UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS HENRIQUE SILVA DE FARIAS

UM ESTUDO SOBRE ESPAÇOS MÉTRICOS E UMA APRECIAÇÃO TOPOLÓGICA DO CONJUNTO DE CANTOR

CAMPINA GRANDE - PB
2024

Marcos Henrique Silva de Farias

UM ESTUDO SOBRE ESPAÇOS MÉTRICOS E UMA APRECIAÇÃO TOPOLÓGICA DO CONJUNTO DE CANTOR

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Israel Buriti Galvão

CAMPINA GRANDE - PB
2024

F224e Farias, Marcos Henrique Silva de.

Um estudo sobre espaços métricos e uma apreciação topológica do Conjunto de Cantor [manuscrito] / Marcos Henrique Silva de Farias. - 2024.

40 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Israel Burití Galvão, Departamento de Matemática - CCT".

1. Topologia. 2. Espaços Métricos. 3. Conjunto de Cantor. I. Título

21. ed. CDD 514.3

Elaborada por Lêda Cristina Diniz Andrade - CRB - 15/1032 BC

MARCOS HENRIQUE SILVA DE FARIAS

UM ESTUDO SOBRE ESPAÇOS MÉTRICOS E UMA APRECIAÇÃO TOPOLÓGICA DO CONJUNTO DE CANTOR

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 14/11/2024

BANCA EXAMINADORA

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Luando de Brito Santos

Prof. Dr. José Luando de Brito Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus queridos pais, José Marcos e Maria Creusa, que sempre acreditaram em mim e me ajudaram a chegar até aqui, meu eterno agradecimento.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelas graças alcançadas em minha vida. Sua presença constante me deu a força necessária para atingir meus objetivos. Também sou grato a ele por colocar em meu caminho pessoas que me fortaleceram e ajudaram a chegar até este momento.

À minha família, expresso meus sinceros agradecimentos pela ajuda e força constantes. Em especial, agradeço às pessoas que mais admiro e que estiveram ao meu lado em todos os momentos: meus pais, José Marcos e Maria Creusa. Sua dedicação e apoio incomparável foram fundamentais para cada passo desta jornada.

Ao meu irmão Jailson e às minhas irmãs Jordana e Joana, que sempre lutaram para que eu tivesse o melhor. Suas ações e palavras de incentivo foram inestimáveis. Às minhas sobrinhas Cellyane, Lara e Maria, agradeço por trazerem alegria e luz aos meus dias, especialmente nos momentos mais desafiadores.

À minha noiva Renaly, agradeço profundamente pelo carinho, paciência e compreensão ao longo desta caminhada. Obrigado por acreditar em mim, por suas palavras de motivação e por estar ao meu lado, mesmo quando a rotina se tornava exaustiva. Sua presença foi essencial para que eu pudesse continuar e perseverar.

Aos meus amigos Gabriela, Herverton, Livia, Michael e Rian, agradeço por tornarem essa caminhada mais leve e divertida. Obrigado pelo apoio, pelas conversas, pelas risadas e por estarem comigo em todos os momentos difíceis. Cada um de vocês contribuiu de maneira única e especial para que eu chegasse até aqui. Também agradeço a todos os amigos que, mesmo tendo passado brevemente por minha vida, deixaram sua marca e contribuíram para minha formação.

Aos meus professores, que compartilharam seus conhecimentos e contribuíram significativamente para minha formação, meu sincero agradecimento. Em especial, agradeço ao meu orientador Israel Buriti, por quem tenho imensa admiração. Sua orientação precisa, seus ensinamentos valiosos e sua paciência ao longo de todo o processo foram cruciais para a realização deste trabalho.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte desta trajetória, deixo aqui o meu mais sincero agradecimento. Este trabalho é fruto de um esforço conjunto e reflete a importância de cada um de vocês na minha vida.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar e generalizar conceitos topológicos fundamentais em espaços métricos, que são cruciais na Análise Matemática e no Cálculo Diferencial e Integral. Iniciamos com a definição de métrica e suas características em espaços métricos, ilustradas por diversos exemplos e resultados, incluindo a definição de bolas abertas e vizinhanças. Em seguida, apresentamos conceitos de cálculo, como a continuidade de funções e a análise de sequências, aprofundando nas noções básicas da topologia em espaços métricos. Finalmente, destacamos o Conjunto de Cantor como um exemplo crucial, demonstrando suas características topológicas e métricas singulares na reta.

Palavras chaves: topologia; espaços métricos; conjunto de cantor.

ABSTRACT

This work aims to explore and generalize fundamental topological concepts in metric spaces, which are crucial in Mathematical Analysis and Differential and Integral Calculus. We begin with the definition of a metric and its characteristics in metric spaces, illustrated with various examples and results, including the definition of open balls and neighborhoods. Next, we present calculus concepts, such as the continuity of functions and sequence analysis, delving into the basic notions of topology in metric spaces. Finally, we highlight the Cantor Set as a crucial example, demonstrating its unique topological and metric characteristics on the real line.

Keywords: topology; metric spaces; cantor set.

Lista de Ilustrações

Sumário

1 Introdução

Sem sombra de dúvidas, o conceito de distância motivou, em essência, uma quantidade esmagadora de conceitos matemáticos e outra gama igualmente vasta de reflexões e aplicações na vida cotidiana, assim como no processo civilizatório da humanidade. O conceito de distância é uma das grandes bases do que hoje conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática. E o conceito de distância, tal como todo conceito fundamental em matemática, é passível de generalizações. A noção de métrica pode ser generalizada como uma maneira de medir distância em contextos diversos e abstratos.

Para que uma distância seja considerada como tal, e assim uma métrica, definimos uma aplicação que associa a um par de elementos de um dado conjunto um valor real positivo que representará a sua distância no contexto apresentado. É consenso que, para ser aceitável, uma distância deve respeitar alguns axiomas:

1. Um ponto dista 0 dele mesmo.
2. A distância entre o ponto A e o ponto B deve ser a mesma que a distância entre o ponto B e o ponto A.
3. A desigualdade triangular: dados três pontos A, B e C de um certo conjunto, a distância entre A e B somada à distância entre B e C deve ser sempre maior ou, no máximo, igual à distância entre os pontos A e C.

Neste sentido, o objetivo geral deste trabalho é fazer uma generalização dos conceitos topológicos abordados na análise matemática, especificamente aqueles relacionados aos espaços métricos euclidianos, que possuem algum tipo de distância ou métrica conhecida. Aqui, generalizaremos o conceito de conjuntos abertos, fechados e qualquer conceito relacionado à topologia de espaços métricos, ou seja, conjuntos que possuem uma distância bem definida entre seus elementos.

Para atingir este objetivo, seguimos alguns passos:

1. Realiza-se um estudo inicial do conceito de métrica e espaços métricos, devidamente ilustrado com diversos exemplos em variados contextos, mostrando a diversidade de ambientes abrangidos pela definição de métrica dada.
2. Em seguida, generalizamos alguns conceitos do cálculo, como a continuidade de funções.
3. Por fim, como uma aplicação importantíssima da topologia da reta real, apresentamos o Conjunto de Cantor como um exemplo de conjunto que apresenta características topológicas e métricas peculiares.

No presente texto, assume-se que o leitor possua conhecimento prévio compatível com um primeiro curso de Análise Real na Reta.

2 Noções básicas sobre Espaços Métricos

No presente capítulo, procederemos com a introdução das principais noções fundamentais concernentes aos espaços métricos, apresentando definições, resultados relevantes e exemplos elucidativos, visando facilitar a compreensão dos conceitos abordados. As noções delineadas neste contexto foram criteriosamente selecionadas com o intuito de abranger o arcabouço teórico subjacente ao propósito de nossa investigação.

Definição 2.1. Um *espaço métrico* é um par (X, d), onde X é um conjunto não vazio, e d uma *métrica* em X, isto é, d é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa um par $(x, y) \in X \times X$, a um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x até y, e d deve satisfazer alguns axiomas:

1. Se $d(x, y) = 0$, então $x = y$, para todo $x, y \in X$;
2. $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$; (Simetria)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$; (Desigualdade triangular)

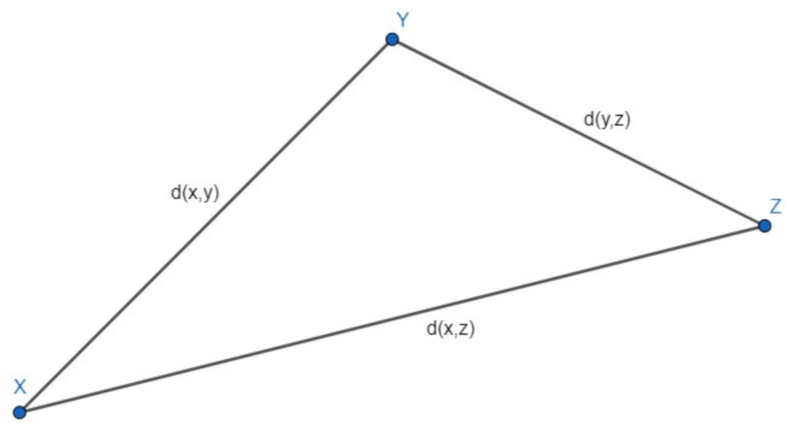
Observação 2.1. A condição (1.) é bastante intuitiva, já que a distância de um ponto a outra é nula, então esses pontos são iguais. Ou seja, a distância de um ponto a ele mesmo é zero.

Em (2.), a distância entre quaisquer dois pontos em um espaço é sempre maior ou igual a zero, refletindo o fato de que não existe distância negativa entre pontos. E atrelado com a condição (1.) ela será maior ou igual a zero.

A condição (3.), chamada de simetria, diz que a distância de um ponto qualquer x a outro ponto qualquer y tem a mesma distância de y até x.

Na última condição (4.), é comprovada por meio da desigualdade triangular, onde o comprimento de um dos lados do triângulo é menor ou igual a soma dos outros lados. Portanto, a distância de um ponto a outro é menor do que a soma das outras distâncias. Veja a representação a seguir:

Figura 1: Desigualdade triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

2.1 Exemplos Fundamentais

Nesta subseção, abordaremos exemplos fundamentais de métricas e espaços métricos que, à primeira vista, podem parecer triviais. No entanto, ao serem analisados sob a ótica do conceito de métricas, revelam-se significativamente mais sofisticados e complexos.

Exemplo 2.1 (Métrica zero-um)**.** Dado um conjunto qualquer X não vazio,

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

É sempre uma métrica em X.

Desse modo, as quatro condições são facilmente verificadas.

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$, imediatamente da definição de d;
2. Note que $d(x,y) > 0$, ou seja, $d(x,y) = 1 > 0$, com $x \neq y$;
3. Note que $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow d(y,x) = 0$;
4. Seja $x, y \in X$, temos duas opções: $x = y$ e $x \neq y$.

Tomando $x = y$ teremos $d(x,y) = 0$, então

$$d(x,y) = 0 \quad \leq \quad d(x,z) + d(y,z).$$

Por definição, $d(y,z) \geq 0$ e $d(x,z) \geq 0$. Portanto, a condição é válida.

Caso $x \neq y$ então ou $x \neq z$ ou $y \neq z$. Dessa forma, $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = 1$ e $d(y,z) = 1$. Daí,

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(y,z)$$

Logo, a condição é válida.

$\square$

Além disso, esta métrica também é conhecida como *métrica discreta.*

Exemplo 2.2 ($\mathbb{R}$ é um espaço métrico)**.** A reta real é um espaço métrico. Considere um subconjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{R}$. Defina

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

por

$$d(x,y) = |x - y|, \forall\, x, y \in X.$$

d é uma métrica em $\mathbb{R}$; conhecida como a métrica usual da reta real.

Vejamos em mais detalhes. Sejam $x, y \in X$.

1. Se tomarmos $x = y$ então, $d(x, x) = |x - x| = 0$, o que torna a primeira condição verdadeira;

2. Além disso, se $x \neq y$, a distância de x até y é maior do que zero, ou seja, $d(x, y) = |x - y| > 0$, pois o módulo de um número sempre é positivo;

3. No $d(x, y) = d(y, x)$. Realmente,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |-(-x+y)| \\ &= |-1||y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

4. Por fim, dado $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z|+|z-y| \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

$\square$

A métrica definida na reta real representa a forma mais convencional de calcular distâncias em uma dimensão. Em dimensões superiores, surgem diversas abordagens para a determinação das distâncias. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, destacam-se três métricas comumente utilizadas.

Exemplo 2.3 (Espaço métrico $\mathbb{R}^n$)**.** Os três exemplos de métricas mais comuns em $\mathbb{R}^n$ são:

Métrica Euclidiana. Dados os pontos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$, chamada de Métrica Euclidiana. No mesmo contexto, temos:

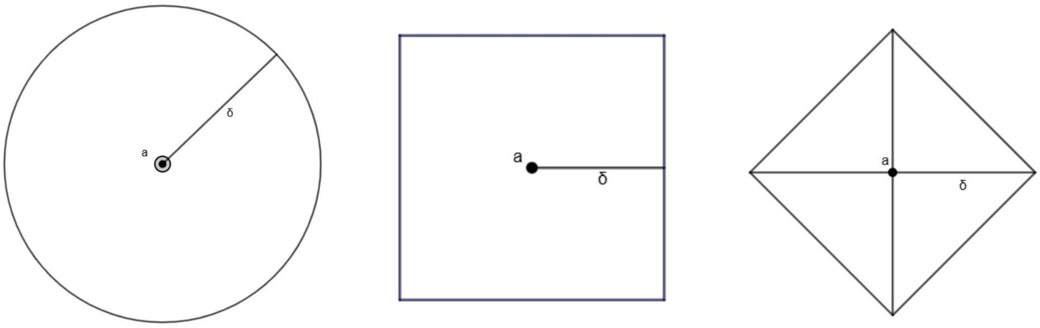
Métrica da Soma. $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$.

Métrica do Máximo. $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

Algo importante a ser destacado sobre essas métricas é que, ao representá-las no plano $\mathbb{R}^2$, elas formam diferentes representações.

A métrica do máximo apresentada aqui exemplifica um caso particular de um resultado mais geral, que trata de uma propriedade fundamental: o fato de que o produto entre espaços métricos resulta em um novo espaço métrico.

Figura 2: Representações das métricas d, d' e d''



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Teorema 2.1. Se $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_n, d_n)$ são espaços métricos, então o conjunto

$$\begin{aligned} X &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \\ X &= \prod_{i=0}^{n} X_i \end{aligned}$$

é um espaço métrico com a métrica

$$d(x, y) = \max_{0 \leq i \leq 1}(\{d_i(x_i, y_i)\}),$$

$x, y \in X$; onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Demonstração. Devemos mostrar que (X, d) é um espaço métrico.

Entendendo, para a métrica $d(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \max_{0 \leq i \leq 1}\{d_i(x_i, y_i)\} \\ &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} \end{aligned}$$

Logo,

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} \geq 0$$

1. Sejam $x, y \in X$ tais que $d(x, y) = 0$. Dessa forma,

$$0 \leq d_i(x_i, y_i) \leq \max_{0 \leq i \leq 1}\{d_i(x_i, y_i)\} = 0$$

o que acarreta $d_i(x_i, y_i) = 0$ e, portanto $x_i = y_i$.

2. Note que,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} \\ &= \max\{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2), \ldots, d_n(y_n, x_n)\} \\ &= \max\{d_i(y_i, x_i)\} = d(y, x), \forall\, x, y \in X. \end{aligned}$$

3. Dado $z = (z_1, z_2..., z_n) \in X$, queremos provar que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max\{d_1(x_1,z_1),\dots,d_n(x_n,z_n)\} \\ &\leq \max\{d_1(x_1,y_1)+d_1(y_1,z_1),\dots,d_n(x_n,y_n)+d_n(y_n,z_n)\} \\ &\leq \max\{d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n)\}+\max\{d_1(y_1,z_1),\dots,d_n(y_n,z_n)\} \\ &= d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

□

2.2 Subespaço

Dado um espaço métrico (X, d) e um subconjunto $Y \subseteq X$, é possível induzir uma métrica em Y restringindo a função distância d ao produto cartesiano $Y \times Y$. Isso implica que, ao considerar a métrica em Y, mantemos a mesma noção de distância entre seus elementos que é definida originalmente em X. Essa abordagem preserva as propriedades métricas herdadas de X, porém limita a análise ao subconjunto Y, o que é útil para estudar propriedades locais ou restritas sem perder a estrutura métrica subjacente.

Definição 2.2. Dado dois espaços métricos (X, d) e (Y, d'); dizemos que (Y, d') é um *subespaço* de (X, d), se:

1. $Y \subset X$
2. $d' = d|_{Y \times Y}$

Dessa maneira, cada subconjunto não vazio Y de X dá origem a um novo espaço métrico $(Y, d\,|_{Y \times Y})$.

Exemplo 2.4 (Subespaço Métrico da Reta Real)**.** Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e d é a métrica usual definida por

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Seja $Y = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Definimos a métrica d' restrita a Y da seguinte forma:

$$d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

tal que

$$d'(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in Y.$$

□

Todas as propriedades são herdadas diretamente da métrica d em $\mathbb{R}$ apresentada no exemplo (2.2), já que $d'(x, y) = |x - y|$ é a mesma função d restrita ao intervalo $[0, 1]$. Portanto, (Y, d') é um espaço métrico e é chamado de subespaço métrico de $(\mathbb{R}, d)$.

2.3 Bolas e Vizinhanças

Os conceitos de intervalos e vizinhanças na reta real, amplamente utilizados em análises, podem ser generalizados para espaços métricos mais abstratos por meio da definição de bolas e vizinhanças. Em um espaço métrico (X, d), uma bola aberta centrada em um ponto $x \in X$ com raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos cuja distância a x é menor que r, generalizando a ideia de um intervalo aberto na reta. As vizinhanças, por sua vez, são conjuntos que contêm uma bola em torno de cada um de seus pontos, estendendo assim o conceito de proximidade e continuidade para espaços métricos mais gerais. A seguir, detalha-se tecnicamente esses conceitos e suas consequências.

Definição 2.3. Seja (X, d) espaço métrico e um ponto $a \in X$. Dado um $\delta > 0$, definimos *bola aberta* de centro a e raio δ como sendo o conjunto

$$B(a; \delta) = \{x \in X; d(x, a) < \delta\}.$$

Exemplo 2.5. Um intervalo aberto na reta real com centro $a \in \mathbb{R}$ pode ser interpretado como uma bola aberta em $\mathbb{R}$. De fato, isso decorre da observação de que qualquer ponto pertence ao intervalo de centro a está contido em uma bola aberta centrada em a. No que segue, vamos usar a métrica usual em $\mathbb{R}$. Seja I um intervalo aberto com centro a e raio $\delta > 0$, definido como

$$I = (a - \delta, a + \delta).$$

Agora, considere $B(a; \delta)$ no espaço métrico $\mathbb{R}$, que é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ cuja distância ao centro a é menor que δ, ou seja, $d(x, a) < \delta$.

Para qualquer ponto $x \in I$, temos que

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

o que implica que a distância entre x e a é dada por

$$|x - a| < \delta \Rightarrow d(x, a) < \delta,$$

e, portanto, $x \in B(a, \delta)$, onde $B(a, \delta)$ é a bola aberta centrada em a com raio δ. Dessa forma, o intervalo aberto I corresponde à bola aberta $B(a, \delta)$ no espaço métrico $\mathbb{R}$.

□

Definição 2.4. Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto $N \subseteq X$ é denominado *vizinhança* de um ponto $a \in X$ se existe um $\delta > 0$ tal que a bola aberta centrada em a com raio δ, denotada por $B(a, \delta)$, está contida em N, ou seja,

$$B(a, \delta) \subseteq N.$$

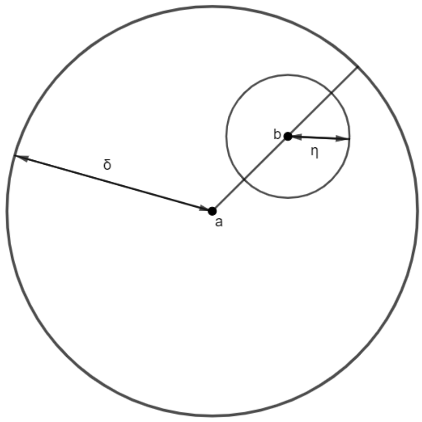
Isso significa que a vizinhança N contém todos os pontos suficientemente próximos de a, de acordo com a métrica d.

Da Definição 2.4, a bola $B(a; \delta)$ é vizinhança de x para todo $x \in B(a; \delta)$. Noutras palavras, uma bola aberta é vizinhança de todos os seus pontos, como formalizamos a seguir.

Lema 2.1. Seja (X, d) espaço métrico. Uma bola aberta $B(a; \delta) \subseteq X$, com $a \in X$ e $\delta > 0$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Tomemos um ponto qualquer $b \in B(a; \delta)$. Temos $d(a, b) < \delta$. Dessa forma, note que a menor distância de b a pontos não pertencentes a $B(a, \delta)$ é pelo menos $\delta - d(a, b)$.Tomemos $\eta < \delta - d(a, b)$. Então $B(b, \eta) \subset B(a, \delta)$.

Figura 3: Ilustração para um ponto na vizinhança de a



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

De fato, dado $x \in B(b, \eta)$ temos

$$d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + \eta < d(a, b) + \delta - d(a, b) = \delta.$$

Logo,

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow x \in B(a; \delta),$$

ou seja, provamos que $B(b, \eta) \subseteq B(a; \delta)$ que é vizinhança de todos os seus pontos. □

Noções como a de conjuntos limitados podem ser abordadas à luz dos espaços métricos. Dizemos que um conjunto A é *limitado* se existe um número $b > 0$ tal que $d(x, y) \leq b$ para todo $x, y \in A$. O menor valor de b com essa propriedade é denominado *diâmetro* de A. Assim, se

$$x, y \in A \Rightarrow d(x, y) \leq b,$$

então b é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de A. O menor valor entre todas as cotas superiores de um conjunto de números reais é chamado de *supremo*. Portanto, o diâmetro de A é o supremo do conjunto de distâncias $d(x, y)$ entre seus pontos.

Vamos formalizar as noções de cotas e limitação na seguinte definição:

Definição 2.5. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é uma *cota superior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se $x \leq b$ para todo $x \in A$. De maneira análoga, dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é uma *cota inferior* de A se $c \leq x$ para todo $x \in A$. Se A possui uma cota superior e uma cota inferior, dizemos que A é um *conjunto limitado*.

Uma cota superior $b^* \in A$ é chamada de *supremo* ($\sup A$) se for a menor entre todas as cotas superiores de A. Analogamente, uma cota inferior $c^* \in A$ é chamada de *ínfimo* ($\inf A$) se for a maior entre todas as cotas inferiores de A.

Todo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ que possui uma cota superior tem, necessariamente, um supremo. Da mesma forma, todo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ que possui uma cota inferior tem, necessariamente, um ínfimo.

Para fixar as ideias, segue um exemplo.

Exemplo 2.6. Seja $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais e o conjunto $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Note que:

1. Qualquer número $b \geq 1$ é uma cota superior de A, pois $x \leq 1$ para todo $x \in A$. Por exemplo, $b = 1$ é uma cota superior de A.

2. Qualquer número $c \leq 0$ é uma cota inferior de A, pois $0 \leq x$ para todo $x \in A$. Por exemplo, $c = 0$ é uma cota inferior de A.

3. O supremo de A é 1. Para todo $x \in A$, por definição do intervalo, temos $x \leq 1$. Portanto, 1 é uma cota superior de A. Seja b uma cota superior arbitrária de A. Então, $x \leq b$ para todo $x \in A$. Como $1 \in A$ e $1 \leq b$, segue que $b \geq 1$. Portanto, 1 é a menor das cotas superiores, logo, Sup $A = 1$.

4. O ínfimo de A é 0. Para todo $x \in A$, por definição do intervalo, temos $0 \leq x$. Portanto, 0 é uma cota inferior de A. Seja c uma cota inferior arbitrária de A. Então, $c \leq x$ para todo $x \in A$. Como $0 \in A$ e $c \leq 0$, segue que $c \leq 0$. Portanto, 0 é a maior das cotas inferiores, logo, Inf $A = 0$.

Portanto, $A = [0, 1]$ é um conjunto limitado, com $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.

□

Lema 2.2. Seja A um conjunto não vazio e b o ínfimo desse conjunto. Então, dado $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, existe $x \in A$ tal que

$$x - b < \varepsilon.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $\varepsilon > 0$ tal que $x - b \geq \varepsilon, \forall\ x \in X$. Então,

$$x - b \geq \varepsilon \Rightarrow x \geq b + \varepsilon \Rightarrow b + \varepsilon \leq x,$$

onde $b + \varepsilon$ é cota inferior de A. Além disso, b é o ínfimo de A, então $b + \varepsilon \leq b$, o que se torna um absurdo. □

Proposição 2.1. Seja A um conjunto não vazio e b o ínfimo desse conjunto. Então, existe uma sequência $(a_n) \in A$ tal que $\lim a_n = b$.

Demonstração. Se b é ínfimo desse conjunto, então $b \in A$. Considere $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$d(a_n, b) < \varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \in B\left(b, \frac{1}{n}\right).$$

Porém, como b é cota inferior de A, então $0 \leq d(a_n, b)$. Portanto, $\lim_{a_n} = \ b$. □

Inspirando-se nas tradicionais práticas euclidianas, define-se a distância de um ponto x a um conjunto $A \subset X$ em espaços métricos como o menor valor possível das distâncias entre o ponto x e os elementos pertencentes ao conjunto A.

Definição 2.6. Sejam $a \in X$, $\varnothing \neq A \subseteq X$ e (X, d) um espaço métrico. Definimos a distância do ponto a ao conjunto A, ou seja, $d(a, A)$ como sendo o ínfimo do conjunto

$$D = \{d(x, a); x \in A\}.$$

Para ilustrar, vamos ver um exemplo elementar, mas que se mostra bastante esclarecedor.

Exemplo 2.7. Considere o intervalo $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e o ponto $x = 2 \in \mathbb{R}$. A distância do ponto x até o conjunto A é dada por

$$d(x, A) = \inf\{|x - a|, \forall\, a \in A\}.$$

Calculando as distâncias, temos

$$d(2, A) = \inf\{|2 - a|, \forall\, a \in [0, 1]\}.$$

Para $a = 0$, temos

$$|2 - 0| = 2.$$

Para $a = 1$, temos

$$|2 - 1| = 1.$$

Portanto, a menor distância é 1, e a distância $d(2; A) = 1$ unidade.

□

Proposição 2.2. Sejam $a \in X$, $\varnothing \neq A \subseteq X$ e (X, d) um espaço métrico. Então, existe uma sequência (a_n) de pontos de A, tal que

$$\lim_{n \to \infty} d(a, a_n) = d(a, A).$$

Demonstração. Seja uma sequência (a_n) de pontos de A. Então, dado $n \in \mathbb{N}$, tome $\delta = \frac{1}{n}$ tal que

$$d(a, a_n) \leq d(a, A) + \frac{1}{n}$$

Dessa forma, temos

$$\lim d(a_n, a) \leq \lim \left[d(a, A) + \frac{1}{n}\right] = \lim d(a, A) + \lim \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim d(a_n, a) = d(a, A).$$

□

Resumidamente, conseguimos estabelecer algumas propriedades sobre continuidade em espaços métricos que serão vistas adiante.

Teorema 2.2. Dado um espaço métrico (X, d) qualquer, temos:

1. Para cada ponto $a \in X$, existe pelo menos uma vizinhança de a.

2. Para cada ponto $a \in X$ e vizinhança N de a, $a \in N$

3. Para cada ponto $a \in X$, se N é vizinhança de a e $N \subseteq N'$ então N' é vizinhança de a.

4. Para cada ponto $a \in X$. Seja N e M vizinhança de a, a interseção $N \cap M$ é vizinhança de a.

5. Para cada ponto $a \in X$ e cada vizinhança N de a, existe uma vizinhança O, tal que $O \subseteq N$, e O é vizinhança de cada um de seus pontos.

Demonstração. Seja o espaço métrico (X, d), temos:

1. Seja $a \in X$. Basta tomar $\delta > 0$ e a bola $B(a; \delta)$, onde para cada $x \in B(a; \delta)$, B é vizinhança desse ponto.

2. Existe um $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subseteq N$ isso implica que $a \in N$.

3. Se N é vizinhança de a, então existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subseteq N$. Além disso, temos $N \subseteq N'$, então, $B(a; \delta) \subseteq N'$ também, o que implica $a \in N'$.

4. Seja N e M vizinhança de a, então existe uma $B(a; \delta_1)$ e $B(a; \delta_2)$ respectivamente. Dessa forma, $N \cap M$ contém uma bola aberta $B(a, \delta)$, onde $\delta = \text{mínimo}\{\delta_1, \delta_2\}$.

5. Veja que, N contém uma bola aberta $B(a, \delta)$ e pelo Lema 2.3, $O = B(a; \delta)$ pois é vizinhança de todos os seus pontos.

□

2.4 Continuidade

O estudo da continuidade desempenha um papel fundamental no estudo da análise matemática. Nesse momento, a ideia de continuidade foi generalizada para o contexto de espaços métricos.

Considere um espaço métrico (X, d) e um ponto $a \in X$. Temos,

$$x \in B(a; \delta) \subseteq X \Leftrightarrow x \in X \text{ e } d(x, a) < \delta.$$

Agora, considere outro espaço métrico (Y, d'). Dado $\varepsilon > 0$, temos,

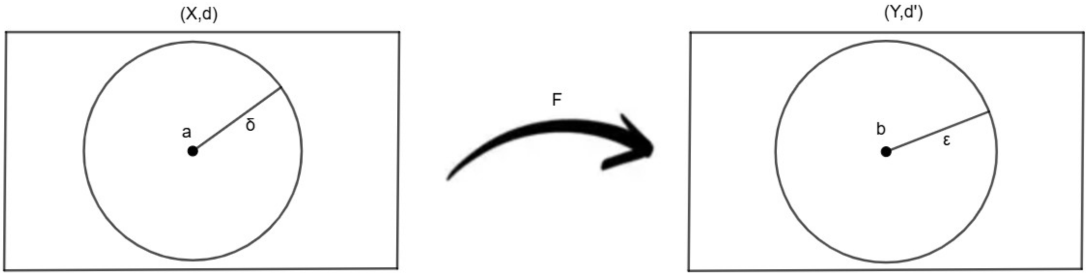
$$y \in B(f(a); \varepsilon) \Leftrightarrow y \in Y \text{ e } d'(y, f(a)) < \varepsilon.$$

Aqui, $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma função que mapeia pontos de X para Y. A continuidade da função f é analisada através dessas relações entre bolas abertas em X e Y. Entendendo este contexto, podemos definir:

Definição 2.7. Dada uma $f : (X, d) \to (Y, d')$, onde (X, d) e (Y, d') são espaços métricos. Dizemos que f é *contínua* no ponto $a \in X$, se dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Figura 4: Função continua entre espaços métricos



Elaborado pelo autor, 2024.

Exemplo 2.8. Considere os espaços métricos $(X, d) = ([0, 1], d)$ e $(Y, d') = (\mathbb{R}, d')$, onde d e d' é a métrica usual dos números reais. Considere a função

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = x^2.$$

Vamos mostrar que f é contínua em qualquer ponto $a \in [0, 1]$. De fato, seja $a \in [0, 1]$ e dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Sabemos que

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)|.$$

Para garantir que $|(x - a)(x + a)| < \varepsilon$, devemos exibir um δ tal que $|x - a| < \delta$. Note que, $x, a \in [0, 1]$, então $0 \leq x + a \leq 2$. Assim,

$$|x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a||x + a| < \delta \cdot 2.$$

Escolhemos δ tal que $\delta \cdot 2 = \varepsilon$, ou seja,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue que, se $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Assim, mostramos que $f(x) = x^2$ é contínua em qualquer ponto $a \in [0, 1]$.

$\square$

Outras generalizações naturais podem ser feitas, como as a seguir.

Teorema 2.3. Sejam $(X, d), (Y, d')$ espaços métricos. Se a função

$$f : (X, d) \to (Y, d')$$

é dita constante, então f é contínua.

Demonstração. Consideremos a função constante $f : X \to Y$ dado por $f(x) = k, \forall\, x \in X$. Seja $a \in X$, então, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$, temos:

$$d(x,a) < \delta = \varepsilon \Rightarrow d'(f(x), f(a)) = d'(k,k) = 0 < \varepsilon.$$

□

Teorema 2.4. Seja (X,d) espaço métrico. A função identidade $id : (X,d) \to (X,d)$ é contínua.

Demonstração. Consideremos a função identidade $id : X \to X$ dada por $f(x) = x, \forall\, x \in X$. Seja $a \in X$, então, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$, temos

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(id(x), id(a)) = d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, $d(id(x), id(a)) < \varepsilon$. □

Agora, vamos constatar que a composição de duas funções contínuas também é contínua.

Teorema 2.5. Sejam (X,d), (Y,d') e (Z,d'') espaços métricos. Se a função $f : X \to Y$ é contínua no ponto $a \in X$ e a função $g : Y \to Z$ é contínua no ponto $f(a) \in Y$, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua no ponto $a \in X$.

Demonstração. Para provar que $g \circ f$ é contínua em $a \in X$, precisamos mostrar que, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d''(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Sabemos que g é contínua em $f(a)$. Portanto, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\eta > 0$ tal que:

$$d'(y, f(a)) < \eta \Rightarrow d''(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Além disso, como f é contínua em a, para o η que encontramos acima, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \eta.$$

Combinando essas duas condições, temos que:

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \eta \Rightarrow d''(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua no ponto $a \in X$. □

A seguir, discutiremos uma condição equivalente para a continuidade de uma função, baseada na imagem da bola aberta ao redor de um ponto.

Teorema 2.6. A função $f : (X,d) \to (Y,d')$ é contínua no ponto $a \in X$ se, somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\varepsilon)$$

Demonstração. Seja f contínua no ponto $a \in X$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in B(a;\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a);\varepsilon)$$

Portanto,

$$f(B(a;\delta)) \subseteq B(f(a);\varepsilon).$$

Como os argumentos utilizados são equivalentes, segue o resultado. □

Teorema 2.7. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(a; \delta) \subset f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$$

Demonstração. Vide Mendelson (1990). □

Agora, exploramos a continuidade em termos de vizinhanças dos pontos. Isso nos dá uma visão mais intuitiva da continuidade.

Teorema 2.8. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para cada vizinhança M de $f(a)$ existe uma vizinhança N de a tal que

$$f(N) \subseteq M.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é contínua no ponto $a \in X$. Já que M é vizinhança de $f(a)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(f(a); \varepsilon) \subseteq M.$$

Além disso, como a função f é contínua então temos

$$x \in B(b; \eta) \Rightarrow x \in B(a; \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(b; \eta) \subseteq B(a; \delta) = N.$$

Portanto,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in B(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a); \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(N) \subseteq B(f(a); \varepsilon) \subseteq M$$

$$\Rightarrow f(N) \subseteq M.$$

($\Leftarrow$) Suponha que para cada vizinhança M de $f(a)$ existe uma vizinhança N de a tal que $f(N) \subseteq M$. Queremos mostrar que f é contínua no ponto a.
Seja $\varepsilon > 0$. Como $B(f(a); \varepsilon)$ é uma vizinhança de $f(a)$, existe uma vizinhança N de a tal que

$$f(N) \subseteq B(f(a); \varepsilon).$$

Por definição de vizinhança, podemos tomar $N = B(a; \delta)$ para algum $\delta > 0$. Então, temos

$$f(B(a; \delta)) \subseteq B(f(a); \varepsilon).$$

Assim, para qualquer $x \in B(a; \delta)$, temos $f(x) \in B(f(a); \varepsilon)$, ou seja,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Isso mostra que f é contínua no ponto a.

□

Teorema 2.9. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para cada vizinhança M de $f(a)$, $f^{-1}(M)$ é uma vizinhança de a.

Demonstração. Vide Mendelson (1990). □

2.5 Sequências em Espaços Métricos

A noção de sequência, tradicionalmente estudada no contexto dos números reais, encontra uma generalização natural nos espaços métricos. Essa generalização revela-se crucial para a unificação de diversos ramos da análise matemática, permitindo uma abordagem mais abrangente e elegante de problemas que envolvem limites, continuidade e convergência. A presente seção tem como objetivo apresentar os fundamentos dessa teoria, destacando a importância da convergência de sequências na caracterização de propriedades topológicas dos espaços métricos.

Definição 2.8. Seja (a_n) uma sequência em um espaço métrico (X, d). Dizemos que o ponto $a \in X$ é *limite* da sequência (a_n), se $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall\, n > N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon \Rightarrow a_n \in B(a; \varepsilon).$$

Neste caso, dizemos que a sequência (a_n) converge para a e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Exemplo 2.9. Considere o espaço métrico $(X, d) = ([0, 1], d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Seja uma sequência $(a_n) \in [0, 1]$ que converge para um ponto $a \in [0, 1]$, definida por

$$a_n = \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que (a_n) converge para $a = 0$.
Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow d(a_n, 0) < \varepsilon.$$

Pela métrica dada, $d(a_n, 0) = |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, devemos exibir N tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, para todo $n > N$, temos

$$n > N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $d(a_n, 0) < \varepsilon$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Portanto, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ em $[0, 1]$ converge para 0.

$\square$

Proposição 2.3. Dado um espaço métrico (X, d) e uma sequência $(a_n) \subset X$. Para um ponto $a \in X$, $\lim a_n = a$ se, e somente se, para cada vizinhança V de a existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in V$ sempre que $n > N$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Dado $a \in X$, e sendo V é vizinhança de a, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a; \varepsilon) \subseteq V$$

Além disso, se $\lim a_n = a$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N, d(a, a_n) < \varepsilon \Rightarrow a_n \in B(a; \varepsilon) \subseteq V.$$

Logo,

$$a_n \in V.$$

($\Leftarrow$)Por outro lado, suponha que para cada vizinhança V de a, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in V$sempre que $n > N$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, a bola $B(a; \varepsilon)$ é vizinhança de a, ou seja, existe um $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > N \Rightarrow a_n \in B(a; \varepsilon) \Rightarrow d(a, a_n) < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = a.$$

$\square$

Teorema 2.10. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência $(a_n) \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja f contínua no ponto $a \in X$ e tome uma sequência $a_n \in X$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Mas, como $\lim a_n = a$, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N; d(a_n, a) < \delta \Rightarrow d'(f(a_n), f(a)) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

($\Leftarrow$) Suponha por absurdo que a função f não seja contínua em $a \in X$. Então existe uma vizinhança V de $f(a)$, tal que para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $a_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right)$, logo

$$d(a, a_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow d'(f(a), f(n)) \geq \varepsilon$$

$$a_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(n) \notin B(f(a); \varepsilon) = V$$

$$\Rightarrow f\left(B\left(a; \frac{1}{n}\right)\right) = f(U) \not\subset B(f(a); \varepsilon) = V$$

Dessa forma, $d(a, a_n) < \frac{1}{n}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, porém $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ o que é um absurdo, já que $f(a_n) \in B(f(a); \varepsilon) = V$.

$\square$

3 Noções Básicas de Topologia em Espaços Métricos

Neste capítulo, exploraremos algumas noções fundamentais da Topologia em espaços métricos. Estas noções constituem a base para compreender a estrutura e as propriedades intrínsecas desses espaços. Discutiremos conceitos essenciais como abertos, fechados, pontos de acumulação, compacidade e continuidade, proporcionando uma compreensão aprofundada e rigorosa dos fundamentos topológicos necessários para o estudo avançado de espaços métricos.

3.1 Conjuntos Abertos

Definição 3.1. Um conjunto é aberto se, para qualquer ponto nele, existe uma bola aberta ao redor desse ponto inteiramente contida no conjunto.

Exemplo 3.1. Seja o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais, e o conjunto $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. O ponto $a = 0,5 \in [0, 1]$ é ponto interior de Y.

Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$B(0,5; \delta) \subseteq [0, 1].$$

Tomemos $\delta = 0, 1$. Então,

$$\begin{aligned} B(0,5; 0,1) &= \{x \in \mathbb{R} | d(x, 0,5) < 0,1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} || x - 0,5| < 0,1\} \end{aligned}$$

Simplificando,

$$B(0,5; 0,1) = (0,4, 0,6) \subset Y.$$

Portanto, $0,5$ é um ponto interior de $Y = [0, 1]$.

$\square$

Não é difícil constatar que as Definições 3.2 e 3.3 são equivalentes.

Definição 3.2. O subconjunto $Y \subset X$ em um espaço métrico (X, d) é dito *aberto* se o subconjunto Y é vizinhança de todos os seus pontos.

Definição 3.3. O subconjunto $Y \subset X$ é um *conjunto aberto* se todos os seus pontos são interiores.

Os conjuntos abertos podem ser caracterizados em termos de bolas abertas (Mendelson, 1990).

Exemplo 3.2. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Vamos mostrar que o intervalo aberto $Y = (0, 1)$ é um conjunto aberto.

Para provar que $Y = (0, 1)$ é aberto, precisamos mostrar que para cada ponto $x \in (0, 1)$, existe um $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x; \delta)$ está contida em Y.

Para o ponto $x = 0,5 \in Y$. Escolhemos $\delta = 0,1$. A bola aberta centrada em $0,5$ com raio $0,1$ é dada por:

$$B(0,5; 0,1) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(y; 0,5) < 0,1\} = (0,4; 0,6).$$

Claramente, temos $B(0,5; 0,1) \subset (0, 1)$.

□

Uma caracterização fundamental dos conjuntos abertos em um espaço métrico (X, d) é a sua representação como uniões arbitrárias de bolas abertas. O Teorema 3.1 a seguir estabelece uma conexão intrínseca entre a noção de conjunto aberto e a estrutura métrica do espaço, fornecendo uma ferramenta poderosa para a análise de propriedades topológicas.

Teorema 3.1. Um subconjunto $Y \subset X$ de um espaço métrico (X, d) é um conjunto aberto se, e somente se, Y é uma união de bolas abertas.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se Y é aberto, Y é vizinhança de cada um de seus pontos, ou seja, para cada $a \in Y$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B(a;\delta_a) \subset Y$. Desse modo, dado $x \in \bigcup_{a\in Y} B(a;\delta_a)$, então teremos $\delta > 0$ tal que

$$B(a;\delta) \subset \bigcup_{a\in Y} B(a;\delta_a)$$

e, portanto, é vizinhança de a.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponha que Y seja a união de bolas abertas. Tomemos os centros dessas bolas como indexador dos conjuntos,

$$Y = \bigcup_{a\in Y} B(a;\delta_a).$$

Assim, dado $x \in Y$, existe uma bola aberta tal que $x \in B(a;\delta_a) \subset Y$, para algum $a \in Y$, donde, Y é vizinhança de x. Portanto, como tomamos x de forma arbitrária, Y é vizinhança de todos os seus pontos, e Y é aberto.

□

Funções contínuas têm uma grande tendência de preservar propriedades topológicas, como ver-se a seguir.

Teorema 3.2. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua se, e somente se, para cada subconjunto aberto $O \subset Y$, o subconjunto $f^{-1}(O) \subset X$ é aberto.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é contínua. Tomemos $O \subset Y$ aberto e mostremos que $f^{-1}(O)$ é aberto em X.

Para cada $a \in f^{-1}(O)$, temos que $f(a) \in O$. Pela definição de conjunto aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(f(a);\varepsilon) \subset O$.

Como f é contínua no ponto a, existe um $\delta > 0$ correspondente ao ε, tal que:

$$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset O.$$

Portanto, $B(a;\delta) \subset f^{-1}(O)$, o que implica que $f^{-1}(O)$ é aberto.

($\Leftarrow$) Suponhamos que para cada subconjunto aberto $O \subset Y$, o subconjunto $f^{-1}(O) \subset X$ é aberto. Mostremos que f é contínua em um ponto qualquer $a \in X$.
Seja $a \in X$. Queremos mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Considere a bola aberta $B(f(a);\varepsilon)$ em Y, que é um conjunto aberto. Pelo pressuposto, $f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$ é aberto em X e contém o ponto a.
Assim, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$B(a;\delta) \subset f^{-1}(B(f(a);\varepsilon)).$$

Logo,

$$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon).$$

Portanto, f é contínua em a.

□

Definição 3.4. Seja (X,d) um espaço métrico. Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto isolado* de X se existe um $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x;\delta) \cap X = \{x\}$. Ou seja, x é um ponto isolado se x não contém nenhum ponto de X exceto ele mesmo.

Exemplo 3.3. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R},d)$, onde d é a métrica usual dos números reais, e o conjunto $X = [0,1]$.

Vamos verificar se os pontos 0 e 1 são pontos isolados em X.

1. **Para o ponto** 0: Escolhemos $\delta = \frac{1}{2}$. A bola aberta centrada em 0 com raio $\frac{1}{2}$ é dada por:

$$B(0;\frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}; |x-0| < \frac{1}{2}\} = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

A interseção $B(0;\frac{1}{2}) \cap X$ é:

$$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cap [0,1] = \{0\}.$$

Portanto, 0 é um ponto isolado de X.

2. **Para o ponto** 1: Escolhemos $\delta = \frac{1}{2}$. A bola aberta centrada em 1 com raio $\frac{1}{2}$ é dada por:

$$B(1;\frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| < \frac{1}{2}\} = (\frac{1}{2},\frac{3}{2}).$$

A interseção $B(1;\frac{1}{2}) \cap X$ é:

$$(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \cap [0,1] = \{1\}.$$

Portanto, 1 é um ponto isolado de X.

□

Alguma propriedades dos conjuntos abertos são bastante úteis para a Topologia, como as que segue.

Teorema 3.3. Dado um espaço métrico (X,d), temos:

1. O conjunto $\varnothing$ é aberto;
2. O conjunto X é aberto;
3. Se os subconjuntos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ são abertos, então a interseção
$$O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$$
é aberta;
4. Se para cada $\alpha \in I$, O_α é conjunto aberto, então $\bigcup\limits_{\alpha \in I} O_\alpha$ é aberto.

Demonstração. Dado o espaço métrico (X, d), temos:

1. O conjunto vazio $\varnothing$ é aberto, pois não contém nenhum ponto. Por definição, não há nenhum ponto em $\varnothing$ para o qual a condição de abertura poderia falhar. Portanto, $\varnothing$ é aberto por vacuidade.
2. O conjunto X é aberto porque para qualquer ponto $a \in X$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(a; \delta) \subset X$. Isso significa que X é vizinhança de cada um dos seus pontos. Portanto, X é aberto.
3. Suponha que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ são subconjuntos abertos de X. Seja
$$a \in O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n.$$
Então $a \in O_1, O_2, \ldots, O_n$, ou seja, $a \in O_i \, \forall \, i = 1, 2, 3 \ldots, n$.
Como cada O_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(a; \delta_i) \subset O_i$.
Tomemos
$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}.$$
Então, $B(a; \delta) \subset O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$. Portanto, a interseção finita de subconjuntos abertos é aberta.
4. Seja
$$O = \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha,$$
onde cada O_α é um conjunto aberto. Queremos provar que O é aberto. Seja $a \in O$. Isso significa que a pertence a pelo menos um dos conjuntos O_α, ou seja, existe um índice $\beta \in I$ tal que $a \in O_\beta$. Como O_β é aberto, pela definição de aberto, existe um raio $\delta > 0$ tal que a bola aberta centrada em a com raio δ, denotada por $B(a; \delta)$, está contida em O_β. Ou seja:
$$B(a; \delta) \subset O_\beta.$$
Como $O_\beta \subset O$, concluímos que:
$$B(a; \delta) \subset O.$$
Isso mostra que existe uma bola aberta ao redor de a inteiramente contida em O, o que significa que O é uma vizinhança de a.

Como o $a \in O$ foi escolhido de forma arbitrária, isso vale para todos os pontos de O, o que prova que O é aberto.

□

Definição 3.5. Seja (X, d) espaço métrico e o subconjunto $Y \subset X$. Um ponto $x \in Y$ é dito *ponto de fronteira* se existe um $\delta > 0$ tal que

$$B(x; \delta) \cap Y \neq \varnothing.$$

Ou seja, existem pontos do conjunto X e também pontos do subconjunto Y. Em outra linguagem, deve ter ponto do conjunto Y e também de seu complementar.

O conjunto de todos os pontos de fronteira de X é chamado de fronteira de X, denotado por ∂X, ou ∂X_d quando se deseja especificar uma métrica.

Exemplo 3.4. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Vamos considerar o subconjunto $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Queremos mostrar que os pontos 0 e 1 são pontos de fronteira de Y.
Para o ponto 0
Se tomarmos uma bola aberta centrada em 0 com qualquer raio $\delta > 0$, temos:

$$B(0; \delta) = (-\delta, \delta).$$

Esta bola contém pontos que estão em Y (por exemplo, pontos no intervalo $(0, \delta)$) e também contém pontos que estão no complementar de Y (por exemplo, pontos no intervalo $(-\delta, 0)$).
Para o ponto 1
De maneira similar, se tomarmos uma bola aberta centrada em 1 com qualquer raio $\delta > 0$, temos:

$$B(1; \delta) = (1 - \delta, 1 + \delta).$$

Esta bola contém pontos que estão em Y (por exemplo, pontos no intervalo $(1 - \delta, 1)$) e também contém pontos que estão no complementar de Y (por exemplo, pontos no intervalo $(1, 1 + \delta)$).

Portanto, os pontos 0 e 1 são pontos de fronteira do subconjunto $Y = [0, 1]$, ou seja, $\partial Y_d = [0, 1] \in Y$.

□

3.2 Conjuntos Fechados

Definição 3.6. O subconjunto $F \subset X$ é *fechado* se seu complementar $C(F)$ é aberto.

Sendo assim, em um espaço métrico (X, d), os conjuntos $\varnothing$ e X são abertos e, portanto, seus complementos são fechados.

Exemplo 3.5. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Vamos analisar se o intervalo fechado $[0, 1]$ é um conjunto fechado. Para isso, pela definição, precisamos verificar se o complementar de $[0, 1]$ é um conjunto aberto.

Observe que, o complementar de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ é o conjunto

$$C([0, 1]) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Agora, vamos verificar se este conjunto é aberto:

O intervalo $(-\infty, 0)$ é aberto em $\mathbb{R}$ porque, para qualquer ponto $x < 0$, existe uma bola aberta centrada em x com um raio pequeno o suficiente que está completamente contida em $(-\infty, 0)$.

O intervalo $(1, \infty)$ também é aberto em $\mathbb{R}$ porque, para qualquer ponto $x > 1$, existe uma bola aberta centrada em x com um raio pequeno o suficiente que está completamente contida em $(1, \infty)$.

Como ambos os intervalos $(-\infty, 0)$ e $(1, \infty)$ são abertos, a união deles também é aberta. Portanto, o complementar de $[0, 1]$ é aberto, o que implica que $[0, 1]$ é um conjunto fechado.

$\square$

Definição 3.7. Seja um subconjunto $Y \subset X$, um ponto $x \in X$ é chamado de ponto *limite* de Y (ou ponto de acumulação), se toda vizinhança de b contém $a \in Y$, tal que $a \neq b$.

Se b é um ponto limite de Y então cada uma das bolas abertas $B\left(b; \frac{1}{n}\right)$ contém um o ponto $(a_n) \in Y$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Assim, um ponto limite de um conjunto é o limite de uma sequência convergente de pontos de Y.

Exemplo 3.6. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Vamos tomar o subconjunto $Y = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Queremos mostrar que o ponto $x = 1$ é um ponto limite de Y. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Considere a bola aberta

$$B(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Queremos verificar que esta bola aberta contém um ponto $a \in Y$ tal que $a \neq 1$.

Como $Y = (0, 1)$, sempre podemos encontrar um ponto $a \in (0, 1)$ dentro da bola $B(1; \varepsilon)$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Por exemplo, podemos tomar $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, que pertence a $(0, 1)$ e também está em $B(1; \varepsilon)$.

Portanto, 1 é um ponto limite de Y porque qualquer bola aberta centrada em 1 contém pontos de Y diferentes de 1.

Além disso, observe que a sequência $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de pontos em A que converge para 1:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Isso mostra que 1 é o limite de uma sequência convergente de pontos de Y, confirmando que 1 é um ponto limite de Y.

$\square$

O próximo teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para determinar se um subconjunto de um espaço métrico é fechado.

Teorema 3.4. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, F contém todos os seus pontos de acumulação (ou pontos limite).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que F é fechado. Isso significa que seu complemento $C(F) = X - F$ é aberto. Seja F' o conjunto dos pontos de acumulação de F. Vamos provar que F contém todos os seus pontos de acumulação.

Considere um ponto $b \notin F$. Como $C(F)$ é aberto, existe um raio $\delta > 0$ tal que a bola aberta centrada em b com raio δ, denotada por $B(b;\delta)$, está inteiramente contida em $C(F)$. Ou seja,

$$B(b;\delta) \subseteq C(F).$$

Portanto, b não é um ponto de acumulação de F porque não existe nenhum ponto de F na vizinhança $B(b;\delta)$. Isso implica que $b \notin F'$.

Como b foi escolhido arbitrariamente fora de F, temos que todos os pontos de acumulação de F' estão em F, ou seja, $F' \subseteq F$.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que F contém todos os seus pontos de acumulação, isto é, $F' \subseteq F$. Vamos provar que F é fechado, mostrando que seu complemento $C(F)$ é aberto.

Considere um ponto $b \in C(F)$. Como b não está em F, e F contém todos os seus pontos de acumulação, b não pode ser um ponto de acumulação de F.

Portanto, existe um raio $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(b;\delta)$, não contém nenhum ponto de F, ou seja,

$$B(b;\delta) \cap F = \varnothing.$$

Isso significa que $B(b;\delta)$ está inteiramente contida em $C(F)$:

$$B(b;\delta) \subseteq C(F).$$

Como b foi escolhido arbitrariamente em $C(F)$, concluímos que $C(F)$ é aberto. Portanto, F é fechado. $\square$

Agora, veremos uma outra abordagem para caracterizar conjuntos fechados em termos de sequências convergentes. Este teorema nos ajuda a entender como os pontos limites de uma sequência dentro de um conjunto fechado se comportam.

Teorema 3.5. Em um espaço métrico (X, d), o subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, para cada ponto $a \in X$ e para cada sequência $(a_n) \subset F$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, temos $a \in F$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que F é fechado. Queremos mostrar que, se (a_n) é uma sequência de pontos em F que converge para algum ponto $a \in X$, então a também está em F.

Como F é fechado, seu complemento $C(F) = X \setminus F$ é aberto. Se $a \notin F$, então $a \in C(F)$, e como $C(F)$ é aberto, existe uma bola aberta centrada em a com raio $\epsilon > 0$ que está inteiramente contida em $C(F)$:

$$B(a;\epsilon) \subseteq C(F).$$

No entanto, isso contraria o fato de que (a_n) converge para a, pois significaria que para n suficientemente grande, $a_n \in B(a;\epsilon) \subseteq C(F)$, o que é impossível, já que todos os $a_n \in F$. Portanto, deve ser que $a \in F$.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que para cada sequência $(a_n) \subset F$ que converge para algum ponto $a \in X$, temos que $a \in F$. Queremos mostrar que F é fechado.

Considere um ponto $b \in X$ que é um ponto limite de F. Isso significa que existe uma sequência $(b_n) \subset F$ tal que $b_n \to b$. Pela hipótese, como $b_n \in F$ e $b_n \to b$, segue que $b \in F$.

Portanto, F contém todos os seus pontos limite, o que implica que F é fechado. □

Vamos considerar uma caracterização baseada na distância entre pontos e conjuntos. Este teorema revela que a distância zero entre um ponto e um conjunto pode ser usada para identificar se o ponto pertence ao conjunto fechado.

Teorema 3.6. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, para cada ponto $x \in X$, $d(x, F) = 0$ implica $x \in F$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que F seja fechado. Tome $x \in X$ tal que $d(x, F) = 0$. Isso significa que a distância de x a F é zero. Portanto, existe uma sequência de pontos $(a_n) \subset F$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, a_n) = 0$. Em outras palavras, $a_n \to x$.

Como F é fechado, ele contém todos os seus pontos limite. Portanto, como $a_n \to x$ e $a_n \in F$, segue que $x \in F$.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que em F, a condição $d(x, F) = 0$ implica $x \in F$. Queremos mostrar que F é fechado.

Se x é um ponto limite de F, então existe uma sequência $(a_n) \subset F$ tal que $a_n \to x$. Ou seja,

$$d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F.$$

Pela hipótese, isso implica que $x \in F$.

Portanto, F contém todos os seus pontos limite, o que significa que F é fechado. □

Como feito para conjuntos abertos, os conjuntos fechados possuem propriedades úteis para a Topologia, como as que seguem.

Teorema 3.7. Dado um espaço métrico (X, d), temos:

1. O conjunto X é fechado.
2. O conjunto $\varnothing$ é fechado.
3. A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
4. A interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Demonstração. Dado um espaço métrico (X, d), temos:

1. O complementar do conjunto X em X é $\varnothing$. Pelo Teorema 3.3, $\varnothing$ é aberto. Logo, conjunto X é fechado pois o seu complementar é aberto.
2. Analogamente, temos $\varnothing^C = X$. Pelo Teorema 3.3, X é um conjunto aberto. Logo, o conjunto vazio é fechado, já que o se seu complementar é aberto.
3. Sejam os subconjuntos fechados $(O_1, O_2, \ldots, O_n) \in X$. Tomemos um subconjunto

$$O = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} O_\alpha,$$

onde O_α é um subconjunto fechado. Então,

$$(O)^c = \left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} O_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{I}} O_\alpha,$$

onde a interseção é aberta. Portanto, a união de conjuntos fechados é fechado.

4. Provemos que a interseção de conjuntos fechados é um subconjunto fechado. Seja $F = \bigcap_{\beta \in \mathbb{I}} O_\beta$, onde O_β é um subconjunto fechado. Então,

$$F^c = \left(\bigcap_{\beta \in \mathbb{I}} O_\beta \right)^c = \bigcup_{\beta \in \mathbb{I}} O_\beta,$$

onde essa união é aberta. Logo, por definição, o subconjunto é fechado se, somente se, seu complementar for aberto.

□

Nesse momento, será introduzido o conceito de conjunto compacto, que é essencial em análise. Um conjunto é compacto se, para toda cobertura por conjuntos abertos, é possível selecionar uma subcoleção finita desses conjuntos que ainda cobre completamente o conjunto original. Esse conceito nos permitirá aprofundar o estudo de propriedades como continuidade e convergência em espaços métricos.

Definição 3.8. Um subconjunto $Y \subset X$ em um espaço métrico (X, d) é dito *compacto* se toda cobertura aberta de Y admite uma subcobertura finita. Em outras palavras, Y é compacto se, para cada coleção de conjuntos abertos $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$, existe uma subcoleção finita $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \ldots, O_{\alpha_n}\}$ tal que $Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}$.

Exemplo 3.7. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual dos números reais. Vamos analisar se o intervalo fechado $[0, 1]$ é compacto.

Para isso, precisamos verificar se toda cobertura aberta de $[0, 1]$ admite uma subcobertura finita. Vamos considerar uma cobertura aberta de $[0, 1]$.

Seja $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma coleção de conjuntos abertos tal que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha.$$

Queremos encontrar uma subcoleção finita $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \ldots, O_{\alpha_n}\}$ tal que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}.$$

Uma maneira prática de visualizar isso é considerar as coberturas abertas $Y_1 = (-1, 0.5), Y_2 = (0.25, 0.75), Y_3 = (0.5, 1.5)$ para $[0, 1]$:

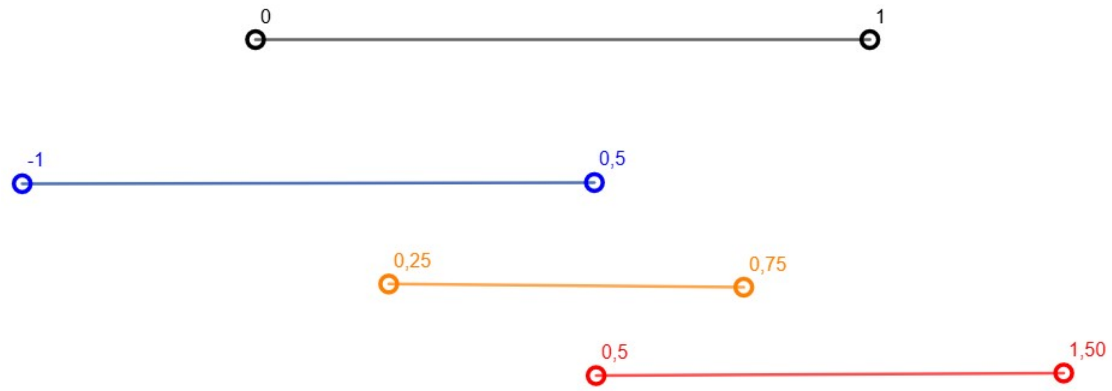
1. $(-1, 0.5)$ cobre a parte inicial do intervalo $[0, 1]$ até 0.5.

2. $(0.25, 0.75)$ cobre a parte central do intervalo $[0, 1]$.

3. $(0.5, 1.5)$ cobre a parte final do intervalo $[0, 1]$ desde 0.5 até 1.

Para uma melhor visualização, veja geometricamente a seguir:

Figura 5: Coberturas do intervalo $[0, 1]$.



Fonte: Elaborado pelo o autor, 2024.

Observamos que:

$$[0, 1] \subset (-1, 0.5) \cup (0.25, 0.75) \cup (0.5, 1.5).$$

De fato, a união destes três conjuntos cobre o intervalo $[0, 1]$. Portanto, podemos tomar a subcoleção finita $\{(-1, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 1.5)\}$ como uma subcobertura finita que cobre $[0, 1]$. Logo, o intervalo é compacto.

□

Proposição 3.1. Todo espaço métrico compacto é limitado

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Vamos mostrar que X é limitado.

Consideremos a família de bolas abertas unitárias centradas em cada ponto $x \in X$:

$$\mathcal{C} = \{B(x, 1) \mid x \in X\},$$

onde $B(x, 1) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$.

Como X é compacto, toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita. Como $\mathcal{C}$ cobre X, existe uma subcoleção finita de bolas $B(x_1, 1), B(x_2, 1), \ldots, B(x_n, 1)$ tal que:

$$X \subseteq B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1).$$

Agora, tomemos quaisquer pontos $x, y \in X$. Como X está contido na união das bolas, existe pelo menos uma bola $B(x_i, 1)$ que contém x e outra bola, talvez a mesma, que contém y. Portanto, temos:

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) < 2.$$

Assim, como o conjunto X pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas unitárias, logo

$$d(x, y) \leq M.$$

Portanto, X é limitado.

□

4 Topologia do Conjunto de Cantor

Um dos principais objetivos deste texto foi proporcionar um contato aprofundado com os espaços métricos e sua topologia, abordando conteúdos que transcendem o currículo convencional de uma licenciatura em matemática. Como conclusão deste trabalho, apresento um capítulo dedicado à análise topológica do conjunto de Cantor, não apenas como uma culminação natural do estudo aqui desenvolvido, mas também como uma homenagem ao brilhante matemático que o concebeu.

Georg Cantor, matemático alemão de grande renome, é amplamente reconhecido por suas contribuições fundamentais à teoria dos conjuntos e pelo desenvolvimento do conceito de infinito. O conjunto de Cantor, um dos exemplos mais notáveis de sua obra, destaca-se por suas propriedades singulares tanto em análise quanto em topologia.

4.1 Construção do Conjunto

O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo fechado $[0,1]$ obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos. Vejamos sua construção:

1. Inicialmente tomemos o intervalo fechado $[0,1]$ na reta.

Figura 6: Construção do conjunto de Cantor, passo 1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

2. Retira-se o terço médio aberto, isto é, o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, restando os intervalos fechados $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Figura 7: Construção do conjunto de Cantor, passo 2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

3. Depois é retirado novamente o terço médio, os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, restando $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

Figura 8: Construção do conjunto de Cantor, passo 3

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Portanto, o conjunto M de pontos não retirados é conjunto de Cantor. Desse modo, iremos abordar algumas propriedades topológicas que estão presentes nesse conjunto.

4.2 Propriedades Topológicas do Conjunto de Cantor

Teorema 4.1. O conjunto de Cantor $M \subset [0,1]$ é compacto.

Demonstração. Para demonstrar que o conjunto de Cantor M é compacto, devemos provar que ele é fechado e limitado. A construção do conjunto de Cantor envolve a remoção infinita de intervalos abertos do intervalo $[0,1]$. Podemos chamar os intervalos retirados de $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$. Tomemos o conjunto desses intervalos abertos como

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Note que, em cada etapa da construção, removemos um intervalo aberto e deixamos os pontos extremos de cada intervalo removido. Após "todas" as etapa de remoção, tem-se o conjunto desejado. Logo, o Conjunto de Cantor M é

$$M = [0,1] - I.$$

Portanto, a interseção de conjuntos abertos é aberta e por definição o seu complementar é fechado, logo o conjunto M é fechado.

Além disso, como todos esses intervalos estão contidos em $[0,1]$ que é um conjunto limitado, então o subconjunto M também é limitado, e portanto é compacto.

□

Teorema 4.2. O subconjunto de Cantor não tem ponto interior.

Demonstração. Para mostrar que o conjunto de Cantor M tem interior vazio, precisamos provar que não existe nenhum intervalo aberto que esteja completamente contido em M.

Vamos supor, por contradição, que existe um intervalo aberto $(a,b) \subset [0,1]$ que esteja inteiramente contido em M. Consideremos a construção iterativa do conjunto de Cantor. Após a n-ésima etapa, restam apenas intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

Vamos tomar um intervalo aberto qualquer $(a,b) \subset [0,1]$. Dado um ponto $x \in (a,b)$ e um comprimento $c > 0$, temos a bola aberta $(x-c, x+c)$. Para um n suficientemente grande, temos:

$$\frac{1}{3^n} < c \Rightarrow \frac{1}{3^n} - c < 0.$$

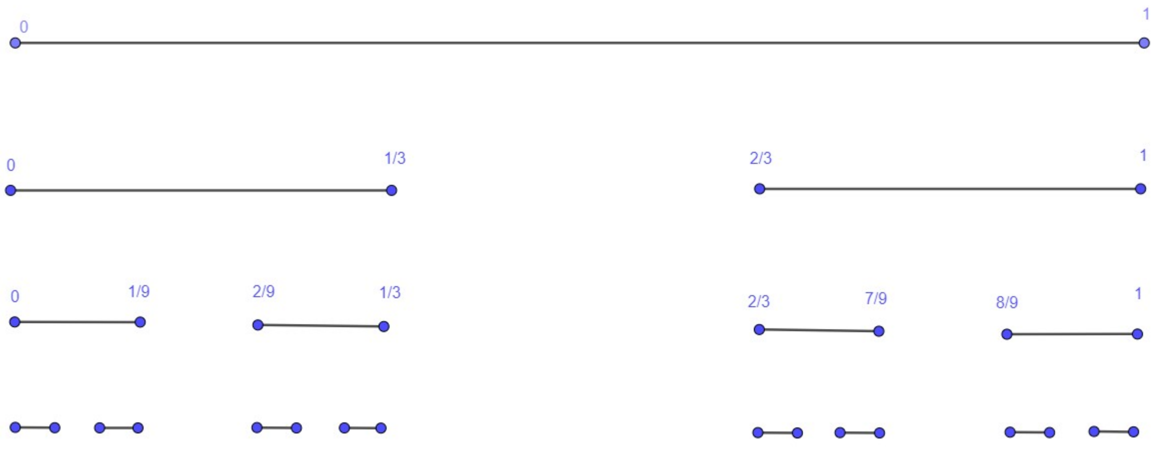
Isto implica que, em algum estágio da construção do conjunto de Cantor, o comprimento dos intervalos restantes $\frac{1}{3^n}$ será menor que c. Logo, o intervalo $(x-c, x+c)$ não pode estar inteiramente contido em qualquer dos intervalos restantes após a n-ésima etapa, pois partes dele estarão fora desses intervalos. Isso significa que (a,b) necessariamente intersecta algum intervalo aberto removido na construção do conjunto de Cantor.

Como qualquer intervalo aberto (a,b) intersecta algum intervalo removido durante a construção do conjunto de Cantor, não existe nenhum intervalo aberto que esteja completamente contido em M. Portanto, o conjunto de Cantor tem interior vazio. □

Teorema 4.3. O conjunto de Cantor não contém pontos isolados, ou seja, todos os seus pontos são de acumulação.

Demonstração. Observe o processo de construção do conjunto:

Figura 9: Construção do conjunto de Cantor



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os pontos extremos dos intervalos omitidos como

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \cdots\right\}$$

pertencem ao conjunto de Cantor.

Em cada etapa, são retirados apenas pontos interiores aos intervalos restantes da etapa anterior. Estes pontos extremos constituem um conjunto enumerável E e não têm pontos isolados, pois não conseguimos formar uma vizinhança de um ponto de forma que contenha apenas ele. Para isso, veremos dois casos, quando o ponto é extremo e quando não é.

Para ilustrar, considere uma extremidade $c \in M$ de algum intervalo. Suponha que um intervalo (c, b) foi removido de $[0, 1]$ para formar M. Quando o intervalo (c, b) foi retirado, restou um intervalo $[a, c]$. Nas etapas subsequentes da construção de M, sempre permanecerão as mesmas extremidades, do tipo $[a_n, c]$, com $a_n \in E$. O comprimento $c - a_n$ tende a zero, pois $\frac{1}{3^n}$ tende a zero. Portanto, $a_n \to c$, e assim c não é um ponto isolado de E.

Vamos verificar outro caso. Suponha que $c \in M$ não seja uma extremidade de intervalo durante a construção de M. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o ponto c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou após a n-ésima etapa de construção. Temos $x_n < c < y_n$, com $x_n, y_n \in M$ e o comprimento $\frac{1}{3^n}$ que é igual a $y_n - x_n$. Logo,

$$c = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n,$$

o que mostra que c é um ponto de acumulação de M.

Portanto, em ambos os casos, não existem pontos isolados em M. Todos os pontos são pontos de acumulação, confirmando que o conjunto de Cantor não possui pontos isolados. □

Teorema 4.4. O conjunto de Cantor é não-enumerável

Demonstração. Para mostrar que o conjunto de Cantor é não-enumerável, usaremos a técnica da diagonalização de Cantor.

Suponha, por contradição, que o conjunto de Cantor é enumerável. Então existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to M$, onde cada elemento $n \in \mathbb{N}$ está associado a um elemento $k_n \in M$. Então podemos listar os elementos de $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$.

Nosso objetivo é mostrar que existe um ponto $c \in M$ que não está nessa lista, ou seja, $c \neq k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, tomamos um intervalo compacto não-degenerado $I_1 \subseteq [0, 1]$ que contenha k_1. Como $k_1 \in M$ e K não possui pontos isolados, $I_1 \cap M$ é um conjunto infinito e compacto, sem pontos isolados. Escolhemos um ponto de K dentro de I_1 que não seja k_1.

Em seguida, tomamos um intervalo compacto não-degenerado $I_2 \subset I_1$ que contenha k_2 tal que $k_2 \notin I_2$.

Continuamos esse processo de forma análoga, obtendo uma sequência decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ tal que $k_n \notin I_n$ e $I_n \cap K \neq \emptyset$.

Prosseguimos com essa construção, e podemos garantir que cada I_n tem comprimento menor que $1/n$. Portanto, a interseção desses intervalos compactos é um único ponto c, ou seja,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

Escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $y_n \in I_n \cap M$. Como c está na interseção de todos os I_n, temos

$$|y_n - c| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Dado que M é fechado, e sendo c um limite de pontos em K, então $c \in M$.

Além disso, por construção, temos $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, encontramos um ponto $c \in M$ que não está na lista $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, o que contradiz a suposição de que M é enumerável. Assim, M não é enumerável.

$\square$

5 Considerações Finais

Este trabalho proporcionou a oportunidade de estudar conteúdos que, embora ausentes na grade curricular tradicional do curso de licenciatura em Matemática, são fundamentais para a formação sólida de um matemático. A topologia dos espaços métricos, em particular, emerge como um elemento indispensável não apenas por sua relevância teórica, mas também por suas aplicações práticas em diversas áreas da matemática.

Iniciamos com a caracterização de métricas em conjuntos, convertendo-os em espaços métricos, e abordamos métricas clássicas, como a euclidiana, além de conceitos centrais como as bolas abertas. A partir da definição de métrica, discutimos suas propriedades, exemplificando com casos práticos, como vizinhanças e a importância das bolas abertas na definição de continuidade. Essa estrutura teórica serviu como base para explorar tópicos avançados, como a convergência de sequências e a continuidade de funções em espaços métricos, ilustrando a aplicabilidade desses conceitos na análise matemática.

A discussão aprofundada desses tópicos ressaltou a importância da métrica na definição de propriedades topológicas, como a caracterização da continuidade em termos de vizinhanças. Além disso, as métricas permitem uma compreensão mais refinada da estrutura de diferentes tipos de conjuntos, sendo cruciais para o desenvolvimento da análise e da topologia.

Dentre os exemplos abordados, a análise do Conjunto de Cantor destacou-se como uma aplicação concreta e sofisticada dos conceitos de métrica e topologia. Este conjunto, com sua construção iterativa e estrutura singular, ilustra de forma excepcional como propriedades abstratas podem se manifestar em um contexto específico. As propriedades topológicas do Conjunto de Cantor, como sua total desconexão, a ausência de pontos isolados e sua estrutura de espaço compacto, exemplificam a riqueza dos espaços métricos e demonstram a utilidade de conceitos teóricos na análise de casos complexos. Assim, o estudo do Conjunto de Cantor não apenas coroou o conteúdo aqui explorado, mas também reforçou a importância da topologia dos espaços métricos como parte essencial da formação de qualquer matemático.

REFERÊNCIAS

Lima, E. L. **Espaços Métricos**, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

Mendelson, B. **Introduction to Topology.** Third Edition. Boston: Dover Publications, Inc., 1990.

Silva, G. L. **Espaços métricos: com aplicações.** Boa Vista: 2013, Editora Kiron.