



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA - CCT
DEPARTAMENTO FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

TANISBEL SOUZA SANTOS

UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA SOBRE A FÍSICA MODERNA

**CAMPINA GRANDE-PB
2014**

TANISBEL SOUZA SANTOS

UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA SOBRE A FÍSICA MODERNA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção de título de Licenciatura Plena em Física, pelo Departamento de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Sob a orientação do Prof. Dr. Alex da Silva.

**CAMPINA GRANDE-PB
2014**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S237b Santos, Tanisbel Souza

Uma breve revisão histórica sobre a Física Moderna

[manuscrito] / Tanisbel Souza Santos. - 2014.

48 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia
2014.

"Orientação: Prof. Dr. Alex da Silva, Departamento de Física".

1. Física moderna. 2. Estrutura atômica. 3. Radiação. I.
Título.

21. ed. CDD 539

TANISBEL SOUZA SANTOS

UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA SOBRE A FÍSICA MODERNA

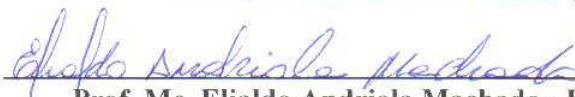
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção de título de Licenciatura Plena Física, pelo Departamento de Física do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovado em: 28/02/2014.

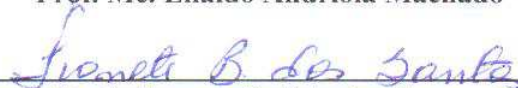
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alex da Silva - UEPB (Orientador)



Prof. Me. Elialdo Andriola Machado - UEPB (Examinador)



Profa. Ivonete Batista dos Santos- UEPB (Examinadora)

**CAMPINA GRANDE-PB
2014**

A Deus, por tudo que tem feito em meu favor, por Sua imerecida graça, por Seu infinito amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me deu a vida e as condições necessárias para que eu, pequeno servo, pudesse melhor compreender a magnitude das coisas que foram criadas pelas suas hábeis mãos.

Aos meus pais, Antônio e Isabel, exemplos de dedicação e renúncia, aos quais jamais conseguirei retribuir de igual forma, tampouco com a mesma intensidade.

Aos meus irmãos, Tanisbela e Taniel, com os quais compartilho momentos ímpares de formação de caráter.

A minha esposa, Vanessa, pelo amor e companheirismo sempre demonstrado na singeleza das atitudes.

Às minhas filhas, Beatriz e Mariana, que me ensinaram um novo modo de amar: incondicionalmente! Que me mostraram um novo jeito de lutar: incansavelmente! Que fazem de mim, dia após dia, aquilo que elas mesmas veem: um homem melhor.

À Universidade Estadual da Paraíba pela viabilização da minha formação acadêmica.

Ao orientador, Alex da Silva, que disponibilizou seu tempo, conhecimento e paciência no decorrer da confecção deste trabalho.

E, finalmente, aos docentes e funcionários da UEPB e aos amigos, por tornarem inesquecíveis toda minha trajetória acadêmica.

Pela fé entendemos que foi o universo formado pela palavra de Deus, de maneira que o visível veio a existir das coisas que não aparecem (Hb 11:3).

RESUMO

Este trabalho relata uma breve revisão histórica sobre a física moderna. Abordamos inicialmente a radiação térmica, onde tratamos do problema da emissão e absorção de radiação. Julgamos importante também a física de Planck, que conciliou a teoria com a experiência. Os modelos atômicos foram expostos de forma detalhada para que haja uma melhor compreensão da estrutura atômica da matéria. Discutimos também sobre a teoria eletromagnética de Maxwell e sua importância para um melhor entendimento da natureza da luz. Evidentemente, não poderíamos deixar de falar sobre a física de Schrödinger, que culminou com o surgimento da Mecânica Quântica e as novas concepções da Física Moderna.

Palavras-chave: Física Moderna. Estrutura atômica. Radiação de corpo negro.

ABSTRACT

This paper reports a brief historical review about modern physics. Initially we approach the thermal radiation, where we dealt the problem of emission and absorption of radiation. We also judge important the Planck's physics, which combined the theory with experiment. The atomic models were exposed in detail so that we could reach a better understanding of the atomic structure of matter. We also discussed about the Maxwell's electromagnetic theory and its importance for a better understanding of the nature of the light. Obviously, we could not left aside the Schrödinger's physics, which culminated into the appearance of Quantum Mechanics and the new concepts of Modern Physics.

Keywords: Modern Physics, Atomic Structure, Black-body radiation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Espectro visível ao homem.....	15
Figura 1.2	A distribuição espectral de um corpo irradiando a altas temperaturas.....	17
Figura 1.3	Leis de Wien, do deslocamento espectral.....	20
Figura 2.1	Modelo atômico de Dalton.....	25
Figura 2.2	Bolinhas de gude.....	26
Figura 2.3	A experiência de Thomson.....	27
Figura 2.4	O modelo atômico de Thomson.....	27
Figura 2.5	O desvio sofrido por partículas alfa ao se chocar com um átomo do tipo Imaginado por Thomson.....	28
Figura 2.6	O modelo atômico de Rutherford, o “sistema planetário”	29
Figura 2.7	Modelo do átomo de Bohr.....	30
Figura 3.1	Oscilador construído por Hertz.....	36
Figura 3.2	O efeito fotoelétrico.....	37
Figura 3.3	Esquema para observação do efeito fotoelétrico.....	38
Figura 4.1	Ondas estacionária ao longo de uma circunferência.....	41
Figura 4.2	Exemplificação do PRINCÍPIO DE INCERTEZA.....	42

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
-------------------------	----

CAPÍTULO I

1 RADIAÇÃO TÉRMICA	14
1.1 EMISSÃO E ABSORÇÃO DE RADIAÇÃO.....	14
1.2 RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO.....	16
1.3 LEIS DE WIEN.....	18
1.4 A FÍSICA DE PLANCK.....	21

CAPÍTULO II

2 ESTRUTURA ATÔMICA	25
2.1 OS PRIMEIROS ESTUDOS SOBRE O ÁTOMO.....	25
2.2 O ÁTOMO SEGUNDO THOMSON.....	26
2.3 O ÁTOMO SEGUNDO RUTHERFORD.....	27
2.4 O ÁTOMO SEGUNDO BOHR.....	29

CAPÍTULO III

3 A NATUREZA DA LUZ	31
3.1 O TRABALHO DE MAXWELL.....	34
3.2 DUALIDADE DA LUZ.....	35
3.3 O EFEITO FOTOELÉTRICO.....	36

CAPÍTULO IV

4 UMA NOVA VISÃO DA FÍSICA MODERNA	
4.1 A FÍSICA DE BROGLIE.....	37

4.2 O TRABALHO DE HEISEMBERG (PRINCÍPIO DA INCERTEZA).....	40
4.3 OS NOVOS RUMOS DA FÍSICA MODERNA (SCHÖEDINGER).....	49

CAPÍTULO V

5 METODOLOGIA	50
CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS	52

INTRODUÇÃO

O homem se preocupa com a sua origem desde que se tornou consciente de sua existência. A física possibilita a solução de alguns questionamentos feitos pelo homem e, contribui para os avanços na sua compreensão, que muitas vezes é traduzido em novas tecnologias propiciando um melhor bem estar.

Devido a sua complexidade, a física é dividida em várias áreas para melhor compreendê-la, e uma dessas divisões é a Física Moderna, que este trabalho tem como objetivo abordar “uma breve revisão histórica sobre a física moderna”.

A física moderna possui um ramo que estuda o universo dos átomos e das partículas que compõem os átomos. Até o final do século XIX tudo que era partícula tinha o seu movimento descrito pela mecânica newtoniana.

Com o desenvolvimento das pesquisas sobre os raios catódicos, observou-se que os átomos eram indivisíveis, levando a procura de um modelo atômico que condissesse com as observações feitas pelos pesquisadores da época (<http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/raiosx/raiosx.html>).

Outros modelos posteriores a Dalton foram apresentados, como: o modelo atômico Thomson (conhecido como pudim de passas), o modelo atômico de Rutherford (conhecido como sistema planetário) e o modelo atômico de Bohr.

No primeiro quarto do século XX, foi apresentado novos resultados conflitantes a respeito da natureza da luz. Seria a luz uma onda ou uma partícula?

Em meio a esses questionamentos, o físico Alemão Max Planck apresentou seu artigo sobre “a teoria da lei de distribuição de energia do espectro normal”, em 14 de dezembro de 1900. Esta data marca o início de uma revolução na física, o surgimento da Física Moderna, que é a denominação dada ao conjunto de teorias surgidas no começo do século XX, principiando com a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade e as alterações no entendimento científico daí decorrente, bem como todas as teorias posteriores (<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Planck.html>).

Niels Bohr propõe, em 1913, um novo modelo atômico, a partir de três postulados que permitiam a explicação de alguns fenômenos para o átomo de hidrogênio. Em 1925, Erwin

Schrödinger lança uma nova teoria baseado nas ideias de De Broglie: a mecânica ondulatória. O único obstáculo era a união da física quântica com a astrofísica.

Apresentamos aqui um breve histórico do surgimento e evolução da física moderna, procurando contribuir para aqueles que se interessam em saber um pouco mais sobre esta notável área da física.

Ademais, cumpre-se dizer que este trabalho tem como objetivo principal mostrar uma breve revisão histórica sobre a física moderna. E, para atingir este objetivo, inicialmente, realizamos um levantamento bibliográfico de alguns livros textos de ensino superior, bem como de artigos que tratassem do assunto, além de várias pesquisas na internet, acessando sites confiáveis.

CAPÍTULO I

1 RADIAÇÃO TÉRMICA

Ao longo de sua tentativa bem sucedida de resolver algumas discrepâncias entre o espectro da energia observada da radiação térmica e as previsões da teoria clássica, Planck (1901) foi levado a supor que um sistema que executasse oscilações harmônicas simples pudesse assumir somente os valores da energia que fossem múltiplos inteiros de uma certa quantidade de energia.

O mesmo tipo de ideia foi posteriormente utilizada por Einstein (1905), para explicar o efeito fotoelétrico, e por Bohr (1913), em uma teoria que previu com grande precisão muitas das características complexas de espectros atômicos.

O trabalho realizado por esses três físicos, além dos desenvolvimentos posteriores por de Broglie, Schrödinger, e Heisenberg (1925), constitui o que é conhecido como teoria quântica. Esta teoria e a da relatividade, em conjunto, compõem as duas características mais importantes da física moderna (<http://www.aip.org/history/heisenberg/p08.htm>).

A radiação térmica é tão importante que seus resultados devem ser relacionados com outro campo da física clássica, tais como: termodinâmica, mecânica estatística, e a teoria eletromagnética.

1.1 EMISSÃO E ABSORÇÃO DE RADIAÇÃO

Hoje sabemos que calor é energia e apresenta-se de várias maneiras, como por exemplo: uma pedra exposta ao Sol; quando atritamos dois corpos; o fogo e etc., (GIBERT, 1962).

Todo corpo que possui temperatura acima do zero absoluto emite uma quantidade de radiação térmica, que varia de acordo com a temperatura do corpo. Quanto maior a temperatura do corpo, maior será a radiação emitida por ele, (<http://www.leb.esalq.usp.br/aulas/lce200/emissaoabsorcao.pdf>).

Todo corpo que possui temperatura, qualquer que seja a sua superfície, emite radiação térmica devido ao movimento de cargas elétricas perto da superfície por meio da agitação térmica. Agora, em uma única aceleração, ocorrendo em um certo período de tempo, a maior parte da radiação emitida tem uma frequência aproximadamente igual ao inverso do período e, correspondentemente, um comprimento de onda c vezes o período. Onde, a maior parte das emissões se faz em um amplo espectro de comprimento de onda. Logo, a taxa de emissão de energia presente em todo o espectro cresce na medida em que a temperatura da superfície

aumenta (maior agitação) devido a área da superfície emissora. Em 1879, Stefan apresenta uma relação empírica

$$I_T = \sigma e T^4 \quad (1.1)$$

Onde, (I_T) é a energia total emitida por segundo em todas as frequências por cm^2 de uma superfície à temperatura absoluta (T); (e) é aqui uma constante com valores de 0 a 1, o *poder da emissão total*, que depende da natureza da superfície emissora; (σ) é a constante de Stefan-Boltzmann, [$\sigma = 0,567 \times 10^{-4} \text{ erg-cm}^{-2}\text{-}^\circ\text{K}^{-4}\text{s}^{-1}$]. A energia como radiação térmica é suprimida pela agitação térmica, (EISBERG, 1961).

Parte da absorção da radiação em uma superfície é transformada em energia de agitação térmica. Com isso, é interessante saber a eficiência de uma superfície como emissora de radiação térmica, medida pela grandeza (e). A eficiência é medida por uma constante a , denominada *poder de absorção*, definida como o quociente da energia da radiação térmica total, absorvida pela superfície, pela energia térmica total sobre ela incidente. Em 1895, Kirchhoff propõe o teorema da relação entre (e) e (a),

$$e = a \quad (1.2)$$

Essa relação foi verificada experimentalmente através de um argumento termodinâmico.

Essa radiação consiste em ondas eletromagnéticas (ondas de infravermelho) com exatamente a mesma natureza que a luz visível, mas com maior comprimento de onda, (AMORIN, 2011).

Em baixas temperaturas a maior taxa de emissão está na faixa do infravermelho. Aumentando-a gradativamente, ele começa a emitir luz visível. De início a luz vermelha, passando, a seguir, para a amarela, a verde, a azul e, em altas temperaturas, a luz branca, chegando à região do ultravioleta do espectro eletromagnético, (AMORIN, 2011).

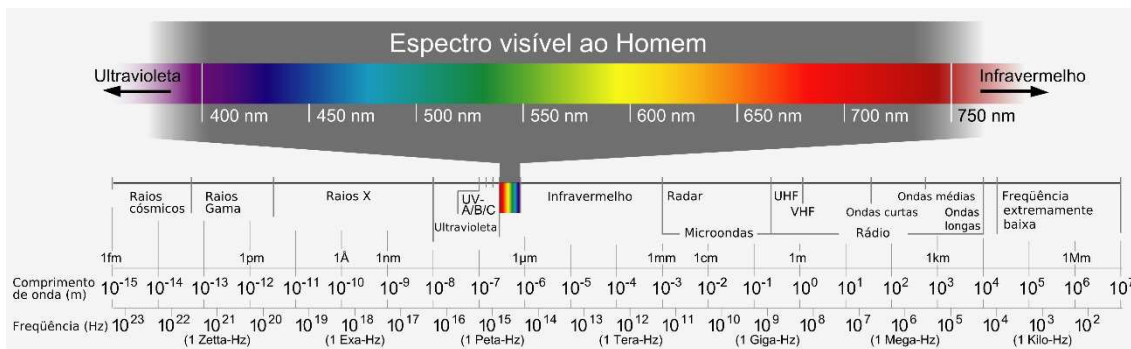


FIGURA 1.1 Espectro visível ao homem
 FONTE: (AMORIN, 2011).

1.2 RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO

No final do século XIX, foram divulgados vários resultados de pesquisas referentes ao aquecimento de corpos que emitiam luz.

Com a finalidade de estudar a luz emitida pelos corpos quentes, foi proposto um modelo no qual a ideia era realizar os cálculos apenas da radiação produzida pela agitação térmica do corpo. Tal corpo deveria absorver toda a radiação que chegava até ele, não podendo refleti-la. Isto é, $a = 1$. Dessa forma, o corpo teria de ser totalmente negro, daí o nome do modelo: **radiação do corpo negro**, (<http://www.if.ufrj.br/~marta/cederj/quanta/mq-unid2-textocompl-1.pdf>).

Por exemplo, o forno de uma indústria siderúrgica ou o Sol produz radiação através da agitação térmica. Se observarmos o carvão em brasa, na verdade veremos a radiação de corpo negro de um corpo à temperatura muito alta.

Ao olharmos para o passado, levando em conta o que conhecemos hoje, podemos afirmar que o estudo da radiação do corpo negro marca o surgimento da Mecânica Quântica, (GIBERT, 1962).

Desde que a absorvidade de um corpo negro seja igual à unidade, segue-se a partir da lei de Kirchhoff. Então, em equilíbrio termodinâmico (em temperatura constante), um corpo negro ideal irradia energia na mesma taxa que a absorve, sendo essa uma das propriedades que o tornam uma fonte ideal de radiação térmica. Corpos negros não existem na natureza, visto que nenhum objeto tem absorção e emissão perfeitas. A emissividade de um corpo é definida pela relação entre sua radiância e a do corpo negro.

Aplicando a condição $e = 1$ à equação 1.1 supracitada, vemos que a energia radiante emitida por cm^2 é a mesma para todos os corpos negros que estão na mesma temperatura. Isto sugere que algumas propriedades térmicas, como a distribuição espectral da radiação, dependem apenas da temperatura e não da natureza específica (EISBERG, 1961).

A distribuição espectral da radiação do corpo negro é especificada pela quantidade de $I_T(\lambda)$, que é assim definida pela $I_T(\lambda)d\lambda$, a qual é igual a energia emitida por segundo, em radiação de comprimento de onda no intervalo de $[\lambda$ a $\lambda + d\lambda]$, de 1 cm^2 de uma superfície na temperatura (T).

Os físicos Lummer e Pringsheim fizeram as primeiras medições precisas da presente quantidade (1899). As medições foram feitas com um instrumento essencialmente similar ao

utilizado em espectrômetros de prisma, de medição óptica de espectros, exceto os materiais especiais que tiveram de ser utilizados a fim de ter as lentes, prismas, etc., transparentes a radiação de onda longa térmica (EISBERG, 1961).

A dependência de $I_T(\lambda)$ em (λ) e (T) é indicado na figura 1.2. A seta da abscissa indica o comprimento de onda em que o olho tem a sua resposta máxima - luz verde, (EISBERG, 1961).

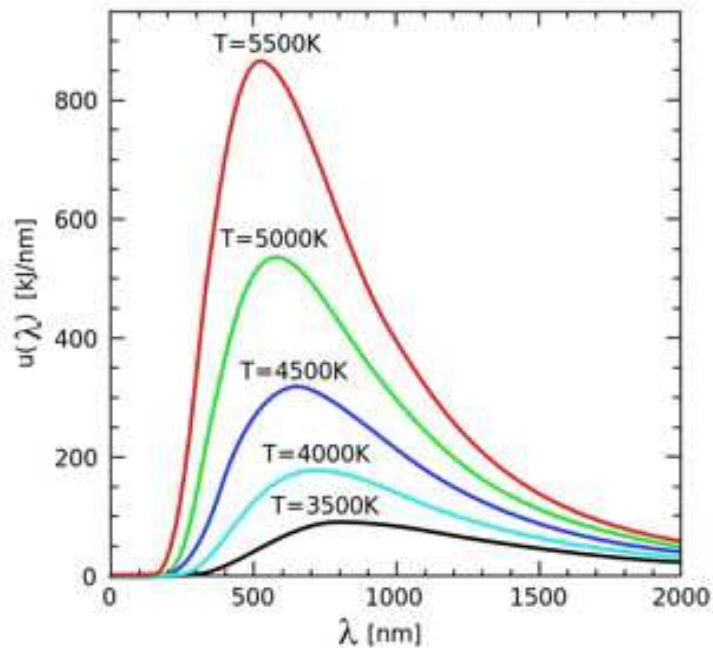


FIGURA 1.2. A distribuição espectral de um corpo irradiando a altas temperaturas.

FONTE: (<http://projetocienciando.blogspot.com.br/2013/07/a-catastrofe-do-ultravioleta.html>).

Observamos que, por qualquer (λ) fixo, $I_T(\lambda)$ aumenta com a temperatura (T) . A integral de $I_T(\lambda)$ sobre todo o (λ) , é igual a quantidade de I_T previamente definido. Esta integral, é igual à área sob as curvas de crescimento, faz com a quarta potência de (T) , de acordo com a equação 1.1. A figura 1.2 também mostra que as mudanças na direção do espectro de comprimentos de onda é mais curto na medida em que aumenta T . Uma inspeção quantitativa da figura irá demonstrar a validade da equação:

$$\lambda_{m\acute{a}x} \propto 1 / T \quad (1.3)$$

onde $\lambda_{m\acute{a}x}$ é o λ em que $I_T(\lambda)$ tem o seu valor máximo para um determinado T . Todos estes resultados estão de acordo com a experiência cotidiana de que os corpos emitem mais calor na medida em que se aumenta a sua temperatura. E que, com a temperatura aumentando, a sua “cor” muda de vermelho escuro para azul branco. Isto é, cada vez mais a energia radiante é emitida na região de curto comprimento de onda, (EISBERG, 1961).

Agora, considere um objeto que contém uma cavidade que é conectada ao meio exterior por um pequeno orifício. A radiação incidente sobre a cavidade, pelo lado de fora, entra no orifício e é refletida para frente e para trás pelas paredes da cavidade, sendo absorvida sobre estas paredes. Se a área do orifício é muito pequena em comparação com a área da superfície interna da cavidade, uma insignificante quantidade de radiação incidente será refletida de volta para o orifício. Então, toda a radiação incidente sobre a cavidade é absorvida. Pelo orifício, $[a = 1]$ e, portanto, o orifício deve ter as propriedades da superfície de um corpo negro, (EISBERG, 1961).

Suponha-se que as paredes da cavidade são uniformemente aquecidas a uma temperatura T . As paredes irão emitir radiação térmica que irá preencher a cavidade. A pequena fração da radiação incidente sobre o interior do orifício vai passar por este. Assim, o orifício vai atuar como um emissor de radiação térmica. A cavidade deverá ter as propriedades da superfície de um corpo negro, e a radiação emitida pelo orifício deve ter o espectro de um corpo negro. Mas, como a cavidade é mera amostragem da radiação térmica presente no interior do orifício, é evidente que a radiação na cavidade também deve ter um espectro do corpo negro. Na verdade, ele vai ter um espectro de corpo negro característico da temperatura T das paredes desde que esta seja a única temperatura definida para o sistema.

O espectro emitido pelo orifício na cavidade é especificado em termos de um fluxo de energia $I_T(\lambda)$, mas é conveniente para especificar o espectro da radiação no interior da cavidade em termos de uma densidade energética $\rho_T(\lambda)$, que é definida de tal modo que a $\rho_T(\lambda)d\lambda$ da energia é a contida em 1 cm^3 da cavidade em um intervalo de comprimento de onda para $\lambda + d\lambda$. Ele é resultado da discussão acima que a $\rho_T(\lambda)$ é proporcional à $I_T(\lambda)$, com uma constante de proporcionalidade, que não dependem de λ ou de T , (EISBERG, 1961).

1.3 LEIS DE WIEN

Em 1804, Rumford apresenta uma nova realidade para transmissão de calor, sem qualquer meio intermediário, usando um balão. Onde, no centro deste, colocou um termômetro. Fez o vazio no balão e, mantendo-o fechado, colocou em água quente verificando então que o termômetro indicava uma rápida subida de temperatura. Com isso, Rumford consegue provar que o calor se transmite no vácuo e levanta nova discussão sobre o problema do arrefecimento. Contudo, não consegue derrubar a *hipótese do calórico*, que é

abandonada depois com a descoberta do primeiro *princípio da termodinâmica* (GIBERT, 1962).

Já em 1792, Prevost dá uma contribuição de importante significado da seguinte lei experimental (aproximada): *o poder emissivo é igual ao poder absorvente*. Em 1859 Kirchhoff estabeleceu uma nova lei: *a razão (e / a) entre o poder emissivo – (e) – e o poder absorvente – (a) – de um corpo é função do comprimento de onda e da temperatura* que completou, em 1882, com outra lei: *a razão (e / a) entre o poder emissivo e o poder absorvente é a mesma para todos os corpos a mesma temperatura*. Deve-se ainda a Kirchhoff, nesta mesma data o conceito de CORPO NEGRO, (GIBERT, 1962).

Então em 1894, W. Wien (1864-1928) descobriu duas importantes características da radiação térmica relacionadas com a dependência entre a composição espectral e a temperatura, as quais são conhecidas por leis de Wien:

- 1.^a lei: *quando a temperatura do corpo negro varia, o comprimento de onda para o qual o poder emissivo é máximo, varia na razão inversa da temperatura absoluta, ou seja,*

$$\lambda_m = b \cdot \frac{1}{T} \quad (1.4)$$

- 2.^a lei: *o poder emissivo máximo do corpo negro é proporcional à 5.^a potência da temperatura absoluta, isto é*

$$E_m = B \cdot T^5 \quad (1.5)$$

Logo, as duas leis de Wien descrevem um interessante fenômeno designado *deslocamento espectral*, cujo significado qualitativo se vê imediatamente na figura abaixo. Onde observar-se-á, em particular, como varia, com o comprimento de onda (para cada temperatura), o poder emissivo, (GIBERT, 1962).

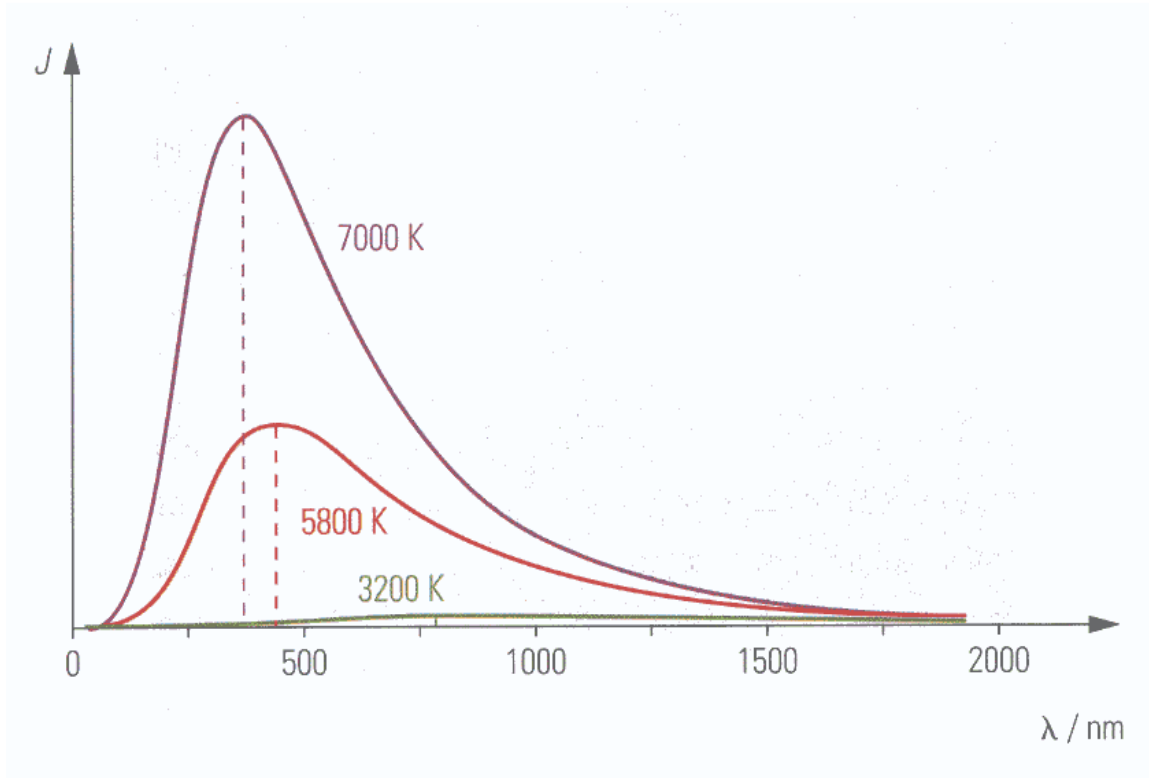


FIGURA 1.3. Leis de Wien, do deslocamento espectral
 FONTE: (http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/CFQ/Wien/Lei_Wien.html).

A figura 1.3, mostra as curvas que representam o poder emissivo E_λ em função do comprimento de onda λ , para diversas temperaturas. São curvas experimentais obtidas com espectros produzidos por um prisma de fluorina (GIBERT, 1962).

Qual o seu significado? Para saber, faz-se necessário estabelecer uma teoria que permita restituir aquelas curvas. Mas isto não é nada fácil, porque os raciocínios da Termodinâmica não nos permitem afirmar mais do que o que se exprime na seguinte relação (em que $f(\lambda T)$ é uma função desconhecida):

$$E = f(\lambda T) \cdot T^5 \quad (1.6)$$

Wien (1893) foi capaz de derivar uma forma geral funcional para a distribuição espectral de radiação de corpo negro conhecida como Lei de Wien:

$$\rho_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5} \quad (1.7)$$

A partir de 1893, os físicos procuraram estabelecer um esquema teórico da emissão da radiação que conduzisse à equação 1.6, de acordo com os resultados experimentais (GIBERT, 1962).

Deve-se ainda a Wien a formulação e o desenvolvimento de uma hipótese extremamente interessante, de certo modo, síntese feliz dos conhecimentos concretos da época, tais como o caráter ondulatório da radiação e a hipótese molecular, a qual consiste em admitir que a radiação de comprimento de onda

$$\lambda \text{ (frequência } f = \frac{c}{\lambda} \text{)}$$

é proveniente de oscilações moleculares vibrando com a frequência f , sendo a intensidade da radiação de comprimento de onda λ proporcional ao número de osciladores com frequência f . Com este raciocínio Wien encontra a fórmula

$$f(\lambda T) = c_1 (\lambda T)^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (1.8)$$

Em 1900, Rayleigh (1842-1919) introduz a hipótese de que os osciladores obedecem ao princípio da equipartição da energia de Maxwell considerando que eles têm dois graus de liberdade e, portanto, a energia (kT). Estabelece, assim, a seguinte fórmula

$$f(\lambda T) = c_1 (\lambda T)^{-5} \cdot \lambda T \quad (1.9)$$

É fácil verificar que nenhuma destas equações conduz a curvas do tipo das da figura 1.3. Com efeito, a equação de Wien não é verificada para os grandes valores do produto (λT) (grande comprimento de onda e/ou elevada temperatura). Por outro lado, a equação de Rayleigh não está de acordo com a experiência quando $[\lambda \rightarrow 0]$, visto que $f(\lambda T)$ tende então para $[\infty - \text{infinito}]$ e não para zero como indica a experiência (GIBERT, 1962).

1.4 A FÍSICA DE PLANCK

Para tentar conciliar a teoria com a experiência, Planck foi, então, levado a elaborar uma hipótese extremamente fértil que vamos tentar apresentar de um modo simples (GIBERT, 1962).

Se os osciladores obedecem ao princípio da equipartição da energia, então o seu conjunto também pode ser tratado como um sistema termodinâmico, obedecendo em particular ao princípio da entropia segundo a definição de Boltzmann, ou seja,

$$S = k \cdot \log \Omega \quad (1.10)$$

havendo, pois, que determinar a probabilidade do estado considerando aqui (a distribuição por n osciladores de uma energia total U). Imaginemos que cada oscilador recebe uma quantidade

de energia (ΔU), que vamos supor ser uma quantidade discreta para facilitar o cálculo segundo o esquema de Boltzmann, ou seja, vamos supor que $[U = m \cdot \Delta U]$ admitindo pois que a energia total U se distribui por m quantidades de energia (ΔU). Por outro lado representaremos por u a energia média dos osciladores de frequência f . Assim teremos obviamente

$$n = \frac{U}{u} \quad \text{e} \quad m = \frac{U}{\Delta U} \quad (1.11)$$

Afinal, o que pretendemos é calcular (u) em função da temperatura T (GIBERT, 1962).

De acordo com a teoria clássica, deveremos ver o que se sucede quando admitimos que (ΔU) pode ser tão pequeno quanto se quiser, ou seja deveremos procurar o valor de (u) quando se faz tender (ΔU) para o limite zero (GIBERT, 1962).

Utilizando a equação (1.10), podemos dizer que a distribuição das m pequenas porções de energia ΔU pelos n osciladores tem uma probabilidade \square , dada por

$$\square = \frac{(n+m)!}{n!m!} \quad (1.12)$$

utilizando a fórmula de Stirling, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \log \square &= \log(n+m)! - \log n! - \log m! \\ &= (n+m) [\log(n+m) - 1] - n(\log n - 1) - m(\log m - 1) \\ &= (n+m) \log(n+m) - n \log n - m \log m \\ &= n \left[\left(1 + \frac{m}{n}\right) \log \left(1 + \frac{m}{n}\right) - \frac{m}{n} \log \frac{m}{n} \right] \end{aligned}$$

A partir dos valores de (m) e (n) podemos escrever,

$$\text{Log } \square = n \left[\left(1 + \frac{U}{n\Delta U}\right) \log \left(1 + \frac{U}{n\Delta U}\right) - \frac{U}{n\Delta U} \log \frac{U}{n\Delta U} \right] \quad (1.13)$$

Então, a energia de um sistema pode escrever-se $[dU = Tds]$ e a partir da equação (1.10), resulta em $[dU = kT d(\log \square)]$ onde se obtém

$$\frac{1}{kT} = \frac{d(\log)}{dU} \quad (1.14)$$

Utilizando a equação (1.13), podemos escrever $\frac{U}{n\Delta U} = A$,

$$\frac{1}{kT} = \frac{d(\log)}{dU}$$

$$\begin{aligned}
&= n \left[(1 + A) \frac{1}{1+A} + \frac{1}{n\Delta U} \log (1+A) - \frac{1}{n\Delta U} \log A - A \frac{1}{A} \right] \\
&= n \left[1 + \frac{1}{n\Delta U} \log (1+A) - \frac{1}{n\Delta U} \log A - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta U} [\log (1+A) - \log A]. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Podemos deduzir que,

$$e^{\frac{\Delta U}{kT}} = (1 + A) : A \tag{1.16}$$

Pretendemos exprimir a energia média (u) em função da temperatura (T).

$$U = U : n \text{ e } A = \frac{U}{n\Delta U}$$

Substituindo na equação (1.16), temos:

$$e^{\frac{\Delta U}{kT}} = \left(1 + \frac{U}{n\Delta U} \right) : \frac{U}{n\Delta U} = \frac{\Delta U}{u} + 1$$

ou seja, ainda

$$u = \frac{\Delta U}{e^{\frac{\Delta U}{kT}} - 1} \tag{1.17}$$

Agora, como observamos oportunamente, temos de introduzir neste cálculo a condição de $[\Delta U]$ poder ser tão pequeno quanto se queira, temos de calcular

$$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} u.$$

Se substituirmos $[\Delta U = 0]$ na equação (1.17), obtemos uma indeterminação. Pela regra de L'Hôpital, podemos substituir os dois termos da fração pelas respectivas derivadas (em relação a $[\Delta U]$), logo

$$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} u = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\frac{d(\Delta U)}{d\Delta U}}{\frac{d(e^{\frac{\Delta U}{kT}} - 1)}{d\Delta U}} = \frac{1}{\frac{1}{kT}} = kT. \tag{1.18}$$

Chegamos assim ao valor admitido por Rayleigh como mera aplicação do princípio da equipartição da energia (GIBERT, 1962).

Em 1900, Planck emitiu ousadamente a hipótese de que as quantidades de energia muito pequenas, definidas apenas para tirar partido da teoria de Boltzmann, deviam ser conservadas na equação (1.17), embora por razões incompreensíveis, ele reportou a uma

limitação ou indeterminação de ordem probabilística, recusando-se a aceitar uma realidade física mais profunda (GIBERT, 1962).

Então, em 1911, numa conferência, Planck ainda afirmava: “... para a probabilidade termodinâmica existem certas regiões elementares absolutamente determinadas – e é assim que eu gostaria de resumir o conteúdo próprio do que chamaram hipótese dos quanta ... cuja significação física profunda devemos procurar” (GIBERT, 1962).

Contudo, verifica-se uma concordância perfeita da fórmula de Planck com as curvas experimentais quando o “quantum” ΔU tinha o valor $\Delta U = hf$, em que f é a frequência da radiação e h a constante de Planck, cujo valor é

$$h = 6,624 \cdot 10^{-34} \text{ Joules x segundo}$$

Obtendo-se a equação de Planck

$$u = \frac{hf}{e^{kT} - 1} \quad (1.19)$$

ao contrário do que Planck queria pensar, a hipótese dos quanta trazia consigo uma espantosa boa nova, a do mundo quântico, denso de personagens extraordinárias, ainda hoje tão misterioso (GIBERT, 1962).

Em 1911, no congresso de Solvay, Brillouin concluía a discussão do relatório de Einstein, sobre os calores específicos, comentando: “parece agora certo que será necessário introduzir nas concepções... uma descontinuidade... da qual não fazíamos a mais pequena ideia há alguns anos”.

CAPÍTULO II

2 A ESTRUTURA ATÔMICA

2.1 OS PRIMEIROS ESTUDOS SOBRE O ÁTOMO

No final do século XVII, havia o que se poderia designar por uma presunção de conhecimento do que são os átomos. Mas, na verdade, pouco se tinha adiantado relativamente à sua função especulativa nas tentativas de explicação da matéria. Por exemplo, no seu célebre “Dictionnaire Philosophique”, Voltaire escrevia nada menos do que três páginas sobre Átomos. E concretamente afirmava: A palavra *átomo* significa não repartido, sem partes (GIBERT, 1962).

Mas, muito antes, o filósofo grego Demócrito (400 a.c.), sugeriu que a matéria era feita de minúsculas partículas indivisíveis e postulou que todas as variedades de matéria resultam da combinação de átomos de quatro elementos: terra, água, ar e fogo. A sua ideia não teve sustentação, pois se baseava em lógica e intuição. Assim o expressivo filósofo Aristóteles derruba-o com o argumento de matéria contínua (GIBERT, 1962).

A ideia de Aristóteles permaneceu até o século XVII, quando experiências demonstraram que o comportamento das substâncias era inconsistente com a ideia de matéria contínua.

John Dalton, em 1803, propôs uma teoria que explicava as leis da conservação de massa e da composição definida: é a chamada Teoria Atômica de Dalton.



FIGURA 2.1. Modelo atômico de Dalton.

FONTE: (<http://www.vestibulandoweb.com.br/quimica/teoria/modelo-de-dalton.asp>)

Essa teoria foi baseada em diversos experimentos e apontou as seguintes conclusões:

1. Toda matéria é formada de partículas fundamentais, os átomos.

2. Os átomos não podem ser criados e nem destruídos, eles são permanentes e indivisíveis.
3. Um composto químico é formado pela combinação de átomos de dois ou mais elementos em uma razão fixa.
4. Os átomos de um mesmo elemento são idênticos em todos os aspectos, já os átomos de diferentes elementos possuem propriedades diferentes. Os átomos caracterizam os elementos.
5. Quando os átomos se combinam para formar um composto, quando se separam ou quando acontece um rearranjo são indícios de uma transformação química.



FIGURA 2.2 Bolinhas de gude.
FONTE: www.brasilecola.com.br

Dalton acreditava que o átomo era uma esfera maciça, homogênea, indestrutível, indivisível e de carga elétrica neutra. Se fizermos uma comparação, os átomos seriam semelhantes a bolinhas de gude: maciças e esféricas (EISBERG, 1961).

2.2 O ÁTOMO SEGUNDO THOMSON

Em 1887, o físico inglês J.J. Thomson decidiu medir a razão carga/massa dos raios catódicos para identificar se os raios catódicos eram íons ou se eram uma partícula carregada universal.

Thomson, em sua famosa experiência, utilizando um tubo de raios catódicos para aplicar simultaneamente campos elétricos e magnéticos aos raios, comprovou que os raios catódicos se comportavam como partículas negativamente carregadas. Equilibrando o efeito do campo elétrico e do magnético, e com as leis da eletricidade e do magnetismo, Thomson pôde calcular a razão entre a carga e a massa das partículas no feixe. Assim, concluiu que os raios catódicos eram constituídos por partículas carregadas e que essas partículas (depois

chamadas de elétrons) eram universais, ou seja, eram a mesma, qualquer que fosse a substância investigada (GIBERT, 1962).

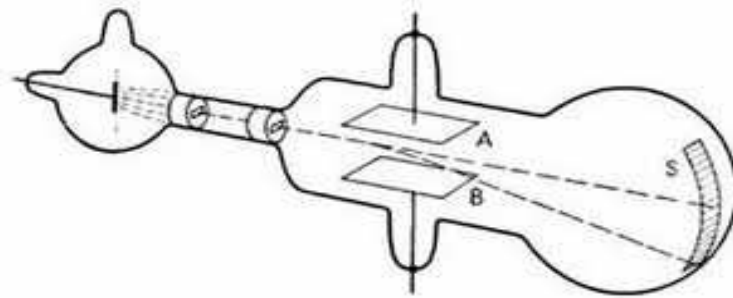


FIGURA 2.3. A experiência de Thomson

FONTE: (http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?ID_OBJETO=62851&tipo=ob&cp=ff9933&cb=&n1=&n2=M%C3%B3dulos%20Did%C3%A1ticos&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Qu%C3%ADmica&b=s).

Na ausência de informações sobre a maneira pela qual as cargas positivas e negativas estão distribuídas num átomo, Thomson propôs um modelo simples.

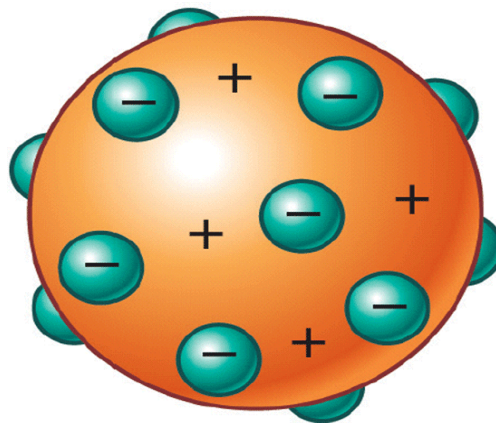


FIGURA 2.4. O modelo atômico de Thomson

FONTE: <http://entendendoquimica.blogspot.com.br/2012/06/modelo-atomico-de-thomson-e-rutherford.html>

Em 1904, ele propôs um modelo atômico, mais conhecido como “pudim de passas”. Onde admitia que o átomo era uma esfera com carga positiva distribuída de forma uniforme, não tendo um caráter de partícula. Logo, os elétrons ficavam espalhados dentro dessa “massa positiva” e permeável (GIBERT, 1962).

2.3 O ÁTOMO SEGUNDO RUTHERFORD

Em 1911, o modelo atômico de Thomson passa a cair em descrédito, depois de uma série de experimentos realizados por Rutherford, a partir da análise de experiência envolvendo o espalhamento de partículas alfa por átomos.

Após Röntgen ter feito sua espantosa descoberta, em 1895, Rutherford e Thomson passaram a trabalhar juntos para medir a ionização produzida pelos raios X. Após a descoberta da radioatividade, em 1897, aplicou sua experiência na medida da ionização produzida pelo urânio e percebeu que havia dois tipos de radiações emitidas do urânio: chamou-as de alfa e beta.

Rutherford, junto com os Curie, Becquerel estavam estudando as propriedades das radiações emitidas por substâncias radioativas e chegaram à conclusão de que os raios beta eram iguais aos raios catódicos, isto é, elétrons (GIBERT, 1962).

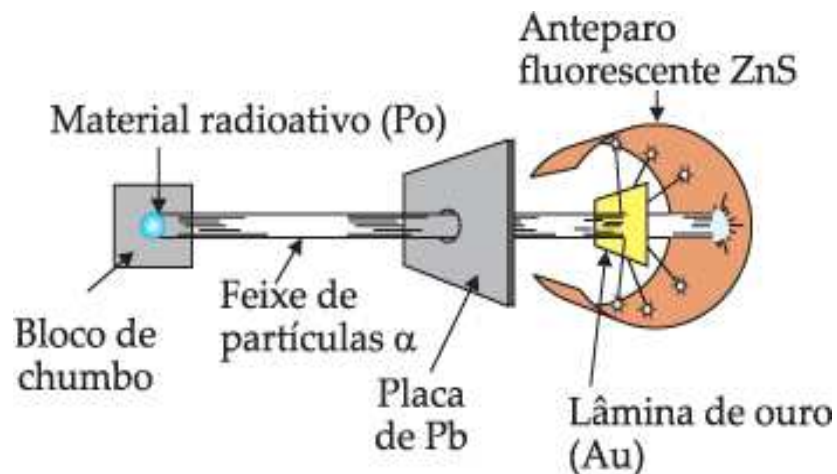


FIGURA 2.5. O desvio sofridos por partículas alfas ao se chocar com um átomo do tipo imaginado por Thomson.

FONTE: <http://www.vestibulandoweb.com.br/quimica/teoria/modelo-atomico.asp>

A figura (2.5) mostra o aparelho utilizado por Rutherford para provar que as partículas alfa seriam simplesmente átomos de hélio duplamente ionizados: Um tubo de vidro com paredes muito finas contendo uma substância radioativa que era colocada no interior de um compartimento de vidro.

Algumas partículas alfa emitidas pela substância radioativa eram capazes de penetrar no tubo de vidro. Passado algum tempo, testes revelaram que o conteúdo do compartimento externo continha uma quantidade do gás hélio comum. Essa descoberta confirmou o argumento de que partículas alfa são átomos de hélio duplamente ionizados, que podem capturar dois elétrons e se

tornar átomos nêutrons de hélio durante, ou após, a passagem através de um tubo de vidro de paredes finas (BRENNAN, 2000).

O modelo atômico de Rutherford ficou conhecido como “sistema planetário”, pois havia semelhança com o movimento em torno do sol, os elétrons girando em torno do núcleo.

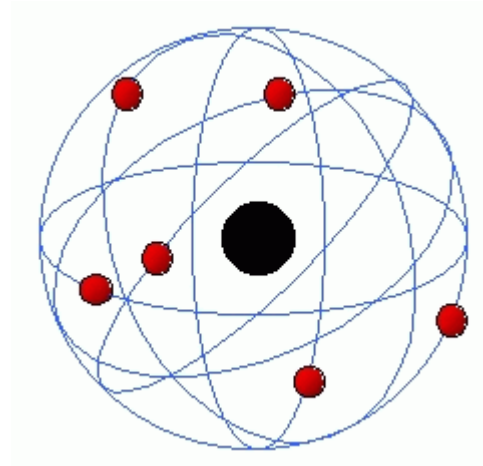


FIGURA 2.6. O modelo atômico de Rutherford, o “sistema planetário”.

FONTE: http://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B4mico_de_Rutherford

2.4 O ÁTOMO SEGUNDO BOHR

Graças ao trabalho de Rutherford, em 1913, o físico Dinamarquês Niels Bohr propôs um modelo para o átomo de hidrogênio que combinava com os trabalhos de Planck e Einstein. O modelo Rutherford atribuía uma carga e uma massa ao núcleo, mas nada dizia a respeito da carga e da massa dos elétrons.

Bohr, que estivera trabalhando no laboratório de Rutherford na época dos experimentos de Geiger e Marsden, formulou a hipótese de que o elétron do átomo de hidrogênio girava em torno do núcleo, atraído pela carga positiva (EISBERG, 1961).

O problema deste modelo, porém, era que a física clássica determinava que o átomo não poderia existir com esta organização. Conforme as teorias da época, o elétron carregado em movimento no campo elétrico positivo do núcleo iria perder energia ao ponto de se chocar com o núcleo.

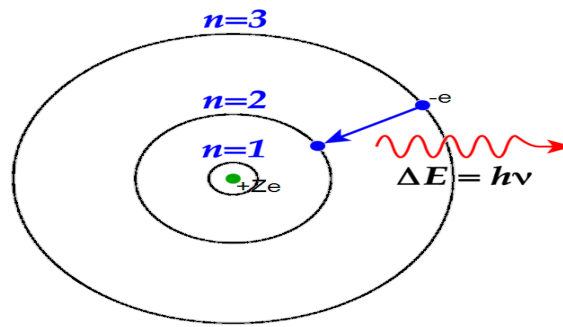


FIGURA 2.7. Modelo do átomo de Bohr

FONTE: <http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-11-crise-da-fisica-3.html>

O principal objetivo de Bohr era explicar a paradoxal estabilidade do átomo de Rutherford. Para resolver a contradição entre as leis da física clássica e o problema da estabilidade dos átomos, Bohr adotou a ideia de que o elétron do átomo de hidrogênio só poderia ocupar certas órbitas ou níveis de energia nos quais ele era estável. A energia do elétron no átomo estaria então “quantizada”. Com isso, Bohr introduziu a ideia de quantum de Planck no modelo atômico de Rutherford (<http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-11-crise-da-fisica-3.html>).

Bohr, então adotou os seguintes postulados:

1. Postulados dos níveis de energia: Num átomo, um elétron só pode ter certos valores da energia, que são chamados níveis de energia. Logo, o átomo só pode ter certos valores da energia total. Então a partir dessas considerações, a seguinte fórmula para os níveis de energia do elétron no átomo de hidrogênio.

$$E = - \frac{R_H}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \infty \text{ (para o átomo de H)} \quad (2.1)$$

Onde R_H é uma constante (unidades de energia) valendo $2,179 \times 10^{-18} \text{ J}$. Os valores possíveis das energias de um elétron se obtêm inserindo-se na fórmula os diferentes valores de n , que são sempre inteiros, 1, 2, 3 etc. (até ∞ - infinito). O número quântico principal.

2. Transições entre os níveis de energia: Um elétron num átomo só pode alterar a sua energia passando de um nível de energia para outro. Esta passagem de um para outro nível é uma transição, onde ocorre a emissão de luz pelos os átomos para dar

um espectro descontínuo de raios como segue: um elétron num nível elevado E_i sofre uma transição para outro nível de energia mais baixa (E_f), o elétron perde energia emitida como fóton.

Neste segundo postulado, Bohr usou os conceitos de Einstein para explicar o espectro de emissão dos átomos (<http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-11-crise-da-fisica-3.html>).

CAPÍTULO III

3 A NATUREZA DA LUZ

Nos tempos mais remotos da cultura grega, surgiu o desejo de explicar a luz estudando alguns fenômenos ópticos.

Aristóteles, filósofo grego (384-322 a.c.), foi o primeiro que se tem notícia a adotar a natureza ondulatória da luz, pois, para ele, a luz era uma espécie de fluído imaterial que chegava aos nossos olhos vindo dos objetos visíveis (EISBERG, 1961).

Para Empedocles (492-432 a.c.), a luz é a parte de um dos seus quatro elementos: o fogo. Sem, contudo, se confundir com este. Alguns filósofos antigos, adeptos do atomismo, consideravam a luz um *fogo visual* composto de partículas, diferentes, no entanto, das que compunham o restante dos objetos por serem bem menores. Esta teoria foi adaptada por Epicuro (342-270). Tinha, anteriormente, sido modificada por Anaxágoras (500-428) no sentido de substituir os corpúsculos microscópicos reproduzindo os objetos reais, por outros corpúsculos, correspondendo, cada um, a uma propriedade determinada.

Para Anaxágoras a matéria compunha-se de uma multiplicidade de elementos, as homeomerias, cuja mistura dá os diferentes corpos, mas, tudo era comandado por um princípio superior, uma inteligência original, o “noûs”, conceito que lhe é devido (GIBERT, 1962).

Outro grupo, ligado a escola de Pitágoras, afirma ser o olho a origem da luz, a qual é emitida pelo órgão visual, vai ao objeto e regressa ao olho dando então a visão.

No fim do século XVI, surgem as primeiras lunetas e Kepler dá explicação para natureza da luz, “embora a imagem do objeto esteja efetivamente traçada, no fundo do olho, numa posição invertida, a alma deve naturalmente e sem o socorro de qualquer experiência, endireitá-la.... Já no início do século XVII, Descartes apresenta a Lei da Refração e também dá uma explicação da natureza da luz mas aí a sua visão não foi feliz: era uma teoria mista e complexa em que intervinha uma transmissão de caráter corpuscular ligado a uma emissão vibratória, retirando à luz qualquer natureza material, mas exigindo um meio elástico, o éter, para se transmitir (ROONEY, 2010).

Em 1665, dá-se um novo passo nos conhecimentos da luz com a descoberta de Grimaldi (1618-1663). O fenômeno da Difração, descrito assim, levou a Hooke (1635-1703) a apresentar, em 1675, à Royal Society uma memória em que afirma a dado passo: “O movimento da luz, quando é produzido num meio homogêneo, propaga-se por impulsos ou ondas simples e de forma constante, perpendiculares à linha de propagação” (GIBERT, 1962).

Outro que alcançou apreciáveis progressos no próprio entendimento da explicação ondulatória (ou vibratória) da natureza da luz foi Huygens que, em 1678, estudou o fenômeno da *dupla difração*, o que o levou a elaborar a sua *teoria ondulatória da luz*. Segundo ele, para justificar as condições de propagação da luz e as suas propriedades, era necessário admitir a existência de um meio, o éter, enunciando então o seguinte princípio (PRINCÍPIO DE HUYGENS): “cada ponto do éter atingido pela excitação luminosa pode ser considerado como o centro de uma nova onda esférica”. É curioso notar que Huygens descobre aqui a *polarização da luz*, primeiro fenômeno a exigir a hipótese da *transversalidade das vibrações* (GIBERT, 1962).

Em 1672, Newton apresentou à Royal Society uma comunicação sobre dispersão da luz, baseado em experimentos que fazia com o prisma. Tais experimentos motivaram controvérsias no meio científico, pois, naquela época, a experimentação deveria ser utilizada para confirmar ou negar algum tipo de teoria. Impulsionado por essa controvérsia, pela ausência de explicação plausível para existência da sombra geométrica e também pelo fato de ser um atomista, propôs um modelo corpuscular para explicar a natureza da luz (Gibert, 1962).

Newton, publica em 1704, o seu tratado de óptica do qual sai uma segunda edição em 1717, declarou: 1 que a luz branca era composta da mistura de várias cores e essas cores correspondiam a uma variedade de partículas, 2 que a reflexão e a refração, propôs um engenhoso sistema de “ajustes de fácil reflexão e de fácil refração. Já no fim da sua prestigiosa vida, deduzir aquela consequência fundamental da teoria ondulatória e por ele entender que não poderia admitir um éter com vibrações transversais, rejeitou a teoria ondulatória de Huygens (Gibert, 1962).

Newton não foi bem sucedido ao afirmar que a velocidade da luz aumenta quando esta passa de um meio menos denso para um meio mais denso. Com toda autoridade que tinha, estava montada o grande palco onde ocorreu a mais célebre discussão a respeito da natureza

da luz, de um lado Huygens e seu modelo ondulatório, de outro Newton e seu modelo corpuscular (Huygens, 1986).

O modelo de Newton prevaleceu sobre o de Huygens por mais de 100 anos, questionar uma teoria bem fundamentada nunca foi fácil, por isso aceitar o modelo contrário o de Newton foi um trabalho bastante árduo, que Thomas Young (1773-1829) descido a enfrentar. Young questionou várias afirmações da teoria corpuscular de Newton, como a velocidade da luz emitida por corpos diferentes e, explicou, de forma simples, como eram formados os “anéis de Newton” supondo que cada cor correspondia a um determinado comprimento de onda próprio.

Estudando o experimento de dupla fenda, Young considerou que a luz se comportava como onda, que podiam se anular umas às outras ou intensificarem-se. Para isso usou como fonte luminosa, não propriamente o Sol mas antes uma fenda iluminada pelo Sol. Em frente a essa fenda, colocou um painel opaco, com duas fendas, simétricas em relação à primeira, e rigorosamente iguais, de modo a construir com este conjunto duas fontes luminosas iguais em todos os sentidos. Então, num alvo posto em frente das fendas, Young pôde observar riscas, alternadas claras e escuras, chamadas de franjas de interferência. Young interpretou estes resultados tendo como certo o princípio de Huygens e, portanto, a teoria ondulatória (Gibert, 1962).

A explicação matemática do fenômeno da difração coube a Augustin Fresnel (1788-1827), defensor da teoria ondulatória da luz. Como Tomas Young, Fresnel também calcula corretamente a trajetória hiperbólica do lugar geométrico dos lugares geométricos dos pontos de interferência construtiva. Desenvolve a teoria, detalhando os cálculos e explicando a reflexão, a difração, as cores...e envia a Arago (o mesmo que se interessara pelos resultados de Young). Fresnel redige um enorme tratado desenvolvendo esses temas. O matemático Poisson, no juri, mostra que certo efeito bizarro deveria se produzir na difração de um anteparo circular com incidência oblíqua, o que “provaria” a falsidade da teoria de Fresnel. Para uma dada geometria, se encontraria um máximo na sombra geométrica do disco. Mas, realizado o experimento, o efeito realmente se produz! Fresnel ganha o prêmio em 1819 (ROONEY, 2010).

A explicação do fenômeno de polarização da luz baseada no modelo ondulatório tropeçava no próprio modelo, pois se acreditava que as ondas da luz eram longitudinais, no entanto, uma mudança de conceito estava por vir quando François Arago (1786-1853) juntou-

se a Fresnel e, juntos observaram dois feixes polarizados não interferiam um com o outro. Arago comunicou o fato a Young que não tardou em presumir que, as ondas eram transversais (Gibert, 1962).

A descoberta de Michael Faraday, de que a Luz podia se inverter os planos de polarização quando exposto a campos magnéticos, despertou curiosidade em James Maxwell (1831-1879), que chegou a equações que expressavam o comportamento de uma corrente elétrica e de seu campo magnético associado (Gibert, 1962).

3.1 O TRABALHO DE MAXWELL

Utilizando-se dos estudos de Faraday, de que a luz podia se inverter os planos de polarização quando exposto a campos magnéticos, “tubos de forças”, James Clerk Maxwell era adepto de utilizar modelos conceituais que servissem de analogia com os fenômenos estudados, independentemente de que representem ou não a realidade. Imaginou que os “tubos de forças” estavam cheios de turbilhões de moleculares com eixos paralelos aos tubos girando todos no mesmo sentido e davam origem as forças centrífugas, tendo tendência ao alargar-se equatorial mente e a contrair-se longitudinalmente (EISBERG, 1961).

A essa ideia, Maxwell aplicou as leis da Mecânica dos fluídos a este modelo e estabeleceu as suas relações matemáticas com as grandezas elétricas e magnéticas. Trocou a velocidade de rotação dos turbilhões pela intensidade do campo magnético e substituiu a força exercida pelos turbilhões sobre as partículas pela intensidade do campo elétrico.

Então em 1864, baseado nas analogias acima, Maxwell estabeleceu as chamadas equações que relacionam os fenômenos elétricos com os magnéticos e que são a estrutura matemática das propriedades do chamado “campo eletromagnético”. Na mesma data ele apresenta à Royal Society de Londres uma evolução da sua teoria inicial, considerando no lugar do modelo mecânico, uma interação entre energia elétrica (potencial) e magnética (cinética) associado ao campo magnético. Portanto o magnetismo pode produzir eletricidade e vice-versa, sendo finita a velocidade de propagação das ações, dependendo do meio. Concluiu também que as ondas eletromagnéticas são transversais em relação a direção de propagação, como acontece com as vibrações luminosas (EISBERG, 1961).

A novidade do trabalho de Maxwell foi demonstrar que a luz era uma onda eletromagnética e que, portanto, com as ondas eletromagnéticas deveriam ocorrer os fenômenos de reflexão, refração, enfim, todos os que ocorrem com a luz. Embora estes

conhecimentos fossem de real importância, faltava-lhes ainda o aval da comprovação experimental, realizada por Henrich Hertz (1857-1894).

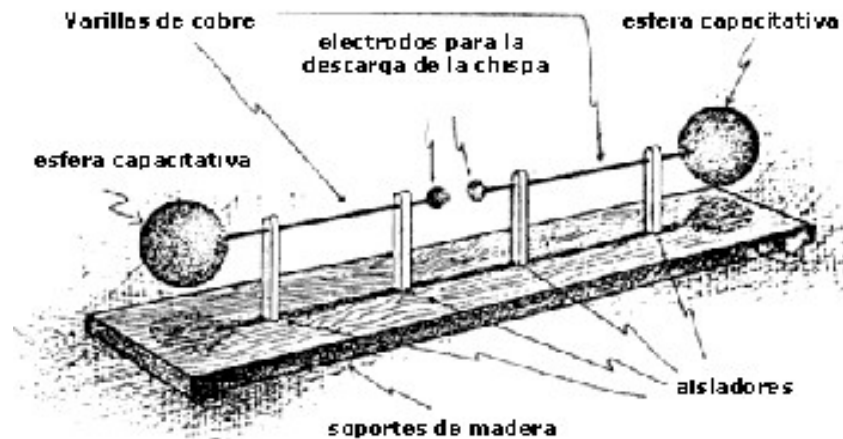


FIGURA 3.1. Oscilador construído por Hertz

FONTE: <http://fisica.cdcc.usp.br/Professores/Einstein-SHMCarvalho/node5.html>

Hertz montou um oscilador constituído de quatro esferas metálicas unidas duas a duas por uma haste ligada aos terminais de uma bobina de Ruhmkorff (Figura 3.1), de onde conseguiu produzir ondas eletromagnéticas e provar que estas possuíam a mesma velocidade da luz e podiam sofrer reflexão, refração, polarização, difração e interferência. Além disso, Hertz também descobriu que outros tipos de ondas poderiam ser produzidas e, com isso, descobriu as ondas de rádio e as micro-ondas. Sua contribuição foi crucial para a compreensão dos trabalhos de Maxwell e inaugurou a era do eletromagnetismo, uma era de grande desenvolvimento tecnológico e socioeconômico.

3.2 DUALIDADE DA LUZ

Em 1899, descobriu uma nova constante fundamental, após pesquisar radiações eletromagnéticas, batizada posteriormente de *constante de Planck*. A partir dessa data chega-se a uma conclusão a respeito da natureza da luz que é aceita até hoje. A divergência de onda e partícula é então explicada por Einstein, que realizou experimento chamado de efeito fotoelétrico, concluiu que a natureza da luz tinha comportamento dual, a luz poderia se comportar simultâneo como onda e como partícula (EISBERG, 1961).

A partir da constante de Planck, surge um novo ramo da física, deixando para trás as ideias da Mecânica Clássica e surge então a física Moderna, com uma vertente da física Moderna aparece a Mecânica Quântica.

3.3 O EFEITO FOTOELÉTRICO

Em 1887, coube a Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) descobrir que sob ação dos raios ultravioletas certos corpos emitiam electrões. Em 1902, Lenard procedeu a experiências cuidadosas quais resulta que:

- a) Os electrões emitidos têm velocidades iniciais finitas, mesmo num campo nulo, as quais não dependam da temperatura;
- b) Esta velocidade dos electrões não depende da intensidade total da luz excitatriz, mas depende fortemente da frequência;
- c) O número total de electrões emitidos é proporcional à intensidade da luz excitatriz.

Lenard encontrou bastante dificuldade para explicar esses fatores, dentro de uma teoria ondulatória da luz.

Em 1889, J.J. Thomsom demonstrou que as partículas ejetadas da placa de metal eram elétrons. O problema do experimento era que a energia dos elétrons ejetados não mudava com a intensidade da luz incidente.

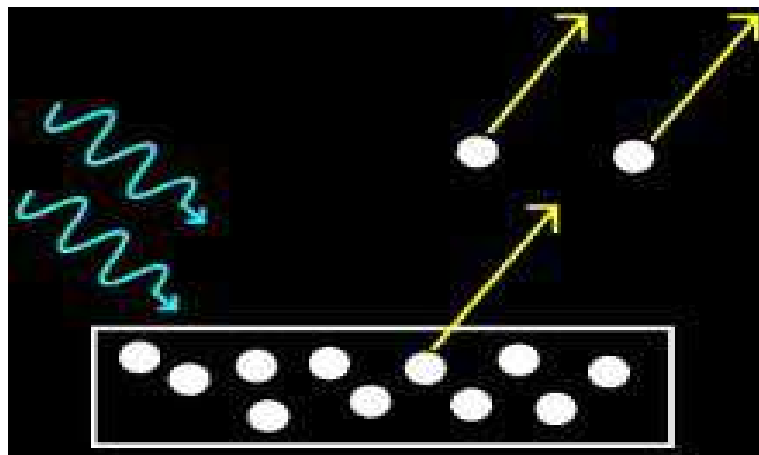


FIGURA 3.2. O efeito fotoelétrico

FONTE: <http://www.dfte.ufrn.br/caio/index.html>.

Foi então, que em 1905, Albert Einstein (1879-1955) publicou cinco artigos bastante revolucionários, dentre estes, um explicando a natureza da luz. Propôs uma explicação baseada na “teoria dos quanta”, a energia das ondas luminosas concentra-se em pequenos “Lichtquanta” - o que agora designamos por FOTÔES - os quais tem uma energia hf , onde: h é a constante de Planck e f é a frequência da radiação. Em decorrência desse trabalho ele

ganhou o prêmio Nobel de 1921 e, a partir de 1926, esses quanta passaram a ser denominados de fótons (Zznetic e Mozena, 2004).

O trabalho de Lenard foi então explicado por Einstein, passando a se chamar de efeito fotoelétrico, que diz:

1. A luz de frequência f é formada por números inteiros de fótons, cada um com energia hf (h é a constante de Planck), que incidem na placa emissora;
2. Os fótons colidem com elétrons da placa e transferem energia para estes;
3. Os elétrons usam uma parte da energia recebida pelos fótons para escapar da placa emissora, se sobra energia, esta é transformada em energia cinética que o elétron adquire para deslocar-se da placa emissora para placa coletora, constituindo assim, a corrente elétrica característica deste fenômeno.

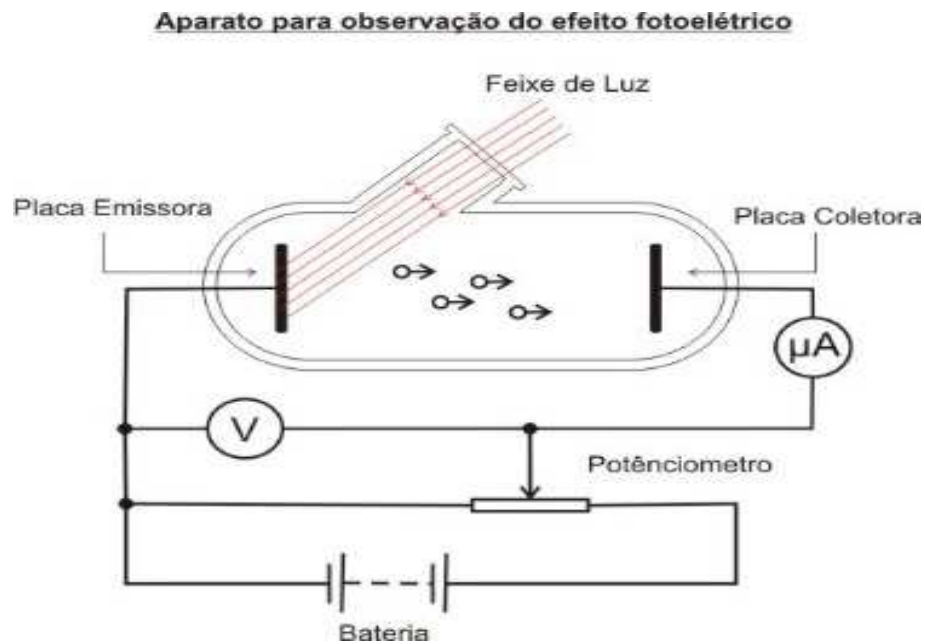


FIGURA 3.3. Esquema para observação do efeito fotoelétrico

FONTE: http://pt.wikipedia.org/wiki/Comportamento_dual_da_radiao_eletromagneto

CAPÍTULO IV

4 UMA NOVA VISÃO DA FÍSICA MODERNA

4.1 A FÍSICA DE DE BROGLIE

Por volta de 1924, tinham-se acumulado diversos resultados experimentais que só se conseguiam explicar à custa de virtuosíssima habilidade “ad hoc”. Muitos desses problemas foram profundamente analisados num trabalho que alcançou grande renome, N. Bohr, H. A. Kramers e J. C. Slater, mas e nenhum desses trabalhos satisfaziam (Gibert, 1962).

Foi então que um jovem físico teórico, Louis De Broglie (1892-1987, apresenta sua tese de doutorado e outros trabalhos fundamentais, criando uma nova Mecânica Quântica ou Mecânica Ondulatória, não concorrente da Mecânica de Galileu-Newton-Laplace-Einstein mas, bem ao contrário, muito independente delas, criando logo de início novos delicados problemas de compatibilidade (BRENNAN, 2000).

De Broglie, vinha de uma família aristocrática, mas tradicionalmente liberal, e príncipe por força de um tetravô. Aos 18 anos, De Broglie concluiu a faculdade de Licenciatura em História, e inclinou-se para o ramo da física influenciado pelo seu irmão mais velho, Maurice, que montou um laboratório para estudar Raios X (Gibert, 1962).

De Broglie apresenta a origem da hipótese de uma natureza ondulatória dos corpúsculos, designados de elétrões.

Fazendo um estudo desde a hipótese de Planck, radiação de corpo negro, até Einstein, efeito fotoelétrico. Observou-se que pouco depois da conhecida teoria da relatividade restrita, de Einstein, ela foi aplicada ao movimento dos elétrões (Gibert, 1962).

Um elétron de massa m e velocidade v tem energia

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ e o momento } q = \frac{E}{c^2} v \quad (4.1)$$

De Broglie faz a hipótese arrojada seguinte: “il faut associer à cette particule une onde se propagent dans la direction du mouvement”...

A frequência dessa onda deve ser $[f = \frac{E}{h}]$ e a sua velocidade $[V = \frac{c^2}{v}]$ e usando a equação (4.1), temos

$$q = \frac{hf}{v} \quad (4.2)$$

Se em vez de um electrão se tratasse de um fóton, ter-se-ia [$V = c$], logo

$$q = \frac{hf}{c} \quad (4.3)$$

Em condições convenientes, os electrões devem apresentar os fenómenos de difração e interferência, verificados experimentalmente por C. J. Davisson (1881-1958) e o inglês G. P. Thomson.

Então, De Broglie expressou sua hipótese matemática através de equações para a frequência e o comprimento de onda das ondas de matéria, hoje conhecidas como *relação de De Broglie*.

$$f = \frac{E}{h} \quad (4.4)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4.5)$$

onde E é a energia total, p o momento e λ o chamado *comprimento de onda de De Broglie* da partícula. No caso dos fótons, essas equações podem ser obtidas a partir da equação do quantum de radiação, [$E = hf$], e da equação [$E = pc$]:

$$E = pc = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (4.6)$$

Baseando-se na mecânica relativística, De Broglie demonstrou que as equações (4.4) e (4.5) também se aplicam a partículas com massa de repouso diferente de zero. Chegando a concluir que essas equações leva a uma interpretação física da quantização do momento angular do elétron postulada por Bohr, a de que a quantização equivale à formação de uma onda estacionária (figura 4.1), temos:

$$Mvr = n\hbar = \frac{nh}{2\pi} \quad \text{para } n = \text{inteiro}$$

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = \frac{nh}{p} = n\lambda = \text{circunferência da órbita} \quad (4.7)$$

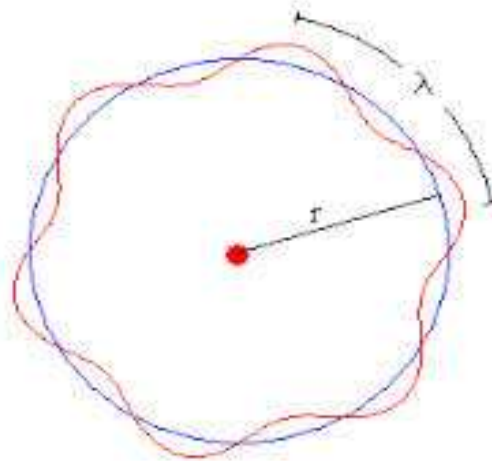


FIGURA 4.1. Ondas estacionária ao longo de uma circunferência
 FONTE: Tipler (1978)

Em 1925, as ideias de De Broglie foram ampliadas e transformadas em uma teoria completa por Erwin Schrödinger, C. J. Davisson e L. H. Germer confirmaram a hipótese de De Broglie ao produzirem figuras de interferência, uma característica dos fenômenos ondulatórios, usando feixes de elétrons.

4.2 O TRABALHO DE HEISENBERG – PRINCÍPIO DA INCERTEZA

Ao estudarmos a física clássica, faz-se necessário que utilizemos o determinismo, mas para estudar o mundo atômico é importante que façamos uso de uma análise probabilística, segundo Heisenberg e Bohr logo, abandonemos o determinismo clássico.

Heisenberg fazendo estudo sobre a hipótese de De Broglie, ao produzirem figuras de interferência, provou que estas teorias envolvem todas uma incerteza essencial, que não pode ser levada, quanto a possibilidade de conhecer com toda precisão (mas isto só no mundo atômico) simultaneamente certas grandezas independentes como, por exemplo, a posição e a quantidade de movimento de um corpúsculo (Gibert, 1962).

Bohr chamou a atenção para a necessidade de reconhecer a existência de uma ambiguidade, a complementaridade, no nosso conhecimento. Já De Broglie afirma “não pode haver qualquer dúvida quanto à exatidão das relações de incerteza de Heisenberg” (ao passo que a palavra complementaridade não constitui nenhuma explicação real da dualidade ondas-partícula) e acrescenta “pretende-se fundar sobre a complementaridade de Bohr e sobre

extensões arriscada das relações de incerteza toda sorte de considerações filosóficas das quais o menos que se possa dizer é que são perigosas” (Gibert, 1962).

Numa imagem muito feliz, Bohr admite que a realidade não é simples, totalmente apreensível... Nada disso! “a realidade tem duas faces complementares”, é análoga a um desenho traçado, como em certos jogos para crianças, sobre duas folhas de plástico transparente, digamos metade em cada uma. Separadas ou mal ajustadas nada significam, ao passo que corretamente sobrepostas, acertadas e vistas em boas condições, dão-nos uma representação entendível. Contudo, veem-se mal certos pormenores. Se pegarmos numa forte lente poderemos ver melhor, mas observamos ao mesmo tempo que o que ganhamos em relação às partes do desenho existentes numa das folhas, o perdemos em relação às outras. Segundo Bohr o mundo do nosso conhecimento seria assim...

De qualquer modo, os raciocínios básicos encontram uma sua expressão formal, matemática, nas relações de incerteza de Heisenberg que, no fundo, podem reduzir à seguinte fórmula muito simples

$$\delta p \delta q = h \quad (4.8)$$

em que (δp) significa um pequeno desvio da posição de um corpúsculo e (δq) a variação simultânea da sua quantidade de movimento.

Note-se, o que é muito importante, que aquele referido pequeno desvio é qualquer coisa praticamente inevitável sempre que se faz uma observação, a qual é naturalmente indispensável para o nosso conhecimento...

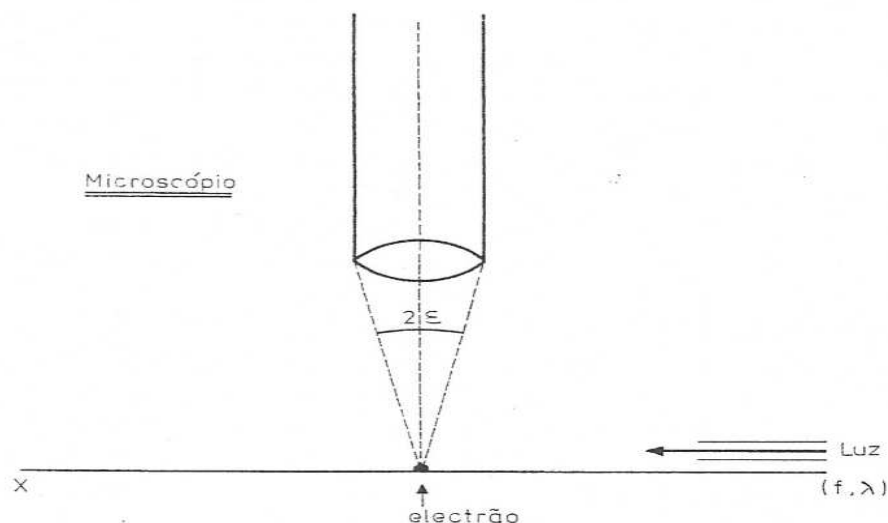


FIGURA 4.2. Exemplificação do PRINCÍPIO DE INCERTEZA
 FONTE: Gibert (1962).

Fazendo uma interpretação simples, dentro de um formalismo experimental claríssimo, do estranho fenómeno traduzido pelas relações de incerteza (profunda novidade, afetando a própria noção de “casualidade”, tão enraizada em todos os nossos raciocínios) (BRENNAN, 2000).

Sabe-se da óptica geométrica que nas condições da figura (óbvias), o poder separador ou seja (numa linguagem mais conveniente para o caso) a incerteza com que é conhecida a posição de um ponto (electrão) é

$$\delta x = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \quad (4.9)$$

para que o electrão seja observado é preciso que pelo menos um fotão sofra uma difusão por efeito Compton e entre na objetiva. Neste caso será desviado segundo um ângulo $[\alpha < \varepsilon]$. Na teoria (aliás muito simples) do efeito Compton mostra-se que a variação da quantidade de movimento

$$\Delta q_x = \alpha \frac{h}{\lambda} \quad (4.10)$$

Mas como (α) pode variar de $[-\varepsilon$ a $+\varepsilon]$, existe uma “incerteza”, quanto à quantidade de movimento depois da difusão, que é dada por

$$\Delta q_x = 2\varepsilon \frac{h}{\lambda} \quad (4.11)$$

Tem-se então

$$\delta x \delta q_x = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \frac{2\varepsilon h}{\lambda} = h \quad (4.12)$$

que é justamente a fórmula de Heisenberg (Gibert, 1962).

4.3 OS NOVOS RUMOS DA FÍSICA MODERNA – SCHRÖEDINGER

A física quântica que era recém descoberta e até o presente momento bem sucedida, até mais do que aparentemente deve estudar, falhava em alguns pontos, ou seja, não explicava o problema de forma satisfatória.

O primeiro aspecto indesejado, era que a teoria quântica só nos diz como tratar sistemas que sejam periódicos, usando as regras de quantização, mais há muitos outros sistemas físicos interessantes que não são periódicos. E o número de sistemas periódicos para

os quais pode ser encontrada uma base física para essas regras na relação de de Broglie é muito pequeno.

O segundo aspecto indesejado mostrava que a teoria permitia calcular energias dos estados possíveis de certos sistemas, e a frequência dos fótons emitidos ou absorvidos quando um sistema sofre uma transição entre estados possíveis, ela não nos diz como calcular a taxa (número médio de transições por segundo) com que essas transições ocorrem e não nos diz como calcular a intensidade das linhas espectrais.

O terceiro aspecto indesejado é quando aplicamos a átomos, a teoria é na realidade bem sucedida apenas para átomos de um elétron. Os elementos alcalinos (Li, Na, K, Rb e Cs) podem ser tratados de forma aproximada, porque em muitos aspectos eles são similares a um átomo de um elétron (EISBERG, 1979).

Percebemos então, que os aspectos indesejados mencionados acima leva de alguma forma a construção de uma teoria que parece ser incoerente, pensando nisso, vários pesquisadores da época fizeram várias tentativas de desenvolvimento de uma teoria quântica livre destas outras objeções.

Então em 1925, Erwin Schrödinger desenvolveu sua teoria da *mecânica quântica ou mecânica ondulatória* e publicou em 1926. Ele se baseou nos postulados de De Broglie e apresentou sob alguns aspectos uma teoria diferente (BRENNAN, 2000).

Em seu trabalho, Schrödinger apresenta a equação que governa o movimento de elétrons e outras partículas com massa de repouso diferente de zero, que análoga a equação clássica:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

Como a equação de onda clássica, a equação de Schrödinger relaciona as derivadas da função de onda em relação ao tempo e em relação ao espaço. Para essa equação de Schrödinger não existe dedução matemática, a sua validade está fincada em resultados experimentais. Logo, essa equação é uma aproximação da equação de onda relativística e só é aplicada a problemas não-relativísticos da física atômica, molecular e da matéria condensada. Em 1928, Dirac conseguiu formular a equação relativística (TIPLER, 2001).

Schrödinger, também apresentou sua equação em três dimensões para uma partícula de massa m e sendo dependente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (4.14)$$

A função de onda $\Psi(x,t)$ não tem significado físico algum, pois o número complexo $[i = \sqrt{-1}]$ aparece explicitamente na equação de Schrödinger. As funções de onda que satisfazem as equações de Schrödinger não são necessariamente reais, como podemos ver no caso da função de onda de uma partícula livre

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (4.15)$$

Isso significa que a função de onda $\Psi(x,t)$ que satisfaz a equação de Schrödinger não é uma função diretamente mensurável como a função de onda clássica $y(x,t)$, já que os resultados de medições são necessariamente números reais. Entretanto a probabilidade de encontrar o elétron no intervalo entre $[x + dx]$ certamente pode ser determinada (TIPLER, 2001).

A probabilidade $P(x)dx$ de o elétron ser encontrado no intervalo entre $[x + dx]$ foi definido como sendo igual a $|\Psi|^2 dx$. Essa interpretação probabilística de Ψ foi proposta por Max Born e reconhecida, apesar dos imediatos e respeitáveis protestos de Einstein e Schrödinger, como a forma mais apropriada de relacionar as soluções da equação de Schrödinger aos resultados de medições. A probabilidade de um elétron ser encontrado no intervalo entre (x_1) e $[x_1 + dx_1]$ ou no intervalo entre (x_2) e $[x_2 + dx_2]$ é a soma das probabilidades individuais, $[P(x_1)dx_1 + P(x_2)dx_2]$.

Como o elétron tem que estar necessariamente em algum ponto do espaço, a soma das probabilidades para todos os valores possíveis de (x) deve ser igual a (1). Assim temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = 1 \quad (4.16)$$

Logo, a equação (4.16) é conhecida como *condição de normalização*. Essa equação é de suma importância, pois ela impõe uma restrição adicional às possíveis soluções da equação de Schrödinger (TIPLER, 2001).

CAPÍTULO V

5 METODOLOGIA

O desenvolvimento deste trabalho ocorreu a partir da ideia de produzir um material didático que abordasse uma breve discussão histórica sobre a física moderna.

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica de alguns livros texto, assim como artigos que tratassem o assunto de forma clara e objetiva e fazendo o uso da internet, no sentido de conseguirmos dados suficientes para a realização do nosso trabalho.

Fizemos então, um estudo teórico sobre a radiação térmica, as leis de Wien e os postulados de Planck, um estudo sobre os modelos atômicos de Dalton até Bohr, a natureza da luz com a contribuição de Maxwell e Einstein, e uma nova visão da física moderna.

Foram feitas muitas passagens diretas, por julgarmos serem de fácil compreensão para o leitor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizada uma breve revisão histórica sobre a física moderna. Nosso estudo envolveu vários assuntos tratados pela física contemporânea e de difícil compreensão, porém, a forma em que foi abordada leva ao leitor um fácil entendimento dos assuntos abordados.

Estudamos, no decorrer dessa pesquisa científica, sobre a radiação térmica, a estrutura atômica, a natureza da luz, a física de De Broglie, o trabalho de Heisenberg, e o trabalho de Schrödinger.

O estudo teve grande importância por mostrar a evolução dos modelos atômico, a construção da ideia de dualidade da luz e surgimento da física moderna.

Note ainda que, no decorrer desta pesquisa sobre a radiação térmica, vimos que o problema desta radiação culminou no surgimento da mecânica quântica, que revolucionou a física clássica.

É válido também ressaltar que a teoria atômica teve um papel importantíssimo no estudo da natureza da matéria, pois, hoje sabemos quais são as formas das órbitas, o raio do átomo e que o mesmo possui uma estrutura interna constituída de prótons, elétrons e nêutrons.

Destacamos aqui o trabalho de Maxwell sobre a natureza ondulatória da luz baseado nos trabalhos de Faraday, que resultou no surgimento da teoria eletromagnética. É sabido que foi o estudo envolvendo o eletromagnetismo que nos proporcionou a concepção de que o nosso espaço é de quatro dimensões, sendo três espaciais e uma temporal.

E, para finalizar, destacamos ainda que a base da relatividade de Einstein é o eletromagnetismo. Devido a esses fatos, julgamos importantíssimo esse trabalho, pois ele trata de forma abreviada esse relato histórico sobre a física moderna.

REFERÊNCIAS

ABDALLA,, E. Teoria da gravitação: Cordas e teoria M. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 147 – 155, 2005.

BRENNAN, R. **Gigantes da Física, Brasil**: 2000.

EISBERG, R. M. **Fundamentos of Modern Physic**. New York: Wiley e Sons, 1961.

EISBERG, R. M. RESNICK, R. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 1979.

GIBERT, A. **Origens Históricas da Física Moderna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

GIBERT, A. **Origens Históricas da Física Moderna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

HAVARD PROJECT PHYSICS. **Partículas Elementares**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.

ROONEY, A. **A História da Física. Brasil**: mBOOKS, 2010.

TIPLER, P. A. **Física Moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

ZANETIC, J.; MOZENA, E.R. **Evolução dos Conceitos da Física**; 2004; Notas de aula; Instituto de Física da Universidade de São Paulo; São Paulo; Brasil; Português; 265p; impresso; Texto utilizado em disciplina dos cursos de Bacharel e Licenciatura em Física do Instituto de Física da USP.

<http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/raiosx/raiosx.html>.

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Planck.html>.

<http://www.aip.org/history/heisenberg/p08.htm>.

<http://www.leb.esalq.usp.br/aulas/lce200/emissaoabsorcao.pdf>.

<http://www.if.ufrj.br/~marta/cederj/quanta/mq-unid2-textocompl-1.pdf>.

<http://projetcocienciando.blogspot.com.br/2013/07/a-catastrofe-do-ultravioleta.html>.

http://profs.ccems.pt/PauloPortugal/CFQ/Wien/Lei_Wien.html.

<http://www.vestibulandoweb.com.br/quimica/teoria/modelo-de-dalton.asp>.

<http://www.brasilecola.com.br>.

<http://entendendoquimica.blogspot.com.br/2012/06/modelo-atomico-de-thomson-e-rutherford.html>.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B4mico_de_Rutherford.

<http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-11-crise-da-fisica-3.html>.

<http://fisica.cdcc.usp.br/Professores/Einstein-SHMCarvalho/node5.html>.

<http://www.dfte.ufrn.br/caio/index.html>.