UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS (CCHE)
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DENILSON FERNANDES DE LIMA

ENSINO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MONTEIRO - PB
2024

DENILSON FERNANDES DE LIMA

ENSINO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO – PB
2024

L732e Lima, Denilson Fernandes de.

Ensino de equação do 2º grau através da resolução de problemas [manuscrito] / Denilson Fernandes de Lima. - 2024.

25 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE".

1. Ensino de matemática. 2. Equações do 2° grau. 3. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita Ramos Bezerra - CRB - 15/970 BSC6

DENILSON FERNANDES DE LIMA

ENSINO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 29/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Roger Ruben Huaman Huanca** (***.567.928-**), em **04/12/2024 13:21:47** com chave **dbbd15e8b25b11ef923d1a7cc27eb1f9**.
- **Flavia Aparecida Bezerra da Silva** (***.744.004-**), em **04/12/2024 14:36:53** com chave **59d5542cb26611efaec41a7cc27eb1f9**.
- **Misaelle do Nascimento Oliveira** (***.595.504-**), em **06/12/2024 09:00:19** com chave **aa19d066b3c911ef9bb21a7cc27eb1f9**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Termo de Aprovação de Projeto Final
Data da Emissão: 06/12/2024
Código de Autenticação: db19d7

Dedico este trabalho a minha família, em especial a minha mãe Aparecida que sempre mim apoiou. Dedico em memória à minha madrinha Antônia que sempre mim incentivou nos estudos, e sei que está torcendo por mim esteja onde estiver. Dedico também a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória.

A pesquisa científica exige criatividade, disciplina, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância.

MIRIAM GOLDENBERG

SUMÁRIO

ENSINO DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Denilson Fernandes de Lima[1]
Roger Ruben Huaman Huanca[2]

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo investigar uma abordagem alternativa para a resolução de equações do 2.º grau, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas, com ênfase no método de Po-Shen Loh. O referencial teórico apoia-se nos estudos de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2005; 2011), Gomes e Huanca (2023), Loh (2019), entre outros, que discutem o papel da resolução de problemas no ensino da Matemática. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica estruturada em duas etapas: a exploração de um livro sobre equações do 2.º grau, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e a apresentação do método de Po-Shen Loh. Os resultados destacam a importância de envolver futuros professores em práticas que os capacitem como resolvedores de problemas, além de promover a reflexão coletiva com especialistas sobre os resultados de aulas centradas nesta metodologia. Como estratégia de ensino, foi apresentado um problema envolvendo equações do 2.º grau, ilustrando uma prática pedagógica que procura tornar a aprendizagem matemática mais significativa. A pesquisa conclui que o método de Po-Shen Loh oferece possibilidades promissoras para o desenvolvimento do raciocínio matemático e algébrico, além de estimular a resolução de problemas do quotidiano. Assim, espera-se que este trabalho contribua para a formação de professores de Matemática, fomentando novas perspectivas para o ensino da disciplina.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Equação do 2º grau; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This article aims to investigate an alternative approach to solving quadratic equations using the Problem-Solving methodology, with an emphasis on Po-Shen Loh method. The theoretical framework is based on the studies of Onuchic (1999), Onuchic and Allevato (2005; 2011), Gomes and Huanca (2023), Loh (2019), among others, which discuss the role of problem-solving in mathematics education. This is bibliographical research structured in two stages: the exploration of a book on quadratic equations using the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem-Solving and the presentation of Po-Shen Loh method. The results highlight the importance of engaging future teachers in practices that prepare them as problem-solvers, in addition to promoting collective reflection with specialists on the outcomes of lessons focused on this methodology. As a teaching strategy, a problem involving quadratic equations was presented, illustrating a pedagogical practice that seeks to make mathematical learning more meaningful. The research concludes that Po-Shen Loh method offers promising possibilities for developing mathematical and algebraic reasoning while encouraging the solving of real-life problems. It is hoped that this work will contribute to the training of mathematics teachers, fostering new perspectives on the teaching of the subject.

Keywords: Mathematics Teaching; Quadratic Equation; Problem Solving.

[1] Graduando em Licenciatura Plena em Matemática. E-mail: denilson.lima@aluno.uepb.edu.br;
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro/SP. Professor e Pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, roger@servidor.uepb.edu.br

1 INTRODUÇÃO

A Matemática vai além, sendo uma ciência que explora padrões e ordem, permeando diversas áreas do conhecimento e situações cotidianas. Ela aborda o estudo de padrões, quantidades, estruturas e mudanças, empregando uma linguagem simbólica precisa e uma lógica rigorosa para formular teorias, resolver problemas e conduzir investigações. Desde as operações fundamentais da aritmética até os conceitos abstratos da álgebra, a Matemática oferece ferramentas indispensáveis para o avanço tecnológico, a análise de dados, a economia, a engenharia e muitos outros campos. No entanto, no ensino de Matemática, o uso de fórmulas para resolver problemas é uma prática mais comum do que outros métodos.

A aplicação da equação do 2º grau está bem presente em muitas atividades da nossa vida, e é um conteúdo muito explorado nos anos finais do Ensino Fundamental para a construção de conceitos, desenvolvimento cognitivo e algébrico dos alunos, necessários para estimular o raciocínio, a capacidade de análise e a argumentação matemática.

Envolver situações reais em um problema requer meios para alcançar um resultado, o que se dá através da Resolução de Problemas. No entanto, resolver problemas é o processo prático para reorganizar conceitos e habilidades, aplicando-os a uma nova situação, atendendo assim a um objetivo. Percebe-se que ao ensinar através da Resolução de Problemas encontramos um caminho para ensinar Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas (Onuchic, 1999). Nesse sentido, a Resolução de Problemas é o meio essencial para o processo de ensino e aprendizagem significativo dos conhecimentos matemáticos, pois essa metodologia propicia o contexto em que se podem apreender além dos conceitos, os procedimentos matemáticos.

Em relação ao ensino da Equação de 2º grau, alguns métodos são utilizados para determinar o seu conjunto solução, seja através da representação algébrica da soma e produto de suas raízes, completando quadrados ou fórmula resolutiva de Bhaskara e até mesmo pela representação geométrica. O ensino e a aprendizagem de equação do 2º grau trazem inúmeras reflexões no âmbito da Educação Matemática e no Ensino Básico, como também sua contribuição para com os alunos na construção do seu próprio conhecimento e suas relações com a sociedade.

Ao longo dos anos, estudiosos têm buscado ampliar e adaptar a fórmula de Bhaskara para desenvolver novas estratégias pedagógicas voltadas ao ensino e à aprendizagem. Uma dessas abordagens é o método recente de Po-Shen Loh, aplicado à resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau. Este método, foco do presente estudo, foi apresentado e explorado no livro “Práticas no ensino e aprendizagem de matemática: equações do 2º grau através da Resolução de Problemas". A leitura dessa obra despertou no primeiro autor deste artigo o interesse em investigar o método, com o objetivo de contribuir tanto para sua formação inicial quanto para a formação de professores de Matemática.

Este trabalho tem como objetivo investigar uma abordagem alternativa para a resolução de equações do 2.º grau, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas, com foco no método de Po-Shen Loh. Trata-se de uma pesquisa de natureza bibliográfica, fundamentada em diversas fontes, como artigos e livros. A investigação apoia-se na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, buscando aprofundar a compreensão e aplicação dessa abordagem no contexto educacional.

Esta pesquisa, alinhada à metodologia de ensino adotada, busca contribuir para a formação inicial e continuada de professores da Educação Básica, promovendo o uso da Resolução de Problemas como uma estratégia essencial no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Essa abordagem tem o potencial de motivar os alunos a enfrentar diversos problemas, incentivando-os a questionar e explorar seus interesses em busca de soluções. Para isso, utiliza-se os conhecimentos prévios dos estudantes, integrando-os aos conceitos matemáticos construídos ao longo do processo para resolver os problemas propostos.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, buscamos apresentar a metodologia de ensino da Matemática através da Resolução de Problemas como um caminho eficaz para o ensino em sala de aula. Sob essa perspectiva, o artigo propõe discutir aspectos fundamentais dessa metodologia, destacando para futuros professores e docentes em exercício a importância de promover mudanças teóricas e práticas. Para iniciar, é necessário definir o que entendemos por "problema". Entre as várias definições existentes, destacamos alguns relevantes no contexto da educação matemática.

"Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível" (Polya, 1962, p. 117).

"É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (Dante, 1995, p. 10).

"É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer" (Onuchic, 1999, p. 215).

"É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecida e a pessoa deve querer fazer a transformação" (Pérez;

Cabrera, 2000, p. 118).

"Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (PCN, 2001, p. 44).

"Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (Van de Walle, 2001, p. 42).

> Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (Villa; Callejo, 2006, p. 29).

Concordamos com os autores citados nos aspectos que envolvem o desconhecimento da resposta e a vontade de encontrá-la. Esses aspectos são decisivos para o trabalho do professor de matemática com a metodologia da resolução de problemas nas aulas de Matemática. Então, um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.

2.1 Reflexões sobre a Resolução de Problemas

Desde a antiguidade problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo de matemática. São encontrados registros de problemas matemáticos na história antiga egípcia, china e grega, e ainda são encontrados problemas em livros-texto de Matemática dos séculos XIX e XX. Segundo Onuchic (1999, p. 199), "O principal ponto a ser considerado, nos exemplos dados no passado, é que neles é assumida uma visão muito limitada da aprendizagem de resolução de problemas".

Em um breve histórico, podemos destacar que, desde a obra Os Elementos de Euclides, no século III a.C., o ensino de Matemática foi amplamente moldado pela sequência de definições, axiomas, postulados, teoremas, exercícios e problemas. Dessa forma, a forma como Euclides expôs o conhecimento geométrico de sua época, por meio de seus escritos, passou a ser considerada um modelo para o ensino da Matemática.

Entretanto, sabemos que a criação matemática e, principalmente, a sua aprendizagem seguem caminhos bem diferentes da sequência (lógica) em que os livros foram organizados. Na aprendizagem matemática, os caminhos iniciais do aprendizado são de natureza psicológica. É muito recente na educação matemática o recurso à resolução de problemas como estratégia metodológica no trabalho docente.

Segundo Onuchic (1999), após alguns anos o ensino de matemática deveria ser aprendido pelos alunos com compreensão. Os métodos de tabuadas e seus treinos eram condenados, os alunos deveriam entender o que faziam. O professor falava, e o aluno escutava e repetia, não participava da construção do seu conhecimento. O professor não era preparado para trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho era resumido a treinos de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender um novo conteúdo. Nessa época, no século XX, iniciava-se a falar em resolver problemas como um meio de aprender matemática.

A primeira vez em que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para o professore e aluno, nos níveis superiores, foi a partir do livro How to solve it, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey[1], entre 1896 e 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade). Dewey sugeria que essa orientação pedagógica, centrada em projetos, pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (Fiorentini, apud Onuchic, 1999).

Nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática no Brasil e em outros países foi influenciado pelo movimento conhecido como Matemática Moderna. Esse movimento não teve o sucesso esperado e assim continuou a busca por uma educação matemática de modo a preparar os estudantes para um mundo que exigia cada vez mais conhecimentos matemáticos.

A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. (Onuchic, 1999).

---

1 John Dewey foi um filósofo e educador americano. Ele é amplamente reconhecido como um dos principais representantes do pragmatismo, uma corrente filosófica que enfatiza a importância da experiência e da ação como base para o conhecimento e a resolução de problemas. Dewey também foi fundamental no movimento progressista na educação, defendendo a ideia de que a melhor educação envolve o 'aprender fazendo'.

Onuchic (1999) ressalta que no final dos anos 70, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Ela ainda descreve que em 1980 foi editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda for Action: Recommendation for School Mathematics of the 1980's, que chamava a todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, buscarem uma educação matemática melhor para todos. Nesse sentido, Onuchic (1999, p. 204) diz que,

> A primeira dessas recomendações dizia que "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80" e destacava que "o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática." O documento ainda dizia que resolução problemas abrange uma grande quantidade de rotinas e lugares comuns, assim como funções não rotineiras consideradas essenciais na vida diárias dos cidadãos. Dizia, também, que é preciso preparar os indivíduos para tratar problemas espaciais com que irão se deparar em suas próprias carreiras. Resolução de problemas envolve aplicar a matemática no mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas.

Ao longo da década de 1980, os estudos e pesquisas deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, mas, o processo continuou preso na busca pela solução do problema. Já no final dessa década, com todas essas recomendações de ação, os pesquisadores passaram a discutir o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Também começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Diante disso, segundo Onuchic (1999), em 1989 exatamente, a Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Ou seja, o problema pode ser visto como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Assim, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação formal.

Segundo essa autora, ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, ou seja, na certeza de que o aprendizado de matemática pelos alunos é mais importante quando é autogerado do que quando é imposto por um professor ou por um livro-texto. Ainda segundo Onuchic (1999), quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão.

A partir de década de 1990, um novo entendimento da resolução de problemas passou a ser divulgado, bem como em documentos e propostas oficiais. A proposta sugerida aos professores de Matemática tem característica própria, pois os problemas são tomados como desafios que possibilitam aos estudantes elaborar ou adquirir ideias e aspectos da Matemática.

Essa perspectiva metodológica da resolução de problemas permite ao estudante a alegria de vencer obstáculos criados por sua curiosidade, vivenciando o “fazer matemática”.

Nesse sentido, o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensinar e de aprender ideias, propriedades e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

2.2 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece um caminho para ensinar e aprender Matemática, focando na resolução de problemas e não apenas no aprendizado de como resolvê-los. Nesse modelo, o problema serve como ponto de partida, e, durante sua resolução na sala de aula, devem ser feitas conexões entre os diversos ramos da Matemática, gerando novos conceitos e conteúdos (Onuchic; Allevato, 2005).

No processo de ensino e aprendizagem através da exploração de um problema, entender as hipóteses do problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações entre suas variáveis, saber comunicar resultados e ser capaz de avaliar criticamente técnicas e concepções utilizadas na resolução do mesmo são aspectos que devem estar presentes ou serem estimulados.

Apesar de não haver formas rígidas de programar e colocar em prática o trabalho com o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato (2011, p. 83-85) apresentam um roteiro composto por 9 etapas/atividades, que pode servir como referência ou orientação aos professores interessados em trabalhar com essa metodologia. Tais atividades foram compiladas a seguir:

- *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
- *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
- *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
    - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos surgem um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- *Resolução do problema* - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- *Formalização do conteúdo* – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Nessa metodologia, segundo as autoras, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, ou seja, é o planejamento pretendido pelo professor.

Sendo assim,

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
> - Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> - Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> - A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos (Onuchic; Allevato, 2011, p. 82).

Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. Assim, a avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema (Onuchic; Allevato, 2011).

3 EQUAÇÕES DO 2° GRAU

Podemos dizer que, no campo de estudo da Educação Matemática, as etapas da metodologia de Resolução de Problemas direcionam os procedimentos levantados nas leituras do problema para sua resolução, analisando as estratégias para encontrar determinada solução, seja de imediato a 'tentativa' e/ou o 'erro', que são fundamentais para vincular o problema ao conteúdo estudado.. Nesse sentido, pensar o ensino e a aprendizagem de equação do 2º grau com vistas às nove etapas dessa metodologia, é um caminho promissor para alcançar melhores resultados no que se propõe a ensinar e a aprender.

3.1 As equações

Queremos deixar claro que as equações desempenharam um papel vital na criação do mundo atual, pois sempre estamos utilizando-as direta ou indiretamente nas transações comerciais, relacionando as grandezas etc. Você não precisa ser um gênio para apreciar a beleza de uma equação.

> As equações são a força vital da matemática, da ciência, da tecnologia e do ser humano. Sem elas, nosso mundo não existiria em sua forma atual. No entanto, as equações da Matemática têm a fama de serem aterrorizantes, ou seja, causa um certo medo de resolvê-la, por exemplo, se planteamos aos estudantes um problema envolvendo uma equação do 2º grau, eles já vão diretamente utilizar a fórmula de Bhaskara sem saber se precisa ou não (Gomes; Huanca, 2023, p. 48).

Em Matemática existem dois tipos de equações que, à primeira vista, parecem muito semelhantes. Um tipo apresenta as relações entre várias quantidades matemáticas: a tarefa é provar que a equação é verdadeira. Já o outro tipo fornece informações sobre uma quantidade desconhecida, e a tarefa do matemático é resolvê-la; é tornar conhecido, o desconhecido. A distinção não é clara, porque às vezes a mesma equação pode ser usada nos dois sentidos, mas é um guia útil. Gomes e Huanca (2023, p. 48-49) falam sobre dois tipos,

> Na **Matemática Pura** as equações são geralmente do primeiro tipo: revelam padrões e regularidades profundos e belos. Elas são válidas porque, dadas nossas suposições básicas sobre a estrutura lógica da matemática, não há outra alternativa. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras, que é uma equação expressa na linguagem da Geometria. Se você aceitar as suposições básicas de Euclides sobre geometria, então o teorema de Pitágoras é verdadeiro.
> As equações na **Matemática Aplicada** são geralmente do segundo tipo. Elas codificam informações sobre o mundo real; expressam propriedades do universo que, em princípio, poderiam ser muito diferentes. Por exemplo, temos a lei da gravidade de Newton. Ela nos diz como a força de atração entre dois corpos depende de suas massas e a que distância eles estão. Resolver as equações resultantes nos diz como os planetas giram em torno do Sol, ou como projetar uma trajetória para uma sonda espacial, mas a Lei de Newton não é um teorema matemático; é certo por razões físicas, ela se encaixa nas observações. A lei da gravidade poderia ter sido diferente, na verdade, é diferente: a teoria geral da relatividade de Einstein melhora a de Newton ao ajustar melhor algumas observações, embora sem estragar os casos em que a lei de Newton já é conhecida por fazer um bom trabalho.

Assim, uma equação deriva seu poder de uma fonte simples. Ela nos diz que dois cálculos, que parecem diferentes, têm a mesma resposta. O símbolo-chave é o sinal de igual (=). As origens da maioria dos símbolos matemáticos se perderam nas brumas da antiguidade ou são tão recentes que não há dúvida de onde vieram. O sinal de “igual” é incomum porque data de mais de 460 anos, mas não apenas sabemos quem o inventou, mas também sabemos por quê. O inventor foi Robert Recorde, em 1557, em *The Whetstone of Witte* (A pedra de amolar de Witte). Ele usou duas linhas paralelas (usando a palavra obsoleta *gemowe*, que significa “gêmeo”) para evitar a tediosa repetição das palavras “é igual a”. Ele escolheu esse símbolo porque “não há duas coisas mais parecidas” (Gomes; Huanca, 2023).

Ainda esses autores, dizem que, o poder das equações reside na correspondência filosoficamente difícil entre a matemática, uma criação coletiva das mentes humanas e uma realidade física externa. Elas moldam padrões profundos no mundo exterior. Segundo Gomes e Huanca (2023), aprendendo a dar valor às equações e a ler as histórias, podemos descobrir traços vitais do mundo que nos rodeia. Em princípio, pode haver outras maneiras de obter o mesmo resultado. Muitas pessoas preferem palavras a símbolos; linguagem que também nos dá poder sobre nosso ambiente, mas o veredicto da ciência e da tecnologia é que as palavras são muito imprecisas e muito limitadas para fornecer um caminho eficaz para os aspectos mais profundos da realidade, são muito coloridos por suposições de nível humano.

Assim, as equações têm sido e continuam a ser uma força impulsionadora na civilização humana por milhares de anos. Ao longo da história, elas desempenharam um papel fundamental, moldando a sociedade de maneiras muitas vezes invisíveis, mas sempre presentes, quer observadas ou não. Esta é a história da evolução da humanidade, narrada por meio das equações. A seguir, focaremos matematicamente na equação do 2º grau completa, utilizando o método/fórmula de Po-Shen Loh.

3.2 Método de Po-Shen Loh para resolver equação do 2° Grau

Ao longo da história, o curso da humanidade foi redirecionado, repetidas vezes, por uma equação do 2º grau. As equações do 2º grau têm poderes ocultos, revelam os segredos mais íntimos da natureza. Esta não é a maneira tradicional de os historiadores organizarem a ascensão e queda das civilizações. Reis, rainhas, guerras e desastres naturais abundam nos livros de história, mas as equações do 2º grau ocupam uma camada muito fina (Gomes; Huanca, 2023).

Em relação as equações do 2º grau a história da Matemática, aponta procedimentos geométricos que os mesopotâmicos e gregos utilizavam na resolução de equações do 2º grau, conforme afirma Pedroso (2010):

> Acredita-se que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2° grau (Pedroso, 2010, p.3).

Muitos estudos foram realizados pelos povos egípcios, babilônicos, gregos e muitos outros na história da álgebra que corroboram para o estudo das equações do 2º grau no ensino da Matemática. Compreendendo a história e a contribuição de grandes estudiosos matemáticos para os métodos algébricos utilizados na resolução de problemas de equações quadráticas, destacamos um recente e importante matemático que descobriu um novo método para resolver equação do 2º grau, o método de Po-Shen Loh.

Po-Shen Loh é professor de Matemática da Universidade Carnegie Mellon, nos Estados Unidos, e atualmente é o treinador nacional da equipe da Olimpíada Internacional de Matemática dos Estados Unidos. Notável por conquistar diversos títulos e prêmios, Po-Shen Loh, em setembro de 2019, descobriu uma maneira diferente de resolver equações do 2º grau, deduzindo a fórmula quadrática (nome dado por Po-Shen Loh) para calcular a solução das referidas equações, expressas na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$. com $a \neq 0$.

Segundo Po-Shen Loh (2019), os babilônios encontraram um método na tentativa de se poupar na incômoda tarefa de pagar impostos, uma vez que sua base econômica trabalhava com plantações e não tinham uma maneira padrão de resolver essas equações quadráticas (LOH, 2019, p. 5).

> O método consiste numa simplificação da fórmula de Bhaskara com o intuito de tornar os cálculos mais simples e diretos e não há restrição, podendo ser aplicado em qualquer equação quadrática. Neste método, o valor do coeficiente a é obrigatoriamente 1 (a = 1) (Manso; Cardoso, 2020, p. 248).

Segundo Gomes e Huanca (2023), o método de Po-Shen Loh é uma generalização da fatoração da forma geral de uma equação do 2º grau por meio da relação do Produto Notável, soma e produto. Para chegar a essa conclusão, Loh partiu do pressuposto de que a equação do 2º grau, em sua forma geral, pode ser representada pela equação $x^2 + Bx + C = 0$ e que por meio desta, basta encontrar dois números com soma – B e produto C, ponto em que a fatoração existirá e essas serão o conjunto completo de suas raízes.

Partindo da análise proposta por Loh (2019), tomamos a equação do 2º grau em sua forma geral, $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e em seguida, a fim de situar os números B e C, simplificaremos toda equação pelo coeficiente a. Assim, teremos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \quad \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \;\Rightarrow\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Simplificada a equação, temos $-\text{B} = \frac{b}{a}$ e $-\text{C} = \frac{c}{a}$, representando-a da seguinte forma $x^2 + \text{B}x + \text{C} = 0$. Assim representada, relacionamos a equação a uma fatoração em que satisfaça as ideias inicias de Po-Shen Loh, a soma de dois números igual a – B e o produto igual a C.

Para tornar mais didática e clara a condição inicial proposta pelo matemático Loh, Gomes e Huanca (2023) associam dois números x_1 e x_2 à soma e ao produto. Logo, reescrevendo a equação, ficou assim:

$$x^2 + Bx + C = 0$$

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_1 \bullet x_2) = 0$$

Em continuidade, para encontrar dois números com soma – B e produto C, é representado – B = $x_1 + x_2$ (soma) e C = $x_1 \bullet x_2$ (produto). Nesse momento, podemos notar que a soma dos dois números x_1 e x_2 é igual a – B e para que isso seja possível, podemos refletir que – B é a soma da média aritmética de – B, como sendo $-\frac{B}{2} + \left(-\frac{B}{2}\right)$, ou seja, Loh (2019) ressalta que para a soma e produto, respectivamente "dois números somam − B precisamente quando sua média é $-\frac{B}{2}$ e assim basta encontrar dois números da forma $-\frac{B}{2} \pm z$ que se multiplicam para C, onde z é uma única quantidade desconhecida, porque eles terão automaticamente a média desejada" (Loh, 2019, p. 2).

Corroborando com a proposição do matemático, Gomes e Huanca (2023) chamam o z de parâmetro (μ) em que visualizaremos sua empregabilidade na generalização da fórmula resolutiva de Bhaskara para encontrar a fórmula quadrática descoberta por Po-Shen Loh. Ainda esses autores dizem que, a fórmula resolutiva de Bhaskara é uma generalização da ideia de completar quadrados (método de Fatoração de Expressões Algébricas), sendo representada algebricamente pela equação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$

Assumindo na sequência um desdobramento da fórmula resolutiva, Gomes e Huanca (2023) apresentam:

$$\text{Fórmula resolutiva} \quad \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Desdobramento (1)} \quad \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Desdobramento (2)} \quad \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

A partir do segundo desdobramento, os dois possíveis valores para x_1 e x_2, são representando-os da seguinte forma:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Nessa etapa é chamado $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ de parâmetro (μ), conforme Po-Shen Loh relaciona z para encontrar a fórmula quadrática, sendo assim, é assumido para os números x_1 e x_2 as seguintes equações:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \mu \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \mu$$

A partir desse momento, Po-Shen Loh para encontrar dois números com soma – B e produto C, chama S a soma $x_1 + x_2 = -B$ e P, o produto $x_1 \bullet x_2 = C$ como apresentado na equação $x^2 + Bx + C = 0$, onde $-B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$, logo foi realizado a fusão da Fatoração do produto pela soma, para chegar ao método proposto.

Retomando $\longrightarrow$ $x_1 = -\frac{b}{2a} + \mu$ e $x_2 = -\frac{b}{2a} - \mu$

Retomando $\longrightarrow$ $S = -B$ e $-B = \frac{b}{a} \Longrightarrow S = -\frac{b}{a}$

Aplicando a Fatoração do produto pela soma na equação $(x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2) = P$, o produto resultante será a diferença entre os quadrados de x_1 e x_2. Nesse sentido, foi representado a notação dos números x_1 e x_2 da seguinte forma:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \mu \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \mu$$

$$x_1 = -\frac{b}{a} \bullet \frac{1}{2} + \mu \qquad x_2 = -\frac{b}{a} \bullet \frac{1}{2} - \mu$$

$$x_1 = S \bullet \frac{1}{2} + \mu \qquad x_2 = S \bullet \frac{1}{2} - \mu$$

$$x_1 = \frac{S}{2} + \mu \qquad x_2 = \frac{S}{2} - \mu$$

Definidos os valores de x_1 e x_2 foi aplicando a Fatoração do produto pela soma desses números:

Produto da soma pela diferença $\longrightarrow$ $\left(\frac{S}{2} + \mu\right)\left(\frac{S}{2} - \mu\right) = P$

Diferença entre dois quadrados $\longrightarrow$ $\frac{S^2}{4} - \mu^2 = P$

Equacionando $\longrightarrow$ $\frac{S^2}{4} - \mu^2 = P \Longrightarrow \frac{S^2}{4} - P = \mu^2$

Generalizando $\longrightarrow$ $\sqrt{\mu^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$, onde $-B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$

Parâmetro $\longrightarrow$ $\mu = \pm\sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \Longrightarrow \mu = \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} - c}$

Portanto, Po-Shen Loh chega à conclusão de que $x = -\frac{b}{2a} \pm \mu$ que é um método completo e essencial para resolver equações e funções quadráticas, para todo a = 1.

4 RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DA PESQUISA

Esse recente método de Poh-Shen Loh segue em estudo, e as pesquisas existentes provam que a abordagem do método apresentado neste artigo mostra que a fatoração é eficiente, pois sempre produz raízes (levando em conta a multiplicidade) cuja soma e produto correspondem aos coeficientes da equação quadrática

Mediante a abordagem inicial em situar os números B e C na forma geral de uma equação do 2º grau, a simplificação de todos os coeficientes por a é o que fundamenta e torna possível o coeficiente a igual a 1. Nesse sentido, o parâmetro μ pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{4} - \frac{c}{a}} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{4} - \frac{c}{1}} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{4} - c}\,,$$

sendo μ o parâmetro modular obtido através das manipulações algébricas a partir da fórmula de Bhaskara.

Por fim, ressaltamos que o método acima demonstrado é uma generalização resultante da fusão da Fatoração do produto da soma pela diferença com a fórmula resolutiva, sendo representada por:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \mu, \text{ para todo } a = 1 \text{ e } \mu = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{4} - c}\,.$$

Po-Shen Loh, em sua pesquisa original publicada no repositório de artigos científicos da Universidade de Cornell, descreve as etapas específicas de seu método alternativo para a resolução de equações quadráticas, além de apresentar a demonstração da fórmula quadrática. Ele também resgata as contribuições dos povos antigos, que iniciaram os estudos matemáticos e algébricos para resolver equações do 2º grau.

4.1 Possível estratégia para a resolução do problema

Nesta subseção, apresentaremos um problema e descreveremos uma possível estratégia para sua resolução, com base no problema gerador apresentado. Nosso objetivo é oferecer, sob uma perspectiva didático-metodológica, um detalhamento da resolução, considerando os processos do método de Po-Shen Loh aplicados às equações polinomiais do 2º grau. Além disso, buscaremos alinhar a abordagem às orientações curriculares oficiais previstas na BNCC e nos currículos atuais, os quais determinam que o ensino deve partir de um problema.

Problema: O soberano e suas esposas

Era uma vez um soberano que vivia num país do Oriente que tinha x esposas e, com cada uma delas, (x – 2) filhos. Quando numa batalha, metade das esposas perderam, cada uma, um de seus filhos, ao soberano restaram apenas 44 deles. Quantas esposas, tinha o soberano?

Resolução

A partir da leitura do problema proposto, temos algumas ideias referentes às esposas e aos filhos do soberano:

→ consideramos "x" o número de esposas do soberano
→ (x – 2) o número de filhos do soberano por esposa
→x(x – 2) o número total de filhos do soberano

Dessa forma, representamos algebricamente a equação:

$x(x-2) = \frac{x}{2} + 44$ → equacionando o problema e aplicando a propriedade distributiva
$x^2 - 2x = \frac{x}{2} + 44$ → calcular o MMC para generalizar a equação do 2º grau
$2x^2 - 4x = x + 88$ → organizar a equação para torná-la reduzida
$2x^2 - 4x - x - 88 = 0$
$2x^2 - 5x - 88 = 0$ → equação do 2º grau reduzida

Tratando-se de uma equação do 2º grau completa, identificamos os coeficientes e, em seguida, realizaremos o cálculo do parâmetro $\mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ para resolver a equação pelo método de Po-Shen Loh.

Coeficientes: a = 2, b = – 5 e c = 88

→ verificamos que o coeficiente $a > 1$, logo precisamos simplificar a equação pelo valor do coeficiente a, uma vez que para resolver a equação do 2º pelo método de Po-Shen Loh, o coeficiente a precisa ser igual 1.

$2x^2 - 5x - 88 = 0$ → equação generalizada do problema
$\frac{2x^2}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{88}{2} = 0$ → simplificando a equação por 2
$x^2 - \frac{5x}{2} - 44 = 0$ → equação do 2º grau reduzida

Simplificada a equação e admitindo o coeficiente $a = 1$, vamos indicar os coeficientes e calcular o parâmetro $\mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Coeficientes: a = 1, b = $-\frac{5}{2}$ e c = – 44
Cálculo do parâmetro μ

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \pm\sqrt{\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}{4} - (-44)} = \pm\sqrt{\frac{\frac{25}{4}}{4} + 44} = \pm\sqrt{\frac{25}{16} + 44} = \pm\sqrt{\frac{25+704}{16}} = \pm\sqrt{\frac{729}{16}}$$

$\mu = \pm \frac{27}{4}$

Com os dados dos coeficientes e do valor do parâmetro μ, vamos encontrar as raízes da equação, substituindo tais informações no método de Po-Shen Loh.

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad \rightarrow \text{método de Po-Shen Loh}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \mu \qquad \rightarrow \text{generalização do método de Po-Shen Loh}$$

$$x = -\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)}{2} \pm \frac{27}{4} \qquad \rightarrow \text{substituindo o valores de b e } \mu \text{ na equação}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{27}{4}$$

$$x = \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{27}{4} = \frac{32}{4} = \mathbf{8} \\ x_2 = \frac{5}{4} - \frac{27}{4} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Por considerar x o número de esposas do soberano, desconsideramos o número negativo, admitindo o número positivo como solução do problema. Assim, concluímos que o soberano tinha **8 esposas**.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ganha relevância quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre seus conhecimentos prévios e os desafios propostos, integrando diferentes áreas da Matemática e demonstrando a sua aplicabilidade no cotidiano (Huanca; Almeida, 2018). Neste contexto, este trabalho visou refletir sobre as possibilidades do método de Po-Shen Loh na resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau, proporcionando experiências pedagógicas significativas e contribuindo para novas formas de aprendizagem e geração de conhecimento.

O método de Po-Shen Loh representa uma abordagem inovadora que amplia as possibilidades de ensino da Matemática, especialmente no que tange às equações do 2º grau, funções quadráticas e outros conteúdos essenciais do currículo. Ao adotar esse métido, é possível não apenas resolver problemas, mas também estabelecer contextos ricos de aprendizagem que envolvem o raciocínio matemático e algébrico de maneira mais eficaz.

Esta pesquisa permitiu uma maior aproximação com método e metodologia que reforçam as melhores práticas no ensino e na aprendizagem das equações do 2º grau, ao mesmo tempo em que contribui para a formação inicial e continuada de professores de Matemática. O método de Po-Shen Loh continua sendo um campo de investigação, não apenas como uma técnica de resolução, mas como um recurso pedagógico que cria oportunidades reais de aprendizagem. Ele proporciona aos alunos o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas do cotidiano, tornando o aprendizado mais relevante e significativo. Espera-se que este trabalho possa inspirar novas abordagens no ensino de Matemática, estimulando a reflexão sobre a construção de conhecimentos matemáticos mais profundos e aplicáveis à realidade.

REFERÊNCIAS

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 6a Ed. São Paulo: Editora Ática, 1995.

GOMES, R. D.; HUANCA, R. R. H. **Práticas no ensino e aprendizagem de Matemática: Equações do 2º grau através da Resolução de Problemas**. 1a Ed. Jundiaí, SP: Editora Paco, 2023.

HUANCA, R. R. H.; ALMEIDA, B. R. O Ensino e a Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula: por quê? **Anais do III CONAPESC, Campina Grande**, v. 1, Realize Editora, 2018.

LOH, P. S. **Simple Proof of the Quadratic Formula**. 2019. Disponível em: https://arxiv.org/format/1910.06709. Acesso em: 27 set. 2023.

MANSO, F. C. G; CARDOSO, F. A. R. Equação polinomial de grau dois: uma nova abordagem. In: SILVA, A. J. N; VIEIRA, A. R. L. (Org.) **Incompletudes e Contradições para os avanços da pesquisa em Matemática 3**. Ponta Grossa –PR: Atena, 2020. p. 211 – 259.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2005, p. 212-231.

_______. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). 3a ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, São Paulo/SP, v. 2, p. 1-13, 2010.

PÉREZ, L.C.; CABRERA, C.R. **Curso especial Geometria y resolucion de problemas**. In: XIV RELME, Panamá, 2000. p.117-124.

POLYA, G. On Learning, Teaching and Learning Teaching. Trad. de Mosquito et al. In POLYA, G. **Mathematical Discovery**, cap XIV, 1962. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/index.htm> Acesso em: 15 de agosto de 2024.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. New York: Longman, 2001. 478p.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa. In: VILA, A.; CALLEJO **Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas**. Tradução Ernani Rosa. ARTMED Editora S.A., S. P., 2006. p.127-182.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudos, por concluir essa jornada tão importante em minha vida, pois, sem ele nada disso seria possível.

Agradeço ao meu pai Antonio Fernandes das Chagas, a minha mãe Maria Aparecida de Lima e a toda minha família por todo o apoio, pela ajuda e por mim incentivarem nos momentos difíceis. Também deixo o meu agradecimento a todos os meus amigos que participaram dessa trajetória.

Agradeço ao professor Roger Ruben Huaman Huanca, por ter sido meu orientador e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Agradeço a prof. Ma. Flávia Aparecida Bezerra da Silva e a prof. Ma. Misaelle do Nascimento Oliveira por fazerem parte desse momento e pelas contribuições para este trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, com quem convivi intensamente durante essa caminhada, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando e agradeço a todos os professores que fizeram parte dessa caminhada, por todo conhecimento e dedicação.

Por fim, agradeço a UEPB Campus VI, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso, também deixo os meus agradecimentos a todos que fazem parte dessa instituição de ensino.