UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE MATEMÁTICA

TIAGO PEREIRA LEITE

UMA ANÁLISE QUALITATIVA DO SISTEMA MASSA MOLA

Patos
2024

TIAGO PEREIRA LEITE

UMA ANÁLISE QUALITATIVA DO SISTEMA MASSA MOLA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática pura e aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

Patos
2024

L533a Leite, Tiago Pereira.
Uma analise qualitativa do sistema massa mola [manuscrito] / Tiago Pereira Leite. - 2024.
48 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Análise qualitativa. 2. Plano de fase. 3. Plano traço-determinante. 4. Sistema massa mola. I. Título

21. ed. CDD 531

Elaborada por Kaliane Eveny Martins de Oliveira - CRB - 15/986 BSC7

TIAGO PEREIRA LEITE

UMA ANALISE QUALITATIVA DO SISTEMA MASSA MOLA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 22/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ademir Benteus Pampu** (***.824.629-**), em **27/11/2024 15:20:54** com chave **574653e8acec11efb38e06adb0a3afce**.
- **Gildevan Oliveira Silva** (***.419.054-**), em **28/11/2024 15:10:03** com chave **fd3289e4adb311efafec1a7cc27eb1f9**.
- **Jean Pereira Soares** (***.449.544-**), em **28/11/2024 16:50:05** com chave **f73ae08cadc111efb4ef1a1c3150b54b**.

Dedico este trabalho à minha amada companheira, Maria Vítoria, à minha família composta por minha mãe Mazerlandia Leite Pereira, meu pai Nicolau Pereira da Silva e meu irmão Tauan Pereira Leite, à meu orientador Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu, E a todos aqueles que acreditaram em mim e me ajudaram a alcançar este objetivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e sabedoria que me permitiram chegar até aqui. A minha amada companheira, Maria Vítoria Nogueira, que esteve ao meu lado em cada momento, me incentivando, apoiando e compartilhando minha jornada. Seu amor e carinho foram fundamentais para minha motivação e sucesso. A minha família, principalmente a meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram a perseguir meus sonhos e nunca me deixaram desistir. Ao meu orientador, Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu , pela orientação, apoio, paciência e confiança depositada em mim. Aos meus amigos e colegas de turma, que compartilharam comigo momentos de estudo, risos e aprendizado. Este trabalho é dedicado a todos vocês, que fizeram parte da minha trajetória acadêmica.

”A matemática é o instrumento mais poderoso para a compreensão do mundo.”
Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O presente trabalho surge a partir da modelagem matemática de um interessante e importante fenômeno físico chamado sistema massa-mola. Inicialmente, apresentaremos como aplicar princípios fundamentais da física para descrever a posição do objeto preso em uma mola por meio de uma equação diferencial ordinária (E.D.O.) de segunda ordem. Feito isso, reescreveremos tal equação como um sistema linear de EDOs de primeira ordem. Além disso, discutiremos o comportamento qualitativo das soluções de um sistema de EDOs de primeira ordem, apresentando tal estudo com o conceito de plano de fase. Por fim, voltaremos ao sistema massa mola e aplicaremos os resultados obtidos a partir do estudo qualitativo dos sistemas de EDOs de primeira ordem para descrever o comportamento de suas soluções.

Palavras-chave: Análise qualitativa. Plano de fase. Plano traço-determinante .Sistema massa mola.

ABSTRACT

This study develops a mathematical model of the mass-spring system, a significant physical phenomenon. We commence by deriving a second-order ordinary differential equation (ODE) that describes the object's position using fundamental physical principles. Subsequently, we transform this equation into a linear system of first-order ODEs. Additionally, we examine the qualitative behavior of solutions to first-order ODE systems, employing the phase plane concept. Ultimately, we apply the insights gained from this qualitative analysis to elucidate the behavior of solutions to the mass-spring system

Keywords: Qualitative analysis. Phase plane. Trace-determinant plane.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são uma importante ferramenta matemática que serve para modelar, investigar e compreender fenômenos como crescimento populacional, o comportamento de doenças virais e entre outros problemas das ciências naturais. A sua utilização se dá em diversas áreas da ciência, engenharia, matemática aplicada e física, pois a partir dela conseguimos montar gráficos que nos darão noções de como se comportam tais problemas. A história das equações diferenciais ordinárias tem início com o estudo do cálculo com Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton(1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), os quais a partir do entendimento sobre derivadas e integrais conseguiram contribuir para o avanço do que se compreende atualmente, como cálculo diferencial e integral.

Neste trabalho serão apresentados alguns conceitos da álgebra linear e a classificação das equações diferenciais. Além disso, veremos como transformar uma equação diferencial ordinária de ordem superior em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. No segundo capítulo, será apresentado como se dá a resolução de sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes de acordo com algumas condições. No terceiro capítulo, será mostrado como se comportam as soluções gerais desse sistema a partir do estudo do seu plano de fase e sua representações geometricas. No quarto capítulo, será apresentada uma noção sobre o plano de fase de um sistema linear homogêneo sem mesmo ter encontrado sua solução geral a partir do plano traço-determinante e por fim será feita a modelagem e uma análise qualitativa sobre o comportamento das soluções do problema chamado sistema massa-mola, onde a partir do plano traço determinante que em determinadas condições dara o comportamento do sistema massa-mola no plano de fase, com o qual descreveremos o comportamento do sistema.

2 Resultados Preliminares

2.1 Auto-Valores e Auto-Vetores

Definição 2.1. Seja S um $\mathbb{K}$ espaço vetorial ($\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos) e $T : S \longrightarrow S$ uma transformação linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é dito um auto-valor de T se existe $v \in S$ (v um vetor), $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$ e v é o auto-vetor.

Exemplo 2.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(v) = 3v$, $v \in \mathbb{R}^2$, veja que, para qualquer $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

deste modo, $\lambda = 3$ é auto-valor de T e os auto-vetores $v \neq (0,0)$ estarão associados a $\lambda = 3$.

Definição 2.2. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o polinômio de grau n dado por $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ é denominado **polinômio característico** da matriz **A**, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.
Dada uma transformação linear qualquer $T : V \longrightarrow V$, temos que $A = [T]_B$ e dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in S$, onde S é um espaço vetorial, tal que o sistema $Av = \lambda v$ possua uma solução não trivial, ou seja, $(A - \lambda I_n)v = 0$ em que $v \neq 0$ para isso devemos ter $det(A - \lambda I_n) = 0$, pois caso contrario a matriz será invertível e teremos uma solução trivial.

Exemplo 2.2. Veja que no Exemplo 2.1 a matriz:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

onde B é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, com isso teremos que $p_T(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ será:

$$p_T(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_T(\lambda) = (3 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

neste caso $\lambda = 3$ será a única raiz do polinômio característico de T, isto é , $\lambda = 3$ é seu único auto-valor.

Definição 2.3. Seja λ um auto-valor de uma operação linear $T : S \longrightarrow S$, com S um um $\mathbb{K}$ espaço vetorial de dimensão finita e supondo que $p_T(x) = (x - \lambda)^m q(\lambda)$,$q(\lambda) \neq 0$, isto é, λ não é raiz de q e m é então denominado a multiplicidade algébrica de λ. Chama-se multiplicidade geométrica de λ à dimensão do subespaço $S_T(\lambda)$, no qual $S_T(\lambda)$ é o subespaço formado por todos os auto-vetores de T associados ao auto-valor λ.

Com isso temos que de acordo com o Exemplo 2.2 a multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ é 2. Agora para a multiplicidade geométrica temos pela definição de auto-vetor e auto-valor temos que :

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= 0 \\ (A - \lambda I_n)v &= 0 \end{aligned}$$

isto é possível graças às propriedades dos espaços vetoriais e as propriedades das transformações lineares.

Substituindo nossa matriz e o auto-valor na equação temos:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como já sabemos $\lambda = 3$ então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

logo todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é auto-vetor associado ao nosso auto-valor λ, agora para a base temos:

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) = x(1, 0) + y(1, 0)$$

com isso temos que a base de $S_A(3)$ é $\{(1, 0), (0, 1)\}$, nos quais os vetores são linearmente independentes e geram o espaço, com isso temos que $dimS_A(3) = 2$.

2.2 Classificação das Equações Diferenciais quanto ao tipo, ordem e linearidade

As equações diferenciais são equações que envolvem uma função desconhecida e suas derivadas. Elas podem ser classificadas quanto ao tipo, ordem, linearidade e homogeneidade.

1 **Classificação quanto ao tipo da equação diferencial**

Uma equação diferencial é uma equação diferencial ordinária (EDO) se a função desconhecida depende de uma única variável independente.

Exemplo 2.3. A equação:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \tag{2.1}$$

é uma EDO, pois $y' = 2x + 3y$ depende apenas da variável $y = y(x)$, nossa função desconhecida, na qual depende apenas da variável $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4. Uma equaçao diferencial é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) se a função desconhecida depende de mais de uma variável.

Exemplo 2.4. Considere a seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2.2}$$

onde k é uma constante qualquer e a função u depende de x, y,z e t. Portanto (2.2) é uma EDP.

2 **Ordem de uma equação diferencial**

A classificação quanto a ordem de uma equação diferencial se dá a partir da derivada de maior ordem que aparece na equação.

No exemplo 2.3 temos um exemplo de EDO de ordem 1, pois a derivada de maior ordem na equação é de ordem 1.

Exemplo 2.5.

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(x) \tag{2.3}$$

Esta equação é um exemplo de uma EDO de ordem superior, pois sua derivada de maior ordem é 2. As EDO's de ordem superior são as que tem ordem igual ou maior que dois.

3 **Equações Lineares**

Uma EDO linear de primeira ordem é uma equação da seguinte forma:

$$y' + c(t)y = d(t) \tag{2.4}$$

na qual $c, d : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções, pois a função desconhecida e suas derivadas estão elevadas a primeira potência e sem multiplicação entre elas, se uma EDO de primeira ordem não tem a forma de (2.4) ela é dita **não linear**.

Uma equação linear de segunda ordem é da seguinte forma:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(x) \tag{2.5}$$

da mesmas forma a,b,c,d:$I \longrightarrow \mathbb{R}$ também são funções, e percebe-se que de mesmo modo a função e suas derivas estão elevadas a primeira potência e sem multiplicação entre elas, caso contrário será uma equação de segunda ordem **não linear**.

4 **EDO Homogênea de Primeira Ordem**

Usando o Exemplo 2.4 e considerando $d(t) = 0$, para todo $t \in I$, temos:

$$y' + c(t)y = 0 \tag{2.6}$$

esta equação é dita **homogênea**, pois é igual a 0 caso contrário ela não será homogênea.

5 **Sistemas de Equações Diferenciais**

Um sistema de EDO's de primeira ordem é uma coleção de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e geralmente são escritos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.7}$$

em que se cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ for linear então dizemos que temos um sistemas de equações diferenciais lineares.

Exemplo 2.6. Vamos mostrar nesse exemplo como reescrever uma EDO linear de ordem 2 na forma de um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Seja a equação $y'' + 3y' + 5y = 0$, defina $x_1 = y, x_2 = y'$assim vamos ter que $x_1' = x_2$ e $x_2' = y''$, então a equação pode ser reescrita como $x_2' + 3x_2 + 5x_1 = 0$, desta forma teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -3x_2 - 5x_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

agora para um melhor entendimento e uma melhor visualização com a intenção de facilitar na hora de mudar o sistema para a notação matricial, chamaremos $x_1 = x$ e $x_2 = y$, assim $x_1' = x'$ e $x_2' = y'$ o sistema ficará com a seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -5x - 3y \end{cases} \tag{2.9}$$

passando para a notação matricial teremos na forma compacta:

$$\mathbf{x'=Ax} \tag{2.10}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

perceba que no primeiro elemento da primeira linha é 0, pois no nosso sistema $x' = y$,ou seja, não possui x do lado direito da igualdade na primeira equação do sistema.

2.3 Sistemas de Equações Diferenciais

Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz de ordem n, nesta seção vamos considerar um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$x'(t) = Ax(t) \tag{2.11}$$

temos os seguintes teoremas:

Teorema 2.1. *(Existência e unicidade de soluções) Considerando o problema de valor inicial (P.V.I):*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{cases} \tag{2.12}$$

suponha que toda função $a_{ij}(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$, com $1 \leq i,j \leq n$, seja uma função contínua num intervalo $I = [a,b]$ contendo t_0. Então o problema (2.12) tem uma única solução no *intervalo I.*

Este teorema nos diz que os sistemas do tipo (2.11) possuem solução e esta solução é única.

Teorema 2.2. ***(I)****Se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções do sistema homogêneo*

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

então, $X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t)$, onde c_1 e c_2 são constantes, também é solução.
(II) *A dimensão do espaço de todas as soluções do sistema de equações lineares homogêneas é n.*

As demonstrações dos teoremas 2.1 e 2.2 são encontradas em Reginaldo J. Santos (2013).

Definição 2.5. Pelo Teorema 2.2 (II) temos que os sistemas de equações lineares homogêneos possuem n soluções linearmente independentes $x_1, ..., x_n$, então pelo teorema 2.2(I) nossas soluções são desta forma:

$$x = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

a qual é denominada de **solução geral** do sistema de equações linear homogêneo.

2.4 Análise Qualitativa de uma Equação Diferencial Ordinária

Agora estudando um pouco mais a fundo as EDO's tomando como referência o seguinte exemplo:

Exemplo 2.7. Dado $a \in \mathbb{R}$ e a equação $x' = ax$, com condição inicial $x(0) = k$, será feita uma análise qualitativa a respeito do comportamento das suas soluções.
Sobre esta equação temos que $x = x(t)$ é nossa função desconhecida, x' é a sua derivada e $a \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, no qual para cada valor de a temos uma equação diferente com isso para cada valor de $t \in \mathbb{R}$ temos o seguinte (P.V.I) :

$$x'(t) = ax(t) \ , \ x(0) = k$$

e a solução geral para esta equação é:

$$x(t) = ke^{at},$$

de fato

$$x'(t) = ake^{at}$$
$$x'(t) = ax(t)$$

e

$$x(0) = ke^{a0} = k$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é a condição inicial a ser determinada.

Agora fazendo uma análise minuciosa de como se comportam as soluções desta equação diferencial temos:

1 No primeiro caso, temos que quando consideramos a, k >0, o $\lim_{t\to\infty} ke^{at} = \infty$ isso significa que as soluções crescem ilimitadamente, mas quando $k < 0$ $\lim_{t\to\infty} ke^{at} = -\infty$ ou seja as soluções decrescem ilimitadamente;

2 No segundo caso, quando a=0 temos que $ke^{at} = k$ para todo t,ou seja, as soluções para esse caso ficaram dependentes do valor de k;

3 No terceiro caso, quando consideramos $a < 0$, $\lim_{t\to\infty} ke^{at} = 0$,ou seja, as nossas soluções tendem a 0.

Para uma melhor visualização podemos analisar graficamente o comportamento dessa equação para os 3 casos:

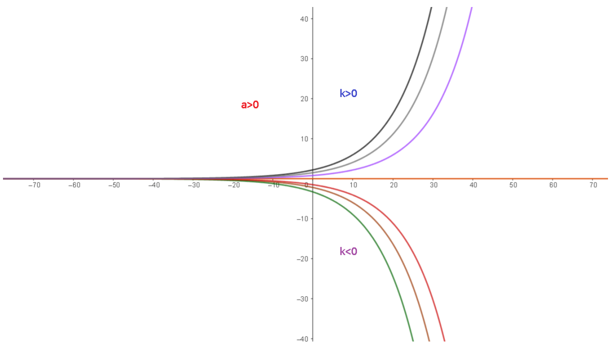

Figura 1 – Caso 1: para cada curva (ou seja para cada linha) temos uma equação particular e percebe-se que quando a> 0 as soluções se distanciam da origem. Fonte: Autor.

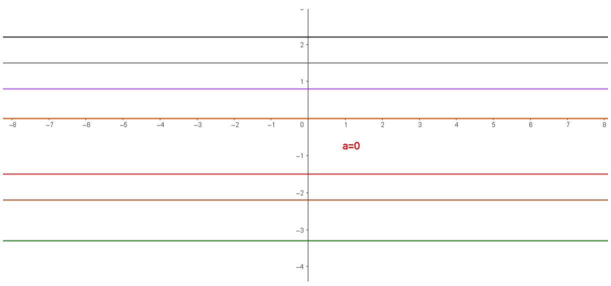

Figura 2 – Caso 2: agora vemos que quando a=0 vamos ter que x é constante, pois $x' = x.0$. Fonte: Autor.

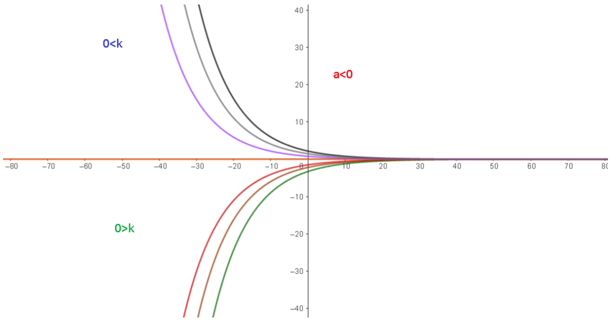

Figura 3 – Caso 3: neste caso temos que quando a< 0 as soluções tendem para 0 .Fonte: Autor.

3 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Neste capítulo vamos aprender a solucionar sistemas de EDO's que podem ser expressos em sua forma matricial como $x' = Ax(t)$, no qual A é uma matriz de coeficientes constantes de ordem 2. A transformação de uma EDO de ordem superior em um sistema foi ilustrado no Exemplo (2.6).

Para isso temos que o Teorema 2.1 nos garante a existência da solução para esse tipo de sistema e vamos procurar soluções do tipo:

$$x(t) = e^{\lambda t}v$$

e

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}v \tag{3.1}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um número e o vetor constante $v \in \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{v}= (v_1, v_2) \neq 0_v$, pois buscamos uma solução não trivial, mas nosso sistema na forma matricial como já dito é da forma $x' = Ax(t)$, nesse sentido temos:

$$x' = Ae^{\lambda t}v$$

por (3.1) temos:

$$\begin{aligned}
\lambda e^{\lambda t}v &= e^{\lambda t}Av \\
e^{\lambda t}Av - \lambda e^{\lambda t}v &= 0 \\
e^{\lambda t}(Av - \lambda v) &= 0
\end{aligned}$$

então, como $e^{\lambda t} \neq 0$,

$$\begin{gathered}
Av - \lambda v = 0 \\
(A - \lambda I_2)v = 0
\end{gathered}$$

ou seja, para encontrar as soluções para um sistema do tipo $x' = Ax(t)$ basta encontrarmos os auto-valores e auto-vetores associados a matriz, deste modo para encontrar os auto-valores associados a A devemos calcular o polinômio característico, que como já sabemos pode ser calculado da seguinte forma:

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2)$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2, com isso vamos resolver a equação de segundo grau, que nós dará 2 raízes, as quais serão nossos auto-valores associados a A e essas raízes podem ser $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$ ou $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Em seguida devemos encontrar nossos auto-vetores associados a A da seguinte forma:

$$(A - \lambda I_2)v = 0$$

entendendo isso na seção seguinte será dada uma melhor explicação a respeito destas soluções e como resolver em cada um dos 3 possíveis casos.

3.1 Auto-valores Reais e Distintos

Dado uma matriz A na qual $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$ se caso encontrar as raízes deste polinômio (ou seja os auto-valores de A), na qual elas sejam reais e distintas basta encontrar os auto-vetores associado à matriz da seguinte forma

$$(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0$$

e a solução é

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}v_1$$

e para a segunda solução

$$(A - \lambda_2 I_2)v_2 = 0$$

então

$$x_2 = e^{\lambda_2 t}v_2$$

observe que x_1,x_2 são duas funções linearmente independentes, logo a solução geral do sistema $x' = Ax$ será dada por:

$$x = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Para facilitar o entendimento será feito o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} x$$

Solução: O primeiro passo é encontrar o polinômio característico:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 7 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 48 = \lambda^2 - 2\lambda - 48 \tag{3.2}$$

com isso temos que os auto-valores de A são: $\lambda_1 = -6$ e $\lambda_2 = 8$.

$$(A - (-6I))v = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7a + 7b = 0 \\ 7a + 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b \tag{3.3}$$

Com isso temos que um auto-vetor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $x^1(t) = e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Agora o segundo auto-vetor:

$$(A - 8I)v = \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7a + 7b = 0 \\ 7a - 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \tag{3.4}$$

Com isso temos que um auto-vetor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x^2(t) = e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Portanto temos que $x_1(t) = e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $x_2(t) = e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ são soluções do sistema. Agora verificando se x_1,x_2 são linearmente independentes, temos:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} c_1 e^{-6t} + c_2 e^{8t} \\ -c_1 e^{-6t} + c_2 e^{8t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-6t} & e^{8t} \\ -e^{-6t} & e^{8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Temos que

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t} & e^{8t} \\ -e^{-6t} & e^{8t} \end{pmatrix}$$

para as soluções x_1 e x_2 serem linearmente independentes temos que $det(W(t)) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ Assim

$$\begin{aligned} det(W(t)) &= e^{-6t}e^{8t} - e^{8t}(-e^{-6}) \\ &= e^{2t} + e^{2t} = 2e^{2t} \neq 0 \end{aligned}$$

logo x_1 e x_2 são linearmente independentes, então pelo Teorema 2.2 temos que $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-6t} \\ -e^{-6t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{8t} \\ e^{8t} \end{pmatrix}$ é a solução geral do nosso exemplo.

3.2 Auto-valores Reais e Repetidos

Como já sabemos dada a equação do tipo **x'=Ax** podemos solucionar como no exemplo acima, mas e se caso os auto-valores forem repetidos ?
Teremos que caso o polinômio característico tenha raiz $\lambda \in \mathbb{R}$ com a multiplicidade algébrica maior que 1 teremos dois casos:

(I) Existem 2 auto-vetores linearmente independentes associados a λ.

(II) existe menos de 2 auto-vetores linearmente independentes associados a λ

No primeiro caso será análogo ao caso em que os auto-valores são distintos, ou seja, teremos

$$x_1(t) = e^{\lambda t}v_1$$

e

$$x_2(t) = e^{\lambda t}v_2$$

onde nossa solução geral será da seguinte forma

$$x(t) = c_1e^{\lambda t}v_1 + c_2e^{\lambda t}v_2$$

com λ nosso único auto-valor associado a A. No caso **II** não teremos 2 auto-vetores linearmente independentes associados a λ, então temos que (2.11) podem não existir soluções que são expressas usando apenas funções exponenciais e vetores constantes. A solução para este caso será feita procurando a partir de produtos de polinômios e exponenciais.

Exemplo 3.2. Veremos como resolver este caso a partir deste exemplo:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Solução:

Seguindo o mesmo processo temos que o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ com isso temos que $\lambda = 2$ é o nosso auto-valor com multiplicidade algébrica igual a 2. agora procurando um auto-vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tais que $(A - 2I)v = 0$ ou seja:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \left\{ x + y = 0 \qquad \Rightarrow x = -y \right. \tag{3.5}$$

Portanto nossa primeira solução é da forma:

$$x_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora vamos procurar uma segunda solução do tipo

$$x_2 = te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2$$

onde para x_2 ser solução devemos ter

$$x_2' = A x_2$$

e

$$x_2' = e^{\lambda t} v_1 + \lambda t e^{\lambda t} v_1 + \lambda e^{\lambda t} v_2$$

com isso temos

$$\begin{aligned} x_2' &= A(te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2) \\ x_2' &= te^{\lambda t} A v_1 + e^{\lambda t} A v_2 \\ e^{\lambda t} v_1 + \lambda t e^{\lambda t} v_1 + \lambda e^{\lambda t} v_2 &= te^{\lambda t} A v_1 + e^{\lambda t} A v_2 \\ t(\lambda e^{\lambda t} v_1 - A(e^{\lambda t} v_1)) + e^{\lambda t} v_1 + \lambda e^{\lambda t} v_2 &= e^{\lambda t} A v_2 \end{aligned}$$

como

$$\lambda e^{\lambda t} v_1 - A(e^{\lambda t} v_1) = x_1' - A x_1 = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}v_1 + \lambda e^{\lambda t}v_2 &= e^{\lambda t}Av_2 \\ e^{\lambda t}v_1 &= e^{\lambda t}Av_2 - \lambda e^{\lambda t}v_2 \end{aligned}$$

dividindo os dois lados da igualdade por $e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} Av_2 - \lambda v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda I_2)v_2 = v_1 \end{aligned}$$

ou seja para procurarmos v_2 basta resolver $(A - \lambda I_2)v_2 = v_1$, assim

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \qquad a = 1 - b$$

Portanto temos que:

$$x_2 = te^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verificando se x_1 e x_2 são linearmente independentes temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_1e^{2t} \\ c_1e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2te^{2t} \\ c_2te^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -c_1e^{2t} \\ c_1e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2(-te^{2t} + e^{2t}) \\ c_2te^{2t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -c_1e^{2t} + c_2(-te^{2t} + e^{2t}) \\ c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -e^{2t} & -te^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Chamando

$$W(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & -te^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} det(W(t)) &= -e^{2t}te^{2t} - (-te^{2t} + e^{2t})e^{2t} \\ det(W(t)) &= -e^{4t} \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto x_1 e x_2 são linearmente independentes assim pelo Teorema 2.2 temos que nossa solução geral é:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[te^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

3.3 Auto-valores Complexos

Neste caso temos que nossos auto-valores serão da seguinte forma $\lambda = a + bi$, com $b \neq 0$ os nossos auto-vetores associado a λ são $v = v_1 + v_2 i$ com $v_2 \neq 0$, pois caso $b = 0$ e $v_2 = 0$ recairemos no caso de auto-valores reais, com isso temos que v será nosso auto-vetor, então a função $z(t) = e^{\lambda t} v$ é nossa solução com valores complexos do sistema, Neste caso, veja que:

Lema 3.1. *Se $\boldsymbol{z}(t) = x(t) + iy(t)$ é uma solução com valores complexos de (2.11), então tanto $x(t)$ e $y(t)$ são soluções reais de (2.11).*

Deste modo, iremos separar a parte real da parte imaginária que ficara da seguinte forma: seja uma solução com valores complexos:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 e^{\lambda_1 t} = (a + bi)e^{\alpha + \beta i t} \\ &= (a + bi)e^{\alpha t}.e^{\beta i t} \\ &= (a + bi)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + sen(\beta t) i) \end{aligned}$$

Esta última etapa se dá pela fórmula de Euler:

$$e^{\theta i} = cos(\theta) + isen(\theta)$$

Agora só isolar os termos:
$x' = e^{\alpha t}(acos(\beta t) - bsen(\beta t) + ie^{\alpha t}(asen(\beta t) + bcos(\beta t))$
Podemos perceber que a parte a esquerda da equação é a parte Real ($Re = e^{\alpha t}(acos(\beta t) - bsen(\beta t))$ e a parte da esquerda é a que corresponde a imaginária ($Im = e^{\alpha t}(asen(\beta t) + bcos(\beta t))$, nos quais x_1 e x_2 serão nossas 2 soluções .

Exemplo 3.3. Para um melhor entendimento vamos resolver o seguinte exemplo:

$$\textbf{x'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$$

Seguindo os primeiros passos procurando o polinômio característico da equação temos que $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4}$, no qual $\lambda_1 = \frac{-1 + 2i}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-1 - 2i}{2}$ são nossos auto-valores, agora escolhendo λ_1 para encontrar as nossas soluções (sim basta apenas escolher um auto-vetor para termos 2 soluções), temos:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda i)v_1 &= 0\\
\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2}+i\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} &= 0\\
\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow \left\{-ia+b=0 \Rightarrow b = ia\right.
\end{aligned}$$

com isso temos que:

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Agora nossa solução é:

$$X = e^{\lambda t}v = e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t}$$

mas esta solução é complexa e queremos duas soluções reais.

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix} e^{\frac{-1}{2}t} e^{it}\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}[cos(t)+isen(t)]\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ i\end{pmatrix}[e^{-\frac{t}{2}}cos(t)+e^{-\frac{t}{2}}isen(t)]\\
&= \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}cos(t)+e^{-\frac{t}{2}}isen(t) \\ ie^{-\frac{t}{2}}cos(t)-e^{-\frac{t}{2}}sen(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}cos(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}}sen(t)\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}sen(t) \\ e^{-\frac{t}{2}}cos(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

vamos ter que nossas soluções são

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}cos(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}}sen(t)\end{pmatrix}$$

e

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \\ e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \end{pmatrix}$$

Agora verificando se x_1 e x_2 são linearmente independentes temos que

$$\begin{pmatrix} -c_1 e^{-\frac{t}{2}} cos(t) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \\ -c_1 e^{-\frac{t}{2}} sen(t) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-\frac{t}{2}} cos(t) & e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}} sen(t) & e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

chamando

$$W(t) = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{t}{2}} cos(t) & e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}} sen(t) & e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \end{pmatrix}$$

agora calculando

$$\begin{aligned} det(w(t)) &= -e^{-t} cos^2(t) - e^{-t} sen^2(t) \\ &= -e^{-t}[cos^2(t) + sen^2(t)] \\ &= -e^{-t} \neq 0 \end{aligned}$$

então x_1 e x_2 são duas soluções linearmente independentes, logo nossa solução geral será:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} sen(t) \\ e^{-\frac{t}{2}} cos(t) \end{pmatrix}$$

4 Plano de Fase

Neste capítulo para um melhor entendimento sobre o comportamento das nossas soluções de sistemas lineares homogêneas de matrizes constantes de ordem 2 do tipo **x'=Ax** faremos uma análise sobre estes sistemas no **plano de fase** já que como já visto nossa solução geral é composta por duas funções, então vamos fazer uma representação sobre estas soluções no plano (x_1,x_2), onde serão registrados o conjunto de soluções de uma determinada equação, que é o **retrato de fase**, pois a partir desse registro podemos fazer uma análise qualitativa a respeito das soluções e também será explicado como pode ser feito este registro no plano de fase manualmente.
Como já sabemos a partir dos auto-valores associados a matriz **A** as equações têm diferentes maneiras de se resolver e não é diferente neste caso, a partir disto veremos o que fazer em cada caso para registrar a solução no plano de fase e o que podemos perceber a partir de cada tipo de situação.

4.1 Auto-Valores Reais e Distintos com Sinais Iguais

Como já sabemos as soluções gerais dos sistemas neste caso é da seguinte forma:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \tag{4.1}$$

No qual $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ são nossos auto-valores e v_1, v_2 são nossos auto-vetores, a partir disso vamos supor que $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ temos que

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$$

ou seja todas as soluções tendem a 0 quando t cresce e as soluções são assintoticamente estaveis . Nesse sentido, podemos reescrever a equação (4.1) da seguinte forma

$$X(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} v_2)$$

percebe-se que $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ e $c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} v_2$ é desprezível, ou seja, independente do valor de c_1 e $c_2 \neq 0$ as curvas das soluções tendem ao vetor v_1.
Temos também se caso uma solução tenha seu ponto inicial em v_1 com mesma direção isso significa que $c_2 = 0$ e estas soluções também tendem a 0 o mesmo ocorre caso as soluções tenham início em v_2. Uma das possibilidades seria a qual λ_1 e λ_2 seriam positivos, e nesse caso teriamos que λ_1 seria maior e as curvas tenderiam para v_1, mas ao invés de as soluções tenderem a 0 o

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$$

ou seja elas se distanciam dele e são assintoticamente instáveis, este tipo de plano de fase é chamado de **fonte**. Para um melhor entendimento veja o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1. Dada a seguinte equação:

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x \tag{4.2}$$

este tipo de equação já sabemos resolver, a partir disso vamos ter que $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -1$ vamos ter que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pelo Teorema 2.2 temos que nossa solução geral é:

$$X = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Teremos o seguinte plano de fase:

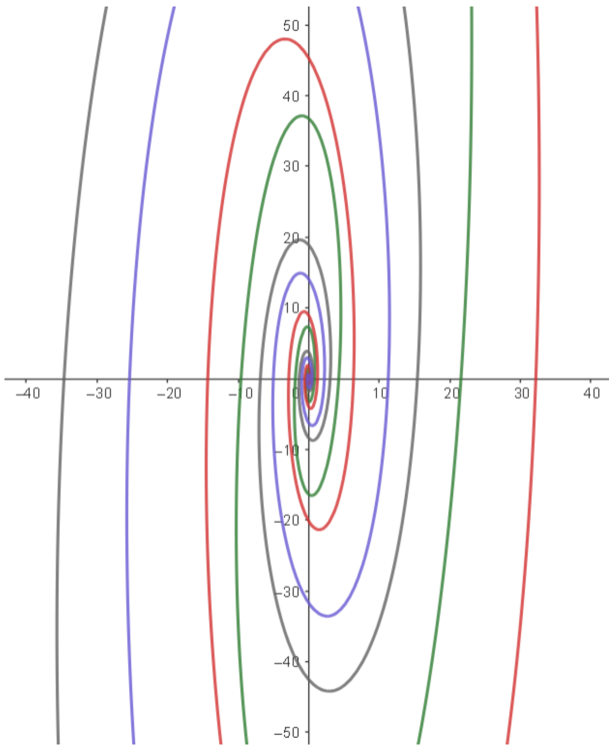

Figura 1 – Como já afirmado as curvas estão indo em direção a 0.Fonte: Autor.

Neste tipo de situação percebe-se que todas as curvas tendem a v_2, pois λ_2 é maior que λ_1 e se observa que as curvas são tangentes a 0 e ele é chamado de **sovedouro**.

4.2 Auto-valores Reais Com Sinais Distintos

Levando em consideração a mesma solução geral, mas dessa vez teremos $\lambda_1 > 0 e \lambda_2 < 0$ nesse caso teremos que o **termo dominante**, no qual está associado a um auto-vetor, onde as curvas tendem a se aproximar sempre será o termo positivo, caso tenhamos que

uma solução em que $c_1 = 0$ teremos que as soluções tendem a origem e permanecem na mesma trajetória que v_2 quando t$\longrightarrow \infty$ como na Figura 1 , caso a solução inicie em v_2 teremos que $c_1 = 0$ e ela tende a seguir o vetor e se afastar de 0 quando t$\longrightarrow \infty$ como na Figura 1.
Podemos perceber que tirando as soluções que começam em algum ponto de v_2, todas elas tendem ao infinito quando t$\longrightarrow \infty$. Caso t$\longrightarrow -\infty$ teremos que o termo dominante será o auto-valor negativo e a situação apenas se inverte, esse tipo de situação se chama **ponto de sela**. Para uma melhor visualização segue o Exemplo.

Exemplo 4.2. Usando o Exemplo 3.1, no qual estudamos o sistema:

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} x$$

para esse sistema já encontramos sua solução geral e temos que $\lambda_2 = 8$ é o nosso termo dominante caso t$\longrightarrow \infty$, quando $c_2 = 0$ temos que as soluções como já falado tendem a 0, e caso $c_2 \neq 0$ as soluções tendem ao infinito, caso t$\longrightarrow -\infty$ o $\lambda_1 = -6$ é o termo dominante e as curvas vão tender a v_1 e teremos o seguinte retrato de fase:

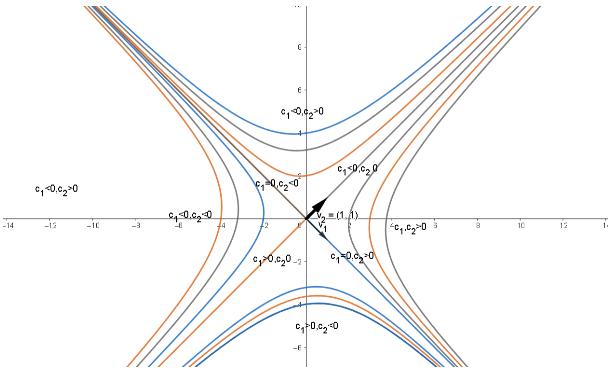

Figura 2 – Fonte: Autor.

4.3 Auto-valores Reais e Repetidos

No caso dos auto-valores repetidos já sabemos que podem ocorrer duas situações que é λ tem 2 auto-vetores linearmente independentes associados a λ ,ou seja, que não são múltiplos entre si e o outro caso é quando se tem 2 auto-vetores linearmente independentes, em ambos os casos teremos que caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ as soluções serão assintoticamente instáveis,pois

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$$

por outro lado, caso $\lambda < 0$ e a multiplicidade geométrica for igual a 1, então a solução terá a seguinte forma:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2(te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2)$$

e pela regra de L'Hopital vamos ter que

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$$

e as soluções serão assintoticamente estáveis.
(I) Dois Auto-Vetores Linearmente Independentes Nesse caso vamos levar em consideração também a solução geral, mas com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, com isso temos que v_1 e v_2 são Linearmente independentes entre si. Nesse sentido teremos que o retrato de fase das soluções no plano de fase não dependem de t, mas sim de v_1 e v_2 e das constantes c_1 e c_2, assim teremos que todas as trajetórias contém a origem.
(II) No segundo caso temos que λ não possui 2 auto-vetores independentes, com isso temos que neste caso teremos que a nossa solução geral como já vimos fica da seguinte forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2(te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2) \tag{4.4}$$

Neste tipo de situação o termo dominante será $c_2 te^{\lambda t} v_1$, pois cresce mais rápido, desta formas as soluções tendem a este vetor, quando t$\longrightarrow \infty$ mesmo que $c_2 = 0$ já que $c_1 e^{\lambda t} v_1 \neq 0$, o mesmo acontece quando t$\longrightarrow -\infty$. A orientação das curvas de soluções vão depender dos auto-vetores e para uma melhor visualização vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.3. Usando como exemplo o exemplo 3.2:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

onde já sabemos que nosso auto-valor é $\lambda = 2$ e teremos que nossos auto-vetores são

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
e teremos o seguinte plano de fase:

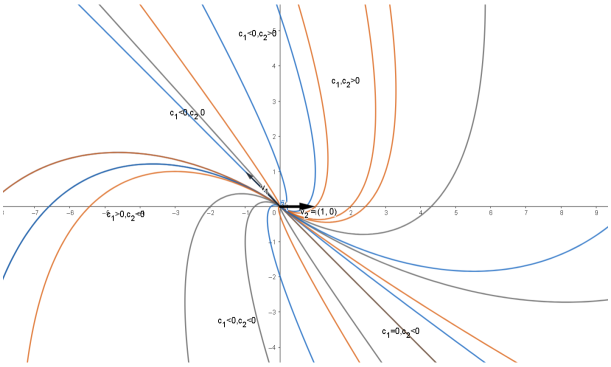

Figura 3 – Temos que a orientação das curvas depende de λ, pois caso $\lambda < 0$ teríamos as curvas no sentido oposto e chamamos de **nó degenerado**. Fonte: Autor.

4.4 Auto-Valores Complexos com Parte Real não Nula

Nesse caso vamos supor que os auto-valores são da forma $\lambda \pm i\mu$ em que $\lambda \neq 0$ e $\mu > 0$ e ambos são números reais, já sabemos como solucionar sistemas com auto-valores complexos, mas vamos proceder considerando o sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{4.5}$$

Na forma escalar:

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2 \tag{4.6}$$

usando as coordenadas polares r, θ que são:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan\theta = \frac{x_2}{x_1}. \tag{4.7}$$

Derivando utilizando a regra da cadeia temos:

$$2rr' = 2x_1x_1' + 2x_2 2x_2'$$

dividindo os dois lados da equação por 2 temos:

$$rr' = x_1x_1' + 2x_2x_2' \tag{4.8}$$

derivando a segunda equação (4.7) teremos:

$$(\sec^2\theta)\theta' = \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{x_1^2} \tag{4.9}$$

substituindo a equação 4.6na equação 4.8 temos:

$$
\begin{aligned}
rr' &= x_1(\lambda x_1 + \mu x_2) + x_2(-\mu x_1 + \lambda x_2) \\
rr' &= \lambda x_1^2 + \mu x_2 x_1 - \mu x_1 x_2 + \lambda x_2^2 \\
rr' &= \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 \\
rr' &= \lambda(x_1^2 + x_2^2) \\
rr' &= \lambda r^2 \\
r' &= \lambda r
\end{aligned}
$$

então resolvendo está EDO:

$$r = ce^{\lambda t} \tag{4.10}$$

em seguida substituindo a equação 4.6 na equação 4.9 temos:

$$
\begin{aligned}
(sec^2\theta)\theta' &= \frac{x_1(-\mu x_1 + \lambda x_2) - x_2(\lambda x_1 + \mu x_2)}{x_1^2} \\
(sec^2\theta)\theta' &= \frac{-\mu x_1^2 + \lambda x_1 x_2 - \lambda x_1 x_2 - \mu x_2^2}{x_1^2} \\
\frac{r^2}{x_1^2}\theta' &= \frac{-\mu x_1^2 - \mu x_2^2}{x_1^2} \\
r^2\theta' &= -\mu x_1^2 - \mu x_2^2 \\
x_1^1 + x_2^2\theta' &= -\mu(x_1^1 + x_2^2) \\
\theta' &= -\mu
\end{aligned}
$$

então resolvendo-a temos:

$$\theta = -\mu t + \theta_0 \tag{4.11}$$

Com isso temos que 4.10 e 4.11 são nossas equações paramétricas em coordenadas polares do nosso sistema, temos que θ diminui quando t aumenta e a trajetória das curvas são no sentido horário. temos que quando $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$$

ou seja as soluções são assintoticamente estáveis. Caso contrário quando $\lambda < 0$

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$$

,ou seja, as soluções são assintoticamente instáveis. Nesse sentido, as trajetórias são espirais que tendem a se afastar da origem ou ir em direção a origem dependendo do sinal de λ, pois caso $\lambda > 0$ as soluções tendem a 0 e caso contrário as soluções se afastam de 0 e será definido como **Fonte espiral**. Para um melhor entendimento vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.4. Tomando como exemplo o Exemplo 3.3

$$x' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$$

no qual já sabemos sua solução geral e temos que nossos auto-valores são $\lambda_1 = \dfrac{-1+2i}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-1-2i}{2}$ teremos o seguinte plano de fase:

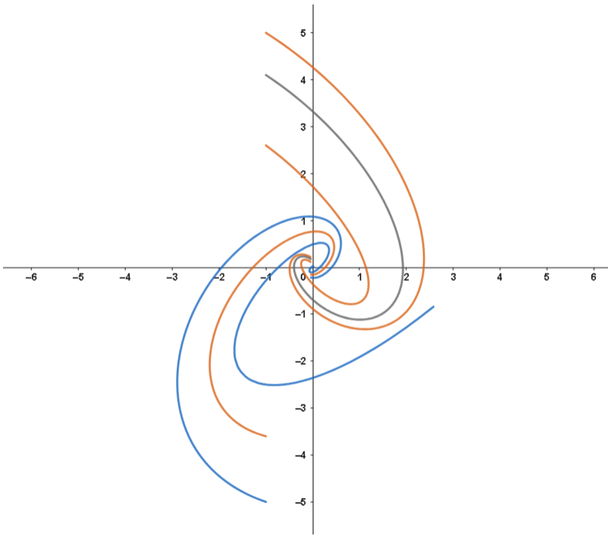

Figura 4 – Temos que este tipo de solução é chamado de **atrator espiral**. Fonte: Autor.

4.5 Auto-Valores Imaginarios Puros

Agora vamos ter que $\lambda = 0$ ou seja:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{4.12}$$

Com isso temos que:

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu \tag{4.13}$$

daí:

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0 \tag{4.14}$$

temos que c e θ_0' são constantes, com isso temos que as trajetória das soluções são elipses com centro na origem, no qual tem orientação no sentido horário caso $\mu > 0$ e no sentido anti-horário caso contrário. Nesse sentido teremos uma elipse completa em torno da origem no intervalo de tempo $\dfrac{2\pi}{\mu}$.
Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.5. Seja:

$$\mathbf{x'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} x$$

Vamos ter que $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$
a solução geral é:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} cos(2t) \\ -2sen(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} sen(2t) \\ 2cos(2t) \end{pmatrix}$$

Teremos o seguinte plano de fase:

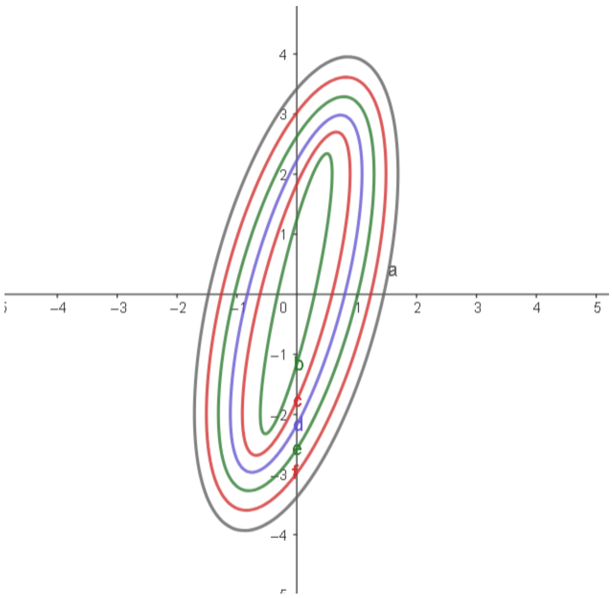

Figura 5 – Temos que nesse tipo de caso o retrato de fase é definido como **Centro**. Fonte: Autor.

5 Plano Traço-Determinante

Como já classificamos os sistemas lineares homogêneos de matrizes de coeficientes constantes de ordem 2 e como se comportam, neste capítulo iremos ver o mesmo comportamento, mas a partir do chamado plano traço-determinante, que nos dará uma ideia do comportamento dos sistemas sem precisar encontrar sua solução geral, seus auto-valores e auto-vetores.

Dada uma matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

, já sabemos que para encontrar os auto-valores precisamos encontrar o polinômio característico da seguinte forma $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ou seja:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

calculando o determinante:

$$p(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) \tag{5.3}$$

Podemos perceber que **(ad-bc)** é o determinante de A e será denotado por **D** e temos que **(a+d)** é chamado traço de A que será denotado **T**.
Com isso temos:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0 \tag{5.4}$$

e os auto-valores serão dados por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(T + \sqrt{T^2 - 4D}) \tag{5.5}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(T - \sqrt{T^2 - 4D})$$

,
a partir desses informações sabendo que nosso polinomio característico é da forma $a\lambda^2 + b\lambda + c$ vamos ter que $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-b}{a} = T$ e $\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a} = D$ ou seja temos que a soma dos auto-valores é o traço de A e o produto é o determinante da matriz.
Nesse sentido, conhecendo **T** e **D** podemos encontrar nossos auto-valores e informações a respeito do plano de fase das soluções do sistema.

Com isso podemos classificar as equações a partir do plano traço-determinante, pois dada uma matriz com **T** e **D** eles corresponderam as cordenadas (T,D) que é associada a seguinte equação $T^2 - 4D$, a qual nos da as seguintes informações sobre os auto-valores:

1 Caso $T^2 - 4D < 0$ os auto-valores serão complexos com parte imaginária diferente de 0.

2 Caso $T^2 - 4D > 0$ os auto-valores serão reais e distintos.

3 Caso $T^2 - 4D = 0$ os auto-valores serão repetidos.

Com isso o ponto (T,D) com relação a parábola $T^2 - 4D$ no plano traço-determinante nos diz sobre nossos auto-valores sem mesmo conhecê-los.
Falando agora um pouco mais sobre retrato de fase temos que **T** e **D** podem nos dar mais informações, pois se $T^2 - 4D < 0$ teremos auto-valores complexos como já comentado e sua parte real é dada por $\frac{T}{2}$, daí caso:

1 $T > 0$ temos que será uma fonte espiral, nas quais as soluções serão assintoticamente instáveis.

2 $T < 0$ temos que será uma atrator espiral, nas quais as soluções serão assintoticamente estáveis.

3 $T = 0$ temos um Centro.

No caso em que $T^2 - 4D > 0$ temos uma separação semelhante, pois caso $D < 0$ vamos ter um ponto de sela, pois **D** é o produto dos auto-valores, então um será positivo e outro negativo.
Equivalentemente se $D < 0$ então temos:

$$T^2 < T^2 - 4D$$

Assim

$$\pm T < \sqrt{T^2 - 4D}$$

Com isso

$$T + \sqrt{T^2 - 4D} > 0$$
$$T - \sqrt{T^2 - 4D} < 0$$

A partir disso temos que $D > 0$ e $T < 0$ dai temos que:

$$T \pm \sqrt{T^2 - 4D} < 0$$

ou seja nosso plano de fase será o já definido como **sovedouro**, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e λ_1,$\lambda_2 < 0$ e as soluções são assintoticamente estaveis.
Do mesmo modo, caso $T > 0$ e $D > 0$ Vamos ter o retrato de fase definido como **fonte**, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda 2 > 0$ e as soluções serão assintoticamente instáveis. Caso $D = 0$ e $T = 0$ nossos auto-valores são nulos.
Com isso temos uma ideia de como será o nosso plano de fase antes mesmo de resolver o sistema linear homogêneo de matrizes de coeficientes constantes de ordem dois se utilizando apenas do nosso plano TD:

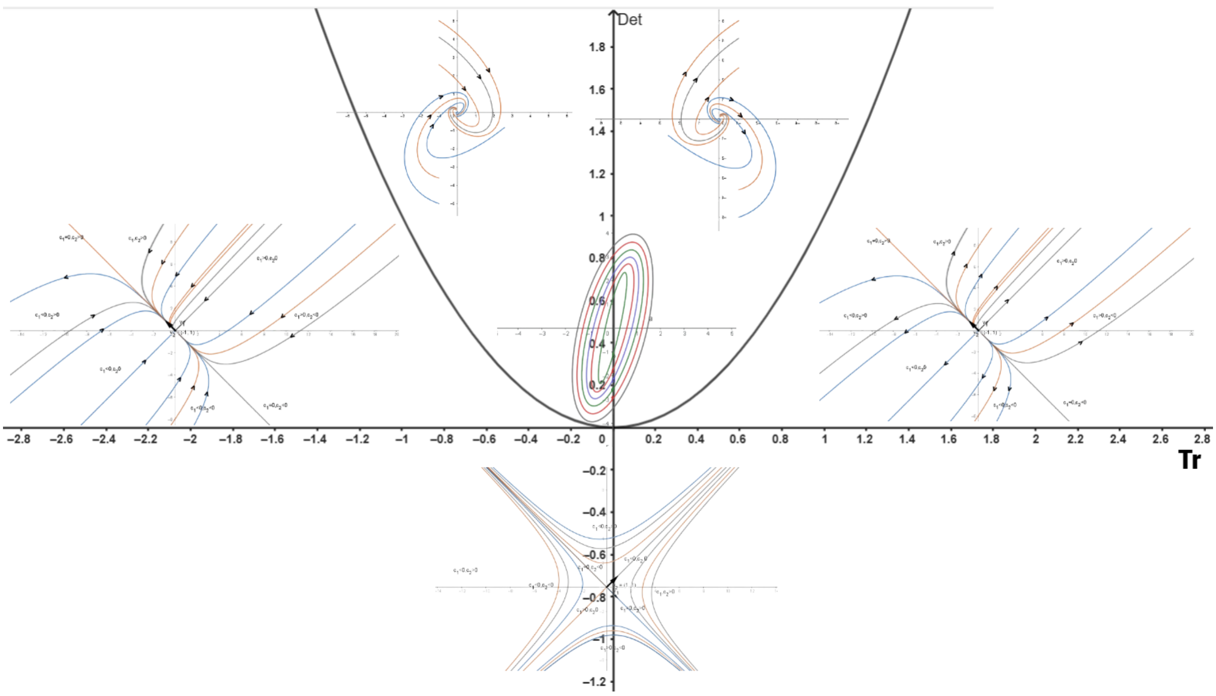

Figura 1 – Fonte: Autor.

onde o eixo horizontal é o traço e o vertical é o determinante.

Nesse sentindo é percepitível como os planos de fases dos sistemas são parecidos com diferenças sutis nas curvas, mas cada ponto do nosso plano TD corresponde a uma matriz diferente.

6 Sistema Massa Mola

Neste capítulo será introduzido um processo físico importante e interresante chamado de sistema massa mola, no qual envolve uma massa presa a uma mola.
Esse problema físico é modelado a partir de uma equação diferencial ordinária (E.D.O) de segunda ordem.
Primeiramente vamos considerar uma massa **m** em repouso que está pendurada em uma mola em uma das suas extremidades na posição vertical com o comprimento β, temos que a massa irá causar um alongamento na mola α para baixo no sentido positivo.
A partir disso vamos ter duas forças atuando que é a gravidade puxando e tencionando a mola para baixo e que tem módulo igual a **w=mg**, onde **g** é a aceleração da gravidade. A segunda força se dá pela mola que puxa a massa para cima F_m, com isso vamos supor que α ,que é o alongamento da mola, será pequeno e fica bem próximo da força da mola que é descrita pela **lei de Hooke**.
Nesse sentido, vamos escrever $F_m = -k\alpha$, em que $k \geq 0$ é a constante da mola e a força é negativa, pois a força da mola a puxa de volta para cima.
Nossas duas forças estão equilibradas, pois nossa massa está em equilíbrio, daí:

$$w + F_m = mg - K\alpha = 0 \tag{6.1}$$

Nesse problema iremos analisar o movimento realizado pela nossa massa que pode ter um deslocamento inicial ou uma força externa atuante. O deslocamento da massa a partir de 0 no instante t vamos denotar por $d(t)$. Nesse contexto, $d(t)$ estará relacionado com as forças que agem no sistema pela segunda lei de Newton.

$$md''(t) = f(t) \tag{6.2}$$

Como já sabemos da física a derivada da posição é a velocidade e a segunda derivada é a aceleração, então $d(t)''$ será a aceleração da massa e a f a força total que age sobre a massa e ambas estão em função de t.
Vamos ter que neste problema existem 4 forças que atuam sobre ele para determinar f.

1 O peso $w = mg$ que age no sentido positivo tencionando a mola.

2 A força F_m que é a proporcional ao alongamento total $\alpha + d$ da mola, no qual sempre age restaurando a mola para sua posição natural. Caso $\alpha + d > 0$ então a mola está destensionada e sua força está direcionada para cima ou seja:

$$F_m = -k(\alpha + d) \tag{6.3}$$

Caso $\alpha + d < 0$, então a mola está comprimida em uma distancia $|\alpha + d|$ e a sua força será no sentido contrario, então $F_m = -K|\alpha + d|$, mas temos que $|\alpha + s| = -(\alpha + d)$, então F_m é sempre dada pela equação (6.3) independentemente da posição.

3 Agora temos a força de resistência F_r, na qual age no sentido contrário ao do movimento da massa. Esta força se dá pela resistência do ar, algum atrito ou outro elemento que interfira no movimento da massa. Supondo que ela seja proporcional á velocidade escalar d', vamos chamá-la de atrito.
Caso $d' > 0$, teremos que d está aumentando de forma que a massa está se movendo para baixo.
Então F_r aponta para cima e será dada por:

$$F_r = -\sigma d'(t) \tag{6.4}$$

No qual σ é uma constante não negativa que é dada proporcional ao atrito. caso $d' < 0$ vamos ter que d está diminuindo de modo que a massa está indo para cima e F_r aponta para baixo. Com isso $F_r = \sigma|d'(t)|$; como $|d'(t)| = -d'(t)$ temos que F_r é dada pela equação (6.4).

4 Agora podemos supor uma força externa $F(t)$ apontando para qualquer lado podendo ser negativa ou positiva.
Agora Levando em consideração todas as forças podemos reescrever (6.2) da seguinte forma:

$$md''(t) = w + F_m(t) + F_r(t) + F(t) = mg - k(\alpha + d(t)) - \sigma d'(t) + F(t). \tag{6.5}$$

Como $mg - k\alpha = 0$ temos:

$$md''(t) + \sigma d'(t) + kd(t) = F(t) \tag{6.6}$$

em que m, σ e k são constantes positivas, esta equação é uma equação diferencial linear não homogênea de ordem 2 com coeficientes constantes e aprendemos a resolver apenas as do tipo homogêneas e para resolver este impasse vamos supor que $f(t) = 0$, ou seja, não tera força externa agindo sobre a mola e nossa equação fica da seguinte forma:

$$md''(t) + \sigma d'(t) + kd(t) = 0 \tag{6.7}$$

e também será desconsiderado a massa da mola.
A partir disso podemos transformar nossa equação em um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes.
Transformando a equação (6.7) em um sistema, daí vamos ter que $x_1 = d$, $x_2 = d'$, onde x_1 no plano de fase é a posição da mola e x_2 é a velocidade da mola ambos variando de acordo com o tempo t, o que implica que $x_1' = x_2$ e $x_2' = d''$ então $mx_2' + \sigma x_2 + kx_1 = 0$ vamos ter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ mx_2' = -\sigma x_2 - kx_1 \end{cases} \tag{6.8}$$

agora chamando $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$ o sistema tera a seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{-kx}{m} - \dfrac{\sigma y}{m} \end{cases} \tag{6.9}$$

passando para a forma matricial temos:

$$\mathbf{x'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & -\frac{\sigma}{m} \end{pmatrix} x$$

com isso vamos considerar m uma constante positiva e $T = (a+d) = (-\frac{\sigma}{m})$ e $D = (ad-bc) = \frac{k}{m}$. daí temos que nosso polinômio característico é:

$$\lambda^2 + \frac{\lambda\sigma}{m} + \frac{k}{m} = 0 \tag{6.10}$$

e

$$T^2 - 4D = \frac{\sigma^2}{m^2} - \frac{4k^2}{m^2}$$

a partir deste polinômio característico temos que o discriminante será negativo quando $T^2 - 4D < 0$ ou seja nossos auto-valores são complexos, caso contrário nossos auto-valores serão reais com sinal negativo e quando $T^2 - 4D < 0$ e $T = 0$ teremos que serão imaginários puros, com isso podemos retirar bastante informações a respeito do sistema massa mola a partir de uma análise qualitativa a respeito deste sistema utilizando o plano determinante do traço que nos dará informações a respeito do comportamento das soluções e temos os seguintes casos para analisar:

- Caso 1: $T^2 - 4D = 0$

No primeiro caso, temos que

$$T^2 - 4D = \frac{\sigma^2}{m^2} - \frac{4k^2}{m^2} = 0$$

daí

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{m^2} &= \frac{4k^2}{m^2} \\ \sigma^2 &= 4k^2 \\ \sigma &= 2k, \end{aligned}$$

ou seja, a nossa constante que corresponde ao atrito é igual a duas vezes a constante da mola. Como já comentado no capítulo anterior temos que quando $T^2 - 4D = 0$ nossos auto-valores são iguais, ou seja teremos apenas uma raiz

$$\lambda = \frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

como $T^2 - 4D = 0$ vamos ter que nosso auto-valor será

$$\lambda = \frac{T}{2}$$

para nosso auto-vetor $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, temos $(A - \frac{T}{2}I_2)v_1 = 0$ assim

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\sigma}{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2m^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2m^2} & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{2m\sigma+\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-x\sigma^2+2m^2y}{2m^2} \\ -\frac{2kmx+2my\sigma+y\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

$$\tag{6.14}$$

passando para forma de sistema temos

$$\begin{cases} \frac{-x\sigma^2+2m^2y}{2m^2} = 0 \\ -\frac{2kmx+2my\sigma+y\sigma^2}{2m^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x\sigma^2}{2m^2} + \frac{2m^2y}{2m^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y2m^2}{\sigma^2} \end{cases}$$

com isso temos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix}$.

Para $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ temos que

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2)v_2 &= v_1 \\ \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2m^2} & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{2m\sigma+\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{-a\sigma^2+2bm^2}{2m^2} \\ -\frac{2akm+2bm\sigma+b\sigma^2}{2m^2} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{-a\sigma^2}{2m^2} + b = 1 \\ -\frac{2akm+2bm\sigma+b\sigma^2}{2m^2} = \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a\sigma^2}{2m^2} = b - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2m^2b - 2m^2}{\sigma^2} \end{cases}$$

seja a=1 temos que

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2m^2b - 2m^2}{\sigma^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\sigma^2}{2m^2} + 1 \end{cases}$$

então temos que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2 + 2m^2}{2m^2} \end{pmatrix}$ assim temos que a solução geral do nosso caso 1 será

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix} e^{\dfrac{\sigma^2}{2m^2}t} + c_2 \left[t e^{\dfrac{\sigma^2}{2m^2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2}{2m^2} \end{pmatrix} + e^{\dfrac{\sigma^2}{2m^2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sigma^2 + 2m^2}{2m^2} \end{pmatrix} \right] \tag{6.15}$$

Nesse sentido, temo que nosso plano de fase é definido como **nó degenerado**, ou seja, é assintoticamente estável. Neste caso a massa ou objeto preso a mola vai na direção do ponto de equeilíbrio, que é quando a massa está no posição 0 e teremos o seguinte plano de fase:

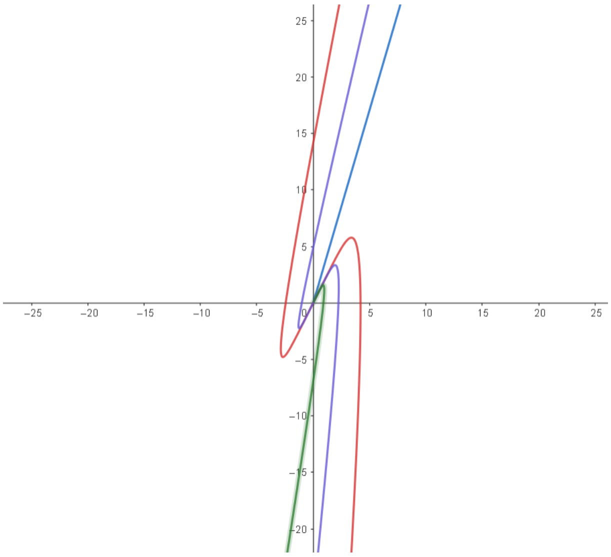

Figura 1 – Fonte: Autor.

- Caso 2: $T^2 - 4D > 0$

Nesse caso, como $T^2 - 4D > 0$ teremos que nossos auto-valores serão reais e distintos e que o comportamento do sistema massa mola no plano de fase depende dos valores de **T** e **D**. Caso **D** > 0 vamos ter que o plano de fase será o já definido como **sovedouro**, ou seja, será assintoticamente estável, com as soluções do sistema tendendo ao ponto de equilíbrio sem oscilações, assim o corpo que esta preso a mola é solto em determinada posição e se desloca até o ponto 0, que é o ponto de equilibrio, pois tanto sua velocidade como posição tendem a 0 e apresenta o seguinte comportamento no plano de fase:

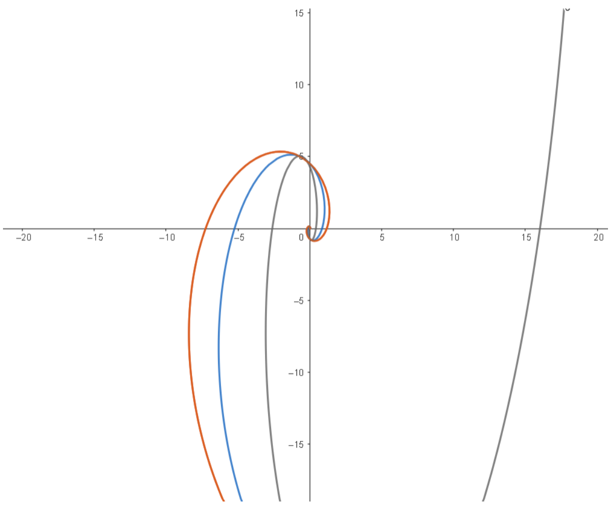

Figura 2 – Fonte: Autor.

- Caso 3: $T^2 - 4D < 0$

Neste caso, temos que segundo o plano traço-determinante vamos ter que nossos autovalores serão complexos com parte imaginária diferente de 0 e sua parte real é dada por $\frac{T}{2}$, com isso o caso em que $T > 0$ não acontece, pois $T = \frac{-\sigma}{m}$ e σ é não-negativo logo ou $T < 0$ ou $T = 0$. Nesse sentido, caso $T < 0$ teremos um **atrator espiral**, nas quais as soluções serão assintoticamente estáveis, ou seja, o objeto preso a mola tende a se deslocar em direção ao ponto de equilíbrio e perde velocidade de acordo com que se aproxima do mesmo, com o passar do tempo e terá o seguinte comportamento no plano de fase:

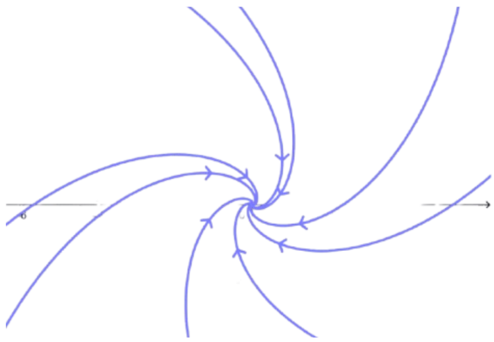

Figura 3 – Fonte: Autor.

Por último, caso $T = 0$, ou seja, $\frac{-\sigma}{m} = 0$, como **m** é diferente de 0 temos que $-\sigma$ é igual a 0, então teremos que o coeficiente de atrito será nulo e segundo o plano traço-determinante teremos um comportamento já definido como **centro**, nesse sentido o objeto preso a mola tende a oscilar indefinidamente como mostra o plano de fase a seguir:

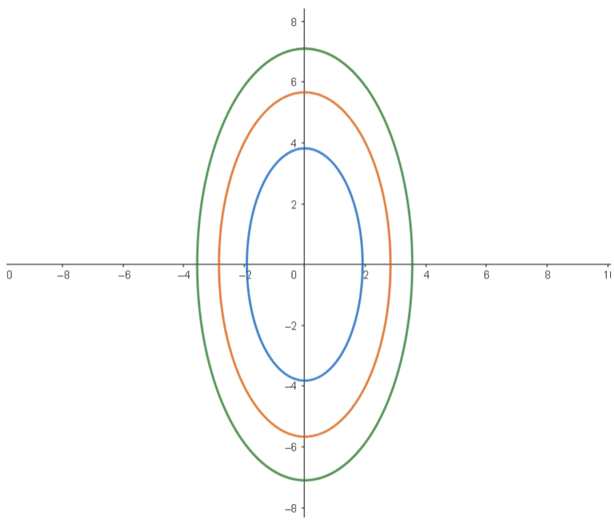

Figura 4 – Fonte: Autor.

percebe-se que o objeto em determinado tempo t possui velocidade nula que é quando a massa se encontra no ponto máximo e mínimo da oscilação, mas como não possui atrito a massa tem velocidade negativa passando novamente pelo ponto de equilíbrio e voltando a ganhar velocidade novamente oscilando como já dito indefinidamente. Todas essas afirmações são fáceis de se ver graças ao Plano traço-determinante que como já dito nos dá informações a respeito do comportamento das soluções no plano de fase.

7 CONCLUSÃO

Em suma, a análise qualitativa do sistema massa-mola sob a perspectiva das equações diferenciais ordinárias revela a importância e relevância da abordagem matemática na compreensão de fenômenos físicos complexos. Ao aplicar os conceitos matemáticos para investigar e interpretar as soluções do sistema, foi possível obter informações valiosas sobre seu comportamento qualitativo.

Além disso, a interdisciplinaridade entre a matemática e a física evidenciada neste estudo ressalta a necessidade e o potencial de uma abordagem integrada entre diferentes áreas do conhecimento para resolver problemas complexos e a análise de seus comportamentos. Dessa forma, este trabalho não apenas destaca a importância das equações diferenciais ordinárias na análise de sistemas físicos, mas também reforça a relevância de promover uma compreensão mais profunda da interconexão entre a matemática e as ciências naturais. Assim, esta pesquisa contribui significativamente para o avanço do conhecimento nessa área e demonstra como a aplicação das equações diferenciais ordinárias pode enriquecer nossa compreensão dos fenômenos físicos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

SANTOS, Reginaldo J. Introduçaoas Equaçoes Diferenciais Ordinárias. Belo Horizonte, 2011.

HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2013.

COELHO, Flávio Ulhoa. Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34. Edusp, 2001.