UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

VANLEX GOMES GALDINO

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DA BISSECÇÃO E DE NEWTON PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

CAMPINA GRANDE - PB
2014

VANLEX GOMES GALDINO

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DA BISSECÇÃO E DE NEWTON PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientadora: Drª. Kátia Elizabete Galdino

CAMPINA GRANDE-PB
Março de 2014

G149a Galdino, Vanlex Gomes.
Análise comparativa entre os métodos numéricos da bissecção e de Newton para solução de equações não-lineares [manuscrito] / Vanlex Gomes Galdino. - 2014.
48 p. : il. color.

Digitado.
Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Kátia Elizabete Galdino, Departamento de Computação".

1. Métodos numéricos. 2. Equações não-lineares. 3. Método da bissecção. I. Título.

21. ed. CDD 512.5

VANLEX GOMES GALDINO

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DA BISSECÇÃO E DE NEWTON PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Aprovado em: 20 /03/2014.

COMISSÃO EXAMINADORA

Kátia Elizabete Galdino

Profª. Drª. Kátia Elizabete Galdino
Centro de Ciências e Tecnologia- CCT/UEPB
ORIENTADORA

Maria Isabelle Silva

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva
Centro de Ciências e Tecnologia- CCT/UEPB
EXAMINADOR

Antonio Marcos de Albuquerque

Prof. Msc. Antonio Marcos Albuquerque
Centro de Ciências e Tecnologia- CCT/UEPB
EXAMINADOR

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou em todos os momentos deste curso, especialmente aos meus pais, esposa, pelo amor carinho e estimulo que me ofereceram, dedico-lhes essa conquista como forma de minha gratidão.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por me dar condições para ter este sonho realizado. Pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos nesta fase da vida.

A Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa−PRPGP/UEPB, pelas condições oferecidas para a conclusão da minha pós graduação, em nível de Especialização na Matemática Pura e Aplicada.

A todos os professores que participaram da minha formação. Ao professor Aldo Trajano, pelas orientações de incetivo, que me fizeram seguir em frente concluindo assim o meu curso.

Em especial a minha orientadora Kátia Elizabete Galdino, por ter tido a paciência necessária para me ajudar em todo o processo de construção deste trabalho que me orientou e esteve ao meu lado durante esta última fase do curso.

Ao meu pai Valdir Barbosa, minha mãe Maria Judimar , e a esposa que sempre incentivaram, apoiaram e confiaram incondicionalmente em minha capacidade e desempenho.

As minhas amigas que partilharam comigo problemas e alegrias do dia a dia: Maria de Lourdes e Roseana Palmeira, colaboraram de forma especial neste caminho de aprendizagem, convivência e construção.que trilharam este caminho comigo e contribuiram de forma significativa para este momento.

Aos amigos Jairo, Sonildo e Rivanildo parceiros de curso e estudo.

A Anderson, secretário presente atencioso e competente, por sua paciência e dedicação de nossos problemas administrativos e acadêmicos.

A todos um muito obrigado.

Conteúdo

Resumo

Nesta monografia será feita uma abordagem sobre os Métodos Numéricos, em específico o da Disseção e o de Newton, mostrando suas teorias e suas demonstrações e fazendo aplicações dos mesmos, fundamentados no que postulam as referências bibliográficas. Será apresentado como as máquinas digitais armazenam números naturais e reais, nas bases binárias e decimais, incorre que, alguns destes números serão representados de forma limitada, ocasionando erros, dos quais se dividem em erros truncamento e os de arredondamento. Também será visto que, equações algébricas e transcendentes geralmente servem para modelar várias situações das diversas áreas da ciência, tais como: Economia, Medicina, Física, Química e da Engenharia. Para resolver estes modelos geralmente são utilizados os métodos numéricos. Será feita uma abordagem apenas sobre o método da Bissecção, da Iteração Linear e o de Newton, este último acelera a convergência do método da iteração Linear. Alguns exemplos serão resolvidos, atráves destes métodos podendo ser comprovando a eficiência e a robustez de cada um.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Método da Bissecção, Método de Newton, Erro de arredondamento e truncamento, Equações Não-Lineares.

Abstract

This work presents an approach on Numerical Methods, in particular the Bisection and Newton's methods, as well as develop their statements and apply them, based on the postulates from the references. It will be shown that digital machines store Natural and Real numbers on the binary and decimal bases, what generates errors, among which the truncation and rounding erros will be studied. One of the applications of algebraic and transcendental equations is in the modelling of problems in several areas of science, such as: Economics, Medicine, Physics, Chemistry and Engineering. To solve these models, numerical methods are generally used. In this work, only the Bisection, Iteration Linear methods and Newton's method will be explored, and the latter accelerates the convergence of the Iteration Linear method. Some examples will be solved by using these methods, demonstrating the efficiency and robustness of each one.

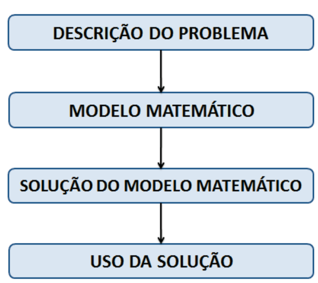
Keywords: Numerical Methods. The method of bisection. Newton method. Rounding error and truncation.

Introdução

Métodos Numéricos são técnicas pelas quais é possível formular problemas matemáticos, em que as operações podem ser resolvidas usando aritmética. Apesar de constatar a existência de vários métodos numéricos, este trabalho concentra-se apenas em realizar um estudo comparativo entre o Método de Newton e o Método da Bissecção, considerando que os métodos numéricos são ferramentas utilizadas para a resolução de problemas variados dentre as ciências exatas, tais como:

- Matemática, Física, Química;
- Economia, Meteorologia;
- e Engenharias.

A importância de se estudar tais métodos proporciona ao pesquisador uma tomada de decisão correta, pois saberá se pode ou não usar um método numérico para resolver o problema, podendo também avaliar a qualidade da solução obtida. Para isso, é importante que se saiba exatamente o que está sendo feito por determinado método numérico. Em situações-problemas, é importante conhecer os quatro passos básicos que existem para resolvê-los. O diagrama a seguir mostra esses passos.



Seguindo o esquema acima, para tentativa de resolver um problema, tem-se, primeiramente, que descrevê-lo da como se apresenta, se não for possível fazer esta descrição, haverá uma grande chance de não conseguir resolvê-lo. Em segundo lugar, é possível desenvolver uma forma de apresentação que possa ilustrar como está se comportando o problema. A esta apresentação, denomina-se modelo matemático ou modelo experimental. No terceiro passo, tenta-se resolver esse modelo matemático em busca de uma solução. Por fim, no último passo, será feita uma análise de como a solução encontrada pode ajudar na compreensão do problema.

No que se refere à solução para um determinado problema matemático, é possível encontrar dois tipos de solução, a saber: solução analítica e solução numérica. Uma solução analítica se restringe à um conjunto de problemas limitados, cuja solução pode ser aproximada por um modelo linear. Chama-se atenção para o fato de que, este tipo de solução tem aplicação excepcional, pois a maioria dos problemas são não-lineares, exigindo assim processos mais elaborados de resolução, fornecendo ao final uma solução numérica, ou aproximada. Estas por sua vez são obtidas por um modelo não-linear. Tais soluções aproximadas geram erros analíticas numéricas, os quais se apresentam em dois tipos: o de truncamento e arredonamento.

Portanto, no primeiro capítulo será abordado um estudo sobre aproximações e tipos de erros, quais os tipos de erros cometidos nos cálculos de uma solução de uma equação, e como estes erros podem influenciar nas soluções das equações. Também será estudado como um computador representa um número real em sua memória.

O segundo capítulo, destina-se ao estudo das equações não-lineares, como encontrar uma raiz deste tipo de equação. Portanto, será estudado o método de isolamento de uma raiz ou solução de uma equação não-linear, através do modo gráfico, bem como, a utilização de alguns teoremas da analise matemática. Em seguida, estudaremos o método de refinamento de uma raiz, neste ponto, será utilizado os métodos numéricos: da Bissecção e de Newton para obter um valor que mais se aproxime da raiz da equação não-linear. Estes métodos, utilizam-se de iterações, que servem para aproximar o valor que seja a raiz da equação não-linear.

No terceiro capítulo será feita uma analise comparativa entre os métodos numéricos estudados no segundo capítulo, mostrando quais as vantagens e desvantagens que possuem sobre a resolução de problemas que envolvem equações não-lineares.

No último capítulo serão feitas as considerações finais a respeito da utilização dos métodos numéricos da Bissecção e de Newton na solução de Equações Não-lineares.

Capítulo 1

Aproximações e Erros

1.1 Erros

Neste capítulo, será analisado os tipos de erro, estes por sua vez estão presentes no estudo sobre métodos numéricos. Na prática, é importante se conhecer e controlar erros, pois, se estruturas da engenharia ou qualquer outro dispositivo que dependa de cálculos, falhar, isso pode custar vidas.

Então, a utilização de máquinas sempre será empregada em grandes projetos que são destinados à atender as necessidades do homem moderno. A preocupação é que se essas máquinas não conseguem fazer a representação dos números reais em suas formas infinitas, acarretarão em erro. Por exemplo, a simples divisão de $\frac{1}{3}$, resulta em $0,33333333\ldots$. Como ficará representada a citada divisão em uma máquina, cuja notação decimal disponha apenas de cinco dígitos significativos? É possível visualizar através do referido exemplo, que não será exibida a parte complementar da divisão, ou seja, $0,00000333\ldots$. Assim, a realização de uma simples operação aritmética pode conter erros. Serão, pois, concentrados neste capítulo, uma análise comparativa dos dois tipos de erros: os erros de arredondamento e o de truncamento.

Diante disso, percebe-se que, $0,00000333\ldots$ fica fora da representação nesta máquina, pois a mesma só comporta cinco dígitos significativos em sua estrutura. E o que esse valor representa?

Para este tipo de situação, o valor $0,00000333\ldots$ é a diferença entre o valor exato ou verdadeiro e o valor aproximado, que será denotado, respectivamente, por x e $\bar{x}$. A esta diferença, será chamado Erro Absoluto ou Erro Verdadeiro, isto é:

$$E_t = valor\ verdadeiro - valor\ aproximado$$

onde $E \longrightarrow Erro\ Absoluto$ **e o subscrito** $t \longrightarrow$ "$true$" $(verdadeiro)$ **(CHAPRA, 2007).**

Observação 1.1. *Todavia, há uma desvantagem na utilização desta definição, pois o que acontece se o valor verdadeiro seja desconhecido?*

Simplesmente não há como calcular o Erro absoluto, E_t. Portanto, o que pode ser feito é estipular um limitante superior ou estimativa para o módulo de erro absoluto (RUGGIERO, 1996, p.13). Para efeito de notação, será atribuído ε como sendo a estimativa de erro, nas páginas seguintes.

Uma outra desvantagem do erro absoluto, é que a ordem de grandeza do valor estimado é desprezado. Por exemplo: o erro de um centímetro é muito mais significativo quando se está medindo um lápis, do que quando se mede a lateral de um quarteirão. Para corrigir essa ineficiência do Erro absoluto, no que se refere às magnitudes das quantidades, será apresentado o conceito de Erro relativo, definido por:

$$E_r = \frac{E_t}{x} = \frac{valor\ verdadeiro - valor\ aproximado}{valor\ verdadeiro} = \frac{x - \bar{x}}{x}.$$

onde E_r é o Erro relativo. Diante do exposto, é preciso que se tenha critérios, pois como visto na observação 1.1, a equação de E_t fica sem sentido, pois nem sempre é possível saber qual o valor verdadeiro. De sorte, o que se pode fazer é escolher um limitante superior para o erro relativo, escrevendo na forma:

$$\delta \leq \left| \frac{\varepsilon}{\bar{x}} \right|,\ onde$$

Este dispositivo, será importante mais adiante no estudo dos Métodos Iterativos, pois estes calculam uma determinada solução, que será chamada de raiz ou solução da equação, e que precisa da aproximação anterior, para seus cálculos. É possível concluir que o erro relativo fornece mais informações sobre a qualidade do erro, uma vez que o erro absoluto não considera a ordem de grandeza do valor calculado.

1.1.1 Sistema de Números no Computador

Neste tópico, serão descritos a representação dos números em um computador.

1.1.2 Representação de um Número Inteiro

Segundo Franco (2006), não há nenhuma dificuldade para a representação de um número inteiro n, em um computador, já que para isso os computadores reservam uma base fixa, denotada por β, onde $\beta \geq 2$; e é escolhido uma potência igual a 2.

Se $n \neq 0$, ele será escrito de uma única forma:

$$n = \pm(n_{-k}\, n_{-k+1}\, \cdots\, n_{-1}\, n_0) = \pm(n_{-k}\beta^k + \cdots + n_{-1}\beta^1 + n_0\beta^0),$$

onde os n_i, $(i = 0, -1, \cdots, -k)$ são inteiros satisfazendo $0 \leq n_i < \beta$ e $n_{-k} \neq 0$.

Exemplo 1.1. *A representação do número* 1997 *em uma máquina com* $\beta = 10$ *é:*

$$1997 = 7 \times 10^0 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^3$$

e é armazenado como $n_{-3}\, n_{-2}\, n_{-1}\, n_0$. Para se representar um número real em uma máquina ou em um computador por exemplo, existem duas maneiras:

a) ***Representação em Ponto Fixo***
Seja $x \in \mathbb{R}$, onde $x \neq 0$, temos a representação definida por:

$$x = \pm \sum_{i=k}^{n} x_i \cdot \beta^{-i}$$

*onde **n** e **k** são inteiros satisfazendo $k < n$ e usualmente $k \leq 0$ e $n > 0$ e os x_i são números inteiros satisfazendo $0 \leq x_i < \beta$.*

Exemplo 1.2. *O número 2745,26 é escrito na base, $\beta = 10$, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} 2745,26 &= \sum_{i=-3}^{2} x_i \cdot \beta^{-i} \\ &= 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} \\ &= 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1 + 2 \times 0,1 + 6 \times 0,01. \end{aligned}$$

e é armazenado como $x_{-3}\, x_{-2}\, x_{-1}\, x_0,\; x_1\, x_2$.

b) ***Representação em Ponto Flutuante***
Dado um número $x \in \mathbb{R}$, onde $x \neq 0$, temos a representação definida por:

$$x = \pm d \times \beta^e,$$

onde β é a base do sistema de numeração, d é a mantissa e e é o expoente. A mantissa é um número em ponto fixo, ou seja:

$$d = \sum_{i=k}^{n} d_i \beta^{-i},$$

onde frequentemente, nos grandes computadores, $k = 1$, tal que se $x \neq 0$, então $d_1 \neq 0$; $0 \leq d_i < \beta$, $(i = 1, 2, \cdots, t)$, onde t é a quantidade de dígitos significativos ou precião do sistema, $\beta^{-1} \leq d < 1$ e $-m \leq e \leq M$.

Observação 1.2. *Para $d_1 \neq 0$ caracteriza o sistema de números em **ponto flutuante normalizado**.*

Observação 1.3. *A representação do número **zero**, no sistema de Ponto Flutuante, segundo Ruggiero (1996), é representado com o menor expoente da máquina. Isto porque a representação do zero por uma **mantissa nula** e um **expoente** para a base β pode acarretar perda de dígitos significativos no resultado da adição deste **zero** a um outro número.*

Os sistemas de Ponto Fixo foram utilizados no passado por muitos computadores, mas hoje em dia todas as máquinas fazem uso do sistema de Ponto Flutuante. O número -5.172, que está na forma normalizada, será representado em ponto flutuante, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -5,172 &= -(5 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} + \times 10^{-4}) \times 10^1 \\ &= -0,5172 \end{aligned}$$

Para que um sistema de números em ponto flutuante normalizado seja representado, na base β, com t dígitos significativos e com limites para o expoente m e M, será utilizado a notação: $FP(\beta,\ t,\ m,\ M)$, $F \rightarrow float$ e $P \rightarrow point$. Portanto, um número em $FP(\beta,\ t,\ m,\ M)$ será representado por:

$$\pm 0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_t \times \beta^e,$$

onde $d_1 \neq 0$ e $-m \leq e \leq M$. E todos os números possíveis, deste sistema incluindo-se o zero, formam o sistema de ponto flutuante normalizado. Para saber quantos números o sistema de ponto flutuante dado por $FP(2, 3, 4, 2)$ possui, utiliza-se a decomposição a seguir:

$$x = \pm\, 0,\ d_1\, d_2\, d_3 \times 2^{e}, \text{ com } -4 \leq e \leq 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 7 = 56 + zero$$

Observe que tem-se duas possibilidades de escolha para o sinal de x, e por definição $d_1 \neq 0$, então resta apenas o número 1 como opção, pois o sistema é de base $\beta = 2$, d_2 e d_3 tem-se a mesma análise do sinal, ou seja, duas opções. Logo a quantidade de números que este sistema poderá representar é de 57 números.

Uma representação, segundo a observação 1.3, para o $zero$ no sistema $FP(2,3,4,2)$ é:

$$zero: \ 0,100 \ \times \ \beta^e \ = \ 0,100 \times 2^{-4} \tag{1.1.1}$$

A realização de operações aritméticas em máquinas de calcular, podem não ser bem representadas. Por exemplo: um valor obtido como resultado de uma operação aritmética, onde este valor em módulo, supere o maior valor que essa máquina pode representar, havendo uma extrapolação do limite superior denomina-se essa por <u>overflow</u>. De forma análoga, números que extrapolam o limite inferior que a máquina pode representar denomina-se <u>underflow</u>.

Na próxima seção será exposto o processo de resolução de certas operações aritméticas, sujeitas a obtenção de resultados inexatos, representando aproximações que necessitam de ajustes em seus resultados.

1.1.3 Erros por Arredondamento em ponto flutuante

Até aqui foi visto que a representação de um número depende fundamentalmente da máquina utilizada, pois seu sistema estabelecerá a base numérica adotada, o total de dígitos na mantissa etc. Será demonstrado, a seguir, uma regra que permitir a realização de arredondamento de um número.

Seja x um número real, e $\overline{x}$, sua representação em um sistema de ponto flutuante $FP(\beta,t,m,M)$.

i) Para $x = 0$, tem-se $\overline{x} = 0$;

ii) Se $x \neq 0$, existem $\underline{r}$ e $\underline{e}$, sendo $\underline{r}$ a mantissa e $\underline{e}$ o expoente. Tem-se que: (FRANCO, 2006):

$$x = r \times \beta^e, \ onde \ \beta^{-1}(1 - \frac{1}{2}\beta^{-t}) \leq \ r \ < 1 - \frac{1}{2}\beta^{-t} \tag{1.1.2}$$

Se e não pertencer ao intervalo $[-m,M]$, então, não tem como representar o número x. No entanto, se e pertence ao intervalo, adequa-se a mantissa que irá representar o número x ao final do processo, da seguinte maneira. Seja r a forma decimal que será ajustada, então será adicionando $\frac{1}{2}\beta^{-t}$, e obtém-se:

$$r + \frac{1}{2}\beta^{-t} = 0, d_1 d_2 d_3, \cdots, d_t d_{t+1}, \cdots$$

e trunca-se em t dígitos. Assim, o número arredondado será:

$$\overline{x} = (\pm)(0, d_1 d_2 d_3, \cdots, d_t) \times \beta^e.$$

Exemplo 1.3. *Para representar os números $x_1 = 2132,57$, e $x_2 = -0,00054963$ no sistema $FP(10,3,5,5)$ será utilizada a definição segundo (FRANCO, 2006):*

Solução: *Primeiramente analisa-se, quais são os valores permitidos para r através do item* ***ii),*** *portanto:*

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(1-\frac{1}{2}\beta^{-t}) \leq r < 1-\frac{1}{2}\beta^{-t} \\ 10^{-1}(1-\frac{1}{2}10^{-3}) \leq r < (1-\frac{1}{2}10^{-3}) \\ \frac{1}{10}(1-\frac{1}{2}10^{-3}) \leq r < (1-\frac{1}{2}\frac{1}{1000}) \\ \frac{1}{10}(1-\frac{1}{2000} \leq r < 1-\frac{1}{2000} \\ \frac{1999}{20000} \leq r < \frac{1999}{2000} \\ 0,09995 \leq r < 0,9995 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Depois de fazer essa verificação para r, com $\beta = 10$ e $t = 3$, seguimos para representar x_1 e x_2, logo:

a) Para $x_1 = 2132,57$ tem-se:

$$\begin{aligned} |x_1| &= 0,213257 \times 10^4,\ ento \\ r &= 0,213257,\ logo \\ r + \frac{1}{2}\beta^{-t} &= 0,213257 + \frac{1}{2}10^{-3} = \\ 0,213257 + 0,0005 &= 0,123956,\ mas,\ como\ t = 3, \end{aligned}$$

obtém-se então, r = 0.123, e portanto $\overline{x_1} = 0,123 \times 10^4$

b) Para $x_2 = -0,00054963$ tem-se:

$$\begin{aligned} |x_2| &= -0,54963 \times 10^{-3},\ entao \\ r &= -0,54963,\ logo \\ r + \frac{1}{2}\beta^{-t} &= 0,54963 + \frac{1}{2}10^{-3} = \\ 0,54963 + 0,0005 &= 0,55012,\ mas,\ como\ t = 3, \end{aligned}$$

tem-se que; $r = 0,550$, e portanto $\overline{x_2} = 0,550 \times 10^{-3}$

Observação 1.4. *Para Ruggiero (1996), ao arredondar um número, na base $\beta = 10$, de modo geral, deve-se observar apenas o primeiro dígito a ser descartado. Se este dígito é menor do que 5, não será necessário alterar o valor, mas, se o dígito for maior ou igual do que 5 basta adicionar 1 ao último dígito remanescente.*

No caso de métodos numéricos o melhor é usar arredondamento, pois os erros são menores, embora o uso deste exija um esforço computacional maior, o que influencia em seu tempo de execução.

1.2 Erros de Truncamento e Série de Taylor

Com relação ao método de truncamento de um número real, na busca de uma aproximação para substituir um procedimento matemático exato, também incorrerá em erros. É possível obter um conhecimento sobre as características deste tipo de erro, considerando uma formulação matemática que é utilizada nos métodos numéricos para expressar funções de maneira aproximada, essa formulação é a Série de Taylor (CHAPRA,2007).

Na prática, se utiliza a expansão em Série de Taylor, para aproximar um valor que seja solução de uma equação $f(x) = 0$, satisfazendo a estimativa de erro, ε, previamente definida. Para que o processo de aproximação de um número que seja raiz satisfaça a equação, dependerá em que ordem da série de Taylor será truncado o processo, ou seja, qual o último ponto que será calculado na expressão $P_n(x)$ em $x = x_0$.

Teorema 1.1. *Seja uma função $f(x)$ e suas primeiras (n+1) derivadas são contínuas no intervalo que contém x_0 e x, então o valor da função em x é dado por:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) + \\ &+ \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0) + R(x) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

com $R(x)$ sendo o resíduo da aproximação de enésima ordem, dado por:

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1.2.2}$$

*i) com **n** indicando o resíduo;*

ii) ξ é uma aproximação não conhecida, mas esse pode ser estimado.

A equação 1.2.1 é chamada de Série de Taylor ou Fórmula de Taylor. Então existe uma aproximação que pode ser expressa por:

$$f(x) \simeq P_n(x) \tag{1.2.3}$$

Uma aplicação deste conceito de Taylor é visto a seguir.

Exemplo 1.4. *Para calcular o valor de e^x para $x = 2$, usando apenas os quatro primeiros termos da série, isto é, a série truncada na ordem 3, tem-se.*

Solução: *A ideia é encontrar o polinomio $P_n(x)$ tal que $f(x) \simeq P_n(x)$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \\ e^x &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \end{aligned}$$

Os coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 são dados por $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ e as derivadas $f^n(x)$ que aparecem em 1.12 são:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x)' = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1 \\
f''(x) &= (e^x)'' = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \\
f'''(x) &= (e^x)''' = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

e o cálculo dos $a_i's$,

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(0) = e^0 = 1 \\
a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} \\
a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!} \\
a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!}
\end{aligned}$$

portanto, obtem-se $P_n(x)$, com $n = 3$:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!} + x^3 \\
e^2 &= 1 + 1(2) + \frac{1}{2!}(2)^2 + \frac{1}{3!}(2)^3 \\
e^2 &= 6,33333 \qquad (1.2.4)
\end{aligned}$$

então, tem-se que $f(2) \simeq P_3(2)$.

Se for utilizada a série de Taylor para calcular o valor de x=2, na ordem 4, tem-se:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 \\
e^x &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4
\end{aligned}$$

derivando apenas f^{iv} e calculando a_4 obtem-se:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!} + x^3 \\
e^2 &= 1 + 1(2) + \frac{1}{2!}(2)^2 + \frac{1}{3!}(2)^3 + \frac{1}{4!}(2)^4 \\
e^2 &= 7,35555 \qquad (1.2.5)
\end{aligned}$$

Utilizando uma máquina para calcular o valor de e^x em $x = 2$, obtem-se $e^2 = 7,38906$. Assim, o resultado em (1.2.4), que fora truncado na ordem três oferecerá um erro absoluto mais significativo do que (1.2.5) que fora truncado na ordem 4 . *Portanto, quanto maior a ordem de truncamento menor o erro cometido na operação.*

Capítulo 2

Equações Não Lineares

Um dos problemas que ocorrem frequentemente em computação científica consiste em se calcular as raízes de uma equação do tipo:

$$f(x) = 0, \tag{2.0.1}$$

Ou seja, calcula um conjunto de valores que formam um sequência $x_1, x_2, ..., x_k$, que seja convergente para um valor ξ, tal que $f(\xi) = 0$, quando isto ocorre diz-se que ξ é uma raiz ou zero da equação (2.0.1). Pode-se calcular as raízes de equações $f(x)$ de forma analítica, desde que, esta seja uma equação polinomial de grau 1, 2, 3 e 4 ou de uma equação que se possa fatorar. Para equações algébricas ou transcendentais, a forma de calcular raízes ou soluções para este tipo de equação, é escolhendo um método numérico que melhor se adeque ao problema. Geralmente a utilização do computadores é inevitável, pois são rápidos em seus cálculos. Quanto a precição dos cálculos, esta poderá ser questionada, já que as máquinas não conseguem representar um número real completo, em sua mantissa, ocasionando nos erros truncamento e arredondamento(Ver página 11).

Graficamente os zeros reais são pontos pertencentes a abscissa do plano cartesiano, ou seja, onde uma curva intercepta o eixo 0_x. A seguir é possível perceber que o eixo dos x é interceptado no intervalo $[1,2]$.

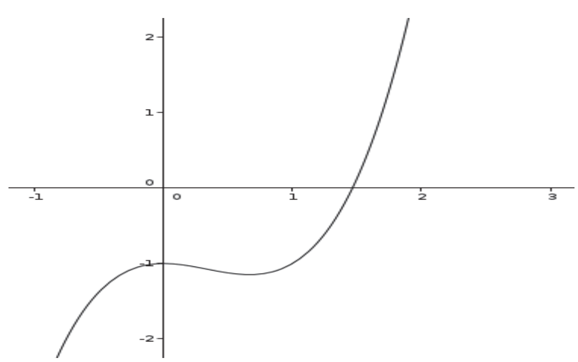


Figura 2.0.1: Gráfico de $f(x)$, interceptando o eixo 0_x, no intervalo $[1,\ 2]$

Verifica-se neste tópico como se obter raízes reais de equações algébricas ou não-lineares. Essa possibilidade é garantida pelos teoremas elementares da análise. O primeiro teorema nos diz que quando a função muda de sinal dentro de um intervalo garante a existência de pelo menos uma raiz no intervalo $[a,\ b]$. E o teorema de Rolle irá garantir a unicidade dessa raiz no mesmo intervalo.

Teorema 2.1 (de Bolzano)**.** *Seja f uma função contínua considerando dois pontos a e b e $f(a)\cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, a função tem pelo menos uma raiz no intervalo $[a,\ b]$.*

i) Se $P(a)$ e $P(b)$ tem o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais da da equação em $[a,\ b]$;

ii) Se $P(a)$ e $P(b)$ tem sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $[a,\ b]$.

Teorema 2.2 (de Rolle)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $(a,\ b)$ então existe um número $c \in (a,\ b)$ tal que$f'(c) = 0$.*

Percebe-se mais adiante, uma aplicação do Teorema (2.1) na resolução de equações não lineares, através do método iterativo definido por Método da Bissecção.

2.1 Solução de uma Equação Não-linear

Neste tópico, será evidenciado métodos que permitem resolver equações não-lineares do tipo $f(x) = 0$. Resolver uma equação é determinar a solução ou encontrar o(s) zero(s) da função, uma solução real $\bar{x}$ é dita raiz da uma função $f(x) = 0$ se satisfaz a condição $f(\bar{x}) = 0$. Métodos iterativos são desenvolvidos para determinar aproximadamente essa solução $\bar{x}$; necessitamos de uma solução inicial x_0. E a partir desta geramos uma sequência de soluções aproximadas onde podem convergir ou não para a solução real x_0 desejada. Esta aproximação para a solução deve satisfazer a condição de precisão, que denota-se por ε.

Segundo Ruggiero 1996, é importante se conhecer a precisão da máquina porque em vários algoritmos precisa-se fornecer como dado de entrada um valor positivo, próximo de *zero*, para ser usado em teste de comparação com o *zero*. A precisão da máquina é definida como sendo o menor número positivo em aritmética em ponto flutuante, tal que $(1+\varepsilon) > 1$. Este número depende totalmente do sistema de representação da máquina: base numérica, total de dígitos na mantissa, da forma como serão realizadas as operações e do compilador utilizado.

Em princípio, métodos iterativos trabalham com uma aproximação inicial, para a raiz e, posteriormente, essa aproximação passa a ser refinada através de um processo iterativo. Encontrar, pois, raízes de equações é um procedimento que divide-se em duas fases:

i) Isolamento de raízes, que, consiste em determinar, através do modo gráfico um intervalo que contenha esta raiz, isto é, temos que fazer um esboço da função em um intervalo de interesse, mesmo que este seja amplo;

ii) *Refinamento de raízes, que consiste em, depois de escolhidas as aproximações iniciais no intervalo encontrado por i), melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz com uma precisão ε prefixada. Este procedimento resultará numa sequência que será formada a partir de um valor inicial $x_0 \in [a,b]$, ou seja,*

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, \cdots\} \tag{2.1.1}$$

que irá convergir para uma raiz exata ξ de $f(x) = 0$.

2.1.1 Isolamento de Raízes

Na fase *i)*, deve-se analisar com atenção a parte gráfica da função $f(x)$, a ponto de se obter uma boa aproximação para a raiz. Assim, deve-se:

a) *esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{0_x}$;*

b) *a partir de $f(x) = 0$, pode-se obter uma equação mais conveniente, pelo fato de que, $f(x) = g(x) - h(x) = 0 \Rightarrow g(x) = h(x)$. Assim os gráficos das funções g e h serão traçados mais facilmente. As raízes da equação original, $f(x)$, são dadas então pelos pontos onde o gráfico de g intercepta o de h.*

Exemplo 2.1. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinar as raízes de $f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 = 0$.*

Solução 2.1. *Utilizando o item ii), temos que, equação*

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1 &= 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x+1)^2 &= \frac{1}{e^{(x^2-2)}} \Rightarrow \\
\Rightarrow (x+1)^2 &= e^{(x^2-2)^{-1}}.
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

onde $g(x) = (x+1)^2$ e $h(x) = e^{(2-x^2)^{-1}}$, e construindo o seus respectivos gráficos no plano $x0y$, obtém-se:

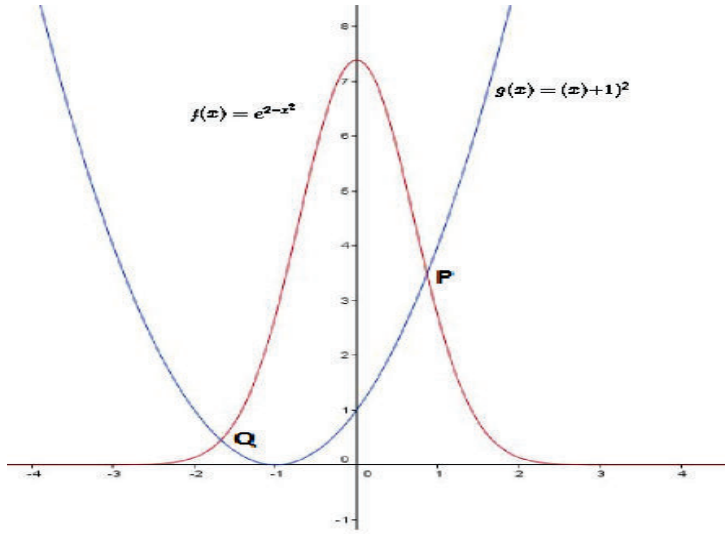


Figura 2.1.1: Método gráfico obtendo a intersecção de $h(x)$ e $g(x)$

Percebe-se que o gráfico de g e h se interceptam em dois pontos P e Q, logo conclui-se que a f possui duas raízes $\xi_1 \in (-2,-1)$ e $\xi_2 \in (0,1)$.

Verificamos a utilização do Teorema 2.1, para encontrar raízes em um intervalo. Assim, temos que, se $f(x)$ possui sinais opostos quando tomamos $x = a$ e $x = b$, então $f(x)$ possui no mínimo um zero no intervalo $[a,b]$. Isto permite encontrar a localização aproximada dos zeros de f.

De fato, seja $f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)-1}$, construindo uma tabela com valores para x tem-se:

x	$f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1$	y
-3	$(-3+1)^2 e^{((-3)^2-2)} - 1$	*4.385,5*
-2	$(-2+1)^2 e^{((-2)^2-2)} - 1$	*6,3*
-1	$(-1+1)^2 e^{((-1)^2-2)} - 1$	*-1*
0	$(0+1)^2 e^{((0)^2-2)} - 1$	*-0,86*
1	$(1+1)^2 e^{((1)^2-2)} - 1$	*0,5*
2	$(2+1)^2 e^{((2)^2-2)} - 1$	*65,5*
3	$(3+1)^2 e^{((3)^2-2)} - 1$	*17.545,1*

Como $f(-2)\cdot f(-1) < 0$ e $f(0)\cdot f(1) < 0$, mostra que existem raízes $\xi_1 \in (-2,-1)$ e $\xi_2 \in (0,1)$. Portanto, fica evidente que, tanto pela construção gráfica como aplicação do Teorema 2.1, pode-se encontrar um intervalo que contenha raízes que são os zeros de f.

Observação 2.1. *Se $f(a)\cdot f(b) > 0$ então, é possível ter várias situações dentro no intervalo $[a,b]$. Portanto, nada se pode afirmar a respeito desta desigualdade.*

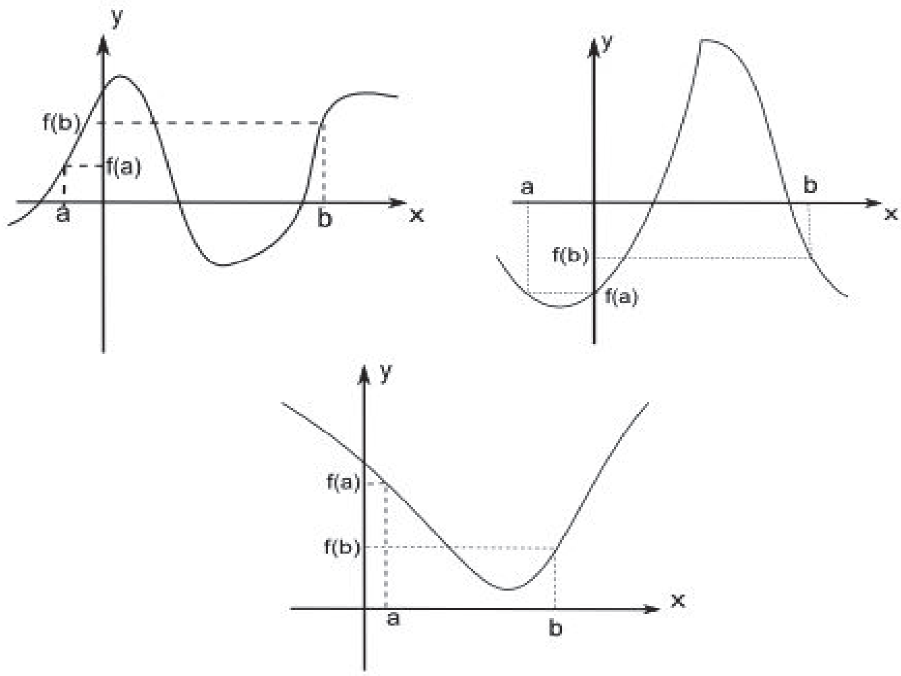


Figura 2.1.2: Algumas das possibilidades que se têm quando $f(a) \cdot f(b) > 0$

Os gráficos da Figura 2.1.2 confirmam essa afirmação, pode-se ter duas raízes, apenas uma raiz ou até mesmo nenhuma raiz.

2.1.2 Refinamento de raízes

Neste tópico, serão analisados alguns métodos numéricos dentre os vários existentes, que servem para refinar uma raiz de uma equação, de forma que o erro cometido seja o menor possível. O que irá diferenciar um método do outro é a forma de como se faz para refinar uma raiz. Estes métodos pertencem à classe de métodos iterativos, onde um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo-a-passo, algumas são repetidas em ciclos e cada execução recebe o nome de iteração (RUGGIERO 1996).

Uma iteração utiliza-se da iteração anterior para efetuar testes que permitem verificar se a condição exigida foi satisfeita. Se isto ocorrer então o programa encerra o processo. Pode-se representar, através de um diagrama de fluxo, a ideia de como se comporta uma sequência, em que um método iterativo utiliza para refinar um valor aproximado inicial de uma raiz exata. O diagrama de fluxo a seguir, representa um algoritmo cujo a série de blocos e flechas representa operações ou passos que um algoritmo realiza para obter um resultado.

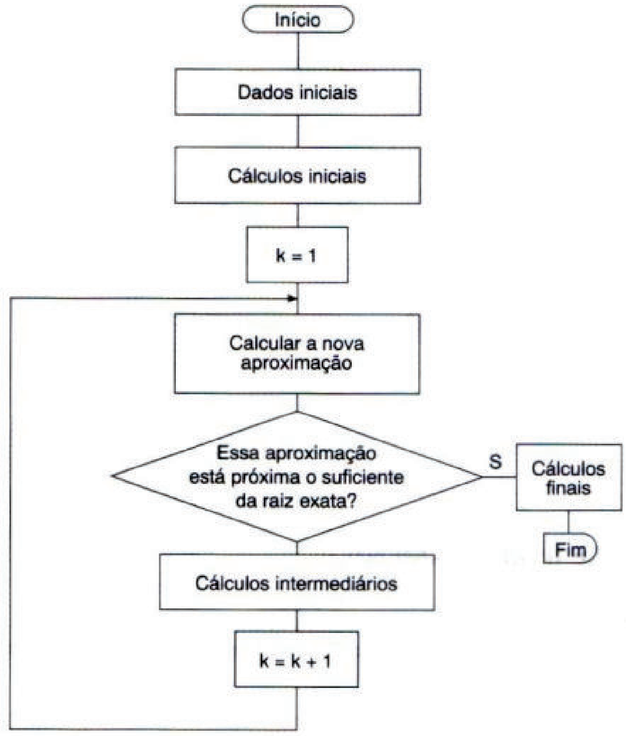


Figura 2.1.3: Diagrama de Fluxo

Como visto anteriormente, se uma raiz $\xi \in [a,b]$, encontra-se uma sequência $\{x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots\} \in [a,b]$ que irá convergir para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$. Para que esta sequência tenha um número finito de elementos, é preciso adotar um critério de parada, ou seja, quando se deve interromper o processo que gera tal sequência? Observe o teorema que segue:

Teorema 2.3. *Seja ξ uma raiz exata e x_k uma raiz aproximada de $f(x) = 0$, sendo ξ, $x_k \in [a,b]$ e $|f'(x_k)| \geq m > 0$ para $a \leq x \leq b$ com*

$$m = min|f'(x_k)| \; entre \; a \leq x \leq b.$$

Então o erro absoluto satisfaz a condição $E_a = |x_k - \xi| \leq \dfrac{|f(x_k)|}{m}$.

Exemplo: Suponha um erro absoluto cometido ao considerar que $x_k = 2.23$ como uma aproximação da raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5 = 0$ no intervalo $[2,\ 3]$.

Solução 2.2. *Temos que, $m = |f'(x_k)|$, então:*

$$\begin{aligned}
m &= |f'(x)| \\
m &= |(x^2 - 5)'| \\
m &= min|2x| \\
m &= min|2 \cdot 2| \\
m &= 4
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{array}{rcl}
|x_k - \xi| & \leq & \dfrac{|f(x_k)|}{m} \\
|2,23 - \xi| & \leq & \dfrac{|(2,23)^2 - 5|}{4} \\
|2,23 - \xi| & \leq & \dfrac{|-0.00271|}{4} = 0.0068 \Rightarrow \\
-0.0068 & \leq 2.23 - \xi & \leq 0.0068 \\
2.23 - 0.0068 & \leq \xi & \leq 0.0068 + 2.23 \\
2.2232 & \leq \xi & \leq 2.2368
\end{array}
$$

onde $\xi = \sqrt{5} \simeq 2.2361$.

Observação 2.2. *O Teorema (2.3) possui aplicação restrita, pois necessita de que seja avaliado o mínimo da derivada primeira da função* $f(x)$ *em questão.*

Seguindo o nosso estudo, percebe-se que, para interromper a sequência que é gerada pela busca de uma raiz com uma determinada precisão ε pré-fixada, tem-se que realizar um teste comparativo durante o processo de iteração. Esta comparação será feita utilizando a ideia de *erro relativo*, dado por (FRANCO, 2008):

$$E_r = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} < \varepsilon,$$

onde,

a) x_k *e* x_{k+1} *são aproximações consecutivas para* $\overline{x}$*, se* x_{k+1} *é a raiz procurada, então,* $\overline{x} = x_{k+1}$.

b) *com relação a precisão pré-fixada, será dada por,* $\varepsilon = 10^{-m}$*, onde m é o número de casas decimais aceitas para o resultado.*

Observação 2.3. *Ao construir um algoritmo computacional, programadores devem estar atentos, para escrever o erro relativo da seguinte forma:*

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \cdot max\{1,\ |x_{k+1}|\},$$

pois se $|x_{k+1}|$ *estiver próximo de zero o processo não irá parar. Por isso é interessante estipular um número máximo de iterações que o programa terá que desempenhar, portanto, se o algorítmo não for bem feito ou se o método escolhido não se adequar ao tipo de problema que se estar tentando resolver, o programa entrará em looping.*

2.1.3 Ordem de convergência

Neste segmento mostra-se como uma sequência $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...\}$, que é gerada por uma função de iteração de um determinado método, converge para uma raiz ξ. Portanto, tem-se o erro da k-ésima iteração dado por (FRANCO, 2001):

$$\varepsilon\ = x_k - \xi \tag{2.1.3}$$

com, ξ sendo a raiz exata e x_k é a estimativa. Para avaliar a convergência de tal método iterativo, utiliza-se o seguinte critério:

$$\lim_{k\to\infty} |\varepsilon_{k+1}| = \kappa|\varepsilon_k|^{\Theta} \tag{2.1.4}$$

onde κ é a constante de erro assintótico e Θ é a ordem de convergência do método gerador da sequência. A sequência $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., \xi\}$ possui convergência rápida a medida que Θ cresce.

Com base nos conceitos mostrados anteriormente, pode-se agora estudar o método da Bissecção e o método de Newton, analisando seus conceitos, definições, teoremas e critérios de parada, bem como, em que classe de problemas pode-se utilizá-los.

2.2 Método da Bissecção

O método da Bissecção ou de Bolzano, consiste em dividir, ao meio, o intervalo $[a,b]$ que contém a raiz ξ, a medida que o intervalo é dividido, novos valores aparecem, estes serão testados, aplicando o Teorema 2.1. Por exemplo: seja x_0 o ponto médio do intervalo $[a,b]$, se a desigualdade $f(a)\cdot f(x_0) < 0$, for verdadeira o novo intervalo será o subintervalo $[a,x_0]$ se não, o novo intervalo será o subintervalo $[x_0,b]$. O importante desse processo é que deve-se manter o subintervalo que contém a raiz. A repetição do procedimento é chamado *iteração* e as aproximações sucessivas são os *termos iterados* (CAMPOS, 2001).

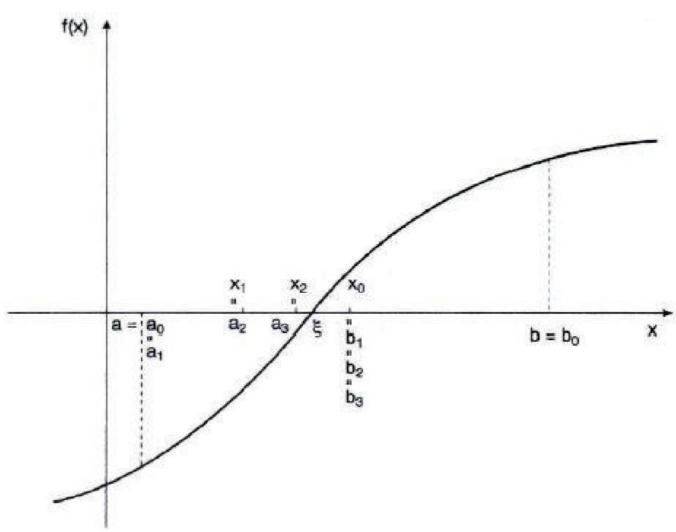


Figura 2.2.1: Interpretação do método da Bissecção no intervalo $[a,b]$.

A situação descrita anteriormente está representada pelo gráfico da Figura 2.2.1.

A seguir mostra-se o processo que o método da Bissecção realiza para encontrar uma raiz, ξ, que satisfaça $f(\xi) \simeq 0$. Seja um intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, e denominado por k o número de iterações realizadas, obtém-se:

Na iteração $k=0$, o valor de x_0 é dado por: $x_0 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$, $\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}$ *, então* $\begin{cases} \xi \in (a_0, b_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$

Na iteração $k=1$, x_1 é dado por: $x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, $\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) > 0 \end{cases}$ *, então* $\begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$

Na iteração $k=2$, x_2 é dado por: $x_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, $\begin{cases} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) > 0 \end{cases}$ *, então* $\begin{cases} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{cases}$

$\vdots$

Basta observar que, para $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, o método da Bissecção gera uma sequência $\{x_k\}$ que é convergente para a raiz ξ.

Diante disso, percebe-se que se forma uma sequência de intervalos encaixados, a saber;

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset [a_4,b_4] \cdots \supset [a_k,b_k] \supset \cdots \supset [a_{k+1},b_{k+1}] \supset \cdots$$

Logo para a k-ésima iteração, tem-se:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^{k-1}} \tag{2.2.1}$$

Além da sequência $\{x_k\}$, temos também a sequência $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\ a_k\}$ é monotônica não decrescente limitada, e $\{b_0, b_1, b_3 \cdots\ b_k\}$ é monotônica não crescente limitada. Então, aplicando o limite na equação 2.2.1, tem-se:

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{(b_k - a_k)}{2^{k-1}} = 0$$

como a_k e b_k são convergentes, então:

$$\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

será denominado r e s limites das sequências a_k e b_k, então tem-se que, $r = s$.

Seja $l = r = s$ o limite das duas sequências. Para todo ponto x_k pertencente ao intervalo aberto (a_k, b_k) o Cálculo Diferencial e Integral nos garante que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = l,$$

resta provarmos que l é o zero da função, ou seja, $f(l) = 0$. Em cada iteração k temos $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então, (RUGGIERO, 1996):

$$\begin{aligned} 0 \geq \lim_{k \to \infty}[f(a_k)f(b_k)] &= \lim_{k \to \infty}[f(a_k)] \lim_{k \to \infty}[f(b_k)] \\ &= f(\lim_{k \to \infty} a_k) f(\lim_{k \to \infty} b_k) \\ &= f(r)f(s) \\ &= f(l)f(l) \\ &= [f(l)]^2. \end{aligned}$$

Assim, $0 \geq [f(l)]^2 \geq 0$, e $f(l) = 0$. Logo,

$$\lim_{k \to \infty} x_k = l$$

e l é zero da função. Conclui-se então que o método da Bissecção gera uma sequência convergente sempre que f for contínua em $[a, b]$ com $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pode-se estimar o *número de iterações* feitas pelo método da Bissecção. Seja uma precisão $\varepsilon \in [a, b]$, é possível determinar as iterações até que se obtenha $b - a < \varepsilon$ usando a inequação:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{a_0 - b_0}{2^k}$$

Deve-se obter o valor de k iterações, da forma $b_k - a_k < \varepsilon$, ou seja:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \iff 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

aplicando o logaritmo em ambos os membros da desigualdade obtém-se:

$$\log(2^k) > \log|b_0 - a_0| - \log(\varepsilon) \iff k \log(2) > \log|b_0 - a_0| - \log(\varepsilon) \Longrightarrow$$

$$k > \frac{\log|b_0 - a_0| - \log(\varepsilon)}{\log 2} \qquad (2.2.2)$$

Um algoritmo para o Método da Bissecção pode ser descrito como segue:

Algoritmo da Bissecção

***Entrada**: fx, a, b, fa, fb, max, tol;*

*1: **Para** $k = 0 : max$ **faça***

2: $x_m = \dfrac{a+b}{2}$

Se *(* $fa \cdot fb < 0$ *)* ***então***
$b = x_m$;
Senão
$a = x_m$;
Se $|b-a| < tol$ ***então*** $x_m^* = \dfrac{a+b}{2}$ ***pare****.*

O objetivo desse método é reduzir o intervalo que contém a raiz, até conseguir atingir a precisão ε desejada : $(b-a) < \varepsilon$, ver observação 1.3. Quanto menor o erro melhor será a aproximação da raiz. Para que ocorra isto, é preciso realizar sucessivas divisões do intervalo $[a,b]$ ao meio.

Exemplo 2.2. *: Calculando as raízes da função $f(x) = x^3 - x - 1$, com uma tolerância $\varepsilon = 10^{-5}$.*

Solução: *Aplicando o método gráfico para determinar o intervalo que contenha uma raiz que seja solução de $f(x)$, obtem-se o gráfico dado pela Figura 1.2.2. Verifica-se que o intervalo [1,2] contém a raiz procurada. Utilizando a desigualdade (1.2.2) sabe-se quantas iterações serão necessárias para encontrar o valor aproximado da raiz.*

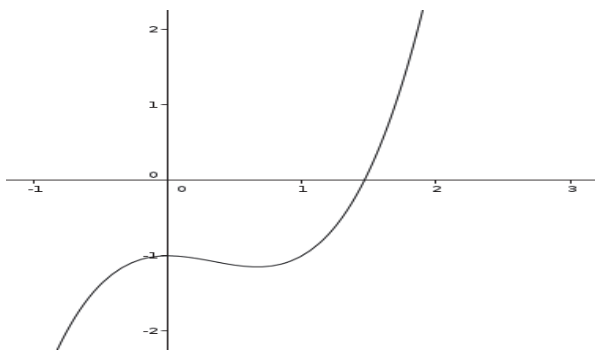


Figura 2.2.2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$ com tolerância $\varepsilon = 10^{-5}$

$$\begin{aligned} k &> \frac{\log|b-a| - \log e}{\log 2} = \frac{\log|0-2| - \log 10^{-5}}{\log 2} \\ &= \frac{\log 2 - (-5\log 10)}{0,301} = \frac{5,301}{0,301} \\ k &\approx 17,6 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Logo a raiz que satisfaz a igualdade $f(\bar{x}) \approx 0$ é $\bar{x} = 1.4655685$.

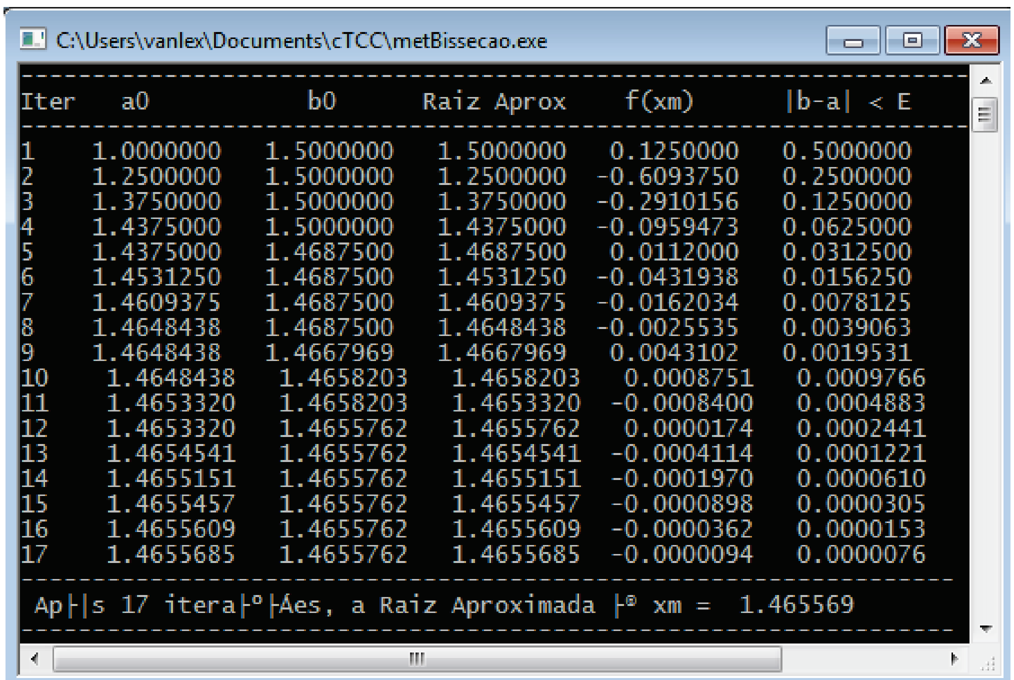
2.2.1 Critério de parada

Anteriormente fora estudado o método da Bissecção, este método é capaz de encontrar raízes que são soluções de equações não-lineares, através de subdivisões sob o intervalo $[a,b]$. A cada iteração realizada um novo termo da sequência $\{x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots, x_k, \ldots, \xi\} \in [a,b]$ é gerado, em que esta sequência converge para uma raiz exata, ξ, de $f(x) = 0$, (CAMPOS, 2001).

Ainda mostrou-se que se pode encontrar o número de iterações máximo que o método irá realizar. Outra forma de interromper a sequência é quando seus valores satisfazem pelos menos um dos critérios:

a) $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$; **b)** $\left|\dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \leq \varepsilon$; **c)** $|f(x_k)| \leq \varepsilon$,

onde ε é a tolerância fornecida. A tabela da Figura 2.2.3 mostra o comportamento do intervalo $[a_0, b_0] = [1,0\ ;\ 1,5]$ sendo subdividido a cada iteração realizada pelo método da Bissecção, o processo irá parar quando valor da raiz, for menor ou igual a tolerância, ou seja, $RaizAprox \leq \varepsilon$ ou ainda quando atingir o número de iterações previstos por (2.2.2). Portanto, após dezessete iterações a raiz aproximada da equação $x^3 - x^2 - 1 = 0$ é $1,465569$.



C:\Users\vanlex\Documents\cTCC\metBissecao.exe

Iter	a0	b0	Raiz Aprox	f(xm)	|b-a| < E
1	1.0000000	1.5000000	1.5000000	0.1250000	0.5000000
2	1.2500000	1.5000000	1.2500000	-0.6093750	0.2500000
3	1.3750000	1.5000000	1.3750000	-0.2910156	0.1250000
4	1.4375000	1.5000000	1.4375000	-0.0959473	0.0625000
5	1.4375000	1.4687500	1.4687500	0.0112000	0.0312500
6	1.4531250	1.4687500	1.4531250	-0.0431938	0.0156250
7	1.4609375	1.4687500	1.4609375	-0.0162034	0.0078125
8	1.4648438	1.4687500	1.4648438	-0.0025535	0.0039063
9	1.4648438	1.4667969	1.4667969	0.0043102	0.0019531
10	1.4648438	1.4658203	1.4658203	0.0008751	0.0009766
11	1.4653320	1.4658203	1.4653320	-0.0008400	0.0004883
12	1.4653320	1.4655762	1.4655762	0.0000174	0.0002441
13	1.4654541	1.4655762	1.4654541	-0.0004114	0.0001221
14	1.4655151	1.4655762	1.4655151	-0.0001970	0.0000610
15	1.4655457	1.4655762	1.4655457	-0.0000898	0.0000305
16	1.4655609	1.4655762	1.4655609	-0.0000362	0.0000153
17	1.4655685	1.4655762	1.4655685	-0.0000094	0.0000076

Ap├│s 17 itera├º├Áes, a Raiz Aproximada ├® xm = 1.465569

Figura 2.2.3: Iterações realizadas no intervalo $[1,0\ ;\ 1,5]$, em busca de uma raiz aproximada da equação $x^3 - x^2 - 1 = 0$, utilizando o método Bissecção

2.3 Métodos baseados em Tangentes

Antes da apresentação de um dos métodos mais utilizados para encontrar soluções de equações não-lineares, que é o Método de Newton, é pertinente falar sobre o Método de Iteração Linear, que não é tão eficiente, mas o que de fato o torna importante são os conceitos empregados nesse estudo.

2.3.1 Método de Iteração Linear

Neste segmento compreende-se como o método iterativo linear realiza cálculos em busca de uma raiz ξ no intervalo $[a,b]$. Onde esta raiz é solução da equação:

$$f(x) = 0. \tag{2.3.1}$$

Deve-se ter $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$. Inicialmente para desenvolver tal método transforma à equação (2.3.1) na forma:

$$x = \phi(x). \tag{2.3.2}$$

Portanto, o método das aproximações sucessivas, consiste em transformar a equação (2.3.1), em uma equação equivalente, do tipo (2.3.2), onde $\phi(x)$ é denominada função de iteração. Uma forma geral de expressar a função de iteração $\phi(x)$ é:

$$\phi(x) = x + g(x)f(x)$$

para qualquer $g(\xi) \neq 0$. Para determinar a raiz ξ, é gerada uma sequência de aproximações sucessivas através do processo iterativo, dado por (ARENALES, 2008):

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \;\; k = 0,1,2,.... \tag{2.3.3}$$

e escolhendo uma aproximação inicial para x_0, será gerada uma sequência de aproximações $\{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_k, .., \xi\}$, que pode ser convergente ou divergente, existem critérios que melhor avaliam quando uma função iterativa é convergente. A seguir observa-se como a sequência $\{x_k\}$ é formada, partir de um valor inicial x_0,

$$\begin{array}{rcl}
x_0 & \longrightarrow & solucao\ inicial \\
x_1 & = & \phi(x_0) \\
x_2 & = & \phi(x_1) \\
x_3 & = & \phi(x_2) \\
\vdots & & \\
x_{k+1} & = & \phi(x_k)
\end{array}$$

Observação 2.4. *Nem todas as funções, $x = \phi(x)$, irão igualmente satisfazer a condição de uma função iterativa, que convergirá para uma raiz aproximada de $f(x)$.*

Mas, como saber se uma função de iteração $\phi(x)$, escolhida, irá convergir? A condição de convergência será garantida pelo teorema 2.5.

Teorema 2.4 (da Permanência do Sinal). - *Seja f uma função real derivável real definida e contínua numa vizinhança de x_0. Se $f(x_0) \neq 0$ então $f(x_0) \neq 0$ para todo x pertencente a um vizinhança suficientemente pequena de x_0.*

Teorema 2.5. *Seja $\phi(x)$ uma função contínua, com derivadas primeira e segunda contínuas num intervalo fechado I da forma $I = (\bar{x} - h, \bar{x} + h)$, cujo centro $\bar{x}$ é solução de $x = \phi(x)$. Seja $x_0 \in I$ e M um limitante da forma, $\phi'(x) \leq M < 1$ em I. Então:*

a) A iteração $x_{k+1} = (x_k),\ k = 0, 1, ...$, pode ser executada indefinidamente, pois $x_k \in I$, $\forall\ k$.

b) $|x_k - \bar{x}| \longrightarrow 0$.

c) Se $\phi'(x) \neq 0$ ou $\phi'(x) = 0$ e $\phi''(x) \neq 0$ e se $|x_0 - \bar{x}|$ for suficientemente pequeno então a sequência $x_1, x_2, ...$ será monotônica ou oscilante.

Observação 2.5. *A prova deste teorema encontra-se no apêndice A.*

2.3.2 Método de Newton-Raphson

O método de Newton faz parte de um grupo de métodos que utilizam aproximações pela tangente a curva de $f(x)$. Para efeito, o que Newton fez, foi encontrar uma função de iteração $\phi(x)$ tal que $\phi'(\bar{x}) = 0$, isto faz com que a convergência do método da Iteração Linear seja mais rápida, tornando o seu método um dos mais eficientes, no que se refere, ao cálculo para encontrar raízes de equações não-lineares, (RUGGIERO, 1996).

Considere-se a equação 2.3.2, ou seja:

$$\phi(x) = x + g(x)f(x),\ com\ f'(x) = 0 \tag{2.3.4}$$

onde a função $g(x)$ é escolhida para que se tenha $g(\xi) \neq 0$. Como visto no Teorema 2.3, do segmento anterior, tem-se como garantia de convergência se $max|\phi(x)| < 1$ para $x \in [a,b]$. Portanto, escolhe-se $g(x)$ tal que $|\phi'(\bar{x})| = 0$, tem-se que, para $x \in [a,b]$, $max|\phi(x)| < 1$, garante-se então a convergência do método. Derivando (2.3.4) em relação a x obtém-se:

$$\phi'(x) \ = \ [x + g(x)f(x)]' \ = \ 1 + g'(x)f(x) + g(x)f'(x),$$

substituindo $x = \bar{x}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi'(\bar{x}) &= 1 + g'(\bar{x})f(\bar{x}) + g(x)f'(\bar{x}),\ mas,\ como,\ f(\bar{x}) = 0,\ segue\ que: \\ \phi'(\bar{x}) &= 1 + g(\bar{x})f'(\bar{x}),\ mas,\ como\ se\ tem\ \phi'(x) = 0,\ obtem-se: \\ \therefore\ 0 &= 1 + g(\bar{x})f(\bar{x}) \ \Rightarrow\ g(\bar{x}) = \frac{-1}{f'(\bar{x})}, \end{aligned}$$

desde que $f'(x) \neq 0$. Substituindo o valor de $g(\bar{x})$ em (2.3.4) obtém-se:

$$\phi(x) = x + \left(\frac{-1}{f'(x)}\right) \cdot f(x) \;\Rightarrow\; \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{2.3.5}$$

e finalmente, tem-se o processo iterativo dado por:

$$\phi(x_{k+1}) \;=\; x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{2.3.6}$$

a este processo chama-se do Método de Newton, que converge sempre que $|x_0 - \bar{x}|$ *for suficientemente pequeno.*

Uma interpretação gráfica para este método é mostrada na Figura (2.3.1)

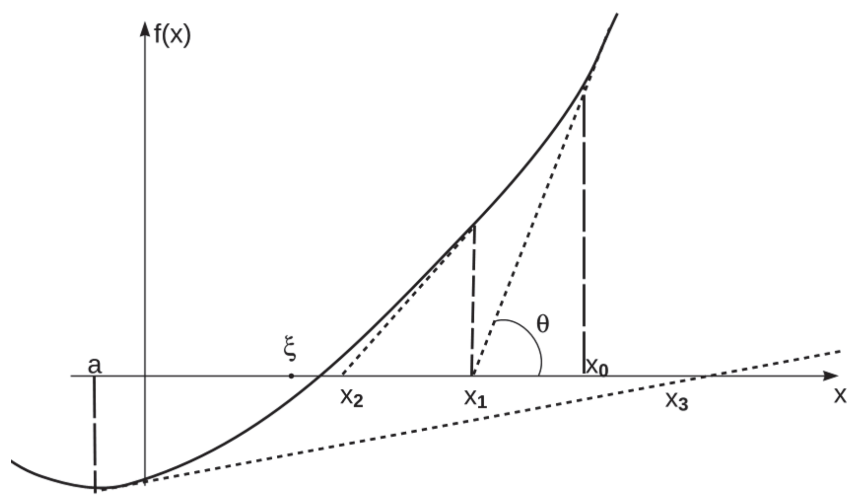


Figura 2.3.1: Representação do Método de Newton, retas tangentes a curva da função $f(x)$.

Observamos que a tangente de θ pode ser obtida tanto da definição da função trigonométrica tangente quanto pela derivada de $f(x)$ no ponto x_0. Assim, ainda olhando a Figura (2.3.1), temos:

A Função de Iteração do Método de Newton, é definida pelo lado direito da equação acima. As diversas sucessões convergirão para um ponto ξ que satisfaça $f(\xi) = 0$, se o valor inicial for $x_0 = b$. Entretanto, para a Figura (2.3.1), o processo pode ser não convergente se $x_0 = a$, pois se terá $x_3 \notin [a,b]$.

Exemplo 2.3. *Encontre uma aproximação para a raiz da equação,* $2x - e^{-x} = 0$*, com erro,* $\varepsilon = 0.001$*, utilizando o Método de Newton.*

Solução: *Escolhendo o valor inicial $x_0 = 1$, e aplicando o teorema, temos a convergência. Agora temos que a fórmula de Newton-Raphson, é:*

$$x_{k+i} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Calculando a derivada de $f(x)$, obtém-se, $f'(x) = 2 + e^{-x}$. Realizando a primeira iteração, para $i = 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{2x_0 - e^{-x_0}}{2 + e^{-x_0}} = 1 - \frac{2 \times (-1) - e^{-1}}{2 + e^{-1}} \\ \therefore x_1 &= 0,310724806 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

então, o novo valor aproximado da raiz é 0.310724806. Neste caso, uma vez que, dispõe-se de uma estimativa inicial, que foi escolhida, de valor 1.0, e agora calcula-se uma nova estimativa, x_1. Pode-se calcular o erro relativo, que é dado por:

$$E_r = \frac{|x_1 - x_0|}{x_1} \quad = \quad \frac{|0,310724806 - 1|}{0,310724806} = 2,218 > \varepsilon \tag{2.3.8}$$

seguindo para a segunda iteração, agora substituindo o valor de x_1 por 0.310724806.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{2x_1 - e^{-x_1}}{2 + e^{-x_1}} = 0,310724806 - \frac{2 \times (0,310724806) - e^{-0,310724806}}{2 + e^{0,310724806}} \\ \therefore x_2 &= 0,351511258 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

utilizando a ideia anterior, obtém-se o erro relativo, dado por:

$$E_r = \frac{|x_2 - x_1|}{x_2} \quad = \quad \frac{|0,351511258 - 0,310724806|}{0,351511258} = 0,1160 > \varepsilon \tag{2.3.10}$$

Fica claro, que o Método de Newton é bem rápido, pois na primeira iteração obteve-se um erro relativo de $221,81$, já na iteração seguinte, o relativo percentual for de $0,1160$. Pode-se, pois, até aqui afirmar que existe um dígito significativo correto, na resposta, o 0 (zero). Realizando outra iteração, onde o valor de x_2 é substituído por $0,351511258$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{2x_2 - e^{-x_2}}{2 + e^{-x_2}} = 0,3515 - \frac{2 \times (0,351511258) - e^{-0,351511258}}{2 + e^{-0,351511258}} \\ \therefore x_3 &= 0,351733704 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Assim, obtém-se o erro relativo, por:

$$E_r = \frac{|x_2 - x_1|}{x_2} \quad = \quad \frac{|0,351733704 - 0,351511258|}{0,351733704} = 0.000632 > \varepsilon \tag{2.3.12}$$

realizando a útima iteração deste processo, atribuindo a x_3 o valor de $0,351733704$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{2x_3 - e^{-x_3}}{2 + e^{-x_3}} = 0,351733704 - \frac{2 \times (0,351733704) - e^{-0,351733704}}{2 + e^{0,351733704}} \\ \therefore x_4 &= 0,351733711 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

utilizando a ideia anterior, segue que o erro relativo, é dado por:

$$E_r = \frac{|x_2 - x_1|}{x_2} \quad = \quad \frac{|0,351733711 - 0,351733704|}{0,351733711} = 0.0000000183 < \varepsilon \quad (2.3.14)$$

Então, o que se percebe é que, através do método de Newton-Raphson, o um erro relativo, na primeira iteração, que é de $2,218$ para $0,1160$ na segunda iteração, e em seguida para $0,000632$, na terceira, e por fim, na quarta iteração, chegou-se a um erro relativo igual a $0,0000000183$, que por sua vez, é bem menor do que a estimativa erro ε dada no problema.

O que isto significa em termos práticos? Verifica-se no exemplo que, a medida que o processo iterativo avança a cada iteração, é que tem-se a certeza de que pode-se confiar em cada dígito significativo, ou seja, os dígitos 0,3,5,1,7,3,3 e 7, nesta sequência, nos levam a uma solução confiável.

2.3.3 Ordem de convergência do Método de Newton

Na busca para encontrar uma raiz aproximada, que satisfaça a igualdade de $f(\xi) = 0$, sempre será encontrada uma sequência x_k que irá convergir para ξ. Para examinar essa convergência, supõe-se, inicialmente, que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas na vizinhança da raiz ξ. Para sabermos a ordem de convergência do método de Newton, deve-se considerar (CAMPOS, 2001):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

que em vista do erro será vista por

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.3.15)$$

desde que $e_{k+1} = |x_{k+1}\xi|$ e $e_k = |x_k - \xi|$.

Após isto, será expandido $f(x_k)$ em Série de Taylor, em torno da raiz ξ, obtendo

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e_k - f(\xi) + e_k f'(\xi) + (e_k)^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \cdots && (2.3.16) \\ f'(\xi) &= f'(\xi) + e_k f''(\xi) + \cdots && (2.3.17) \end{aligned}$$

substituindo essas duas expressões em (2.14), ficamos com

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= e_k - \frac{e_k f'(\xi) + e_k{}^2 \dfrac{f''(\xi)}{2!} + \ldots}{f'(\xi) + e_k f''(\xi) + \ldots} \\
e_{k+1} &= \frac{e_k f'(\xi) + e^2{}_k f''(\xi) + \ldots - e_k f'(\xi) - e_k \dfrac{f''(\xi)}{2!}}{f'(\xi) + e_k f''(\xi) + \ldots} \\
|e_{k+1}| &\approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} |e_k|^2
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Consequentemente, o método de Newton tem convergência quadrática. Isso significa que, nas proximidades da raiz, o número de dígitos corretos de estimativa da raiz dobra a cada iteração (CAMPOS, 2001).

2.3.4 Garantia de Convergência do Método de Newton

O critério para que a escolha do valor inicial x_0 que será utilizado no processo iterativo de Newton, garanta a convergência para a raiz, pode ser analisado pelo teorema a seguir(CAMPOS, 2001).

Teorema 2.6. *Se $f(a) \cdot (b) < 0$ e $f'(x)$ e $f''(x)$ forem não nulas e preservarem o sinal em $[a,b]$, então partindo-se da aproximação $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ é possível construir, pelo método de Newton (2.3.6) uma sequência $\{x_i\}$ que converge para a raiz ξ de $f(x) = 0$.*

Exemplo 2.4. *Mostrar que o valor inicial $x_0 = 0,5$ quando aplicado a função de iteração de Newton gera uma sequência convergente para uma raiz da equação $e^{-x} - x = 0$.*

Solução 2.3. *$f(x) = e^{-x} - x$, e sua derivada segunda é dada por $f''(x) = e^{-x}$. Então:*
$f(0,5) = e^{-0,5} - 0,5 = 0,106$
$f(0,5) = e^{-0,5} = 0,606$*, como $f(0,5) \cdot f''(0,5) > 0$ é satisfeita. Portanto, o valor inicial é $x_0 = 0,5$.*

A seguir mostraremos um algoritmo que descreve os passos que o método de Newton faz para encontrar uma raiz de uma equação algébrica ou transcendente, a partir de uma estimativa inicial x_0, e o critério de parada dado na linha 11, interromperá as iterações do algoritmo.

Um algoritmo para o Método de Newton pode ser descrito como segue:

***Entrada**: $iter = 0$, $iMAX = 10$, er, $es = 1E-8$, $xr = 0$, $xrVelho$; ;*
*1: **Faça***
2: $xr = x_0$;
3: iter=0;
*4: **do***
5: $xVelho = xr$;

$xr = g(\ xVelho\ );$

$iter{+}{+};$

se($xr \neq 0$) **então**

$er = \left|\frac{xr - xrVelho}{xr}\right|;$

fim do se

se($(er < es)$ *ou* $(iter \geqslant iMAX)$) **sair**

fim do **até**

imprima a raiz = xr;

fim do algoritmo.

Capítulo 3

Análises comparativa entre os métodos da Bissecção e Newton

3.1 Vantagens e desvantagens dos métodos estudados

Após análise dos tópicos elencados, pode-se analisar as vantagens e desvantagens dos métodos da Bissecção e o método de Newton, no que se refere a resolução de equações algébricas e transcendentes, isto ajudará a fugir de algumas armadilhas que estes métodos podem trazer.

3.1.1 Vantagens do método da Bissecção:

Conforme estudado, pode-se dizer que a maior vantagem do método da Bissecção é que ele sempre será convergente. Logo, a razão disto é a própria abordagem que o método possui, desde que a função f seja contínua no intervalo $[a,b]$ que contenha pelo menos uma raiz, isto sendo garantido pela condição $f(a)\cdot f(b) < 0$. Além disso, o método da Bissecção fornece o comprimento do intervalo, proporcionando assim uma controle maior sobre o erro absoluto, já que este é dado por $|b-a| < \varepsilon$. Outro ponto positivo da Bissecção é que os cálculos não são tão rebuscados.

A seguir, serão abordadas as desvantagens do método da Bissecção, expondo alguns exemplos que nos ajudarão a entender melhor nosso ponto de vista sobre esse método.

3.1.2 Desvantagens do método da Bissecção:

Uma das principais desvantagens deste método está em torno da sua convergência que é muito lenta, isso ocorre porque o intervalo que contém a raiz, é reduzido a metade a cada iteração. Veja um exemplo do método da Bissecção, percebe-se que a rapidez de convergência é lenta, embora convirja para a raiz.

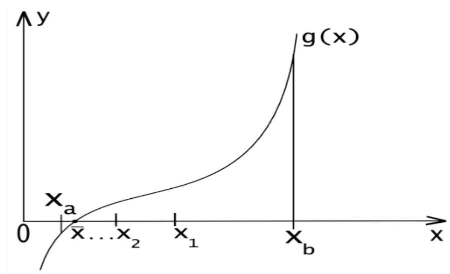
Exemplo 3.1. *Determine uma aproximação para $\bar{x} \in [1,\ 2]$ da equação $e^{-x^2} - cos(x) = 0$, com aproximação $\varepsilon = 10^{-4}$ tal que $|x_b - x_a| < \varepsilon$.*

Solução 3.1. *A função* $f(x) = e^{-x^2} - cos(x)$ *é contínua em* $[1,\ 2]$ *possuindo pelo menos uma raiz, assim,* $f(1) \cdot f(2) < 0$ *é satisfeita. Logo, é gerada uma sequência, conforme mostra a Figura (3.1.1), que converge após 14 iterações para a raiz* $x_k = 1,4473876953125$ *com estimativa de erro dado por* $|b - a| < \varepsilon$*.*

Iteração:	XA =	f(XA) =	XB =	f(XB) =	XN =	f(XN) =	Erro =
1 -	1	-0,172422864696697396	2	0,434462475435876567	1,5	0,0346620228941614267	1
2 -	1	-0,172422864696697396	1,5	0,0346620228941614267	1,25	-0,105710975244170843	0,5
3 -	1,25	-0,105710975244170843	1,5	0,0346620228941614267	1,375	-0,0435702895330725749	0,25
4 -	1,375	-0,0435702895330725749	1,5	0,0346620228941614267	1,4375	-0,00626186677063745346	0,125
5 -	1,4375	-0,00626186677063745346	1,5	0,0346620228941614267	1,46875	0,0137761021151797263	0,0625
6 -	1,4375	-0,00626186677063745346	1,46875	0,0137761021151797263	1,453125	0,00364753999914778978	0,03125
7 -	1,4375	-0,00626186677063745346	1,453125	0,00364753999914778978	1,4453125	-0,00133499863844288898	0,015625
8 -	1,4453125	-0,00133499863844288898	1,453125	0,00364753999914778978	1,44921875	0,00114936662858355129	0,0078125
9 -	1,4453125	-0,00133499863844288898	1,44921875	0,00114936662858355129	1,447265625	-9,45488842121015578E-5	0,00390625
10 -	1,447265625	-9,45488842121015578E-5	1,44921875	0,00114936662858355129	1,4482421875	0,000526976509434738254	0,001953125
11 -	1,447265625	-9,45488842121015578E-5	1,4482421875	0,000526976509434738254	1,44775390625	0,000216105614705401955	0,0009765625
12 -	1,447265625	-9,45488842121015578E-5	1,44775390625	0,000216105614705401955	1,447509765625	6,07513023752711992E-5	0,00048828125
13 -	1,447265625	-9,45488842121015578E-5	1,447509765625	6,07513023752711992E-5	1,4473876953125	-1,69055583101606916E-5	0,000244140625
14 -	1,4473876953125	-1,69055583101606916E-5	1,447509765625	6,07513023752711992E-5	1,44744873046875	2,1921180393835851E-5	0,0001220703125

Figura 3.1.1: Função $f(x) = e^{-x^2} - cos(x)$

Outra desvantagem é a escolha de uma raiz que seja próximo de um dos extremos do intervalo $[a,b]$. Observa-se que a função $g(x)$ representada pelo gráfico da Figura (3.1.2) possui uma raiz $\bar{x}$ muito perto de x_a. Percebe-se, claramente, que ao reduzir o intervalo pela metade o novo valor x_1 ainda está longe da raiz $\bar{x}$. Assim, serão necessárias várias iterações para alcançar a raiz aproximada de $g(x)$. *so so*



Observação 3.1. *Na implementação de um algoritmo para resolver equações algébricas e transcendentes, utilizando o método da Bissecção, pode ser cometido um erro de lógica, em dizer que a sequência não converge apenas verificando a desigualdade $f(a)f(b) > 0$. E isso não se pode afirmar. Como mostra, a seguinte mensagem, que está em destaque na Figura (1.1.3)*

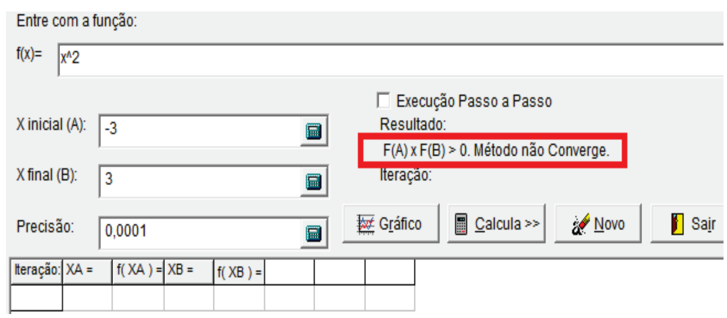


Figura 3.1.2: Gráfico de $f(x) = x^2$.

A mensagem de que $f(x)$ não converge por que $f(-3)f(3) > 0$ não faz sentido, pois como se constatou na Observação (2.1) nada se pode dizer quando $f(a)f(b) > 0$.

Foi visto como o método da Bissecção pode ser eficiente, chegando a ser robusto, no que se refere a calcular raízes de equações algébricas e transcendentais, pois possui convergência certa, embora o método seja muito lento. A seguir, serão apresentados algumas vantagens e desvantagens sobre o método de Newton.

3.1.3 Vantagens do Método de Newton

O método de Newton se destaca sobre outros métodos por possuir convergência muito rápida. Isto o torna um dos métodos mais utilizados nos problemas que possui equações algébricas.

Exemplo 3.2. *Para provar essa afirmação, será resolvido o Exemplo (3.1) utilizando o método Iterativo de Newton.*

Solução 3.2. *A função* $f(x) = e^{-x^2} - cos(x)$ *e sua derivada primeira é* $f'(x) = -2xe^{-x^2} + sen(x)$, *aplicada em* $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{e^{-x^2} - cos(x)}{-2xe^{-x^2} + sen(x)}$, *gera a sequência: Portanto, após 4 itera-*

Iteração:	X =	f(X) =	f´(X) =	Erro =
1 -	1,5	0,0346620228941614267	0,681297312918461421	
2 -	1,44912349977474544	0,00108862303243245168	0,637683432447478037	0,0508765002252545567
3 -	1,44741634701361092	1,32043574503007947E-6	0,636135592530064657	0,00170715276113452214
4 -	1,44741427129931269	1,95664372968891789E-12		2,07571429823377122E-6

Figura 3.1.3: sequência gerada para calcular a raiz da equação $e^{-x^2} - cos(x) = 0$.

ções, o método de Newton encontra a raiz aproximada $\bar{x} = 1.447448733046875$, *com erro sendo avaliado por* $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. *Assim, o método de Newton converge rapidamente para o mesmo problema, o método da Bissecção realizou 14 iterações.*