UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARIA APARECIDA FORMIGA DE OLIVEIRA

DOS PRIMOS AOS PROBLEMAS: Explorando os números primos através da Conjectura de Goldbach e da Hipótese de Riemann

PATOS
2024

MARIA APARECIDA FORMIGA DE OLIVEIRA

DOS PRIMOS AOS PROBLEMAS: Explorando os números primos através da Conjectura de Goldbach e da Hipótese de Riemann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

PATOS
2024

O48p Oliveira, Maria Aparecida Formiga de.

Dos primos aos problemas [manuscrito] : explorando os números primos através da conjectura de Goldbach e da hipótese de Riemann / Maria Aparecida Formiga de Oliveira. - 2024.

48 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Problemas em aberto. 2. Números Primos. 3. Conjectura de Goldbach. 4. Hipótese de Riemann. 5. Conhecimento Matemático. I. Título

21. ed. CDD 512.7

Elaborada por Kaliane Eveny Martins de Oliveira - CRB - 15/986 BSC7

MARIA APARECIDA FORMIGA DE OLIVEIRA

DOS PRIMOS AOS PROBLEMAS: EXPLORANDO OS NÚMEROS PRIMOS ATRAVÉS DA CONJECTURA DE GOLDBACH E DA HIPÓTESE DE RIEMANN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em: 22/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ademir Benteus Pampu** (***.824.629-**), em **28/11/2024 10:09:33** com chave **02ae535aad8a11efbdaf06adb0a3afce**.
- **José Vinícius do Nascimento Silva** (***.517.964-**), em **28/11/2024 10:10:51** com chave **312f729aad8a11ef8e0706adb0a3afce**.
- **Rozana Bandeira da Silva** (***.173.924-**), em **28/11/2024 15:11:53** com chave **3f2481a4adb411ef9ec306adb0a3afce**.

Em memória de minha mãe por todos os ensinamentos, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, sem a presença dele em minha vida nada seria possível.

Segundamente, agradeço a minha família, principalmente a minha irmã Carla Larissa e em especial agradeço à minha mãe, graças a elas tive forças para continuar, embora minha mãe não estivesse de corpo presente para acompanhar essa caminhada, sempre esteve e sempre estará em meu coração e para ela serão dedicadas todas as minhas conquistas.

Agradeço aos meus amigos, Maria Liberacy, Carla Mayara, Maria Mychele, Karina e Francisco, por tornarem essa jornada mais leve e prazerosa.

Agradeço também, as demais pessoas que me acompanharam e me incentivaram a continuar, por mais difícil que fosse.

Quero agradecer também ao meu orientador Ademir, por todos os ensinamentos e paciência, dedicados a construção desse trabalho. Gostaria de agradecer ao meu ex-professor José Vinícius, por todos os ensinamentos, e em especial pelo incentivo em seguir o caminho da licenciatura.

Agradeço também a coordenação do curso e a todos os professores que de alguma forma contribuíram para minha formação não só como professora, mas também como ser humano.

“A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática” – Carl Friedrich Gauss

RESUMO

A Matemática é uma ciência em construção, embasados nisso, decidimos explorá-la como tal. Portanto, optamos por trabalhar com os “tijolos” da Matemática, os números primos, dos quais tomamos para esta missão dois problemas em aberto da Teoria dos Números, a Conjectura de Goldbach e a Hipótese de Riemann. Com o objetivo de motivar estudantes de licenciatura, professores da educação básica, professores de ensino superior e pesquisadores a explorar o “desconhecido", e apresentar este desconhecido para seus alunos, fizemos uma revisão bibliográfica para abordar a construção histórica desses problemas, e os avanços feitos na tentativa de demonstrá-los, esperamos conseguir desmistificar a visão distorcida que muitos tem acerca da Matemática, de que ela é uma Ciência acabada e que tudo nela já está solucionado e que não há mais nada a ser desenvolvido, claro que já obtivemos muitos resultados, mas não há sentido em nos contentarmos apenas com eles, a Matemática está viva e temos a chance de explorá-la, ou pelo menos conhecê-la. Nosso intuito neste trabalho não é oferecer provas rigorosas, mas sim, incentivar a pesquisa matemática e divulgar o conhecimento.

Palavras-Chave: Problemas em aberto; Números Primos; Conjectura de Goldbach; Hipótese de Riemann; Conhecimento Matemático.

ABSTRACT

Mathematics is a science in progress, and based on this understanding, we decided to explore it as such. Therefore, we chose to work with the "building blocks" of Mathematics—the prime numbers—and selected two open problems in Number Theory for this mission: the Goldbach Conjecture and the Riemann Hypothesis. With the goal of motivating undergraduate students, basic education teachers, higher education professors, and researchers to explore the "unknown" and present it to their students, we conducted a bibliographic review to address the historical development of these problems and the advancements made in attempts to solve them. We aim to demystify the distorted view that many have about Mathematics—that it is a completed science where everything has already been solved, leaving nothing more to be developed. Of course, we have achieved many results, but there is no reason to settle for them alone. Mathematics is alive, and we have the opportunity to explore it or, at the very least, to get to know it. Our objective in this work is not to provide rigorous proofs but rather to encourage mathematical research and promote the dissemination of knowledge.

Keywords: Open Problems; Prime Numbers; Goldbach's Conjecture; Riemann Hypothesis; Mathematical Knowledge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MMC	Mínimo Múltiplo Comum.
MDC	Máximo Divisor Comum.
MIT	Massachutts Institute of Technology.
PA	Progressão Aritmética.
PG	Progressão Geométrica.
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética.

LISTA DE SÍIMBOLOS

$\blacksquare$	Como queríamos demonstrar
$\mathbb{C}$	Complexos (conjunto dos números)
$\equiv$	Congruente
$\neq$	Diferente
$\setminus$	Diferença de conjuntos
$/$	Divide
$!$	Fatorial
$\boldsymbol{\gamma}$	Gama
∞	Infinito
$\mathbf{lim}$	Limite
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\boldsymbol{mod}$	Módulo
$\not\equiv$	Não Congruente
$\nmid$	Não divide
$\in$	Pertence
$\boldsymbol{\pi}$	Pi
$\prod$	Produtório
$\approx$	Quase igual a
$\mathbb{R}$	Reais (conjunto dos números)
$\sum$	Somatório
$\boldsymbol{\zeta}$	Zeta

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

É sólito pensar que a Matemática é um campo “fechado” onde tudo já foi desenvolvido e explicado, de acordo com Silva (2018), muitos estudantes pensam na Matemática como uma disciplina pronta e acabada não havendo mais nada para se descobrir ou criar, a autora também salienta que essa percepção vem justamente da maneira como a Matemática nos é apresentada, em livros didáticos resumidos, onde apenas vemos questões prontas. Contudo, esse é um pensamento equivocado, pois existem diversos campos da Matemática onde foram desenvolvidos problemas aos quais não conseguiram uma solução, ou pelo menos não uma que fosse aceita pela comunidade matemática, são conhecidos como os problemas em aberto. Tendo isso em mente, podemos então perceber o quão “viva” está a Matemática, o quanto ainda pode ser descoberto e/ou demonstrado e que a “nova Matemática”, não é algo inalcançável, tão pouco é algo impossível de ser criado. Partindo do pressuposto de que existem problemas em aberto na Matemática, podemos nos questionar: para que problemas sem solução servem? A priori, pode-se pensar que problemas sem solução agem como uma “pedra” no caminho dos matemáticos, no entanto, esses problemas são como o virar de uma chave que levará a Matemática um pouco mais além do que já se conhece ou conheceu dela mesma.

Neste trabalho iremos explorar um pouco sobre Teoria dos Números, focando nossa atenção nos números primos, que nos geram incertezas até os dias de hoje, principalmente a respeito da sua distribuição e se podemos determinar um padrão dentro desses números. Dito isso, iremos discorrer sobre dois dos problemas em aberto mais antigos da Matemática, advindos da Teoria dos Números, faremos uma revisão bibliográfica para explorar a Conjectura de Goldbach e a Hipótese de Riemann. A conjectura de Goldbach datada de 1742, atualmente completando 282 anos sem uma solução, nasceu a partir de uma troca de correspondência entre Christian Goldbach que era um matemático russo da época, embora ele não levasse os estudos matemáticos de uma forma tão rigorosa como os demais matemáticos faziam, pois a Matemática não foi seu foco principal quando ingressou na vida acadêmica, apesar disso, ele fez boas contribuições para o campo, e Leonhard Euler, um matemático e físico que foi de suma importância para o desenvolvimento da Matemática e da Física que conhecemos hoje, nos deixando muitas contribuições em ambos os campos. Segundo Sousa (2013) a carta XLIII datada do dia 7 de junho de

1742 escrita de Goldbach para Euler continha algumas assertivas, uma delas ficou conhecida como a Conjectura de Goldbach, a mesma dizia o seguinte *“Todo número par maior que dois pode ser escrito como a soma de dois primos”*. Em resposta a Goldbach, Euler considerou a veracidade do problema, no entanto afirmou que não conseguiria prová-lo, desde então foram sendo desenvolvidas diversas pesquisas na tentativa de provar a conjectura, porém até o dia de escrita deste trabalho acadêmico não foi encontrada uma prova para ela. Esta conjectura é caracterizada por ser de fácil entendimento, no entanto, é extremamente difícil de ser provada.

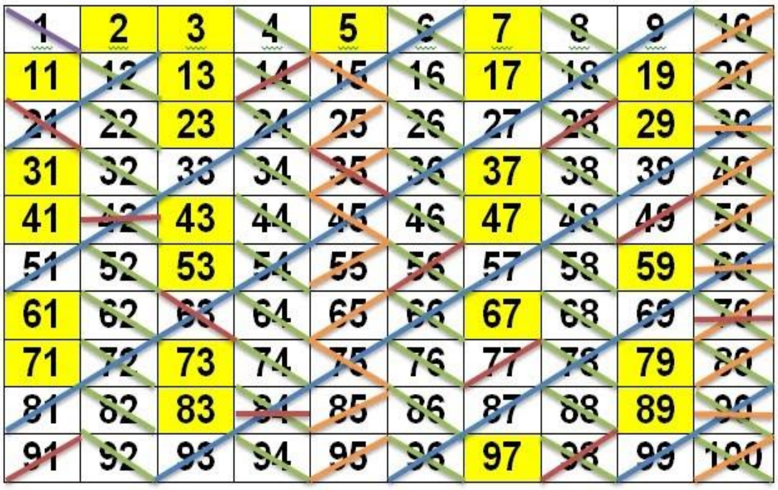
Já à Hipótese de Riemann nasceu por volta de 1859, atualmente completando cerca de 165 anos sem solução, quando Bernhard Riemann (1826-1866) um matemático alemão estava estudando sobre o comportamento das funções no plano recém descoberto dos números complexos, ele notou que os “zeros não triviais” da função Zeta, que representava uma soma infinita de números elevados a potências negativas, criada por Euler (1707-1783) em 1730 e modificada por Riemann para explorar o conjunto dos complexos, Euler utilizou a função Zeta para solucionar o problema que ficou conhecido como “problema da Basiléia”, Riemann observou que esses zeros não triviais poderiam estar relacionados com a distribuição dos números primos no plano real. Foi aí que em 1859 Riemann publicou um artigo intitulado *"Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe"* (Sobre o número de números primos abaixo de um dado valor) este artigo era curto contendo cerca de 8 páginas, mas embora fosse um artigo em suma pequeno, ele causou um alvoroço no mundo da Matemática. No capítulo que se segue iremos apresentar alguns resultados importantes sobre os números primos, em seguida traremos uma abordagem histórica sobre esses problemas e sobre a vida desses matemáticos.

Embora esses problemas continuem a intimidar alguns estudiosos, eles também assumiram o papel de aguçar a curiosidade dos mesmos, gerando assim diversas contribuições para o campo da Matemática, e não só dela, como de outras áreas do conhecimento.

2. RESULTADOS CONHECIDOS E IMPORTANTES SOBRE OS NÚMEROS PRIMOS

Embora os números primos sejam um mistério, eles levantaram muitas questões que, a priori, causaram estranheza aos matemáticos, mas ao mesmo tempo os motivaram a estudar esses números tão interessantes, que até podem ser considerados como os “tijolos” da matemática, essa analogia deve-se ao TAF (Teorema Fundamental da Aritmética) que será apresentado e demonstrado no decorrer deste capítulo.

A contagem dos números primos teve início com Eratóstenes (276 a.C-194 a.C),ele montou uma tabela dos primeiros 100 números ,então, ele começou a riscar os múltiplos dos primos conhecidos, partindo do 2 (4,6, 8, ...), daí ele partiu para o próximo, que era o 3, e foi riscando seus múltiplos (6,9,12, ...), ao final desse processo restariam apenas os números primos, pois se algum deles não fosse primo, seria o múltiplo de algum outro, portanto já teria sido riscado, este método ficou conhecido como Crivo de Eratóstenes, foi o primeiro método desenvolvido para contar os primos e continua a ser utilizado para contá-los, no entanto, quando temos que trabalhar com números muito altos, não se torna viável fazer esse processo manualmente. Embora esse crivo seja simples, ele impulsionou os estudos sobre a contagem dos primos.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1- Crivo de Eratóstenes. Fonte: MATEMÁTICA GENIAL.

Os números primos construíram diversas dúvidas a respeito deles próprios, que continuam sem uma resposta, mas com o estudo deles surgiram muitas definições e teoremas importantes, a seguir veremos alguns deles.

2.1 Definição de número primo: Um número $n\,(n > 1)$ possuindo apenas dois divisores positivos n e 1 , este é chamado *primo*.

Se $n > 1$ não é primo, dizemos então que n é composto.

A definição de um número primo é bem simples, e não nos apresenta a real complexidade por trás desses números.

A seguir veremos o TFA (Teorema Fundamental da Aritmética) que já era utilizado desde a Grécia antiga, com Euclides de Alexandria (por volta de 325 a.C - 265 a.C), porém de uma maneira “informal”, pois não se tinha uma prova rigorosa do teorema. Outros matemáticos como Leonhard Euler (1707-1783) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833) também utilizavam das noções do teorema, mas sem oferecer uma prova formal do mesmo, em sua obra *"Os Elementos"* Euler ofereceu uma prova parcial do teorema, afirmando a existência da fatoração em fatores primos, no entanto, ele não provou a unicidade da fatoração, ele apenas sugere essa unicidade. Foi só em 1801 com o matemático Friedrich Gauss (1777-1855) que o TFA recebeu uma prova completa, provando sua existência e unicidade, esta prova estava contida em sua obra intitulada *“Disquisitiones Arithmeticae”*. Uma aplicação bem comum desse teorema surge quando queremos calcular o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) ou MDC (Máximo Divisor Comum) de dois ou mais números.

2.2 Teorema Fundamental da Aritmética (TFA): *Todo inteiro $n > 1$ pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração: Se n é primo o Teorema já fica demonstrado.

Suponha que n é um número composto. Seja p_1 o menor divisor positivo de n tal que $p_1 > 1$. Afirmamos que p_1 é um número primo. Se p_1 não fosse primo, ele poderia ser escrito como um produto de inteiros menores que ele mesmo. Assim, existiria um divisor p de n , com $1 < p < p_1$, o que contradiz o fato de que p_1 é o menor divisor positivo de n . Portanto, p_1 é primo, e podemos escrever $n = p_1 \cdot n_1$, onde $n_1 = \frac{n}{p_1}$. Se n_1 for primo, então a fatoração de n está concluída. Caso contrário, aplicamos o mesmo argumento para n_1. Seja p_2 o menor divisor de n_1 que também será primo, e assim $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$, com $n_2 = \frac{n_1}{p_2}$.

Repetindo esse processo, obtemos uma sequência decrescente de inteiros $n_1, n_2, \ldots, n_r$, todos maiores que 1. Eventualmente, esse processo termina, pois estamos lidando com uma sequência de inteiros positivos decrescentes. Assim, o número n pode ser escrito como um produto de primos:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$

onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são primos (não necessariamente distintos) e $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros positivos.

Agora, vamos mostrar que essa decomposição é única.

Vamos usar indução em n . Para $n = 2$, a afirmação é trivial, pois 2 é primo e sua única fatoração é ele mesmo. Suponha que todo número inteiro maior que 1 e menor que n possui uma fatoração única em primos. Vamos provar que isso também vale para n . Se n for primo, sua fatoração é ele mesmo, e já está provado. Suponha, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações diferentes:

$$n = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_r$$

onde $p_1, p_2 \ldots p_s$ e $q_1 q_2 \ldots q_r$ são primos. Como p_1 divide o produto $q_1 q_2 \ldots q_r$, ele deve dividir pelo menos um dos fatores q_j digamos q_1 (sem perda de generalidade). Como p_1 e q_1 são ambos primos, isso implica que $p_1 = q_1$. Podemos então dividir ambos os lados por p_1 e obter:

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \ldots p_s = q_2 \ldots q_r \, .$$

Como $\frac{n}{p_1}$ é um número menor que n e maior que 1 , a hipótese de indução nos garante que a fatoração de $\frac{n}{p_1}$ é única. Isso implica que $s = r$ e que, excluindo a ordem, as fatorações $p_1, p_2 \ldots p_s$ e $q_1, q_2 \ldots q_r$ são iguais.

Assim, mostramos que a decomposição de n em fatores primos é única, concluindo a demonstração. ■

Exemplos 2.2.1: A seguir temos alguns exemplos de números representados pelo produto de primos.

$$(i)\ 6 = 2 \cdot 3$$

$$(ii)\ 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$(iii)\ 25 = 5 \cdot 5$$

$$(iv)\ 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11.$$

2.3 Aplicações do TFA

O TFA (Teorema Fundamental da Aritmética) contém diversas aplicações tanto simples como sofisticadas, a exemplo quando se quer verificar se a raiz enésima de um número a é um número inteiro positivo, ou quando queremos calcular o MMC (mínimo múltiplo comum) ou o MDC (máximo divisor comum) de algum número. No entanto, neste trabalho apresentaremos apenas uma delas. Esta aplicação é utilizada para encontrar a maior potência de um primo p que está no fatorial do número n, segundo Freitas (2023) esta aplicação se encontra na proposição XVI da obra de Legendre (1752-1833).[18]

Teorema 2.3.1: Seja p um primo, então a maior potência de p que divide $n!$ é γ onde:

$$\gamma = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

Onde $\left[\frac{n}{p}\right]$ é o menor inteiro.

É importante salientar que esta soma é finita, visto que a partir de um certo $i \in \mathbb{N}$, $p_i > n$ e a partir de p_i todos os termos serão nulos.

Demonstração: No produto $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, apenas os múltiplos de p contribuem com o fator p, dessa forma há $\left[\frac{n}{p}\right]$ múltiplos de p entre 1 e n. Desses os que contribuem com p^2, contribuem com um fator extra p e há $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ dentre esses últimos os que são múltiplos de p^3 contribuem com mais um fator p e há $\left[\frac{n}{p^3}\right]$. E assim segue encontrando a fórmula apresentada acima. Como queríamos demonstrar. (FREITAS 2023)

Exemplo 2.3.2: Mostre que 2^{994} divide $1000!$ mas 2^{2994} não divide $1000!$.
Vamos utilizar a fórmula apresentada no teorema anterior para calcular a quantidade de vezes que o fator 2 aparece em $1000!$.

$$\alpha = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \left[\frac{1000}{2^4}\right] + \cdots + \left[\frac{1000}{2^8}\right] + \left[\frac{1000}{2^9}\right] =$$

$$= 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \ = 994\,.$$

Como 2^{994} está na decomposição de $1000!$, então 2^{994} divide $1000!$, e é a maior potência de 2 que divide $1000!$. Logo 2^{2994} não divide $1000\,!$.
(FREITAS 2023).
Em seguida, será apresentado o teorema que prova que os números primos são infinitos, este teorema tem mais de uma prova, mas a que será apresentada é a de Euclides, que é considerada por muitos, a mais elegante.

2.4 Teorema (Euclides) Infinitude dos números Primos: *A sequência dos números primos é infinita*.

Demonstração: Vamos supor que a sequência dos primos seja finita. Seja, pois $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a lista de todos os primos. Consideramos o número $R = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. É claro que R não é divisível por nenhum dos p_i de nossa lista e que R é maior do que qualquer p_i. Mas, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, ou R é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo que não pertence à nossa lista. Portanto a sequência dos números primos não pode ser finita.
■
Por fim, lhes será apresentado o Teorema do Resto Chinês, que foi um teorema desenvolvido para encontrar a solução para sistemas de congruência lineares, com seus respectivos módulos sendo coprimos entre si, e ainda mostraremos uma aplicação deste teorema. Mas, para compreendermos como o teorema funciona precisamos entender sobre congruência, por isso a seguir trataremos de definir o que é congruência e não congruência.

2.5 Congruência

2.5.1 Definição: Se a e b são inteiros dizemos que a é congruente a b módulo $m\,(m > 0)$ se $m\,/(a - b)$.
Notação: $a \equiv b\,(mod\,m)$
Se $m \nmid (a - b)$ dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos $a \not\equiv b\,(mod\,m)$

2.5.2 Exemplo de congruência: 17 é dito congruente a 2 módulo 3, pois quando dividimos 17 por 3, obtemos o resto 2.

$17 \equiv 2 \ (mod\, 3)$pois $3/(17-2)$

2.5.3 Exemplo de não congruência: 11 não é congruente a 2 módulo 5, pois quando dividimos 11 por 5, não obtemos o resto 2.

Temos que $11 \not\equiv 2 \ (mod\, 5)$.

2.6 O Teorema do Resto Chinês

Se $(a_i, m_i) = mdc\,(a_i, m_i) = 1$, $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ e c_i inteiro, então o sistema

$$\begin{aligned} a_1x &\equiv c_1 \ (mod\, m_1) \\ a_2x &\equiv c_2 \ (mod\, m_2) \\ a_3x &\equiv c_3 \ (mod\, m_3) \\ &\vdots \\ a_rx &\equiv c_r \ (mod\, m_r) \end{aligned}$$

possui solução, e a solução é única módulo m , onde $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$..

Demonstração: De fato, se $(a_i, m_i) = 1$, temos que $a_ix \equiv c_i \ (mod\, m_i)$ possui uma única solução que denotamos por b_i.

Se definirmos um $y_i = \frac{m}{m_i}$ onde $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$, ou seja,$y_i$ é o produto dos módulos dividido por m_i, temos que $(y_i, m_i) = 1$, uma vez que $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$

Assim, mais uma vez temos que, $y_ix \equiv 1 \ (mod\, m_i)$, possui uma única solução que denotamos por $\overline{y_i}$. Isto é, $y_i \cdot \overline{y_i} \equiv 1 \ (mod\, m_1)$.

Afirmamos então que o número x denotado por:

$$x = b_1\, y_1\, \overline{y_1} + b_2\, y_2\, \overline{y_2} + \cdots + b_r\, y_r\, \overline{y_r}$$

é uma solução simultânea para o nosso sistema de congruências.

Vejamos então que:

$$\begin{aligned} a_ix &= a_i\,(b_1\, y_1\, \overline{y_1} + b_2\, y_2\, \overline{y_2} + \cdots + b_r\, y_r\, \overline{y_r}) \\ &= a_i\, b_1\, y_1\, \overline{y_1} + a_i\, b_2\, y_2\, \overline{y_2} + \cdots + a_i\, b_i\, y_i\, \overline{y_i} + \cdots + a_ib_r\, y_r\, \overline{y_r} \end{aligned}$$

Note que $a_ib_r\, y_r\, \overline{y_r} \equiv 0 \ (mod\, m_i)$ para todo$j \neq i$, pois m_i divide y_i para todo $j \neq i$.

Sendo assim,

$$a_ix \equiv a_i\, b_i\, y_i\, \overline{y_i} \ (mod\, m_i) \equiv a_ib_i \equiv c_i \ (mod\, m_i),$$

$$\text{pois } y_i\,\overline{y_i} \equiv 1 \ (mod\, m_i)\ a_i\, b_i \equiv c_i \ (mod\, m_i).$$

Agora, resta mostrarmos a unicidade módulo m do resultado. Vamos supor então que x' seja uma outra solução para o sistema e mostrar que $x' \equiv x \ (mod\, m)$.

Consideramos que tanto o x quanto o x' são soluções do sistema. Então temos o seguinte:

$$a_i x \equiv c_i \ (mod\, m_i) \text{ e}$$

$$a_i x' \equiv c_i \ (mod\, m_i).$$

Assim, $a_i x \equiv a_i x' \ (mod\, m_i)$.

Então como $(a_i, m_i) = 1$, segue-se que

$x \equiv x' \ (mod\, m_i)$.

Portanto, cada m_i divide $x' - x$

Além disso, uma vez que $(m_i, m_j) = 1$, temos que

$m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$ divide $x' - x$.

Assim, conclui-se que

$$x' \equiv x(mod\, m) \ \blacksquare$$

Exemplo 2.6.1: O exemplo a seguir mostra um sistema de congruência simples, precisamos então achar a solução, que é única, desse sistema. Onde um determinado x quando dividido por 3 deixa resto 2 , ao ser dividido por 5 deixa resto 3 , e ao ser dividido por 7 deixa resto 2 .

$$x \equiv 2 \ (mod\, 3)$$

$$x \equiv 3 \ (mod\, 5)$$

$$x \equiv 2 \ (mod\, 7)$$

Temos que $m_1 = 3$; $m_2 = 5$; $m_3 = 7$; $m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Além disso, $y_i = \frac{m}{m_i}$,

logo: $y_1 = \frac{105}{3} = 35$; $y_2 = \frac{105}{5} = 21$; $y_3 = \frac{105}{7} = 15$.

Agora vamos encontrar $\overline{y_1}$, que é o valor que multiplicamos por y_1 e obtemos resto 1 na divisão por m_1.

$y_1\,\overline{y_1} \equiv 1 \ (mod\, m_1)$

$35 \cdot 2 \equiv 1 \ (mod\, 3)$

$70 \equiv 1 \ (mod\, 3)$

$\overline{y_1} = 2$.

Vamos encontrar $\overline{y_2}$, que é o valor que multiplicamos por y_2 e obtemos resto 1 na divisão por m_2.

$y_2\,\overline{y_2} \equiv 1\ (mod\ m_2)$

$21 \cdot 1 \equiv 1\ (mod\ 5)$

$\overline{y_2} = 1$

Vamos encontrar $\overline{y_3}$, que é o valor que multiplicamos por y_3 e obtemos resto 1 na divisão por m_3.

$y_3\,\overline{y_3} \equiv 1\ (mod\ m_3)$

$15 \cdot 1 \equiv 1\ (mod\ 7)$

$\overline{y_3} = 1$.

Ademais, $b_i = a_i$.

Portanto pelo Teorema Chinês do Resto, temos que a solução do sistema será dada por:

$x = b_1\, y_1\, \overline{y_1} + b_2\, y_2\, \overline{y_2} + b_3\, y_3\, \overline{y_3}$

$x = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1$

$x = 140 + 63 + 30$

$x = 233$.

Simplificando 233 módulo 105 .

$$x \equiv 233\ (mod\ 105)$$

$$2 \cdot 105 = 210$$

$$233 - 210 = 23 \text{ , logo}$$

$x \equiv 23\ (mod\ 105)$ que é a única solução para o sistema.

Portanto, temos que: $x = 105t + 23$ com $t = \{1,2,3,4, \dots\}$, nos dará todas as soluções possíveis do sistema.

2.7 Aplicações do Teorema do Resto Chinês

De acordo com Santos (2017), o Teorema do Resto Chinês vem sendo usado desde o século III, no entanto, nessa época não se tinha uma demonstração do mesmo, ele também relata que o primeiro algoritmo desenvolvido para resolver esse problema foi descrito por Aryabhata no século VI. O autor também destaca que as primeiras noções de congruência foram apresentadas por Gauss, em sua obra *"Disquisitiones Arithmeticae"* em 1801, no qual ilustrou o teorema e introduziu um procedimento para resolvê-lo, no entanto, este procedimento já tinha sido usado por Euler, mas o mesmo procedimento já havia aparecido muito antes deles o apresentarem.

A seguir será apresentada uma aplicação simples de como esse teorema é utilizado no cotidiano. É importante ressaltar que o Teorema do Resto Chinês só funciona mediante a condição dos módulos serem coprimos entre si e dos sistemas serem consistentes, ou seja, um mesmo número x não pode deixar restos distintos na divisão por um mesmo m_i.

Exemplo 2.7.1: Será mostrado um caso de sistema inconsistente, onde um mesmo número x deixa resto 1 e 2 , respectivamente na divisão por 4 .

$x \equiv 1\ (mod\ 4)$ e $x \equiv 2\ (mod\ 4)$.

Exemplo 2.7.2: Um general chinês possuía 2000 soldados para uma batalha. Após o confronto ele precisou verificar suas baixas. Assim alinhou os soldados de 7 em 7 e sobraram 5. Quando alinhou de 9 em 9 sobraram 4. E quando alinhou de 10 em 10 sobrou apenas 1. Quantos soldados haviam na formatura, sabendo que há mais de 1500 indivíduos na formatura? (SOUSA 2017)

Solução: Para resolver esse problema vamos supor que x seja o número de soldados formados, montaremos então um sistema de congruência linear.

$$x \equiv 5\ (mod\ \ 7)$$
$$x \equiv 4\ (mod\ \ 9)$$
$$x \equiv 1\ (mod\ \ 10)$$

Temos que $m_1 = 7;\ m_2 = 9;\ m_3 = 10$

$$m = 7 \cdot 9 \cdot 10 = 630$$

Identificaremos os $y_i = \frac{m}{m_i}$

Onde, $y_1 = \frac{630}{7} = 90$; $y_2 = \frac{630}{9} = 70$; $y_3 = \frac{630}{10} = 63$.

Agora vamos definir $\overline{y_i}$, o elemento que multiplicado por y_i deixa resto 1 na divisão por m_1.

$y_1 \, \overline{y_1} \equiv 1 \ (mod \, m_1)$

$90 \cdot 6 \equiv 1 \ (mod \, 7)$

$540 \equiv 1 \ (mod \, 7)$

$\overline{y}_1 = 6.$

Agora vamos definir $\overline{y}_2$, o elemento que multiplicado por y_2 deixa resto 1 na divisão por m_2.

$y_2 \, \overline{y_2} \equiv 1 \ (mod \, m_2)$

$70 \cdot 4 \equiv 1 \ (mod \, 9)$

$280 \equiv 1 \ (mod \, 9)$

$\overline{y}_2 = 4.$

Agora vamos definir $\overline{y}_3$, o elemento que multiplicado por y_3 deixa resto 1 na divisão por m_3.

$y_3 \, \overline{y_3} \equiv 1 \ (mod \, m_3)$

$63 \cdot 7 \equiv 1 \ (mod \, 10)$

$441 \equiv 1 \ (mod \, 10)$

$\overline{y}_3 = 7.$

Ademais, $b_i = a_i$.

Portanto:

$x = b_1 \, y_1 \, \overline{y}_1 + b_2 \, y_2 \, \overline{y}_2 + b_3 \, y_3 \, \overline{y}_3$

$x = 5 \cdot 90 \cdot 6 + 4 \cdot 70 \cdot 4 + 1 \cdot 63 \cdot 7$

$x = 2700 + 1120 + 441$

$x = 4261$.

Então:

$x \equiv 4261 \ (mod \, 630)$

$x \equiv 481 \ (mod \, 630)$

Logo, $x = 630t + 481$

Como $1500 < x < 2000$, teremos apenas a solução inteira quando $t = 2$, portanto o resultado é:

$x = 630 \cdot 2 + 481$

$x = 1741$.

Por fim, o número de soldados presentes na formatura eram exatamente 1741 .

3. APRESENTANDO A CONJECTURA DE GOLDBACH

A conjectura de Goldbach é um dos problemas em aberto mais antigos da Matemática, ela é caracterizada por ser simples de enunciar, em contrapartida é extremamente difícil de ser demonstrada, por esse motivo ela está completando 282 anos sem uma solução. Esta conjectura surgiu a partir de uma troca de cartas entre dois matemáticos, um deles era Christian Goldbach, ele desenvolveu um interesse genuíno pela Matemática, embora não a tratasse de forma tão rigorosa quanto os demais matemáticos faziam, o outro matemático envolvido era Leonhard Euler, já este, bem conhecido levava a Matemática de maneira séria e fez diversas contribuições para a mesma. Eles mantiveram essa troca de correspondência por vários anos, no conteúdo dessas cartas continham diversas teorias, aplicações, suposições e provas, sobre diversos assuntos, entre eles estão, séries infinitas e números primos. A carta XLIII em que este problema foi escrito data de 7 de junho de 1742, de acordo com Sousa (2013) nela Goldbach escreve que *“Todo o inteiro que pode ser escrito como a soma de dois primos, também pode ser escrito como a soma de tantos primos quanto necessário, até todos os termos serem unitários”*, nesta mesma carta ele propôs outras assertivas,[1]*”Todo o inteiro superior a dois pode ser escrito como a soma de três primos”*- Esta ficou conhecida como a Conjectura marginal de Goldbach-, [2]*”Todo o inteiro par maior que dois pode ser escrito como a soma de dois primos", em* resposta a Goldbach, Euler escreveu em 30 de junho 1742,que a conjectura marginal parecia ser verdadeira e poderia ser decomposta em outras duas assertivas, são elas [3]*”Todo o número par maior que dois é a soma de dois primos”* e [4]*”Todo o número ímpar maior que seis é a soma de três primos”.* A assertiva [2] ficou conhecida como a Conjectura forte de Goldbach, a assertiva [3] proposta por Euler corresponde a conjectura que já tinha sido apontada por Goldbach, as demais ficaram conhecidas como conjecturas fracas e/ou marginais. Euler ainda afirmou que acreditava na veracidade da conjectura, porém disse não conseguir prová-la, ele ainda fez testes com pares até um determinado número e com isso ele ficava cada vez mais convicto de que ela poderia sim ser verdadeira, no entanto, não obtivemos uma prova dela até os dias de hoje.

3.1 Conjectura de Goldbach

“Todo número par maior que dois pode ser representado pela soma de dois números primos”

Exemplos 3.1.1: Os exemplos a seguir ilustram a ideia presente na conjectura, de que um número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos, não necessariamente distintos.

$$(i)\ 3+5=8$$
$$(ii)\ 11+7=18$$
$$(iii)\ 251+257=508$$
$$(iv)\ 5.927+5.563=11.496\,.$$

3.2 Quem foi Christian Goldbach?

As informações contidas nesta sessão podem ser encontradas no site intitulado MacTutor, pesquisando por Chridtian Goldbach Biography, este site está sob administração de JJ O'Connor e EF Robertson, da Universidade de St. Andrews Escócia, também podem ser encontradas informações sobre a correspondência Goldbach-Euler em [15] e [17].

Christian Goldbach nasceu no dia 18 de março de 1690 em Königsberg, Brandenburg-Prússia (atualmente Kaliningrado, Rússia). Filho de um ministro da Igreja Protestante de Königsberg, ele cresceu em Königsberg e estudou na universidade local, ao que se sabe Goldbach estudou um pouco de matemática, porém seu principal foco de estudo ficou voltado para o Direito e a Medicina, no entanto ele já demonstrava interesse genuíno na matemática. No ano de 1710, Christian partiu em uma viagem pela Europa, durante essa viagem ele conheceria cientistas muito renomados e que deixaram uma contribuição muito rica para algumas áreas do conhecimento, principalmente a Matemática, entre eles estão: Gottfried Leibniz, Nicolaus (I) Bernoulli, Nicolaus (II) Bernoulli, Daniel Bernoulli (com quem mantivera contato através de cartas durante sete anos), Georg Bernhard Bilfinger, Jakob Hermann e Leonhard Euler (com quem manteve uma troca de correspondência que durou cerca de 35 anos).

Uma de suas primeiras interações matemáticas ocorreu no ano de 1712 com Nicolaus I Bernoulli, quando o mesmo tentou introduzi-lo ao estudo da Teoria das Séries Infinitas, Goldbach admitiu não ter o conhecimento necessário para compreender, no entanto, esse encontro o motivou a aprofundar seus estudos no campo da Matemática. Em 1717 Goldbach leu um artigo de Leibniz sobre o cálculo da área de um círculo, que o levou a revisitar a teoria das séries infinitas, em 1720 ele publicou um artigo denominado *"Specimen methodi ad summas serierum"* (Exemplos de métodos de soma de séries) nos *"Acta eruditorum"*, no ano de 1724 ele publicaria outro artigo também sobre séries infinitas.

Quando estava em Veneza em 1721, Goldbach conheceu Nicolaus II Bernoulli que o incentivou a trocar correspondências com seu irmão mais novo Daniel Bernoulli a partir de 1723, durando cerca de sete anos. Em 1724 Goldbach retorna a Königsberg, encontrando Georg Bernhard Bilfinger e Jakob Hermann que juntamente com Christian Wolff e Leibniz se envolveriam na criação da Academia Imperial de Ciências que mais tarde ficaria conhecida como Academia de Ciências de São Petersburgo. Em julho de 1725 quando Goldbach estava em Rija, ele escreve para L L Blumentrost o mais novo diretor da academia, pedindo um cargo, a princípio Goldbach foi rejeitado, mas posteriormente lhe seria oferecido um cargo como professor de matemática e historiador de São Petersburgo.

Entre 27 de dezembro de 1725 até janeiro de 1728 Goldbach atuou como secretário de registro da cerimônia de abertura da Academia. Após alguns acontecimentos políticos da época, Goldbach acabou sendo nomeado tutor de Pedro II em 1727, pois o mesmo assumiu o trono muito jovem devido a morte de Pedro I Czar da Rússia, e sua esposa Catarina, neste mesmo ano Euler muda-se para São Petersburgo, no entanto Pedro II transfere a corte para Moscou em 1728 fazendo com que Goldbach os acompanhe. Já em Moscou Goldbach começa sua correspondência com Euler em 1729, durando cerca de 35 anos. Após a morte de Pedro II em 1730 por varíola, Anna Ivanovna tornou-se imperatriz da Rússia, no entanto Goldbach continuou a servi-la, em 1732 ela retorna à corte para São Petersburgo, tornando possível o envolvimento de Goldbach com a Academia novamente, ele foi nomeado secretário correspondente da Academia em 1732 e, em 1737, tornou-se a segunda pessoa responsável pela administração da Academia o primeiro responsável era J.D.Schuhmacher. Mesmo com as mudanças de governantes Goldbach continuava a ocupar cargos muito importantes, em 1740 ele solicita que suas funções prestadas a

Academia fossem reduzidas, sendo assim nomeado para um cargo sênior no Ministério das Relações Exteriores, ele encerra suas atividades na Academia. Em 1760, Goldbach foi nomeado como conselheiro privado, lhe sendo solicitado o desenvolvimento de diretrizes estabelecidas para a educação de crianças nobres, as mesmas seriam aceitas pelos 100 anos seguintes.

Partindo para a perspectiva Matemática, Goldbach fez contribuições importantes na Teoria dos números, o mesmo ficou mais conhecido por sua Conjectura desenvolvida a partir da correspondência estabelecida com Leonard Euler em 1742, onde ele diz que "*todo número par maior que dois pode ser representado como a soma de dois números primos"*, Goldbach também conjecturou que "todo número ímpar é a soma de três primos", Vinogradov fez progresso nessa conjectura em 1937, no entanto, a mesma permanece sem uma solução completa. Juntamente com Euler, Goldbach discutiu diversos outros temas matemáticos, como: Números de Fermat, números de Mersenne, números perfeitos, a representação de números naturais como soma de quatro quadrados, o problema de Waring (que Euler resolveu antes de Waring), Polinômios que representam números primos, o último Teorema de Fermat, e a representação de números ímpares na forma $2n^2 + p$, onde p é primo. Esta última conjectura foi escrita em uma carta direcionada a Euler no ano de 1752, onde o mesmo disse ter verificado para números até 1000, e em 1753 ele afirmou ter verificado até 2500, no entanto em 1856, Moritz A. Stern, que era professor de Matemática em Göttingen, encontrou dois números que não obedeciam à regra (5777 e 5993), provando que a conjectura era falsa, no entanto, nenhum outro número que não satisfaça essa conjectura foi encontrado. Embora Goldbach faça parecer que não levava a Matemática de uma forma tão rigorosa como os demais matemáticos faziam, é importante destacar as contribuições dele para o campo, principalmente da Teoria dos Números.

Salvo destacar outros dois artigos escritos por ele sobre Séries Infinitas, "*De transformatione serierum"* (Sobre a transformação de séries) em 1729 e "*De terminis generalibus serierum"* (Sobre as condições gerais das séries) em 1732, o primeiro artigo mencionado introduziu um método para transformar uma série em outra enquanto mantém a soma fixa, e o outro ampliou o trabalho iniciado em um artigo de 1720. Por fim, Goldbach também fez uma contribuição para a Álgebra, quando juntamente com Euler durante a troca de correspondências, desenvolveu um teste rápido para saber se uma equação algébrica tem uma raiz racional. Goldbach faleceu em 20 de novembro de 1764, na presença de G.F Müller que foi responsável por enviar uma descrição de como ocorreu o funeral, em três cartas destinadas a Euler. Goldbach não chegou a se casar, nem teve filhos tão pouco tinha parentes próximos.

4. RESULTADOS IMPORTANTES ACERCA DA CONJECTURA

A Conjectura de Goldbach é um problema que vêm perpetuando desde 1742, muitos matemáticos tentaram demonstrá-la, porém não obtiveram êxito. De acordo com Ribeiro (2022) muitos matemáticos da época não se comprometeram em tentar demonstrar a conjectura por medo de perderem prestígio ao não conseguirem, um pensamento que também pode ser visto nos dias atuais, porém, não com tanta frequência. Segundo o autor, houve um divisor de águas quando a conjectura foi citada em duas listas de problemas, a primeira foi em 1900, essa lista foi proposta no Congresso Internacional de Matemática em Paris, a mesma foi apresentada por David Hilbert e continha 23 problemas, a segunda ocorrera em 1912 sendo essa lista apresentada por Edmund Landau contendo quatro problemas, a partir daí foram desenvolvidas diversas tentativas de demonstrar a conjectura, partindo das mais criativas até as mais complexas. Embora a Conjectura esteja em aberto até os dias de hoje, obtivemos resultados importantes com as tentativas de demonstração. É importante destacar que neste trabalho não iremos apresentar a demonstração destes resultados.

Se formos seguir uma ordem cronológica dos acontecimentos, um dos primeiros resultados importantes, acerca dos estudos realizados com o objetivo de demonstrar a conjectura, veio em 1919 quando o matemático norueguês Viggo Brun demonstrou que qualquer número par suficientemente grande é a soma de outros dois números, onde cada um deles tem no máximo nove fatores primos, no entanto, Brun não chegou a definir o que “suficientemente grande” seria, contudo ele conseguiu introduzir seu método de crivo, ajudando a estabelecer limites para a soma de dois números primos.

Seguindo os estudos, somos direcionados agora para o ano de 1923 onde acompanhamos os matemáticos britânicos, Godfrey Harold Hardy e John Edensor Littlewood, que baseando-se na hipótese de Riemann mostraram que, todo número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos, e quase todos os números pares são a soma de dois números primos. Seguindo para o ano de 1930, agora baseando-se no resultado de Burn, o matemático russo Lev Schnirelman, mostrou que todo número inteiro par e maior ou igual a 2, é a soma de, no máximo, vinte números primos. Já em 1937 o matemático, também russo, Ivan Matveevich Vinogradov conseguiu retirar a dependência da hipótese de Riemann, provando assim o resultado de Hardy e Littlewood,de que todo número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos, no entanto, ele ainda deixara em aberto o que “suficientemente grande” chegaria a ser.

Agora, fazendo um salto cronológico, chegamos ao ano de 1966, onde o matemático chinês Chen Jingrm, tomando como base o resultado de Burn, demonstrou que todo número par suficientemente grande é a soma de um número primo e um produto de, no máximo, dois números primos. Partindo para o ano de 1995, o matemático francês, Oliver Ramaré concluiu seus estudos sobre o Teorema de Schnirelman, com isso ele conseguiu provar que todo número par é a soma de, no máximo, seis números primos. A descoberta mais recente que temos data de 2013, onde o matemático peruano, Harald Helfgott utilizando métodos de crivo e com ajuda de seus colaboradores, conseguiu provar que qualquer número ímpar maior que cinco, pode ser expresso com a soma de três números primos, sendo essa a versão ternária da conjectura de Goldbach. Embora esses estudos tenham sido muito importantes, não chegaram a provar a conjectura, portanto a mesma continua em aberto, porém todos esses teoremas servem como um limitador, para que os matemáticos que se desafiarem a resolver esse problema, tenham uma base sólida para suas pesquisas e resultados.

5. APRESENTANDO A HIPÓTESE DE RIEMANN

A Matemática é um campo que procura sempre identificar os padrões, temos exemplos disso quando nos deparamos com sequências numéricas, como PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica). Dito isso, os matemáticos se depararam com os números primos, que a princípio não pareciam ter um padrão, fazendo com que não soubéssemos onde vai aparecer o próximo primo. Contudo, começaram os estudos para tentar determinar um padrão dentro desses números, pois não fazia sentido eles agirem de forma tão irregular, muitos matemáticos tinham a convicção de que o comportamento dos primos não era aleatório ou “por acaso”.

O primeiro passo em busca desse “padrão”, veio por meio do Crivo de Eratóstenes, que foi um método em que se construía uma tabela, a exemplo de 1 até 100, e partindo do número dois, começava-se a riscar os múltiplos daquele número, o próximo número era o três e assim sucessivamente, até só sobrarem os primos.

Logo após o crivo, tivemos a prova da infinitude dos primos, que veio através de Euclides (325 a.C- 256 a.C), onde ele prova por contradição, assumindo que os primos fossem finitos até um determinado x, ele chega à conclusão que sempre haverá um primo maior que o tal x, chegando a uma contradição e provando que os primos são infinitos.

Seguindo os estudos, o próximo resultado importante veio por meio de Pierre de Fermat (1601-1665), ele formulou uma conjectura sobre números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, que ele afirmava serem todos primos, estes números ficaram conhecidos como *“Os primos de Fermat”,*no entanto, mais tarde Euler provou que nem todos os números dessa forma eram realmente primos, Fermat também fez outra contribuição importante que conhecemos hoje como *“O pequeno Teorema de Fermat”,* este teorema afirma que se p é um número primo e a é um número inteiro que não é divisível por p, então $a^{p-1} \equiv 1\,(mod\,p)$, este teorema é um resultado muito importante para a criptografia moderna.

Outras contribuições importantes vieram com Euler (1707-1783), ao estudar sobre séries infinitas, Euler conseguiu provar o problema da Basileia, que consistia em determinar qual a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Euler determinou que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Esse resultado revolucionou a análise matemática, pois ele abordou outros conceitos de outras áreas da matemática que não eram comumente utilizados, como conceitos de geometria e o próprio π (Pi). Quando Euler começa a estudar Teoria dos Números, baseando-se nas obras de Fermat, ele faz uma relação da distribuição dos primos com conceitos de análise matemática, ele então conseguiu provar que a soma dos inversos dos primos diverge, com isso, ele descobriu uma forte relação da função Zeta com a distribuição dos primos, hoje em dia conhecemos essa relação por produtos de Euler para a função Zeta. Essa relação da função Zeta com a distribuição dos primos comprovaram a seguinte identidade:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Onde

$$\prod_{p\ primo} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}}\cdot\frac{1}{1-3^{-s}}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{1}{1-p^{-s'}}\cdots$$

é um produto infinito que se estende para todos os primos, essas expressões são conhecidas como produtos de Euler.

Seguindo os estudos sobre a distribuição dos primos, Gauss (1777-1855) teve uma ideia, “e se ao invés de tentar determinar um padrão de surgimento dos primos, pudéssemos estimar quantos primos existem até um certo valor x”. Dito isso, ele propôs a seguinte fórmula:

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln(x)}$$

Onde $\pi(x)$ representa a contagem de números primos até um da do valor x, a mesma indica que quanto maior o x, mais densidade dos primos diminui, Gauss não provou essa fórmula, mas em 1896, dois matemáticos Jacques Hadamard (1865-1963) e Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866-1962), independentemente um do outro provaram que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}=1$$

que ficou conhecido como *O Teorema dos Números Primos.*

Pouco antes de Gauss, Legendre (1752-1833), conjecturou uma fórmula semelhante

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x) - 1.08366}$$

no entanto, devido à utilização desse termo de correção (1.08366), a fórmula ficou muito “artificial”, pois Legendre não tinha uma justificativa para a utilização do termo, ele apenas foi escolhido por conveniência.

Por fim, em 1859 Bernhard Riemann foi eleito para a Academia de Ciências de Berlim, como um membro recém eleito ele teria que publicar seu trabalho mais recente, então ele publicou um artigo intitulado *"Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe"* -Sobre o número de números primos abaixo de um dado valor- onde ele estava investigando a conjectura de Legendre e Gauss, que fala sobre a distribuição dos primos abaixo de um valor x , que ficou conhecido como o Teorema dos Números Primos. Riemann queria provar essa conjectura, ele não conseguiu, mas obteve resultados muito relevantes.

Neste artigo, ele procurou explorar a função ζ, que já havia sido abordada por Euler, no problema da Basiléia, no entanto Riemann modificou a função, pois o interesse dele não era trabalhar no conjunto $\mathbb{R}$, e sim no $\mathbb{C}$, ou seja, ele conseguiu expandir analiticamente a função ζ para trabalhar no conjunto dos números complexos.

A função ζ de Riemann é holomorfa, ou seja, ela é complexa e diferenciável em um certo domínio do plano, onde para $Re(s) > 1$, é definida pela expressão:

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, que é equivalente a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

A Hipótese de Riemann afirma que todos os zeros não triviais da função Zeta, tem parte $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Os zeros triviais da função Zeta são

$\{s = -2, -4, -6, \cdots\}$, onde $s \in \mathbb{C}$ é um número complexo.

Riemann assume que todos os zeros não triviais estão sobre a *faixa crítica* definida por $0 < Re(s) < 1$.

5.1 Conjectura (Hipótese de Riemann): Todos os zeros não triviais da função ζ estão sobre a linha crítica $Re\,(s) = \frac{1}{2}$, onde $0 < Re\,(s) < 1$.

5.2 Quem foi Bernhard Riemann?

As informações contidas nesta sessão podem ser encontradas no site intitulado MacTutor, pesquisando por Georg Friedrich Bernhard Riemann Biography, este site está sob administração de JJ O'Connor e EF Robertson, da Universidade de St. Andrews Escócia [16].

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 em Breselenz, Hannover, atual Alemanha. Riemann era o segundo filho, de um total de seis, que seu pai, um ministro da igreja Luterana, chamado Friedrich Riemann, tivera ao casar-se com Charlotte Ebell. Até seus dez anos de idade Riemann era educado por seu pai e um professor de uma escola local, chamado Schulz.
Em 1840 Riemann entra diretamente na terceira classe do Lyceum em Hannover e passa a morar com sua avó, no entanto em 1842 ela acaba falecendo e Riemann muda-se para o Johanneum Gymnasium, lá o descrevem como um aluno esforçado e interessado em disciplinas clássicas, como hebraico e teologia, nessa época já se notava um crescente interesse em Matemática da parte dele. Então o diretor do Johanneum Gymnasium permite que Riemann frequente sua biblioteca particular, e lhe entrega um exemplar contendo 900 páginas sobre Teoria dos números de Legendre, que ele leu em impressionantes seis dias.

Na primavera de 1846, Riemann se matriculou na Universidade de Göttingen para estudar teologia, atendendo aos desejos de seu pai. Contudo, ele logo começa a assistir palestras de Matemática e, após pedir permissão de seu pai, transfere-se para da faculdade de filosofia para estudar Matemática com Moritz e Gauss, pois ele era muito apegado à família e caso seu pai não permitisse, ele não faria a mudança de curso. Embora parecesse que ele estava em um lugar adequado para estudar Matemática, a Universidade de Göttingen era um lugar bastante pobre para esse campo. Logo, na primavera de 1847 Riemann se muda para a Universidade de Berlim, para estudar com Steiner, Jacobi, Dirichlet e Eisenstein. Durante esse período, ele é particularmente influenciado por Dirichlet, adotando assim o estilo intuitivo e preciso deste professor, Riemann também aprendeu muito com Eisenstein, um dos tópicos discutidos entre eles foi o uso de variáveis complexas na Teoria da Função Elíptica.

Em 1849 Riemann retorna à Universidade de Göttingen, onde lá ele é supervisionado por Gauss na produção de sua tese de doutorado, que aborda a teoria das variáveis complexas, introduzindo o conceito das superfícies de Riemann que conhecemos hoje, e métodos topológicos aplicados à teoria das funções complexas. A defesa de sua tese aconteceu em 16 de dezembro de 1851, ela é examinada por Gauss, que a elogia por sua “originalidade gloriosamente fértil”. Este trabalho examinou as propriedades geométricas das funções analíticas e introduziu o uso do Princípio de Dirichlet, uma técnica aprendida por Riemann durante as palestras de Dirichlet. Como parte da sua habilitação, Riemann teria que apresentar uma palestra, logo, ele elabora três propostas, duas relacionadas à eletricidade e uma relacionada à geometria. A contragosto de Riemann, Gauss escolhe a palestra de geometria, intitulado *“Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen”* (Sobre as hipóteses nos fundamentos da geometria) apresentada em 10 de junho de 1854, abordava a definição de espaços de várias dimensões, o conceito de espaço Riemanniano que conhecemos atualmente, e o tensor (que são como “caixas multidimensionais de números”) de curvatura, ao final ele levanta questões profundas relacionando a geometria com o mundo em que vivemos. Gauss foi um dos poucos que compreendeu a profundidade desta palestra, que se tornou fundamental para o desenvolvimento da relatividade geral.

No ano de 1855, com a morte de Gauss, Dirichlet assume sua cadeira em Göttingen, neste período houve uma tentativa de conseguir um cargo para Riemann na universidade, mas a priori não obtiveram êxito. Só no ano de 1857, dois anos após a tentativa de obtenção deste cargo, ele finalmente é nomeado professor e com isso veio a publicação de um artigo, intitulado *“Teoria das Funções Abelianas”*,resultado de anos de estudo e estava contido em um curso de palestras que ele apresentou para três pessoas nos anos de 1855-1856, a mesma expande o conceito de superfícies de Riemann e explora as propriedades topológicas das funções multivaloradas. Esse artigo apresentou ideias inovadoras, fazendo com que Weierstrass, que era um matemático que também estava estudando esses tópicos, reavaliasse e retirasse sua pesquisa que fora submetida à Academia de Berlim em 1857. Em 1858, os matemáticos italianos Betti, Casorati e Brioschi visitam Göttingen, Riemann os recebe e compartilha com eles suas ideias sobre topologia, formando assim uma colaboração que tardiamente seria renovada quando ele visitasse a Itália em 1863.

No ano de 1859, após a morte de Dirichlet, Riemann assume a cátedra de Matemática em 30 de julho, e é eleito para a Academia de Ciências de Berlim, por indicação de três matemáticos, Kummer, Borchardt e Weierstrass. Como sendo um membro recém-eleito ele deveria relatar sua pesquisa mais recente, foi aí que Riemann enviou um relatório de título *"Sobre o número de primos menores que uma determinada magnitude".* Neste relatório, Riemann examinou a função ζ , que já fora introduzida por Euler, no entanto, apenas aplicada ao conjunto dos reais, mas Riemann quis estender essa função para o conjunto dos complexos, ou seja, ele olhou ela como uma função complexa, tinham algumas exceções triviais, as raízes de ζ todas estão entre 0 e 1. Neste breve artigo ele afirma que a função ζ tinha infinitas raízes não triviais e que era provável que elas tivessem parte real igual a 1/2, esta foi nomeada a famosa Hipótese de Riemann que continua como um dos maiores problemas não resolvidos da Matemática. O objetivo principal do artigo era dar algumas estimativas acerca do número de primos menores que um determinado valor. Alguns dos resultados que Riemann obteve, posteriormente foram comprovados por Jacques Hadamard (1865-1963) e Charles de La Vallée Poussin (1866-1962).

Em junho de 1862, Riemann casou-se com Elise Koch, uma amiga próxima de sua irmã, juntos tiveram uma filha, no outono do mesmo ano de seu matrimônio Riemann acaba pegando um resfriado, que posteriormente evolui para uma tuberculose, ele sempre teve a saúde debilitada, ele tenta remediar seu estado clínico se mudando para um clima mais quente da Itália. Ele passou o inverno dos anos de 1862-1863 na Sicília, e também viajou pela Itália, reencontrando Betti e passando um tempo com ele e com os outros matemáticos que o visitaram em Göttingen, ele chega a voltar brevemente para Göttingen em 1863, porém devido seu estado de saúde ter piorado, ele retorna para a Itália. Riemann passou o período de agosto de 1864 até outubro de 1865 no norte da Itália, ele volta a Göttingen para o inverno de 1865-1866, depois retorna a Selasca nas margens do Lago Maggiore em 16 de junho de 1866, Riemann faleceu quatro dias depois, em 20 de julho de 1866, seu amigo Richard Dedekind relatou que, mesmo sentindo que seu fim estava próximo, um dia antes que sua morte, recostado embaixo de uma figueira, Riemann trabalhou em sua última pesquisa que, infelizmente, foi deixada inacabada.

6. RESULTADOS IMPORTANTES ACERCA DA HIPÓTESE DE RIEMANN

Sabemos que o campo da Matemática é muito amplo, composto por diversas áreas tanto de pesquisa em Matemática pura e aplicada, como na área da educação. A maioria das pessoas veem a Matemática como um campo, fechado, padronizado e que tudo pode explicar, mas na realidade não é assim que as coisas acontecem, vimos no decorrer desta pesquisa que existem problemas em aberto, em especial, relacionados aos números primos, que são o maior mistério da Matemática até os dias de hoje, conseguimos provar muitas coisas a respeito deles, porém o desejo que os matemáticos têm de querer determinar um padrão dentro dos primos é tão forte que "queima como fogo". Essa sessão abordará alguns resultados obtidos ao decorrer dos anos, na tentativa de provar a famosa Hipótese de Riemann. É importante salientar, que neste trabalho não iremos demonstrar esses resultados, apenas citá-los brevemente.

A primeira contribuição veio com Jacques Hadamard (1865-1963), em 1893 ele provou uma conjectura de Riemann que afirmava que todos os zeros não triviais da função ζ estão sobre a *faixa crítica* dada por $0 < Re(s) < 1$.

Outra contribuição não veio como um resultado, mas sim, um "incentivo", no ano de 1900, quando David Hilbert (1862-1943), um matemático alemão, apresentou em sua palestra no segundo congresso de matemáticos de Paris, a proposta de "trabalhar com o desconhecido", causando uma certa estranheza aos seus ouvintes, ele prosseguiu e apresentou uma lista contendo 23 problemas, sendo o oitavo deles, a hipótese de Riemann. Hilbert ainda enfatizou que se ao acaso ele entrasse em um sono que durasse 500 anos, a primeira coisa que faria ao acordar, seria perguntar se conseguiram demonstrar a Hipótese de Riemann. Tanto essa declaração de Hilbert, quanto sua lista de problemas, impulsionou os estudos sobre a hipótese, e se realmente poderíamos determinar um padrão dentro dos números primos. Em 1914 Godfrey Harold Hardy (1877-1947), provou que existem infinitos zeros sobre a reta $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Segundo Fritsche e Suguimoto (2015), também em 1914 foi demonstrado por Niels Bohr (1885-1962) e Lev Landau (1908-1968), que todos, exceto uma porção infinitesimal de zeros não triviais estão muito próximos da reta crítica. Os autores ainda ressaltam que em 1989, Brian Conrey provou que não importa quantos zeros não triviais existam, pelo menos 40% deles estarão na reta crítica.

Já no ano 2000, foi anunciado pelo Instituto Clay de Matemática, uma lista com os sete problemas do milénio, entre eles estava a Hipótese de Riemann, onde está sendo oferecido um prémio de um milhão de dólares para quem apresentar uma prova do mesmo.

Por fim, no ano de 2018 o matemático Michael Atiyah (1929-2019), fez uma declaração em meio a sua palestra, intitulada “O Último Teorema”, de que havia encontrado uma prova para a Hipótese de Riemann, no entanto ele não apresentou nenhum trabalho ou artigo com a suposta prova, portanto a alegação dele não foi considerada pela comunidade Matemática.

A Hipótese de Riemann é um problema muito importante, e caso seja demonstrada algum dia, causará um alvoroço na comunidade Matemática, não só por ser um problema do milénio, ou por ter um prémio milionário sendo oferecido em troca de uma demonstração, e sim, pelo fato de afetar diretamente outros tópicos, como por exemplo, a segurança dos dados dispostos na *Internet,* que utilizam métodos de codificação de dados, principalmente a criptografia RSA, que será abordada brevemente no próximo capítulo.

7. A HIPÓTESE DE RIEMANN E A CRIPTOGRAFIA RSA

Atualmente vivemos a era digital, devido aos avanços matemáticos e consequentemente tecnológicos, portanto tornou-se importante proteger nossos dados, que querendo ou não, estão disponíveis nos meios digitais. Logo, desenvolveram-se métodos para codificar essas informações, para que assim, só o seu destinatário possa ter a chave de decodificação tendo acesso livre a mensagem.

No entanto, a ideia de mandar mensagens codificadas não surgiu tão recentemente quanto pensamos. Segundo Molinari (2019), a primeira pessoa a utilizar métodos de codificação foi Júlio César (100 a.C - 44 a.C), quando o mesmo mantivera contato com suas tropas através de códigos. No entanto, o método utilizado por ele era simples, segundo o autor era feita a substituição da letra pela sua sucessora, ou seja, transladava uma casa para diante. Como era um método simples tiveram que modificá-lo, pois estava sendo facilmente decifrado, Molinari (2019) afirma que eles dividiram a mensagem em grupos para poder criptografá-la, dando origem a um sistema polígrafo.

Durante os anos foram surgindo outros métodos de criptografia, a exemplo, temos as Cifras de Hill, que utiliza dos conceitos de matrizes. Mas devido a necessidade de assegurar os dados, no ano de 1977 foi criado o método de Criptografia RSA, que leva a inicial do sobrenome de seus criadores, Ron L. Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, estudantes do Massachutts Institute of Technology (MIT).

O método de criptografia RSA consiste em pegar dois números p e q primos, onde $n = p \cdot q$, o n é a chave pública, ou seja, que é conhecida por todos, mas para poder decodificar a mensagem precisamos saber quem são p e q , que são as chaves de decodificação. Parece ser até simples, se os números fossem pequenos, no entanto para garantir a segurança, os números primos escolhidos contêm mais de 100 algarismos, tornando impossível fatorar n . Portanto, a eficácia do método RSA é garantida através da ineficiência dos algoritmos de fatoração para números com muitas casas decimais. Dito isso, qual a relação da Hipótese de Riemann com a criptografia RSA?

Bem, já foi dito que a eficácia do RSA só existe por causa da incapacidade de fatorar a chave pública para encontrar a chave privada de decodificação, no entanto, se a Hipótese de Riemann for provada e pudermos garantir que todos os zeros não triviais da função ζ estão sobre a reta crítica, será possível desenvolver uma lei de distribuição dos primos, que possibilitará a fatoração da chave pública e assim poderá decodificar as chaves privadas, tornando a mensagem acessível para outras pessoas além do seu destinatário. A criptografia RSA é muito utilizada para garantir a segurança das transações bancárias.

Este tópico foi abordado como uma curiosidade, para destacar a importância da hipótese de Riemann, e mostrar que tem mais coisas em jogo na sua resolução, além do prémio de um milhão de dólares.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, este trabalho tem como objetivo servir de divulgação científica, através dele queríamos mostrar outro lado da Matemática, que não conhecemos quando estudamos na educação básica e também não nos é apresento no ensino superior, o lado da matemática que está "por fazer". A abordagem inicial foi feita a partir do pressuposto de que a matemática está em constante desenvolvimento, que ela vem sendo construída gradualmente, para podermos ter um embasamento foi escolhido trabalhar com dois problemas em aberto da Matemática, na área de Teoria dos Números. Ambos os problemas trabalham com os números primos, que até hoje são um mistério, esses problemas, em especial a Hipótese de Riemann tenta "desvendar" como a distribuição dos primos acontece, pois o principal motivo que torna os números primos tão intrigantes é o fato de não apresentarem um padrão de distribuição.

Ao decorrer do trabalho foram apresentados resultados importantes já provados na teoria dos números, como a infinitude dos primos e o TFA, em seguida fizemos uma revisão bibliográfica sobre a vida dos matemáticos, depois apresentamos os problemas, foram abordados alguns resultados desenvolvidos a partir das tentativas de demonstração dos mesmos, ao final foi adicionado um capítulo para tratar da principal consequência que a prova da Hipótese de Riemann causará se for atestada sua veracidade, este capítulo fala sobre a criptografia moderna, que são métodos criados para codificar mensagens, compras *online,* transações bancárias entre outros, que envolvem a utilização de dados através da *Internet.* Uma curiosidade a ser destacada é que no dia 12 de outubro de 2024, foi descoberto o maior número primo até agora, contendo cerca de 41 milhões de dígitos, a descoberta foi feita pelo professor e pesquisador Luke Durant de 36 anos, na Califórnia. Este é um bom exemplo que nos mostra que a Matemática está em constante desenvolvimento.

Esperamos que este trabalho tenha contribuído para o leitor de alguma forma, seja ele um estudante de licenciatura, um pesquisador curioso, ou um professor apaixonado por números primos. Queremos divulgar o quão viva está a matemática, o quanto já foi feito e o quanto ainda está por fazer, a matemática é muito bela, e existem n possibilidades de mostrarmos isso para nossos alunos, e até para nós mesmos. Seja curioso.

REFERÊNCIAS

[1] AGUILERA-NAVARRO, Maria Cecília K.; AGUILERA-NAVARRO, Valdir C.; FERREIRA, Ricardo C.; TERAMON, Neuza. **A Função Zeta de Riemann**. Guarapuava: Departamento de Matemática, Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO; Londrina: Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina – UEL. Revista Ciências Exatas e Naturais.v,1. n,1. 1999. Disponível em:<A função zeta de Riemann | Aguilera-Navarro | RECEN - Revista Ciências Exatas e Naturais>. Acesso em: 09 nov.2024.

[2] BARTH, Ricardo. **Crivo de Eratóstenes:** *o que é e como construir*. 2018. Matemática Genial. Disponível em:<https://www.matematicagenial.com/2018/09/crivo-de-eratostenes-o-que-e-como-construir.html>. Acesso em: 26 nov. 2024.

[3] BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. **Teoria dos Números:** *um curso introdutório*. Belém: AEDI/UFPA,2018.

[4] BITENCOURT, Carolina da Silva. **A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática**. Dissertação de Mestrado. Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA, Salvador-Bahia, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3914&id2=150131131>. Acesso em: 30 ago. 2024.

[5] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

[6] CHAVES, Marcelo Santos. **A Linguagem dos Números Primos: Uma abordagem Epistemológica Sobre a Conjectura de Goldbach**. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo*, 2014. Disponível em: <https://www.eumed.net/rev/atlante/2014/03/linguagem-numeros-primos.html>. Acesso em: 14 ago. 2024.

[7] DOXIADIS, Apóstolos. **Tio Petros e a Conjectura de Goldbach**. Tradução de Carlos Alberto Bárbaro. São Paulo: Editora Record, 2001.

[8] DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos:** *a história de um problema não resolvido na matemática.* Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

[9] FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981.

[10] FILHO, Marcos Fernando Cancio Justo dos Santos. **Euler e o problema de Basiléia**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa,2014. Disponível em: < https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7504 >. Acesso em: 11 nov.2024.

[11] FREITAS, Antônio Carlos Pereira de. **Teorema Fundamental da Aritmética e Aplicações.** Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.Redenção,2023. Disponível em:<Repositório Institucional: Teorema fundamental da aritmética e aplicações>. Acesso em: 08 nov.2024.

[12] FRITSCHE, Willian Cleyson; SUGUIMOTO, Alexandre Shuji. **Os números primos e a hipótese de Riemann**. In: IX EPCC - Encontro Internacional de Produção Científica, 3-6 nov. 2015, Maringá. Universidade Cesumar, 2015. Disponível em:< http://rdu.unicesumar.edu.br/handle/123456789/2605 >. Acesso em: 11 nov. 2024.

[13] GASPARETI, Leandro. **O Santo Graal da Matemática:** *A Hipótese de Riemann.* Dissertação de Mestrado- PROFMAT- Universidade Tecnológica Federal do Paraná.Curitiba,2014. Disponível em:< https://core.ac.uk/download/pdf/150139574.pdf >. Acesso em: 13 nov.2024.

[14] GRANJA, Gustavo. **A Hipótese de Riemann**. Departamento de Matemática IST,2019. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~lgodin/Seminario/HR.pdf >. Acesso em: 11 nov.2024.

[15] J.J. O'CONNOR; ROBERTSON, E.F. **Christian Goldbach biographie**. Universidade de St Andrews, Escócia, 2006. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach/> . Acesso em: 15 ago. 2024.

[16] J.J. O'CONNOR; ROBERTSON, E.F. **Georg Friedrich Bernhard Riemann biographie .** Universidade de St Andrews, Escócia, 1998. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/ >. Acesso em: 23 out. 2024.

[17] LEMMERMEYER, Franz; MATTMÜLLER, Martin (ed.). **Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach**. Part I. Basel: Springer, 2015. Disponível em: <https://edoc.unibas.ch/58842/> . Acesso em: 29 set. 2024.

[18] LEGENDRE, Adrien Marie. **Essai sur la theorie des nombres; par AM Legendre, membre de l'Institut et de la Legion d'Honneur**.. chez Courcier, imprimeur-librai re pour les mathematiques, quai des Augustins, 1808.

[19] LIMA, Heronilza Silva. **A hipótese de Riemann e a ameaça à criptografia.** 2022. Monografia (Especialização) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia. Disponível em: http://repositorio.ifg.edu.br:8080/handle/prefix/1330. Acesso em: 12 nov. 2024.

[20] MOREIRA, César Augusto; AVILA, Jorge Andrés Julca. **A Hipótese de Riemann:** *uma Perspectiva Generosa*. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de São João del-Rei, Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em:<Dissertações do PROFMAT – PROFMAT>. Acesso em: 06 nov. 2024.

[21] MOLINARI, José Robyson Aggio; RETSLAFF, Franciéle Maria de Souza. ***Números primos e a criptografia RSA:*** *um possível ataque à sua segurança*. Exatas Online, v. 10, n. 2, p. 42-58, out. 2019. Disponível em:< https://www.researchgate.net/publication/336730966_Numeros_Primos_e_a_Criptografia_RSA_um_Possivel_Ataque_a_sua_Seguranca_Prime_Numbers_and_RSA_Encryption_A_Possible_Attack_on_your_Security >. Acesso em: 13 nov. 2024.

[22] PAIVA, Carlos Daniel Chaves; MARREIROS, Emerson Charles do Nascimento; CAVALCANTI, André; SENA, Diarlley Emanuel Lacerda de Almeida Loiola; LIMA, Antonieta Maria Sousa; TOMÉ, Joelder Lincoln Gomes; ARAÚJO, Michael Douglas Batista de; FERREIRA, João Raimundo Silva; VALE, Alberton Fagno Albino do; NELES, Carlos Daniel Nascimento; ARAÚJO, Francisco Cleuton de; ANDRADE, Antonio Daniel Marinho de; VIEIRA, Marcia Maria Siqueira; SILVA, Felipe Matheus Vitorino de Mattos; PINTO, Francisco Ricardo Miranda; SILVA, Francisco. **A busca pela prova da conjectura de Goldbach: explorando suas conquistas**. *Caderno Pedagógico*, Univates, v. 21, n. 7, 2024. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/index.php/acervo/buscador.html?task=detalhes&source=&id=W4400817909> . Acesso em: 10 out. 2024.

[23] PEPE, Pietro Ribeiro. **Introdução à Análise e Função Zeta de Riemann.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. Disponível em:< https://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/pibic/relatorio_resumo2014/relatorios_pdf/ctc/MAT/MAT-Pietro%20Ribeiro%20Pepe.pdf > Acesso em: 13 nov. 2024.

[24] RIBEIRO, Wellington Dias. **Quatro Conjecturas e muitas Tentativas: Problemas em aberto da Teoria de Números envolvendo Números Primos**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2022. Disponível em: <2022-05-Wellington-Dias-Ribeiro.pdf (uesb.br)> . Acesso em: 15 ago. 2024.

[25] SALES, Francisco Odécio; FREIRES, Kevin Cristian Paulino; SOUSA, Maria Aparecida de Moura Amorim; MARREIROS, Emerson Charles do Nascimento; FERREIRA, João Raimundo Silva; NASCIMENTO, Marcos André Maia do; SILVA, Micael Campos da; LIMA, Francisco Felipe Ramos Rodrigues. **Os teoremas de incompletude de Gödel e a conjectura de Goldbach**. *Caderno Pedagógico*, Univates, v. 21, n. 7, 2024. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/index.php/acervo/buscador.html?task=detalhes&source=&id=W4400382223> . Acesso em: 10 out. 2024.

[26] SANTOS, Audemir dos. **Teorema Chinês dos Restos e Aplicações.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Amazonas, Manaus,2017. Disponível em:<TEDE: Teorema Chinês dos restos e aplicações >. Acesso em: 11 nov.2024.

[27] SANTOS, José Carlos. **A hipótese de Riemann-150 anos.** 2009.Disponível em:<Hipótese de Riemann - 150 anos>Acesso em: 09 nov.2024.

[28] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. Campinas, 20 de agosto de 1998. (Coleção Matemática Universitária).

[29] SILVA, Jáfia Gileane de Lima. **O Ensino de Números Primos Através de Problemas Abertos**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2018. Disponível em: <http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/1520> . Acesso em: 07 ago. 2024.

[30] SILVA, Marcus Vinícius Barbosa da. **Hipótese de Riemann***: uma perspectiva histórica e epistemológica*. Goiânia: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ifg.edu.br/handle/prefix/1578 > . Acesso em: 05 nov. 2024.

[31] SOUSA, José Emanuel. **Conjectura de Goldbach -** *Uma visão Aritmética*. Universidade dos Açores, Departamento de Matemática. Ponta Delgada,2013. Disponível em:<Repositório da Universidade dos Açores: Conjetura de Goldbach: uma visão aritmética>.Acesso em: 17 out.2024.

[32] SPENTHOF, Roberto; SOUZA, Josiney de. **Primos***: da aleatoriedade ao padrão*. Revista Professor de Matemática, v. 1, n. 1, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2013/pmo12. Acesso em: 11 nov. 2024.

[33] VIEIRA, Márcia Oliveira. **O Teorema dos Números Primos.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão,2023. Disponível em: < https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/18016 >. Acesso em: 11 nov.2024.

[34] VOIGHT, John. **Número primo de 41 milhões de dígitos é o maior já encontrado, mas matemáticos continuam na busca pela perfeição numérica**. *G1 Educação*, 18 nov. 2024. Disponível em: <Número primo de 41 milhões de dígitos é o maior já encontrado, mas matemáticos continuam na busca pela 'perfeição' numérica | Educação | G1 >. Acesso em: 26 nov. 2024.