHILD, K. **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.** Sitzungsberichte der Königlich Preussischen. Berlin:

Akademie der Wissenschaften, vol. , p. 189-196. 1916.

SEINBERG, N. e WITTEN E. **String theory and noncommutative geometry**. JHEP, vol. 1999, n<sup>o</sup>4 (1999).

SYMON, Keith R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1996.

THORNE, Kip S. **Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy**. New York: W.W. Norton Company, 1995.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology**. Inglaterra: John Wiley, 1972.

WEIGERT, Davi. **A Grandeza do Universo: do Big Bang ao Buraco Negro**. 5. ed. Curitiba, PR, 2017.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e a Jesus Cristo por me concederem força, sabedoria e perseverança para concluir este trabalho.

Agradeço aos meus pais, Nivaldo e Elizabeth, e familiares, pelo apoio incondicional, amor e incentivo em todos os momentos da minha jornada acadêmica.

Sou profundamente grato ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Spinelly, por sua paciência, humanidade e ensinamentos valiosos que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) por me proporcionar um ambiente de aprendizado e crescimento, e a todos os professores e orientadores que contribuíram para minha formação acadêmica e desenvolvimento intelectual.