UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATÉMATICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TIAGO ALMEIDA ROCHA

O MÉTODO DE NEWTON E SUAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2024

TIAGO ALMEIDA ROCHA

O MÉTODO DE NEWTON E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matématica.
Área de concentração: Área de concentração: Cálculo

Orientador: Prof. Dr. Israel Buriti Galvão

CAMPINA GRANDE
2024

R672m Rocha, Tiago Almeida.
O Método de Newton e suas aplicações [manuscrito] / Tiago Almeida Rocha. - 2024.
38 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação : Prof. Dr. Israel Buriti Galvão, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA. "

1. Método de Newton . 2. Derivada . 3. Coeficiente angular . I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Pfeyffemberg de M. Guimarães - CRB - 15/1020 BC/UEPB

TIAGO ALMEIDA ROCHA

MÉTODO DE NEWTON E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matématica.

Aprovado em: 04/07/2024.

BANCA EXAMINADORA

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Onildo dos Reis Freire

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Adailson Ribeiro da Silva

Prof. Me. Adailson Ribeiro da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico ao meu grande Deus e a toda a minha família e amigos que me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por ter permitido chegar até aqui, foi minha força em momentos de extrema dificuldade, tudo devo a Ele.

A minha família que me apoiou nessa jornada, em especial a minha mãe e pai, minha irmã, os quais foram fundamentais na minha formação.

A aos meus grandes amigos que estiveram comigo em toda a jornada, Mery que não me deixava desistir, a Ulisses que mesmo de longe, me fazia me sentir especial e ao meu amigo irmão Jackson que ficava me agoniado e dizendo que eu não ia desistir, que era capaz. A todos eles, o meu eterno agradecimento.

A minha terapeuta Thayse Lissa, a quem devo muita coisa, principalmente a me ajudar a superar a mim mesmo, e me ver como alguém capaz de lutar e conseguir realizar um dos meus maiores sonhos que tinha desde a infância, e além de tudo, me fez enxergar que poderia ser um grande profissional, pois carrego dentro de mim um grande amor pela profissão.

Por último, e tão importante quanto os outros, quero deixar o meu eterno agradecimento ao professor Israel, o qual foi fundamental para a conclussão deste trabalho, que ao olhar para mim, dizia, ”termine homem, só falta isso, vai perder o curso não”.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo mostrar a importância do Método de Newton, desde sua origem,procedência e uso no cotidiano na resolução diversos problemas. Do mais básico, a exemplo de como encontrar as raízes de uma função de quatro grau, até algo mais complicado, como encontrar a localização de um planeta ou de um submarino. Fica evidente sua eficiência em solucionar problemas. No entanto, mesmo se tratando de algo simples, se os cálculos fossem realizados à mão, nos dariam muito trabalho e teríamos uma grande probabilidade de obtemos erros. Por isso, o avanço da tecnologia foi fundamental para o aperfeiçoamento da aplicabilidade do método, como poderá ser visto no Apêndice A, onde se usa a linguagem de programação Python para resolver todas as aplicações realizadas manualmente no trabalho.

Palavras-chave: método de newton; derivada; coeficient angular.

ABSTRACT

The present work aims to present the importance of Newton's Method, from its origin, how it proceeds, and how it can be used in everyday life to solve various problems, from the most basic, such as how to find the roots of a function of four degrees, up to something more complicated, like finding the location of a planet or a submarine. During the work, it becomes clear how efficient he is at solving problems, however, even though it is something simple, if the calculations were done by hand they would require a lot of work and would have a high probability of presenting errors, which is why the advance of technology was fundamental for improving the applicability of the Method, as can be seen in Appendix A, where a Python programming language is used to solve all applications carried out manually in the work.

Keywords:newton's method; derivative; slope.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Método de Newton, frequentemente referido como Método de Newton-Raphson, é um dos algoritmos mais poderosos e eficientes para encontrar aproximações de raízes (ou zeros) de uma função real. Este método é uma peça central na análise numérica, um campo da matemática dedicado a métodos algorítmicos para resolver problemas matemáticos de maneira aproximada, o que é crucial em um mundo onde muitos problemas não podem ser resolvidos de forma exata.

O método de Newton é um algoritimo matemático muito eficiente para se encontrar as raízes de uma equação $f(x) = 0$, já que seria muito trabalhoso encontrar uma solução para uma equação de grau mais elevado. Por exemplo, para um polinômio de grau 100, iria levar muito tempo e cálculos para realizar tal atividade. Portanto, nesta tarefa o método vem como uma grande solução, pois ele é responsável por produzir uma sequência de aproximações que tendem para a solução. O primeiro passo para a utilização correta, é escolhermos o primeiro número, x_0 da sequência. A partir daí, sob circunstâncias favoráveis, o método vai se encarregar do processo, que consiste em ir testando raízes, até que o gráfico f cruze o eixo dos x. A cada teste, o método aproxima uma raiz f, utilizando a raiz de uma de suas linearizações.

A origem do método remonta ao século XVII, atribuída a Isaac Newton e Joseph Raphson. Newton, um dos mais influentes cientistas de todos os tempos, inicialmente desenvolveu o método como parte de seu trabalho seminal em cálculo, embora não tenha sido publicado imediatamente. Joseph Raphson, um matemático menos conhecido, publicou uma versão simplificada e mais clara do método em 1690, que acabou por facilitar sua adoção e entendimento subsequentes.

O Método de Newton é baseado no princípio de que uma função contínua pode ser aproximada por uma linha tangente em pontos suficientemente próximos a uma raiz. Este método usa a derivada da função para prever a localização da raiz a partir de uma suposição inicial. Através de iterações sucessivas, o método refina essa suposição inicial, convergindo rapidamente para uma solução aproximada, sob condições adequadas.

A contribuição de Newton para o desenvolvimento do cálculo e, por extensão, para métodos como o Newton-Raphson, é inestimável. Ele não apenas revolucionou a maneira como entendemos o universo físico, mas também forneceu as ferramentas matemáticas para avançar em outras ciências e engenharias.

Este trabalho explora a mecânica e a teoria subjacente ao Método de Newton, analisa sua eficácia e limitações, e discute sua relevância contínua em várias aplicações matemáticas e científicas modernas. Através da implementação prática e análise de casos, busca-se demonstrar como este antigo método ainda se mantém como uma ferramenta indispensável na resolução de problemas matemáticos e em questões do cotidiado.

2 Conceito de coeficiente angular e derivada.

Sabemos dos cursos de cálculo diferencial que o coeficiente angular de uma reta é um valor que determina a inclinação que a reta tem em relação ao eixo das abscissas. O seu valor pode ser encontrado na equação reduzida da reta, que seria o valor que multiplica a variável independente x, ou pela fórmula $m = \text{tg } \alpha$. A partir daí vamos entender o que seria o coeficiente angular para uma curva qualquer em um ponto P.

Para os círculos, a tangência é simples. Seja r uma a reta tangente, l é tangente a um círculo em um ponto P se L passa por P perpendicularmente ao raio em P (Figura 1).

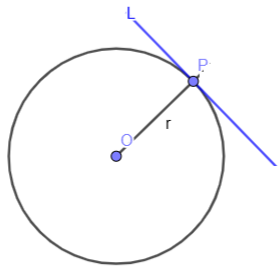

Figura 1 – Reta tangente ao círculo no ponto P

Para determinar o coeficiente angular de uma curva qualquer $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$, é dada por:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

A expressão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \neq 0$$

é chamada de quociente da diferença em x_0 com incremento em h. Se o quociente da diferença tiver um limite à medida que h se aproxima de zero, esse limite será chamado de de derivada de f no ponto x_0.

A derivada de uma função f em um ponto x_0, denotada por $f'(x)$, é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Agora vamos tomar a derivada como uma função deduzida de f, considerando o limite em cada ponto de x no domínio f.

Usamos a notação $f(x)$ na definição para enfatizar a variável independente x em relação à qual a função derivada $f'(x)$ está sendo definida. O domínio de $f'(x)$ é o conjunto de pontos no domínio de $f(x)$ para os quais o limite existe, o que significa que esse domínio pode ser o mesmo ou menor que o domínio de $f'(x)$. Se $f'(x)$ existe em um determinado ponto x, dizemos que $f(x)$ é derivável (tem uma derivada) em x. Se $f'(x)$ existe em cada ponto no domínio de $f(x)$, chamamos $f(x)$ de derivável.

Se escrevermos $(z = x + h)$, então $h = z - x$, logo h se aproximará de 0 se, e somente se, z se aproximar de x. Portanto, uma definição equivalente da derivada é apresentada a seguir.

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x.}$$

Às vezes, é mais conveniente usar essa fórmula ao calcular uma função derivada (chamaremos de fórmula alternativa).

Diante do conceito de derivada que foi apresentado, vamos calcular a derivada da função $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, usando a definição.

Como vamos usar a definição para encontrar o valor da derivada de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, então vamos ter que usar $f(x+h)$ e, em seguida subtrair $f(x)$ para obter o numerador do quociente da diferença. Logo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x-1} \\
f(x+h) &= \frac{x+h}{(x+h)-1} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} . \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} . \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} \\
f'(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Neste outro exemplo vamos calcular derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para $(x > 0)$, usando a fórmula alternativa.

Então, temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\\
&= \lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}\\
&= \lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{z\to x}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos calcular a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ em $x = 4$.

Logo temos que $f'(x)$, já foi calculada no exemplo anterior, o que vamos realizar agora, é so substituir o valo de x, na função $f'(x)$, portanto o coeficienta angular da reta é dado por:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{4}}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Logo, a equação da reta tangente que passa pelo ponto (4,2) é dada por $\frac{1}{4}$, é:

$$
\begin{aligned}
y &= 2+\frac{1}{4}(x-4)\\
&= \frac{1}{4}x+1.
\end{aligned}
$$

3 Método de Newton

Para entender como funciona o método, vamos primeiramente demonstrar de forma generalizada. Inicialmente vamos tomar um x_0, onde este pode ser determinado graficamente ou por uma dedução. Temos que o método vai usar a tangente à curva $y = f(x)$ em x_0, para aproximar a curva, em seguida, chamamos de x_1, o ponto onde a tangente cruza o eixo x (figura 1) x_1, geralmente é uma aproximação melhor da solução do que x_0. O ponto x_2, onde a tangente a curva x_1, f_1, cruza o eixo x, é a próxima aproximação. Desta forma, vamos continuar usando as aproximações sucessivas até que chegamos perto o mais próximo da raiz, e assim possamos parar

A partir do que foi exposto, podemos deduzir uma fórmula para gerar as aproximações sucessivas.

Como pode ser visto na figura 1, temos que o quociente de Newton é obtido a partir de tangente, Para determinar a $\operatorname{tg}\theta$ temos que revisitar o conecito de derivadas, temos na figura 1

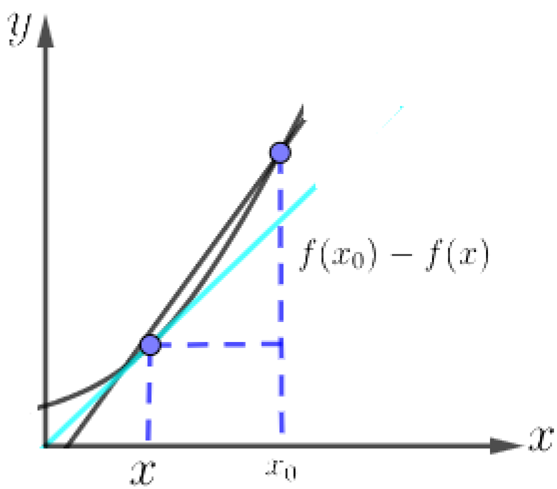

Figura 1 – Tangente.

Então:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta &= \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \operatorname{tg}\theta &= \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Rightarrow \\
\Rightarrow (x_0 - x).f'(x_0) &= f(x_0) - f(x) \\
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) - (x_0 - x).f'(x_0) \\
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Quando (3.1) cruza o eixo x, significa que $f(x) = 0$, daí:

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) \\
-f(x_0) &= (x - x_0).f'(x_0) \\
-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= x - x_0 \\
x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Desde que $f'(x_n) \neq 0$

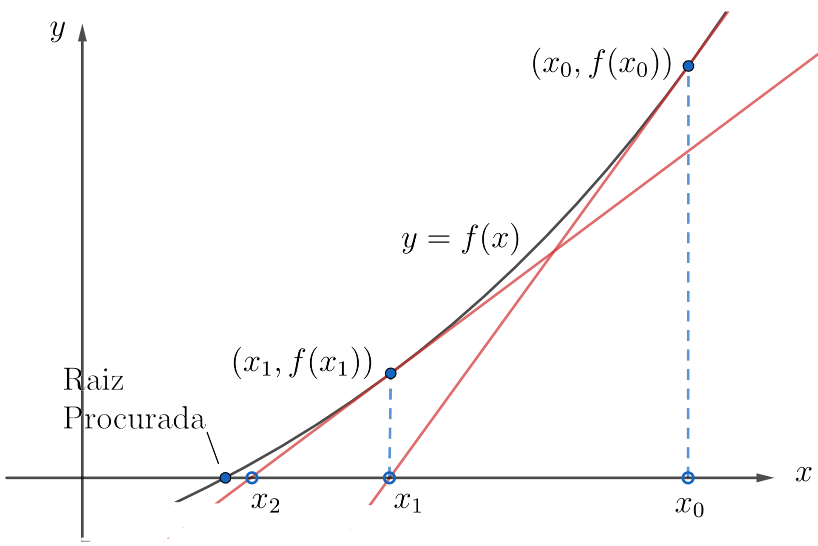

Figura 2 – Como o método de Newton funciona.

3.1 Como o Método funciona na prática

As aplicações do método, geralmente são caracterizadas por um grande número de cálculos. Por isso, foi fundamental o avanço da tecnologia, principalmente dos computadores que realizassem esses cálculos no menor tempo possível, sem isso, seria muito complicado a aplicação do método. As contas podem ser feitas manualmente, no entanto, é um trabalho bastante tedioso, cansativo, onde caso, ocorra um erro por descuido ou um calculo errado, iria comprometer todo o processo, e a partir deste erro, teria que refazer tudo novamente, ocasionado num trabalho de revisão, numa tentativa de encontrar o que poderia ter ocorrido de errado, o que tornaria ainda mais cansativo e menos assertivo. No mais, ele é sem sombra de dúvidas uma das melhores ferramentas que existem para se achar as raízes de uma equação.

Para o primeiro exemplo, vamos tomar a função $f(x) = x^2 - 2 = 0$, onde determinaremos as aproximações decimais para $\sqrt{2}$.

Temos $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Usando a fórmula (3.2), teremos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Calculando a derivada de $f(x)$, obtemos:

$$f'(x) = 2x = 0.$$

Aplicando $f(x)$ e $f'(x)$ em (3.2), vamos ter:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} - \frac{2}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\
&= \frac{2x_n - x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\
&= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \tag{3.3}$$

A partir de da equação (3.3), vamos encontrar a aproximação $\sqrt{2} = 1,4141$, com quatro casas decimais.

Primeiramente, tomemos $x_0 = 1$, logo:

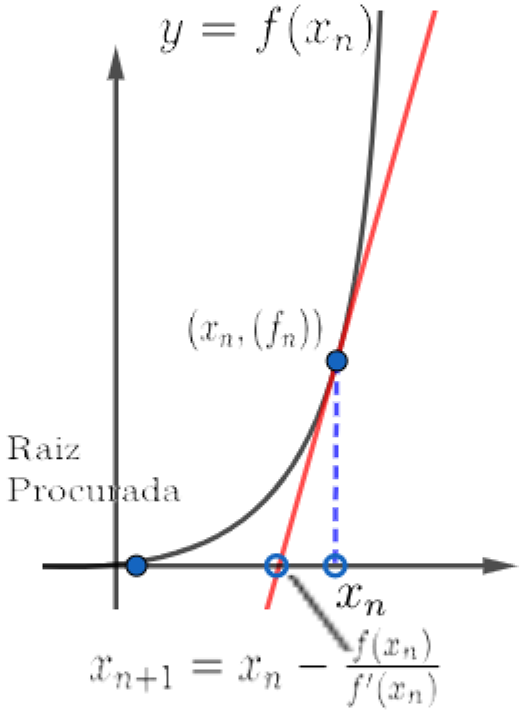

Figura 3 – Geometria das etapas sucessivas do método de Newton

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{1+2}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
&= 1,5.
\end{aligned}
$$

Aqui, vamos tomar o novo valo para x_n como sendo $x_1 = 1,5$. Com isso, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1,5}{2} + \frac{1}{1,5} \\
&= 0,75 + 0,67 \\
&= 1,4167.
\end{aligned}
$$

Agora, o novo valor de x_n, será $x_2 = 1,4167$. Portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1,4167}{2} + \frac{1}{1,4167} \\
&= 0,7083 + 0,7059 \\
&= 1,4142.
\end{aligned}
$$

Caso fizessemos o exemplo anterior com 9 casas decimais, ao invés de 4, teríamos 9 interações, como pode ser visto no Tabela 3.1. Podemos perceber que a e medida que o método vai interagindo, o erro vai diminuindo, até chegar a zero, e o número de algarismos corretos vai aumentando.

n	x_n	$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$	Erro	Algarismos corretos
0	1	1,5	-0,41421	1
1	1,5	1,416666667	0,085786	1
2	1,416666667	1,414215686	0,002453	3
3	1,414215686	1,41221362	$2,1242745.10^{-6}$	5
4	1,41221362	1,415257959	-0,002	9
5	1,415257959	1,414213948	0,0001044397	3
6	1,414213948	1,414213562	0,0001044397	7
7	1,414213562	1,414213562	0	10
8	1,414213562	1,414213562	0	10

Tabela 3.1 – Evolução dos valores de x_n e o erros correspondentes

Neste próximo exemplo vamos calcular a abscissa do ponto onde a curva $f(x) = x^3 - x - 1$ cruza a reta $y = 1$

Para resolver este exemplo, vamos usar o Teorema do Valor Intermediário.

(Teorema do Valor Intermediário). Suponha que f é uma função contínua no intervalo fechado [a,b]. Se y_0 é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Daí, vamos tomar os valores de $f(1)$ e $f(2)$, o que nos permite aplicar o teorema, que nos garante a existência de uma raiz entre os dois intervalos.

Para $f(1)$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x - 1 \\ f(1) &= (1)^3 - (1) - 1 \\ &= 1 - 1 - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Para $f(2)$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x - 1 \\ f(2) &= (2)^3 - (2) - 1 \\ &= 8 - 2 - 1 \\ &= 8 - 3 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Agora aplicando o Método de Newton,sabemos que:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

e

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Assim, seja:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3.4}$$

Para $x_0 = 1$, segue que:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= (1)^3 - 1 - 1 \\
&= 1 - 2 \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= 3(1)^2 - 1 \\
&= 3 - 1 \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Substituindo $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ em (3.4)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - \frac{(-1)}{2} \\
&= 1 - \frac{(2+1)}{2} \\
&= 1 - \frac{3}{2} \\
&= 1,5.
\end{aligned}
$$

Agora, temos que o valor de $x_1 = 1,5$, substituindo nas $f(x)$ e $f'(x)$ temos:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= (1,5)^3 - 1,5 - 1 \\
&= 3,375 - 2,5 \\
&= 0,875.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_1) &= 3(1,5)^2 - 1 \\
&= 3(2,25) - 1 \\
&= 6,75 - 1 \\
&= 5,75.
\end{aligned}
$$

Substituindo $f(x_1)$ e $f'(x_1)$ em (3.4)

$$\begin{aligned} x_2 &= 1,5 - \frac{(-0,875)}{5,75} \\ &= 1,5 - 0,152173913 \\ &= 1,347826087. \end{aligned}$$

substituindo $x_2 = 1,347826087$, em $f(x)$ e $f'(x)$, temos:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= (1,347826087)^3 - 1,347826087 - 1 \\ &= 2,44850826 - 2,347826087 \\ &= 0,1006821733. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= 3(1,347826087)^2 - 1 \\ &= 3(1,816635161) - 1 \\ &= 5,449905482 - 1 \\ &= 4,449905482. \end{aligned}$$

Substituindo $f(x_2)$ e $f'(x_2)$ em (3.4)

$$\begin{aligned} x_3 &= 1,347826087 - \frac{(0,1006821733)}{4,449905482} \\ &= 1,347826087 - 0,0226258094 \\ &= 1,325200278. \end{aligned}$$

Daí, temos que $x_3 = 1,325200278$, e substituindo em $f(x) e f'(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_3) &= (1,325200278)^3 - 1,325200278 - 1 \\ &= 2,327258124 - 2,325200278 \\ &= 0,002057845642. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_3) &= 3(1,325200278)^2 - 1 \\ &= 3(1,756155777) - 1 \\ &= 5,26846733 - 1 \\ &= 4,26846733. \end{aligned}$$

Substituindo $f(x_3)$ e $f'(x_3)$ em (3.4)

$$\begin{aligned} x_4 &= 1,325200278 - \frac{(0,002057845642)}{4,26846733} \\ &= 1,325200278 - 0,00048210101097 \\ &= 1,324718174. \end{aligned}$$

Então temos que, $x_4 = 1,324718174$, temos:

$$\begin{aligned} f(x_4) &= (1,324718174)^3 - 1,324718174 - 1 \\ &= 2,324719098 - 2,324718174 \\ &= 0,000000924. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_4) &= 3(1,324718174)^2 - 1 \\ &= 3(1,754878241) - 1 \\ &= 5,264634722 - 1 \\ &= 4,264634722. \end{aligned}$$

Substituindo $f(x_4)$ e $f'(x_4)$ em (3.4)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1,324718174 - \frac{(0,000000924)}{4,264634722} \\
&= 1,324718174 - 2,166656842.10^{-7} \\
&= 1,324717957.
\end{aligned}
$$

Agora temos que, $x_5 = 1,324717957$, substituindo nas equações:

$$
\begin{aligned}
f(x_4) &= (1,324717957)^3 - 1,324717957 - 1 \\
&= 2,324717958 - 2,324717957 \\
&= 7,1625.10^{-10}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_4) &= 3(1,324717957)^2 - 1 \\
&= 3(1,754877666) - 1 \\
&= 5,264632997 - 1 \\
&= 4,264632997.
\end{aligned}
$$

Substituindo $f(x_4)$ e $f'(x_4)$ em (3.4)

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 1,324717957 - \frac{(7,1625.10^{-10})}{4,264632997} \\
&= 1,324717957 - 1,679511462.10^{-10} \\
&= 1,324717957.
\end{aligned}
$$

Logo, quando chegamos na interação em $n = 5$, temos que $x_6 = x_5$. Ou seja, a raíz entre os dois intervalos é 1,324717957. Como pode ser visto na Tabela 3.2.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	1	2	1,5
1	1,5	0,875	0,085786	1,347826087
2	1,347826087	0,1006821733	4,449905482	1,325200278
3	1,325200278	0,002057845642	4,26846733	1,324718174
4	1,324718174	0,000000924	4,264634722	1,324717957
5	1,324717957	$7,1625.10^{-10}$	4,264632997	1,324717957

Tabela 3.2 – Valores x_{n+1} obtidos

4 APLICAÇÕES

Nesta seção, vamos apresentar uma série de de aplicações do Método de newton. Podemos usá-lo para resolver uma equação de quarto grau, até problemas mais complexos como a localização de um planeta ou como encontrar um submarino, o que nos permitirá visualizar de forma a funcionalidade do Método, abordaremos também problemas presentes na engenharia e na astronomia.

4.1 Localização de um planeta

Neste primeiro caso, vamos calcular as coordenadas espaciais de um planeta, para isso temos que resolver a equação do tipo $x = 1 + 0,5 \operatorname{sen} x$. O traçado da função $f(x) = x - 1 - 0,5 \operatorname{sen} x$ sugere que a função possui uma raiz próxima a $x = 1,5$. Como vamos usar Método de Newton para melhorar esta estimativa, temos então que definir um valor inicial, neste caso, iremos tomar $x_0 = 1,5$ e, a partir deste vamos vamos encontrar x_1.

Para facilitar os cálculos, iremos usar radianos, e o valor da raiz que se deseja encontrar é 1,49870 com cinco casa decimais.

Para encontrar o valor de x_1, primeiramente precisamos encontrar $f'(x)$.

Logo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 - 0,5 \operatorname{sen} x \\ f'(x) &= x - 0,5 \cos x \end{aligned}$$

A fórmula de newton é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Tomando $x_0 = 1,5$, substiruindo em (3.4), teremos :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5 - \frac{1,5 - 1 - (0,5sen(1,5))}{1 - (0,5)cos(1,5)} \\ &= 1,5 - \frac{0,5 - (0,5)(0,99749)}{1 - (0,5)(0,07073)} \\ &= 1,5 - \frac{0,5 - (0,498745)}{1 - (0,035365)} \\ &= 1,5 - \frac{0,00125}{0,96463} \\ &= 1,5 - 0,00129 \\ &= 1,49871. \end{aligned}$$

4.2 Estimativa de π.

Vamos encontrar o valor de π com tantas casa decimais de precisão, uma calculadora permita usar usando o Método de Newton, para isso, tomaremos a equação $\operatorname{tg} x = 0$, e com o $x_0 = 3$.

Inicialmente vamos ter as funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x \\ f'(x) &= sec^2(x) \end{aligned}$$

Tomando x_0 e os ângulos em radiando e substituindo na fórmula de Newton (3.4), vamos ter:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \frac{\operatorname{tg}(3)}{sec^2(3)} \\ &= 3 - \frac{(-0,14255)}{1,02003} \\ &= 3 + 0,139751 \\ &= 3,139751. \end{aligned}$$

Agora, vamos repetir o mesmo processo com o valor de x_1.

$$\begin{aligned} x_2 &= 3,139751 - \frac{\operatorname{tg}(3,139751)}{sec^2(3,139751)} \\ &= 3,139751 - \frac{(-0,00187)}{1} \\ &= 3,139751 + 0,00184 \\ &= 3,14159. \end{aligned}$$

4.3 Fatoração de uma equação de quarto grau.

Vamos usar o Método para encontar as raízes de uma equação de quarto grau. A equação que vamos usar para aplicar o Método é: r_1 a r_4 na fatoração.

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1$$

Para encontrarmos as raízes, precisamos de 4 valores que estejam no intervalo de -1 a 2, pois o teorema do valor intermediário nos garante que existem ao menos uma raiz nesse intervalo. Vamos tomar os valores 1; 0,1; 0,6; e 2.

Inicialmente vamos ter:

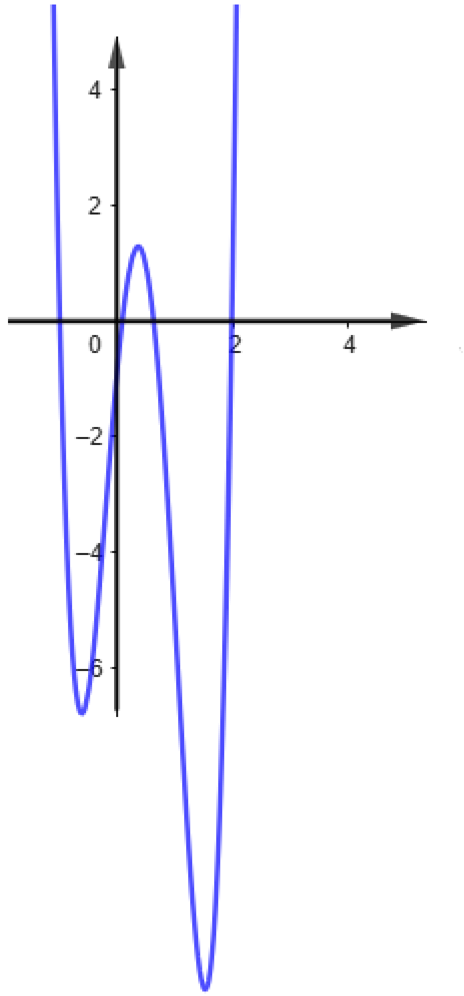

Figura 1 – Gráfico da função de quarto grau

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 8x^4 - 14x^3 - 8x^2 + 9x + 11x - 1 \\
f'(x) &= 32x^3 - 42x^2 - 18x + 11
\end{aligned}
$$

Aplicando a fórmula de Newton (3.4),e tomando o valor de $x_0 = -1$, teremos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1 - \frac{(8(-1)^4 - 14(-1)^3 - 9(-1)^2 + 11(-1))}{(32(-1)^3 - 42(-1)^2 - 18(-1) + 11)} \\
&= -1 - \frac{(8 + 14 - 9 - 11)}{(-32 - 42 + 18 + 11)} \\
&= -1 - \frac{2}{-45} \\
&= -1 + \frac{2}{-45} \\
&= \frac{-45 + 2}{45} \\
&= \frac{-47}{45} \\
&= -0,955.
\end{aligned}$$

Agora vamos repetir o mesmo processo, com o valor de $x_0 = 0,1$. logo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,1 - \frac{(8(0,1)^4 - 14(0,1)^3 - 9(0,1)^2 + 11(0,1))}{(32(0,1)^3 - 42(0,1)^2 - 18(0,1) + 11)} \\
&= 0,1 - \frac{(8(0,0001) - 14(0,001) - 9(0,01) + 1,1)}{(32(0,001) - 42(0,01) - 1,8 + 11)} \\
&= 0,1 - \frac{(0,0008 - 0,014 - 0,09 + 1,1)}{(0,032 - 0,42 - 1,8 + 11)} \\
&= 0,1 - \frac{0,9968}{8,812} \\
&= 0,1 - 0,11312 \\
&= 0,08869.
\end{aligned}$$

Tomando $x_0 = 0,6$ e repetindo o processo, vamos ter:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,6 - \frac{(8(0,6)^4 - 14(0,6)^3 - 9(0,6)^2 + 11(0,6))}{(32(0,6)^3 - 42(0,6)^2 - 18(0,6) + 11)} \\
&= 0,6 - \frac{(8(0,1296) - 14(0,216) - 9(0,36) + 6,6)}{(32(0,216) - 42(0,36) - 10,8 + 11)} \\
&= 0,6 - \frac{(1,0368 - 3,024 - 3,24 + 6,6)}{(6,912 - 15,12 - 10,8 + 11)} \\
&= 0,6 - \frac{1,3728}{-8,008} \\
&= 0,1 - (-0,1743) \\
&= 0,6 + 0,1743 \\
&= 0,771429.
\end{aligned}$$

Por último, vamos assumir o valor de $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - \frac{(8(2)^4 - 14(2)^3 - 9(2)^2 + 11(2))}{(32(2)^3 - 42(2)^2 - 18(2) + 11)} \\
&= 2 - \frac{(8(16) - 14(8) - 9(4) + 22)}{(32(8) - 42(4) - 36 + 11)} \\
&= 2 - \frac{(128 - 112 - 36 + 22)}{(256 - 168 - 36 + 11)} \\
&= 2 - \frac{2}{63} \\
&= 2 - 0,0317456 \\
&= 1,96683.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que as raízes da equação são: $r_1 = -0,955$; $r_2 = 0,08869$; $r_3 = 0,771429$ e $r_4 = 1,96683$.

4.4 Curvas que são praticamente achatadas na raiz.

Algumas curvas são tão planas que, na prática, o método de Newton é demasiado longe da raiz para fornecer uma estimativa útil. Para este caso, vamos usar a função $f(x) = (x-1)^{40}$ com uma estimativa inicial de $x_0 = 2$.

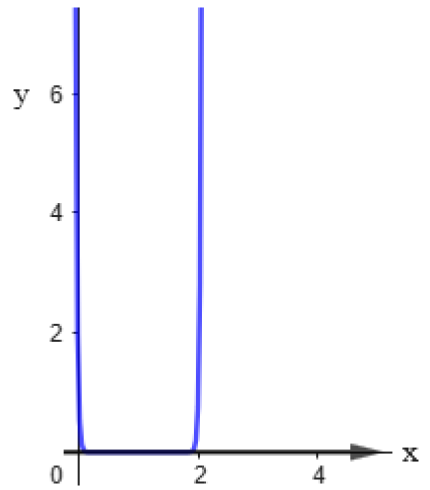

Figura 2 – Gráfico da função da função $(x-1)^{40}$.

Vamos começar encontrando as funções:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)^{40} \\
f'(x) &= 40(x-1)^{39}
\end{aligned}$$

Tomando $x_0 = 2$ e substituindo na fórmula de Newton (3.4), temos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{(x_0-1)^{40}}{40(x_0-1)^{39}}\\
&= 2 - \frac{(2-1)^{40}}{40(2-1)^{39}}\\
&= 2 - \frac{1}{40}(2-1)\\
&= 2 - \frac{1}{40} * 1\\
&= 2 - 0,0025\\
&= 1,975.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos tomar $x_1 = 1,975$ e repetir o mesmo processo, logo:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{(x_1-1)^{40}}{40(x_1-1)^{39}}\\
&= 1,975 - \frac{(1,975-1)^{40}}{40(1,975-1)^{39}}\\
&= 1,975 - \frac{1}{40}(1,975-1)\\
&= 1,975 - (0,0025)(0,975)\\
&= 1,975 - 0,024375\\
&= 1,950625.
\end{aligned}
$$

Tomando $x_2 = 1,950625$ teremos:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{(x_2-1)^{40}}{40(x_2-1)^{39}}\\
&= 1,950625 - \frac{(1,950625-1)^{40}}{40(1,950625-1)^{39}}\\
&= 1,950625 - \frac{1}{40}(1,950625-1)\\
&= 1,950625 - (0,0025)(0,950625)\\
&= 1,950625 - 0,023766\\
&= 1,926859.
\end{aligned}
$$

Repetindo novamente e tomando agora, $x_3 = 1,926859$, vamos ter:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{(x_3-1)^{40}}{40(x_3-1)^{39}}\\
&= 1,926859 - \frac{(1,926859-1)^{40}}{40(1,926859-1)^{39}}\\
&= 1,926859 - \frac{1}{40}(1,926859-1)\\
&= 1,926859 - (0,0025)(0,926859)\\
&= 1,926859 - 0,023171\\
&= 1,903688.
\end{aligned}
$$

Tomando $x_4 = 1,903688$, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_4 - \frac{(x_4-1)^{40}}{40(x_4-1)^{39}}\\
&= 1,903688 - \frac{(1,903688-1)^{40}}{40(1,903688-1)^{39}}\\
&= 1,903688 - \frac{1}{40}(1,903688-1)\\
&= 1,903688 - (0,0025)(0,903688)\\
&= 1,903688 - 0,022592\\
&= 1,881096.
\end{aligned}
$$

Fazendo agora para Tomando $x_5 = 1,881096$, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_4 - \frac{(x_4-1)^{40}}{40(x_4-1)^{39}}\\
&= 1,881096 - \frac{(1,881096-1)^{40}}{40(1,881096-1)^{39}}\\
&= 1,881096 - \frac{1}{40}(1,881096-1)\\
&= 1,881096 - (0,0025)(0,881096)\\
&= 1,881096 - 0,022027\\
&= 1,859069.
\end{aligned}
$$

Podemos verificar que a medida que vai sendo feita interações, o valore de x vai se aproximando de 1.

4.5 O problema da sonoboia.

Nos problemas para localizar submarino, normalmente é necessário determinar o ponto de aproximação máxima (PAM) em relação a uma sonoboia (equipamento eletrônico flutuante que capta sinais sonoros de submarino) na água. Suponhamos que o submarino se desloque em uma trajetória parabólica $y = x^2$ e que a sonoboia esteja localizada no ponto $(2, -\frac{1}{2})$.

Primeiramente vamos encontrar o valor de x que minimiza a distância entre o submarino e a sonoboia, pois ele é a solução da equação $x = \dfrac{1}{(x^2+1)}$.

Para solucionar este caso, temos que lembrar primeiramente que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d_{a,b} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Substituindo os pontos $(2, -\dfrac{1}{2})$ na distância, temos:

$$d_{a,b} = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2}, \quad x \geq 0.$$

Para um valor de x positivo a distância miníma é $f(x) = (x-2)^2 + (x^2 - \dfrac{1}{2})^2$, deste modo, precisamos minimizar a função $f(x)$

Vamos encontras os pontos críticos, ou seja, onde $f'(x) = 0$, logo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= 2[(x-2) + (x^2 - \frac{1}{2}).2x] \Rightarrow \\
\Rightarrow &= 2[(x-2) + (2x^3 + x] \\
&= 2x - 4 + 4x^3 + 2x \\
&= 4x^3 + 4x - 4.
\end{aligned}$$

Se derivarmos $f'(x) = 4x^3 + 4x - 4$ mais uma vez, teremos:

$$f''(x) = 12x^2 + 4, \quad > 0$$

Portanto, os valores x que encontrarmos em $f'(x) = 0$, serão os pontos mínimos, logo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 4x - 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= 4(x^3 + x - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= 4(x^3 + x - 1) \\ 0 &= (x^3 + x - 1) \\ 1 &= x^3 + x \\ 1 &= x(x^2 + 1) \\ x &= \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

A partir do que foi expostor anteriormente, agoara vamos encontrar a resolução da equação $x = \dfrac{1}{(x^2 + 1)}$ pelo Método de Newton.

Para encontrarmos a solução da equação,vamos resolver $x = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, usando o método de Newton.

Portanto, temos a função $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} - x$. Derivando $g(x)$, teremos:

$$g'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} - 1$$

Aplicando a fórmula de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

Vamos assumir o valor de $x_0 = 1$, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{\dfrac{1}{x^2+1} - 1}{-\dfrac{2x}{x^2+1} - 1} \Rightarrow \\
\Rightarrow x_1 &= 1 - \frac{\dfrac{1}{(1)^2+1} - 1}{-\dfrac{2(1)}{(1)^2+1} - 1} \\
&= 1 - \frac{\dfrac{1}{1+1} - 1}{\dfrac{2}{1+1} - 1} \\
&= 1 - \frac{\dfrac{1}{2} - 1}{-\dfrac{2}{2} - 1} \\
&= 1 - \frac{\dfrac{-1}{2}}{-2} \\
&= 1 - \frac{1}{4} \\
&= 1 - 0,25 \\
&= 0,75.
\end{aligned}
$$

Repetindo o mesmo processo para $x_1 = 0,75$, temos:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 0,75 - \frac{\dfrac{1}{(0,75)^2+1} - 1}{-\dfrac{2(0,75)}{(0,75)^2+1} - 1} \\
&= 0,75 - \frac{\dfrac{1}{0,5625+1} - 1}{\dfrac{1,5}{0,5625+1} - 1} \\
&= 0,75 - \frac{\dfrac{1}{1,5625} - 1}{-\dfrac{1,5}{1,5625} - 1} \\
&= 0,75 - \frac{0,64 - 1}{-0,96 - 1} \\
&= 0,75 - \frac{-0,36}{-1,96} \\
&= 0,75 - 0,18367 \\
&= 0,56633.
\end{aligned}
$$

Tomando agora $x_2 = 0,5633$, teremos:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 0,5633 - \frac{\dfrac{1}{(0,5633)^2+1} - 1}{-\dfrac{2(0,5633)}{(0,5633)^2+1} - 1} \\
&= 0,5633 - \frac{\dfrac{1}{0,31730+1} - 1}{\dfrac{1,1266}{0,31730+1} - 1} \\
&= 0,5633 - \frac{\dfrac{1}{1,31730} - 1}{-\dfrac{1,1266}{1,31730} - 1} \\
&= 0,5633 - \frac{0,7260 - 1}{-0,8552 - 1} \\
&= 0,5633 - \frac{-0,274}{-1,8552} \\
&= 0,5633 - 0,1477 \\
&= 0,41863.
\end{aligned}$$

Portanto, a medida que vai se fazendo interações o valor de x, vai se aproximando de zero.

5 Conclusão

Em todo o trabalho ficou evidente como o Método de Newton é fundamenteal para resolvar problemas que envolve grandes cálculos, como também para resolver questões simples. O mais importante é que fica nítido que o grande avanço da tecnologia foi fundamental para a aplicabilidade do Método, pois as contas seriam extremamente grandes e trabalhosas, se fossem feitas manualmente.

Quando se domina alguma lingugaem de programação fica mais fácil aplicar o Método, pois, podemos controlar várias variaveis, determinar até quando desejamos que os cálculos sejam feitos, quais erros é permitido e quais não, e tudo isso, depois de programado, pode ser aplicado de várias forams e para vários valores que optarmos.

Portanto, o que podemos entender é que um conceito tão antigo, como o Método de Newton, pode ser potencializado com as novas ferramentas tecnlogicas, com o avanço da ciência moderna, o que nós leva a refletir que a matemática só tem a ganhar se for bem trabalhada junto com esses avanços, permitindo assim simplificar a vida das pessoas para muitos problemas, ou quem sabe, trazer vários conceitos novos se aliarmos as duas ferramentas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbosa, A. S. (2018). *Métodos Numéricos: Teoria e Implementações em Python.* Editora Elsevier.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2003). *Análise Numérica* (8ª ed.). Pioneira Thomson Learning.

Conte, S. D., & Boor, C. de (1995). *Análise Numérica.* McGraw-Hill do Brasil.

Dalgaard, P. (2002). *Introdução à Análise Numérica.* Editora Ciência Moderna.

Gaspar, R. M. (2006). *Análise Numérica: Métodos, Teoria e Aplicações.* Pearson Prentice Hall.

IEZZI, G **Fundamentos da matemática elementar**: volume 8. São Paulo: Saraiva, 2019.

Oliveira, E. C. (2000). *Métodos Numéricos para Equações Algébricas.* Editora Edgard Blücher.

Ruggiero, M. A. G., & Lopes, V. L. R. (1996). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.* Makron Books.

Teixeira, S. L. (2015). *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações com MATLAB.* Editora LTC.

THOMAS, G.B **Cáculo**: volume 1. São Paulo: Pearson, 2009.

UNIVERSIDADE DE VITÓRIA. Dísponivel em: `http://www.dma.ufv.br/downloads` acessado em: 17 jun. 2024.

Valença, E. P. (2009). *Cálculo Numérico: Uma Abordagem Aplicada.* Editora LTC.

Xavier, A. M., & Perez, C. A. (2001). *Métodos Numéricos: Fundamentos e Aplicações.* LTC Editora.

APÊNDICE A – MÉTODO DE NEWTON EM PYTHON

Com o objetivo de desenvolver um trabalho mais completo e contributivo, foi elaborada uma calculadora na linguagem Python. O código utilizou um laço de repetição, com o cuidado de evitar problemas de loop infinito, limitando as iterações a um máximo de 1000. O programa requer que o usuário informe a função em questão e sua derivada. Posteriormente, durante a execução, solicita-se que o usuário forneça o valor inicial da variável x e o erro ou margem de tolerância, este último utilizado como critério de parada do programa.

Para acessar a execução e utilização do código, visite:

https://colab.research.google.com/drive/1pHY8d9fbwwavBmX9Pznont2ZwIiJLP7D?usp=sharing

Abaixo, segue o código implementado com comentários:

```python
import math

 # Defnição da função em questão
def f(x):
    return x**2 - 2 # <-- Informado pelo usuário!

# derivada da função
def df(x):
    return 2 * x # <-- Informado pelo usuário!


# Implementação do método de Newton para encontrar a raiz de uma função.
# :param x0: Valor inicial
# :param tolerancia: Tolerância para o critério de parada
# :param max_iteracoes: Número máximo de iterações permitidas
# :return: Aproximação da raiz

def metodo_de_newton(x0, tolerancia, max_iteracoes = 1000):
    x = x0
    for i in range(max_iteracoes):
        fx = f(x)
        dfx = df(x)
```

```
        if dfx == 0:
            raise ValueError("Derivada zero encontrada. O método não pode continuar.")
        x_novo = x - (fx / dfx)
        if abs(x_novo - x) < tolerancia:
            return x_novo # Se a tolerância é atingida, o programa para!
        x = x_novo
        print(f"Valor atual da raiz: {x}")
    raise ValueError("Número máximo de iterações atingido. O método não convergiu.")

# Rodando
x0 = float(input("Digite o valor inicial de x_0: "))  # Primeiro valor de x <-- Informado pelo usuário!
tolerancia = float(input("Digite a margem de erro aceitável: ")) # Margem de erro <-- Informado pelo usuário!
raiz = metodo_de_newton(x0, tolerancia)
print(f"A raiz encontrada é aproximadamente {raiz}")

# Código por Israel Buriti Galvão e Tiago Almeida Rocha
```