UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MISAELLE DO NASCIMENTO OLIVEIRA

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI E APLICAÇÕES

Campina Grande - PB
Março de 2014

MISAELLE DO NASCIMENTO OLIVEIRA

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande - PB
Março de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

O48t Oliveira, Misaelle do Nascimento.

O teorema de Arzelá-Ascoli e aplicações [manuscrito] / Misaelle do Nascimento Oliveira. – 2014.

49 f.

Digitado

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. E.D.O. 2. Matemática pura. 3. Teorema de Peano. I. Título.

21. ed. CDD 510

MISAELLE DO NASCIMENTO OLIVEIRA

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 17 de Março de 2014.

Banca Examinadora

Luciana Freitas

Prof^a. Dr^a. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientadora

Aldo Trajano Lourêdo

Prof^o. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Prof^o. Ms. Luiz Lima de Oliveira Júnior
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a minha família que sempre está me dando apoio, em especial a meus pais, pelas angústias e preocupações que passaram por minha causa, por terem dedicado suas vidas a mim, pelo amor carinho e estímulo que me ofereceram, ao meu filho, que sem dúvida alguma, plantou em mim forças para que eu pudesse chegar ao fim, a prima da minha mãe, Maria José, que me acolheu em sua casa com tanta felicidade, dedico-lhes essa conquista como gratidão.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por este sonho realizado. Pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos surgidos nesta fase da minha vida, a todos os professores que lecionaram no curso, em especial à Professora Luciana Roze de Freitas, que mim orientou com tanto carinho, paciência e compreensão e esteve ao meu lado durante esta última fase do curso, ao Professor Aldo Trajano Lourêdo pela compreensão em momentos de angústia, ao Professor Luiz Lima de Oliveira Júnior que desde o curso de graduação têm estado presente nesta minha caminhada, aos colegas que trilharam este caminho comigo e as pessoas que indiretamente com o seu carinho, muitas vezes, uma palavra amiga, contribuiram de forma significativa para este momento, a meus pais pelo apoio e carinho em todos os momentos nesta fase da minha especialização.

"No fim tudo termina bem. Se tudo não estiver bem, é porque ainda não é o fim."

(Autor Desconhecido)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um resultado de Análise utilizado nas mais diversas áreas da matemática pura, o Teorema de Arzelá-Ascoli, que nos dirá quais as condições necessárias para que uma sequência de funções contínuas definidas num subconjunto compacto de um espaço métrico tenha uma subsequência uniformemente convergente. Posteriormente, utilizamos o teorema para garantir a existência de soluções de uma E.D.O. - Equações Diferenciais Ordinárias. Como suporte a este estudo, elencamos resultados primordiais para o desenvolvimento desta pesquisa. Primeiramente, coletamos conceitos básicos elementares, em seguida, demonstramos em duas versões o teorema principal, o qual, posteriormente, é aplicado no Teorema de Peano, concluindo assim, a pesquisa.

Palavras Chave: E.D.O.; Matemática Pura; Teorema de Peano.

Abstract

This paper aims to present a result of analysis used in several areas of pure mathematics, the Arzelá-Ascoli theorem, that will tell us what are the necessary conditions for a sequence of continuous functions defined on a compact subset of a metric space has a uniformly convergent subsequence. Subsequently, we use the theorem to guarantee the existence of solutions of an ODE - Ordinary Differential Equations. To support this study, we selected primary outcomes for the development of this research. First, collect elementary basics then shown in two versions main theorem, which subsequently is applied in the Peano theorem, thus completing the study.

Keywords: O.D.E; Pure Mathematics; Peano theorem.

SUMÁRIO

Introdução

A análise é uma área da matemática que estuda a criação de resultados importantes para o seu bom entendimento e de outras áreas, como por exemplo, Topologia, Geometria Diferencial, EDO - Equações Diferenciais Ordinárias, que se configura como nosso objeto de estudo, entre outros. Isto é, visa elaborar formulações rigorosas e precisas para ideias que até então eram intuitivas do cálculo. Tal feitio é possível através de postulados e teoremas, dos quais, comprova-se sua veracidade através do desenvolvimento das demonstrações.

Neste estudo, iremos utilizar um resultado muito usado na matemática pura e na promoção de teorias matemáticas, o Teorema de Arzelá-Ascoli, que possui várias aplicações na análise real e análise funcional, que, sem sombra de dúvidas, é primordial para a existência de soluções de uma edo.

Tal teorema é interessante, pois fornece subsídios sobre quais as condições que uma sequência de funções deve ter para possuir uma subsequência convergente.

Ambos, Césare Arzelá e Giulio Ascoli[1] estudaram sobre equicontinuidade e o Teorema de Arzelá-Ascoli foi uma generalização de um resultado mais fraco que o provado por Ascoli. Um outro conceito importantíssimo para este estudo foi o então resultado elaborado por Arzelá, onde provou o conceito de convergência uniforme gradual que dá uma condição necessária e suficiente para uma série de funções contínuas convergir para uma função contínua (1883). Além disso, observamos a quantidade de conceitos que o permeiam. Dentre os quais, apresentamos alguns resultados necessários para o entendimento total ou de parte do exposto aqui.

Uma vez reunidas todas as pesquisas; feito um estudo dos resultados que evidenciam o objetivo deste trabalho, organizamos o mesmo em três capítulos. No capítulo

[1]Ver apêndice A

I, veremos alguns pré-requisitos que são indispensáveis para uma melhor compreensão do Teorema de Arzelá-Ascoli, bem como da sua aplicação. No Capítulo II, estudaremos em detalhes o teorema mencionado anteriormente, bem como, apresentaremos uma demonstração detalhada de fácil compreensão. No terceiro e último capítulo, iremos apresentar uma importante aplicação do Teorema de Arzelá-Ascoli nas Equações Diferenciais Ordinárias, o Teorema de Peano, que exige apenas a continuidade como condição de regularidade, para garantir a existência de solução de um Problema de Valor Inicial.

1 Resultados Preliminares

Nesse Capítulo veremos alguns resultados preliminares utilizados no desenvolvimento desta monografia, que servirão de base para uma melhor compreensão do Teorema de Arzelá-Ascoli, citaremos algumas definições e resultados importantes da Teoria dos Espaços Métricos, que serão utilizados no decorrer de nossa pesquisa. Estes resultados poderão ser verificados pelo leitor nas referências [1] e [3] ou em qualquer outro livro que aborde tal teoria. Neste trabalho, serão enunciados apenas os resultados essenciais para o desenvolvimento do assunto central.

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Uma função $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ satisfazendo as condições:

(i) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; $\forall x, y \in X$;

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$; $\forall x, y, z \in X$

é dita uma métrica em X.

Um *Espaço Métrico* consiste de um conjunto X e uma métrica ρ em X. Denotamos por (X, ρ) para indicar o espaço métrico consistindo do conjunto X e da métrica ρ.

Exemplo 1.1. Seja X um conjunto não vazio qualquer. Defina $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ pondo:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \neq y \\ 0, & \text{se} \quad x = y. \end{cases}$$

$\rho(x, y)$ constitui uma métrica sobre X.
De fato, dados $x, y, z \in X$ temos:

(i) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = x$.

(ii) Se $x = y$ então $\rho(x,y) = 0 = \rho(y,x)$. Se $x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) = 1$, por definição. Também,

$$y \neq x \Rightarrow \rho(y,x) = 1.$$

Logo, $\rho(x,y) = \rho(y,x), \quad \forall x, y \in X.$

(iii) Sejam $x, y, z \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \rho(x,z) = 0 \quad &\text{ou} \quad \rho(x,z) = 1, \\ \rho(x,y) = 0 \quad &\text{ou} \quad \rho(x,y) = 1, \\ \rho(y,z) = 0 \quad &\text{ou} \quad \rho(y,z) = 1. \end{aligned}$$

Daí

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = 0 \;\Rightarrow\; \rho(x,z) = 0 \quad ou \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) = 1 \quad ou \quad \rho(x,y) + \rho(y,z) = 2,$$

logo, de qualquer forma obteremos

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

A função ρ é uma métrica chamada <u>métrica discreta</u> e (X, ρ) é um espaço métrico.

Exemplo 1.2. A reta real $\mathbb{R}$ munido da métrica d, onde para $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x - y|$$

é um espaço métrico.

Com efeito,

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) $d(x,z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |z - y| = d(x,y) + d(z,y)$.

Portanto, (X, d) é um espaço métrico.

Exemplo 1.3. Seja $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$, com $\rho_p(x,y) = \|x - y\|_p,\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$ e $\|\xi\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é um espaço métrico.

De fato, sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \ldots, \mathrm{z}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n}$.

(i) $\rho_p(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} \rho_p(x,y) &= \|x - y\|_p = \|(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\|_p = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como, $|x_i - y_i| \geq 0$, com $1 \leq i \leq n$ e

$$|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p = 0^p = 0, \quad 1 \leq p < \infty$$

temos que

$$|x_1 - y_1|^p = 0, \ldots, |x_n - y_n|^p = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y.$$

(ii) $\rho_p(x, y) = \rho_p(y, x), \ \forall\, x, \, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \rho_p(x, y) &= \|x - y\|_p = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p} = \sqrt[p]{|y_1 - x_1|^p + \ldots + |y_n - x_n|^p} \\ &= \|y - x\|_p = \rho_p(y, x), \ \forall x, \, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(iii) $\rho_p(x, z) \leq \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$[1]

$$\begin{aligned} \rho_p(x, z) &= \|x - z\|_p = \|x - y + y - z\|_p \leq \\ &\leq \|x - y\|_p + \|y - z\|_p = \\ &= \rho_p(x, y) + \rho_p(y, x) \qquad \forall x, \, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.4. Sejam $(M_i, d_i), i = 1, \ldots, n$, espaços métricos. Podemos dotar o produto $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ de uma métrica, definindo a distância de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ como sendo

$$d_{\max}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i),$$

ou

$$d_s(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

ou ainda,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2}.$$

[1]ver desigualdade de H. Minkowski no Apêncide (B).

Para quaisquer $x, y \in M$, valem as desigualdades:

$$d_{\max}(x, y) \leq d(x, y) \leq d_s(x, y) \leq n \cdot d_{\max}(x, y). \tag{1.1}$$

(Ver [1], pág. 7).

Particularmente, quando $M_1 = \ldots = M_n = \mathbb{R}$, obtemos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, como produto cartesiano de n cópias do espaço métrico $\mathbb{R}$. Salvo menção explícita em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido da última dentre as três métricas descritas acima, a qual denominaremos *métrica euclidiana*.

A fim de não nos estendermos demasiadamente, justificaremos, apenas, as propriedades da métrica euclidiana. As outras seguem de argumentos análogos.

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n) \in M$. Temos,

(i)

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \iff & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} = 0 \\ \iff & d_i(x_i, y_i)^2 = 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \iff & x_i = y_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \iff & x = y. \end{aligned}$$

(ii) Observe que

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, x_i)^2} = d(y, x).$$

Pois, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, d_i constitui uma métrica em M_i e, portanto, $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

(iii) Temos

$$d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i)^2}$$

e mostraremos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

De fato, a verificação da desigualdade acima, segue análogo do item (iii), exemplo 1.3, onde particularizamos p, para, $p = 2$.

Exemplo 1.5. Seja $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,; f$ contínua$\}$ com a métrica da convergência uniforme $\rho(f,g) = \|f-g\|_\infty$, $f,\ g \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\ :\ t \in [a,b]\},\ \forall\, f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Note que, tal *supremo* existe pois, f é limitada.[2]

(i) $\rho(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$.
De fato, sejam $f,\ g \in C([a,b],\ \mathbb{R})$. Daí,

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = 0 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ |f(t)-g(t)| = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ f(t) = g(t),\ \ t \in [a,b].\end{aligned}$$

(ii) $\rho(f,g) = \rho(g,f),\ \forall\ f,\ g \in C([a,b],\mathbb{R}),\ \ t \in [a,b]$.
De fato,

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |g(t)-f(t)| = \\ &= \|g-f\|_\infty = \rho(g,f).\end{aligned}$$

(iii) $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h),\ \ \forall f,\ g,\ h \in C([a,b],\mathbb{R})\,,\ t \in [a,b]$.
De fato,

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-h(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |h(t)-g(t)| = \|f-h\|_\infty + \|h-g\|_\infty \\ &= \rho(f,h) + \rho(h,g).\end{aligned}$$

Logo,

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

Portanto, $C([a,b],\mathbb{R})$ munido da métrica da convergência uniforme é um espaço métrico.

Agora, definiremos alguns conceitos relacionados a subconjuntos de espaços métricos. Entre eles, a noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos.

Seja x um ponto no espaço métrico (X,ρ). Dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 1.2. A bola aberta de centro x e raio r é definida como sendo o conjunto $B_r(x)$ dos pontos de X cuja distância a x é menor que r. Ou seja,

$$B_r(x) := \{y \in X\ ;\ \rho(x,y) < r\}.$$

[2]Ver Apêndice D, Teorema de Weierstrass

Definição 1.3. A bola fechada de centro x e raio r é definida como sendo o conjunto $B_r[x]$ dos pontos de X, cuja distância a x é menor do que ou igual a r. Ou seja,

$$B_r[x] := \{y \in X \, ; \, \rho(x,y) \leq r\}.$$

Definição 1.4. Seja (X,ρ) um espaço métrico, um conjunto $E \subset X$ é dito aberto em (X,ρ) se, para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E$.

Definição 1.5. Seja (X,ρ) um espaço métrico, um conjunto $F \subset X$ é dito fechado em (X,ρ) se F^c(complementar de F com respeito a X) é aberto em (X,ρ).

Diante das definições apresentadas, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1. Seja (X,ρ) um espaço métrico. Então vale:

(i) A união qualquer de conjuntos abertos em (X,ρ) é um conjunto aberto;

(ii) A interseção finita de conjuntos abertos em (X,ρ) é um conjunto aberto em (X,ρ);

(iii) A interseção qualquer de conjuntos fechados em (X,ρ) é um conjunto fechado em (X,ρ);

(iv) A união finita de conjuntos fechados em (X,ρ) é um conjunto fechado.

Demonstração. **(i)** Seja $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de conjuntos abertos em X. Denotemos por $\mathcal{U}$ a união de todos os conjuntos abertos pertencentes a $\mathcal{A}$.

Queremos mostrar que $\mathcal{U}$ é aberto.

Seja $x \in \mathcal{U}$, então $x \in A$ para algum conjunto aberto $A \in \mathcal{A}$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A$. Mas, $A \subset \mathcal{U}$, logo $B_\delta(x) \subset \mathcal{U}$. Donde $\mathcal{U}$ é aberto.

(ii) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ uma coleção finita de conjuntos abertos em X e $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Tome $x \in A$, logo $x \in A_i$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ e portanto, existem números positivos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ tais que $B_{\delta_i}(x) \subset A_i$. Seja $\delta = \min_{1\leq i\leq k} \delta_i$. Assim, $B_\delta(x) \subset B_{\delta_i}(x) \subset A_i$, para todo $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Donde,

$$B_\delta(x) \subset A$$

Com isso, mostramos que A é aberto.

(iii) Seja $\mathfrak{F} = \{F_i \, ; \, i \in \Lambda\}$ onde Λ é um conjunto de índices arbitrário, uma família qualquer de conjuntos fechados. Assim, para cada $i \in \Lambda$, F_i^c é aberto em X. Seja $F = \bigcap_{i\in\Lambda} F_i$. Queremos mostrar que F é fechado.

Note que, $F^c = \left(\bigcap_{i\in\Lambda} F_i\right)^c = \bigcup_{i\in\Lambda} F_i^c$. Desde que F_i^c é aberto em X para cada i, pelo item (i) obtemos F^c aberto e portanto, F é fechado em X.

(iv) Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_k$ uma coleção finita de conjuntos fechados em X e $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$.

Temos que
$$F^c = \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} F_i^c$$
mas, a última interseção nos dá um conjunto aberto por (ii). Portanto, F^c é aberto, o que implica em F fechado. $\square$

Definição 1.6. Seja $E \subset (X, \rho)$ um subconjunto do espaço métrico X munido da métrica ρ. Definimos:
(i) O interior de E, denotado por $intE$, como sendo a união de todos os abertos de (X, ρ) contidos em E, isto é,
$$intE = \bigcup\{A\,;\ A\,\text{é aberto e}\ A \subset E\};$$
(ii) O fecho de E, denotado por $\overline{E}$, como sendo a interseção de todos os fechados de (X, ρ) que contém E. Isto é,
$$\overline{E} = \bigcap\{F\,;\ F\,\text{é fechado e}\ E \subset F\};$$
(iii) E é dito denso em X se $\overline{E} = X$ e nunca denso se $intE = \emptyset$.

Definição 1.7. Seja (X, ρ) um espaço métrico, $x \in X$ e $(x_n)_n \subset X$. Dizemos que (x_n) converge para x em X se $d(x_n, x) \to 0$ em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$. Assim, quando isso acontece, escrevemos
$$x_n \longrightarrow x\ em\ X.$$

Proposição 1.2. Se $E \subset X$, então as seguintes condições são equivalentes:

(i) $x \in \overline{E}$;

(ii) $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, $\forall r > 0$;

(iii) $existe\ (x_n) \subset E$ tal que $x_n \to x$, com $x \in E$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha, por contradição, que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap E = \emptyset$, $B_r(x) \subset E^c$, logo, $x \in intE^c$. Como $(intE^c)^c$ é fechado e $E \subset (intE^c)^c$ e $x \notin (intE^c)^c$, temos que
$$x \notin \overline{E}.$$
Contradizendo o item (i). Daí, segue que
$$B_r(x) \cap E \neq \emptyset,\ \forall r > 0.$$
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$, $\forall r > 0$, então, $x \in E$ ou $x \in \overline{E} - E$.

Se $x \in E$, podemos tomar a sequencia constante $x_n = x$ para todo n. Se, $x \in \overline{E} - E$, tomemos, para cada n,
$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset.$$

Em ambos os casos, $(x_n) \subset E$ converge para x.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que existe uma sequência (x_n) de elementos de E, tal que

$$x_n \longrightarrow x \text{ e } x \notin \overline{E},$$

então por (ii), existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \overline{E}^c$ e, portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n > n_0$ temos $x_n \in \overline{E}^c$, o que é um absurdo, pois $(x_n) \in E$. Donde concluímos que $x \in \overline{E}$. □

Definição 1.8. Sejam (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) espaços métricos. Uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é dita contínua em um ponto x de X_1 se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in X_1,\ \rho_1(y, x) < \delta \Longrightarrow \rho_2(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Se f é contínua em todo ponto de X_1 dizemos, apenas, que f é contínua.

Observação 1.1. Dizer que f é contínua em $x \in X_1$, de acordo com a definição acima, é dizer que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon(f(x))\Big)$. Daí, enunciamos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. Sejam (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) espaços métricos. Uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de qualquer conjunto aberto $U \subset (X_2, \rho_2)$ é um conjunto aberto em (X_1, ρ_1).

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja f contínua e U um aberto de X_2. Se $y \in f^{-1}(U)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(y)) \subset U$, então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(y) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon(f(y))\Big) \subset f^{-1}(U),$$

logo, y é interior a $f^{-1}(U)$. Donde segue que, $f^{-1}(U)$ é aberto.
$(\Leftarrow)$ Por outro lado, suponha $f^{-1}(U)$ aberto em (X_1, ρ_1) sempre que U é aberto em (X_2, ρ_2). Se $x \in X_1$, então $f(x) \in X_2$ e, portanto, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$B_\varepsilon(f(x)) \subset X_2$$

e, consequentemente, $f^{-1}\Big(B_\varepsilon(f(x))\Big)$ é um aberto em X_1 que contém x.

Segue que, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon(f(x))\Big)$ e f é contínua em x. Como x é arbitrário, segue que f é contínua. □

1.1.1 Espaços Métricos Completos

Definição 1.9. Seja (X, ρ) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n) \subset X$ é dita de Cauchy em X quando, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definição 1.10. Um conjunto $E \subset (X, \rho)$ é dito completo se toda sequência de Cauchy em E converge para um elemento de E.

Proposição 1.4. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência, se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, se tomarmos $m,\ n > n_0$ teremos

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, a) + \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. $\square$

Exemplo 1.6. O espaço métrico (X, ρ), onde X é um conjunto não vazio e ρ é a métrica discreta em X é um espaço métrico completo.

De fato, seja $(x_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Tome $\varepsilon < 1$, logo

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ acarreta } \rho(x_n, x_m) = 0,$$

ou ainda,

$$x_n = x_m, \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$x_n = x_0 \text{ para algum } x_0 \in X \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (x_n) converge para $x_0 \in X$. Donde, segue que, (X, ρ) é completo.

Exemplo 1.7. O espaço $(\mathbb{R}, d)$, onde $d(x, y) = |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$ é completo.

(Ver Apêndice (C)).

Exemplo 1.8. Seja $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, onde M_i é um espaço métrico completo, $1 \leq i \leq n$. Dada uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em M, denotaremos o seu k-ésimo termo por

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}).$$

Assim, (x_k) determina n sequências $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}} \subset M_i$. Segue-se imediatamente da Definição 1.10 e das desigualdades em (1.1) que uma sequência

$$x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$$

em M converge para $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$, numa, dentre as três métricas do Exemplo 1.4 se, e somente se, converge nas duas outras. Em particular,

$$x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \longrightarrow a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$$

(qualquer que seja, dentre as três já referidas, a métrica considerada em M) se, e somente, $x_{ki} \longrightarrow a_i,\ i = 1, \ldots, n$ (segundo d_i).

Exemplo 1.9. O $\mathbb{R}^n$, munido de qualquer das métricas definidas no Exemplo 1.4, é um espaço métrico completo.

Segue diretamente do exemplo 1.8 e do fato de $\mathbb{R}$ ser completo pelo exemplo 1.7.

Exemplo 1.10. O espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, $C\Big([a, b]; \mathbb{R}\Big)$, munido da métrica da convergência uniforme, é completo.

Seja $(f_n) \subset C\Big([a, b]; \mathbb{R}\Big)$ uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n > n_0$, tem-se

$$d(f_m(x), f_n(x)) = \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Daí, para qualquer $x_0 \in [a, b]$ fixado, vale

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \ \ \forall m, n > n_0.$$

Isso mostra que, $(f_n(x_0))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e desde que $\mathbb{R}$ é completo (Exemplo 1.7), $(f_n(x_0))$ converge, ou seja, existe $y = f(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que $f_n(x_0) \to y$ quando $n \to \infty$. Desta forma, defina

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Observe que f está bem definida graças a unicidade do limite que a define .

Agora, basta mostrar que

$$f_n \longrightarrow f$$

e

$$f \in C\left([a, b], \mathbb{R}\right),$$

respectivamente.

De 1.2 fazendo $m \to \infty$, temos

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Donde,

$$||f_n - f|| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Segue que, $(f_n(x))$ converge uniformemente para $f(x)$.
Como cada f_n é contínua em $[a,b]$ e a convergência é uniforme segue, pelo teorema (D.1)[3] que f é contínua em $[a,b]$, ou seja, $f \in C\Big([a,b];\mathbb{R}\Big)$. E portanto, $C\Big([a,b];\mathbb{R}\Big)$ é completo.

Proposição 1.5. Sejam (X,ρ) um espaço métrico e $M \subset (X,\rho)$ um subespaço. Assim,

(i) Se (X,ρ) é completo e M é fechado, então M é completo;

(ii) Se M é completo, então M é fechado.

Demonstração. **(i)** Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência de Cauchy. Desde que (X,ρ) é completo, (x_n) converge para algum elemento $x \in X$. Mas, M é fechado e, portanto, $x \in M$. Donde M é completo.
(ii) Seja $x \in \overline{M}$, logo, pela Proposição 1.2, existe $(x_n) \subset M$ que converge para x. Como, pela Proposição 1.4 toda sequência convergente é de Cauchy, temos $x \in M$ e, portanto, M é fechado. □

1.2 Contrações

Definição 1.11. Seja (X,ρ) um espaço métrico completo. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração em X, se existe $0 < k < 1$ tal que

$$\rho(Tx,Ty) \leq k\rho(x,y)$$

para todo $x, y \in X$.

Definição 1.12. (*Ponto Fixo*) O ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um elemento $x \in X$ tal que

$$T(x) = x.$$

Teorema 1.1. *(Princípio de Contração de Banach) Se X é um espaço métrico completo e T é uma contração em X, então T tem um único ponto fixo.*

[3]Ver Apêndice D

Demonstração. Vamos construir uma sequência $(x_n) \subset X$ e mostrar que ela é de Cauchy, de modo que convirja em X. Depois, provaremos que o limite de (x_n) é ponto fixo de T e T não possui outros pontos fixos.

Tome $x_0 \in X$ arbitrário e defina uma sequência iterativa (x_n) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0 \\
x_1 &= T(x_0) \\
x_2 &= T(x_1) = T^2(x_0) \\
&\vdots \\
x_n &= T(x_{n-1}) = T^n(x_0). \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(T(x_n), T(x_{n-1})) \\
&\leq k\rho(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq k\rho(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\
&\leq k^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq k^n\rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade triangular, a soma de uma progressão geométrica e a relação acima, obtemos, para $n > m$

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq k^m\rho(x_1, x_0) + k^{m+1}\rho(x_1, x_0) + \ldots + k^{n-1}\rho(x_1, x_0) \\
&= (k^m + k^{m+1} + \ldots + k^{n-1})\rho(x_1, x_0) \\
&= k^m(1 + k + \ldots + k^{n-1-m})\rho(x_1, x_0) \\
&\leq k^m \frac{1}{1-k}\rho(x_1, x_0). \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Agora, como $0 < k < 1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m > n_0$ temos

$$\frac{k^m}{1-k}\rho(x_1, x_0) < \varepsilon. \qquad (1.4)$$

Portanto, se $n > m > n_0$, então de (1.3) e (1.4), segue que

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy. E, como X é completo, concluímos que (x_n) converge, isto é, $x_n \to x$, com $x \in X$.

Agora mostraremos que x é um ponto fixo da aplicação T.

Da desigualdade triangular e da definição de contração temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(x, Tx) &\leq \rho(x, x_m) + \rho(x_m, Tx) \\ &\leq \rho(x, x_m) + \rho(T(x_{m-1}), Tx) \\ &\leq \rho(x, x_m) + k\rho(x_{m-1}, x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como $x_m \to x$, fazendo $m \to \infty$ temos $\rho(x, x_m) + k\rho(x_{m-1}, x) \to 0$ e, portanto, de (1.5), obtemos

$$\rho(x, Tx) = 0,$$

isto é, $Tx = x$, portanto x é ponto fixo de T.

Suponha agora, que x' também é ponto fixo de T, isto é, $T(x') = x'$. Desde que T é uma contração, temos

$$\rho(x, x') = \rho(Tx, Tx') \leq k\rho(x, x')$$

daí,

$$\rho(x, x') - k\rho(x, x') \leq 0$$

o que implica em,

$$(1 - k)\rho(x, x') \leq 0$$

mas $(1 - k) > 0$ pois $0 < k < 1$, logo

$$0 \leq \rho(x, x') \leq 0$$

ou ainda,

$$\rho(x, x') = 0$$

e, portanto $x = x'$, donde concluímos que o ponto fixo de T é único. $\square$

1.3 Conjuntos Totalmente Limitados

Definição 1.13. Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $x \in X$ e $E \subset X$, um subconjunto não vazio. Definimos a distância de x ao conjunto E, como sendo

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$

Observação 1.1. Note que, tal ínfimo existe, pois, todo conjunto não-vazio e limitado inferiormente possui ínfimo.

Definição 1.14. Sejam $E, F \subset X$ subconjuntos não vazios de um espaço métrico (X, ρ). A distância de E a F, denotada por $\rho(E, F)$ é o número

$$\rho(E, F) = \inf\{\rho(y, z)\,;\, y \in E \, e \, z \in F\}.$$

Definição 1.15. O diâmetro de um subconjunto $E \subset (X, \rho)$, onde (X, ρ) é um espaço métrico, é dado por

$$diam(E) = \sup\{\rho(x, y)\,;\, x, y \in E\}.$$

Um subconjunto F de um espaço métrico (X, ρ) é dito limitado quando $diam(F) < \infty$.

Se E é um subconjunto de X e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$[4] é uma família de conjuntos, tal que, $E \subset \cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ dizemos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cobertura de E.

Definição 1.16. Se (X, ρ) é um espaço métrico, dizemos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\varepsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε, isto é, existem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$ tais que $E \subset \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(a_i)$.

Lema 1.1. *(Propriedade de Bolzano-Weirstrass)* Seja E um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ). E é completo e totalmente limitado se, e somente se, toda sequência em E tem uma subsequência que converge para um ponto de E.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que E é completo e totalmente limitado. Seja (x_n) uma sequência em E. Pela Definição 1.16, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ assim, para $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ao menos uma dessas bolas contém x_n. Sendo assim, tome $x_n \in B_1 \subset \cup_{j=1}^n B_\epsilon(a_j)$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Logo, pela definição 1.16 $E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e, portanto, uma dessas bolas deve conter x_n para $n > n_1 \in \mathbb{N}$. Considere então, $x_n \in B_2$ para $n \in \mathbb{N}_2$. Assim, por meio de um processo indutivo, obtemos uma sequência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma sequência $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{N}_j$ decrescente de subconjuntos infinitos $\mathbb{N}_j$ de $\mathbb{N}$ tais que $x_n \in B_j$ para $n \in \mathbb{N}_j$. Agora, escolha $n_1 \in \mathbb{N}_1$, $n_2 \in \mathbb{N}_2$, $\ldots$ de tal forma que $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$. Então, $x_{n_j} \in B_{\frac{1}{2^j}}(a_j)$ e

[4]Em todo o texto Λ denota um conjunto arbitrário de índices.

$\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^j}$ se $k > j$. Logo, (x_{n_j}) é uma sequência de Cauchy em E, a qual é uma subsequência de (x_n) e, portanto, converge para um elemento de E, pois, E é completo.

($\Leftarrow$) Suponha que E não é completo e que toda sequência em E possui uma subsequência que converge para um elemento de E. Logo, existe (x_n), uma sequência de Cauchy em E, que não converge para um elemento de E. Desta forma, nenhuma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge em E, pois do contrário (x_n) convergiria para o mesmo limite. Contradizendo a hipótese de toda sequência em E possuir uma subsequência convergente em E. Logo, E é completo.

Suponha agora que E não é totalmente limitado e toda sequência em E possui uma subsequência que converge para um elemento de E. Assim, existe $\varepsilon > 0$, e existe um conjunto finito $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tal que $E \not\subset \cup_{j=1}^{k} B_\varepsilon(a_j)$.Escolha $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$ tal que $x_{k+1} \in E - \cup_{j=1}^{k} B_\varepsilon(a_j)$. Então, $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para todo m, n e, portanto, (x_n) não pode ter subsequência convergente. $\square$

Lema 1.2. Seja E um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ). As seguintes afirmações são equivalentes:

(i)*(Propriedade de Bolzano-Weirstrass)* Toda sequência em E possui uma subsequência que converge para um ponto de E.

(ii)*(Propriedade de Heine - Borel)* Para cada cobertura, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $I \subset \Lambda$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ cobre E.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, por contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $\frac{1}{2^n}$ tal que $B_n \cap E \neq \emptyset$ e $B_n \not\subset V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Tome $x_n \in B_n \cap E$. Então, por (i), existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) que converge para algum x em E. Por simplicidade de notação, continuaremos denotando a subsequência por (x_n).

Note que se $x \in E$, então $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$ e, como V_α é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V_\alpha$. Assim, fazendo n suficientemente grande, tal que $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$, temos então,

$$B_n(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset V_\alpha,$$

contradizendo a hipótese de $B_n(x) \not\subset V_\alpha$.

($\Leftarrow$) Suponha que existe $(x_n) \subset E$ que não possui subsequência convergente. Assim, para cada $x \in E$, existe uma bola $B(x)$ centrada em x que contém x_n para alguma quantidade finita de índices n. Então

$$\cup B(x) = \{B_x\}_{x\in E}$$

é uma cobertura de E por abertos sem cobertura finita. Contradição!. Logo, toda sequência $(x_n) \subset E$ possui subsequência convergente. $\square$

Definição 1.17. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathfrak{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} \mathcal{C}_\lambda.$$

A cobertura $\mathfrak{C}$ é dita *aberta* quando cada conjunto $\mathcal{C}_\lambda$, $\lambda \in L$, é aberto em M.

A cobertura $\mathfrak{C}$ diz-se *finita* quando L é um conjunto finito, ou seja, $\mathfrak{C}$ tem um conjunto finito de elementos.

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} \mathcal{C}_\lambda$$

e $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}' = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L'}$, então a subfamília $\mathfrak{C}'$ é relativamente a $\mathfrak{C}$ uma subcobertura de X.

Definição 1.18. Um subconjunto $X \subset M$ de um espaço métrico M é dito *compacto* quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Definição 1.19. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto.

2 O Teorema de Arzelá-Ascoli

Seja M um espaço métrico. Que condições deve um subconjunto $X \subset M$ satisfazer para possuir fecho compacto? Quando $M = \mathbb{R}^n$, a fim de $\overline{X} \subset M$ ser compacto é necessário e suficiente que X seja limitado. Isso decorre imediatamente da caracterização dos espaços métricos compactos que demos anteriormente. Com efeito, um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é fechado e limitado se, e somente se, é completo e totalmente limitado, o que ocorre se, e somente se, ele é compacto. Ora, $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado equivale a $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n$ limitado.

No entanto, não é verdade, em geral, que $X \subset M$ limitado, implica $\overline{X} \subset M$ compacto. Neste contexto, dispomos do seguinte resultado, devido ao matemático húngaro F. Riesz, o qual relaciona a compacidade da bola unitária fechada de um espaço vetorial normado (uma propriedade topológica) e a dimensão desse espaço (um invariante algébrico):

Teorema 2.1 (Riesz)**.** *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial normado. A bola unitária $B[0;1]$ é compacta se, e somente se,* $\dim \mathbb{V} < \infty$. *(ver [5]).*

Assim, por exemplo, a bola unitária fechada $B[0;1]$ de $\mathbb{V} = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, formada pelas funções contínuas $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, embora limitada e fechada, não é compacta, pois $\dim \mathbb{V} = \infty$.

O Teorema de Arzelá-Ascoli, nosso principal resultado, a ser estabelecido neste capítulo, assevera que a *equicontinuidade* é a condição adicional que um subconjunto limitado de $\mathcal{C}(K;\mathbb{R}^n)$, com K compacto, precisa cumprir para ter fecho compacto.

2.1 Equicontinuidade

No que se segue,

$$\mathcal{F}(M;N) := \{f : M \longrightarrow N\,;\ f \text{ contínua}\}.$$

Comecemos com a seguinte

Definição 2.1 (EQUICONTINUIDADE)**.** Um conjunto $E \subset \mathcal{F}(M; N)$ é dito *equicontínuo no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, a) < \delta$ em M implique $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$, seja qual for $f \in E$. E diz-se *equicontínuo* quando é equicontínuo em todos os pontos de M. Uma sequência de aplicações $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(M; N)$ diz-se *equicontínua no ponto* $a \in M$ (respectivamente, *equicontínua*) quando o conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ o for.

Observação 2.1. Evidentemente, se E é equicontínuo no ponto a, então toda função $f \in E$ é contínua em a.

Observação 2.2. Se uma sequência equicontínua $(f_n) \subset \mathcal{F}(M; N)$ converge pontualmente para $f : M \to N$, então o conjunto $\{f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ é equicontínuo.
De fato, dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\rho(f(x), f(a)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Em particular, f é contínua.

Lema 2.1. Se uma sequência equicontínua (f_n) converge pontualmente para f, então a convergência é uniforme em cada parte compacta $K \subset M$.

Demonstração. Seja $K \subset M$ compacto e seja $\varepsilon > 0$. Como $f_n \longrightarrow f$ pontualmente, para cada $x \in K$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_x \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pela Observação 2.2, $\{f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ é equicontínuo. Logo, para cada $x \in K$, existe uma bola aberta B_x, contendo x, tal que

$$y \in B_x \Rightarrow \rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \rho(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$, extraímos uma subcobertura finita

$$K \subset B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_p}.$$

Seja $n_0 := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_p}\}$. Se $n > n_0$ e $x \in K$, existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $x \in B_{x_i}$. Logo,

$$\rho(f_n(x), f_n(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leq \rho(f_n(x), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(x)) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.1. Seja (f_n) equicontínua. Suponhamos que, para cada $x \in M$, o conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ tenha fecho completo em N. Se (f_n) converge pontualmente num subonjunto denso $D \subset M$, então (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M.

Demonstração. Basta notar que (f_n) converge pontualmente em todo o M. Com efeito, tomando arbitrariamente $x \in M$, dado $\varepsilon > 0$, existe uma bola aberta B, contendo x, tal que

$$y \in B \Rightarrow \rho(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n.$$

Escolhamos e fixemos $y \in B \cap D$. Como existe $\lim_n f_n(y)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \rho(f_m(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, se $m, n > n_0$, então

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) \leq \rho(f_m(x), f_m(y)) + \rho(f_m(y), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Sendo, pois, $(f_n(x))$ de Cauchy existe, por hipótese, $\lim_n f_n(x)$. O resultado segue-se do Lema anterior. □

2.2 Resultado principal

Antes de enunciarmos e provarmos o resultado principal, fixemos a terminologia.

Definição 2.1. Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para quaisquer

$$x,\, y \in M, \;\; \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposição 2.2. Se o espaço métrico M é compacto, então toda aplicação contínua

$$f : M \longrightarrow N$$

é uniformemente contínua.

Demonstração. Suponha que f não é contínua logo, existe $\varepsilon > 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos $x_n,\, y_n \in M$ tais que

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \tag{2.1}$$

e

$$\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Passando a uma subsequência se preciso for, supomos, pela compacidade de M, que existe $\lim x_n = a \in M$. Então, por (2.1), $\lim y_n = a$ também. Segue, da continuidade de f e da distância, que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) = \rho(f(a), f(a)) = 0,$$

o que é uma contradição, pois, $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo n. $\square$

No Teorema que veremos em seguida, o espaço métrico N será considerado como $N = \mathbb{R}$.
Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Definimos,

$$C(X, \mathbb{R}) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ f \text{ contínua}\}$$

o espaço métrico das funções contínuas com a métrica uniforme, donde segue análogo do Exemplo (1.10), que $C(X, \mathbb{R})$ é completo.

Definição 2.2. Uma família $\mathfrak{F}$ de funções é dita *uniformemente limitada* se existe $K > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K, \ \ \forall\, x \in X.$$

Podemos, finalmente, enunciar e demonstrar o seguinte

Teorema 2.2. *(Arzelá-Ascoli). Se (X, ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathfrak{F}$ de $C(X, \mathbb{R})$ é relativamente compacto se, e somente se, é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que $\mathfrak{F}$ é relativamente compacto, isto implica que o fecho $\overline{\mathfrak{F}}$ é compacto e, por sua vez, é totalmente limitado. Como, $\mathfrak{F} \subset \overline{\mathfrak{F}}$ temos que $\mathfrak{F}$ é totalmente limitado, logo, dado $\varepsilon > 0$ existem $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tais que

$$\mathfrak{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i).$$

Seja $f \in \mathfrak{F}$, arbitrário. Assim, $f \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{i_0})$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, assim, para $x \in X$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x)| \leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \max_{1\leq i\leq n} M_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M = \widetilde{M}, \end{aligned}$$

onde $M_i = \max\limits_{x\in X} |f_i(x)|$ e $M = \max\limits_{1\leq i\leq n} M_i$.
Portanto $|f(x)| \leq \widetilde{M}$, para todo $x \in X$ e para todo $f \in \mathfrak{F}$ e, consequentemente, $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitado.

Vamos agora mostrar, que $\mathfrak{F}$ é equicontínua. Sejam $f \in \mathfrak{F}$ e, $x, x' \in X$ arbitrários. Note que

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Escolha $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ tal que $f \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_j)$, ou seja,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(x')| + |f_j(x') - f(x')| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|. \end{aligned}$$

Como X é compacto, temos que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são uniformemente contínuas, em particular, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(x, x') < \delta \implies |f_j(x) - f_j(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donde segue que,

$$\rho(x, x') < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Como $f \in \mathfrak{F}$ é qualquer, segue que $\mathfrak{F}$ é equicontínuo.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo, e assim, queremos mostrar que o fecho $\overline{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ é compacto, ou seja, que $\overline{\mathfrak{F}}$ é completo e totalmente limitado. Agora, recorde que o $\overline{\mathfrak{F}}$ é fechado e está contido no espaço completo das funções contínuas $C(X, \mathbb{R})$, logo $\overline{\mathfrak{F}}$ é completo, portanto resta-nos provar que $\overline{\mathfrak{F}}$ é totalmente limitado.

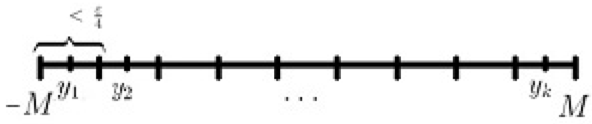
Observe que se $\mathfrak{F}$ é totalmente limitado então $\overline{\mathfrak{F}}$ é totalmente limitado. Logo, dado $\varepsilon > 0$ devemos mostrar que existe $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathfrak{F}$ tal que

$$\mathfrak{F} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_\varepsilon(f_i).$$

Por hipótese, temos o seguinte:

1. (Limitação uniforme) existe $M \geq 0\,;\ |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in \mathfrak{F}$;
2. (Equicontinuidade) existe $\delta > 0\,;\ \rho(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall x, y \in X \quad \forall f \in \mathfrak{F}$;
3. (Compacidade de X) existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X;\ \ X \subset \cup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i)$.

Agora, escolha um inteiro positivo m e divida o intervalo $[-M, M]$ em $k = 2Mm$ intervalos de comprimento $\frac{1}{m}$ de tal modo que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ os respectivos centros de cada um dos subintervalos de $[-M, M]$.



Escreva $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subset \mathbb{R}$ e seja

$$L = \{\alpha : E \to F\,;\, \alpha \quad \text{é uma função}\}$$

uma família, claramente finita, constituída por todas as possíveis funções $\alpha : E \to F$.

Para cada $\alpha \in L$ considere uma família $\mathfrak{F}_\alpha \subset \mathfrak{F}$, tal que

$$\mathfrak{F}_\alpha := \{f \in \mathfrak{F}\,;\, |f(x_i) - \alpha(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq i \leq n\} \tag{2.3}$$

onde $\alpha(x_i)$ é igual a algum y_j, $1 \leq j \leq k$, e $f(x_i)$ pertence a algum subintervalo de $[-M, M]$.

Considere a família $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ então, podemos observar que

$$\mathfrak{F} \subset \bigcup_{\alpha \in L} \mathfrak{F}_\alpha. \tag{2.4}$$

Além disso,temos (2.3)

$$\bigcup_{\alpha \in L} \mathfrak{F}_\alpha \subset \bigcup_{f \in \mathfrak{F}_\alpha} B_\varepsilon(f). \tag{2.5}$$

De fato, dados $f, g \in \mathfrak{F}_\alpha$ e $x \in X$ tem-se que, $x \in B_\delta(x_i)$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \overbrace{|f(x) - f(x_i)|}^{Por 2.} + \overbrace{|f(x_i) - \alpha(x_i)|}^{2.3} + \overbrace{|\alpha(x_i) - g(x_i)|}^{2.3} + \overbrace{|g(x_i) - g(x)|}^{Por 2.} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

logo,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

o que implica,

$$\text{diam}\, \mathfrak{F}_\alpha \leq \varepsilon$$

donde segue que

$$\mathfrak{F}_\alpha \subset B_\varepsilon(f).$$

Portanto, de (2.4) e (2.5), segue que

$$\mathfrak{F} \subset \bigcup_{f \in \mathfrak{F}_\alpha} B_\varepsilon(f).$$

□

Corolário 2.3. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações contínuos $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e suponha que existem constantes $M,\ K\ > 0$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $s,\ t \in [a,\ b]$,

$$|f_n(s) - f_n(t)| \leq K|s-t| \quad e \quad |f_n(t)| \leq M, \quad \forall\, n. \tag{2.6}$$

Então existe uma subsequência de (f_n) que é uniformemente convergente para uma certa aplicação contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Observe que as desigualdades em (2.7) nos dão a informação de que, a sequência de funções formam uma família equicontínua e uniformemente limitada. Logo, o resultado é imediato do Teorema de Arzelá-Ascoli. □

Corolário 2.4. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de aplicações contínuas $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e suponha que existem constantes $M,\ K\ > 0$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $s,\ t \in [a,\ b]$,

$$|f_n(s) - f_n(t)| \leq K|s-t| \quad e \quad |f_n(t)| \leq M, \quad \forall\, n. \tag{2.7}$$

Então existe uma subsequência de (f_n) que é uniformemente convergente para uma certa aplicação contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$.[1]

Demonstração. A demonstração segue imediata do (2.3), onde aplicamos o resultado nas sequências componentes. □

[1]Ver [2]

3 Aplicações

Finalmente, apresentaremos uma das aplicações do Teorema de Arzelá-Ascoli. Tal aplicação, o Teorema de Peano, é um importante resultado da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, o qual, sob hipóteses mais fracas do que às enunciadas no Teorema de Picard, garante a existência de soluções para Problemas de Valor Inicial (ou Problema de Cauchy) sem preocupar-se com a unicidade.

Considere o problema de valor inicial

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

de uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^n$ definida pela aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua num aberto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Uma solução da equação $x' = f(t,\, x)$ em U é uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, cujo gráfico está totalmente contido em U, isto é,

$$(t,\, \varphi(t)) \in U \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = (t,\, \varphi(t)), \;\; \forall\; t \in I.$$

As soluções de $x' = f(t, x)$ também são denominadas de *curvas integrais da equação*.
Fixado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, dizemos que uma solução φ satisfaz a condição inicial

$$\varphi(t_0) = x_0, \;\text{ se } t_0 \in I$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0,$$

neste caso dizemos que φ é uma solução do problema de valor inicial (3.1).

Observe que se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema (3.1) em I, então integrando $x^{'} = f(t, x)$ em I obtemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \;\text{ para }\; t \in I. \tag{3.2}$$

Reciprocamente, se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz (3.2), então usando o Teorema Fundamental do Cálculo concluímos que φ é uma solução de (3.1) em I.

Podemos garantir a existência de soluções do problema de valor inicial (3.1) supondo apenas a continuidade de $f(t,\, x)$. Para isto iremos considerar $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $(t_0, x_0) \in U$ um ponto qualquer fixado. Escolhemos constantes $a > 0,\ b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U,$$

onde $I_\alpha = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| \leq b\}$ e finalmente fixamos as constantes

$$M := max\{|f(t,x)|;\ (t,x) \in R_{a,b}\}$$

e

$$\alpha = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Lema 3.1. Dado qualquer $0 < \varepsilon \leq \delta$ existe uma aplicação contínua $\varphi_\varepsilon : [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$, valem

$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(u)| \leq M|t - u| \ \ e \ \ |\varphi_\varepsilon(t) - x_0| \leq b \tag{3.3}$$

e, para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale

$$\varphi_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_\varepsilon(s - \varepsilon))ds. \tag{3.4}$$

Demonstração. Definimos

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_0 & t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds & t \in [t_0, t_0 + \alpha_1], \end{cases}$$

onde $\alpha_1 = min\{\alpha, \epsilon\}$. Observe que para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha_1]$ vale

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_\varepsilon(s - \varepsilon))ds,$$

pois $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha_1$, então $t_0 - \delta \leq t_0 - \epsilon \leq s - \epsilon \leq t_0$. Portanto, (3.4) ocorre em $[t_0, t_0 + \alpha_1]$.

As desigualdades em (3.3) são imediatas para $t, u \in [t_0 - \delta, t_0]$. Para

$$u, t \in [t_0, t_0 + \alpha_1],$$

temos

$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(u)| \leq \left| \int_{u}^{t} f(s, x_0)ds \right| \leq M|t - t_0|$$

e

$$|\varphi_\varepsilon(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds \right| \leq M|t-u| \leq M\alpha_1 \leq M\alpha \leq b.$$

Observe que se $u \leq t_0 \leq t$, temos

$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(u)| \leq |\varphi_\varepsilon(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq b.$$

De modo que as desigualdades (3.3), ocorrem para quaisquer $t, u \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha_1]$.

Se $\alpha_1 = \alpha$, o lema está provado; se $\alpha_1 < \alpha$, tomamos $\alpha_2 = min\{\alpha, 2\epsilon\}$ e definimos

$$\varphi_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds \quad t \in [t_0 + \alpha_1, t_0 + \alpha_2],$$

Assim, estendemos φ_ε a uma aplicação contínua satisfazendo (3.3) para $t, u \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha_2]$.

Se $\alpha_2 < \alpha$, tomamos $\alpha_3 = min\{\alpha, 3\epsilon\}$ e continuamos a estender φ_ε até obter, em no máximo $n < \frac{\alpha}{\epsilon} + 1$ passos, uma apliacação contínua $\varphi_\varepsilon : [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$, valem (3.3) e para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale (3.4). □

Lema 3.2. Seja (φ_n) uma sequência de $\mathcal{C}([a-1,\, b], \mathbb{R}^m)$ que converge uniformemente para φ em $[a-1,\, b]$ e defina $\tilde{\varphi}_n(s) = \varphi_n(s - \frac{1}{n})$ para $a \leq s \leq b$. Mostre que $(\tilde{\varphi}_n)$ converge uniformemente para a restrição de φ a $[a,\, b]$.

Demonstração. Por hipótese, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniformemente em $\mathcal{C}([a-1,\, b], \mathbb{R}^m)$, o que implica que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_n(s) - \varphi(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; \forall\, n \geq n_0, \;\; \forall s \in [a-1,\, b]. \tag{3.5}$$

Como cada $\varphi_n \in \mathcal{C}([a-1,\, b], \mathbb{R}^m)$ é contínua e está definida em um compacto segue que, φ_n é uniformemente contínua, ou seja, existe $\delta > 0$

$$\|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon, \;\text{ sempre que } |s-t| < \delta, \forall\, s, t \in [a-1, b]. \tag{3.6}$$

Daí, para $s \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_n(s) - \varphi(s)\| &= \|\tilde{\varphi}_n(s) - \varphi_n(s) + \varphi_n(s) - \varphi(s)\| \\ &\leq \|\tilde{\varphi}_n(s) - \varphi_n(s)\| + \|\varphi_n(s) - \varphi(s)\| \\ &\leq \|\tilde{\varphi}_n(s) - \varphi_n(s)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \|\varphi_n(s - \frac{1}{n}) - \varphi_n(s)\| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq n_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por (3.6), temos

$$\|\varphi_n(s - \frac{1}{n}) - \varphi_n(s)\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \;\text{ se }\; |s - (s - \frac{1}{n})| < \delta.$$

Tomando $n_1 = max\{n_0, 1/\delta\}$, segue que

$$\|\tilde{\varphi}_n(s) - \varphi(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_1.$$

Portanto,

$$\tilde{\varphi}_n \longrightarrow \varphi \text{ uniformemente em } \mathcal{C}\left([a,\, b]\right).$$

□

Lema 3.3. Sejam (f_n) uma sequência de $\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}^m\right)$ que converge uniformemente para f em $[a,b]$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação uniformemente contínua. Defina $h_n,\ h \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}^k\right)$ pela composição, ou seja, $h_n(s) = g(f_n(s))$ e $h(s) = g(f(s))$ para $a \leq s \leq b$. Mostre que (h_n) converge uniformemente para h em $[a,b]$.

Demonstração. Queremos mostrar que (h_n) converge uniformemente para h em $[a,b]$. Sejam $h_n(s) = g(f_n(s))\ e\ h(s) = g(f(s))$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|g(u) - g(v)\| < \varepsilon \text{ sempre que } \|u - v\| < \delta\ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^m$$

logo, como (f_n) converge uniformemente, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|f_n(s) - f(s)\| < \delta, \text{ para todo } n > n_0 \text{ e para todo } \quad \in [a,b].$$

Daí, segue-se que

$$\|h_n(s) - h(s)\| = \|g(f_n(s)) - g(f(s)) \leq \varepsilon,$$

$\forall\, n \geq n_0,\ \ \forall\, s \in [a,b]$. □

Agora utilizando o Teorema de Ascoli-Arzelá obtemos a existência de soluções para equações contínuas.

Teorema 3.1. (Cauchy-Peano). Sejam $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua definida no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0,\ b > 0$ tais que $R_{a,\,b} = I_a \times B_b \subseteq U$. Então, existe uma solução do problema do valor inicial (3.1) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha]$ onde $\alpha > 0$ é dado por $\alpha = min\{a,\ \frac{b}{M}\}$, com $M > 0$ uma cota superior qualquer de $|f(t,\ x)|$ no retângulo $R_{a,\,b}$.

Demonstração. considerando às hipóteses do teorema, fixamos $\delta > 0$ e, para cada $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tomamos a aplicação $\varphi_n = \varphi_{\varepsilon_n}$ como no Lema 3.1. Pelas desigualdades em (3.3), temos que, (φ_n) em $\mathcal{C}([t_0 - \delta, t_0 + \alpha], R_{a,b})$ satisfaz as hipóteses do Corolário 2.3, o qual, garante a existência de uma aplicação contínua $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \longrightarrow R_{a,b}$ que é o limite uniforme de uma subsequência de (φ_n). Pelos lemas (3.2) e (3.3), vimos que, da convergência uniforme de $\varphi_n(s) \longrightarrow \varphi(s)$ no compacto $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ e da continuidade uniforme de f no compacto $R_{a,b}$ decorre que

$$f(s, \varphi_n(s - \frac{1}{n})) \longrightarrow f(s, \varphi(s))$$

converge uniformemente em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Fixamos $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, e passando o limite com $n \longrightarrow \infty$ de ambos os lados da equação

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s - \frac{1}{n}))ds,$$

donde obtemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

isto é, concluímos que $\varphi(t)$ é uma solução de $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$. Analogamente, mostramos que existe uma solução para $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$ em $[t_0 - \alpha, t_0]$ e assim, como ambas soluções possuem valor x_0 e derivada $f(t_0, x_0)$ no ponto t_0, basta concatená-las, para obter uma solução definida em todo intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. $\square$

Conclusão

objetivo desta pesquisa foi abordar o Teorema de Arzelá-Ascoli e aplicá-lo num resultado que dá garantias suficientes para a existência de soluções de uma EDO. Para obter as demonstrações de tais teoremas, foi necessário o estudo de diversos conceitos relacionados á análise matemática. Sendo assim, preocupamo-nos em organizar bem a estrutura deste trabalho, para que ao ser consultado, o leitor não tenha dificuldades em entender o que abordamos aqui.

Todavia, salientamos que na aplicação foi possível perceber que o Teorema de Peano configura-se como um resultado forte na teoria das equações diferenciais ordinárias, exigindo apenas na condição de regularidade da função que a mesma seja contínua.

Em suma, diante do estudo que propomos neste trabalho, esperamos que em face do que foi apresentado, possamos contribuir para uma melhor compreensão por parte do leitor. E assim, instiga-los á pesquisa, não só do teorema de Arzelá-Ascoli e das suas aplicações, mas também de qualquer outro resultado que se queira conhecer da análise matemática.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon L. Espaços Métricos. Associação Instituto Nacional de Matemàtica Pura e Aplicada, 2003, 299pp.(Projeto Euclides)

[2] DOERING, Claus Ivo. Equações Diferenciais Ordinárias/ Claus Ivo Doering, Artur Oscar Lopes. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 421 p.: il.; 23 cm. (Coleção matemática universitária)

[3] KREYSZIG, Erwin. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley Classic Library, 1989.

[4] SOTOMAYOR Tello, Jorge Manuel. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias/Jorge Sotomayor - Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides)

[5] BRÉZIS, H.;Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, 2011.

[6] LIMA, Elon L. Curso de análise: vol. 2. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] LIMA, Elon Lages. Análise real: vol. 1. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

A Contexto Histórico

Figura A.1: Giulio Ascoli

Giulio Ascoli, nasceu em 20 de Janeiro de 1843 em Trieste, Itália e morreu em 12 de Julho de 1896 em Milão. Ele foi um matemático Italiano, estudante da Escola Normal de Pisa, onde graduou-se em 1868.

Por volta de 1872 ele se tornou professor de Álgebra e Cálculo do *Politecnico di Milano University* e em 1879 foi professor de matemática na *Reale Istituto Tecnico Superiore,* onde, em 1901, o homenagearam afixando uma placa que o lembra.

Membro correspondente do Istituto Lombardo, fez importantes contribuições para a teoria de funções de uma variável real e à série de Fourier. Por exemplo, Ascoli introduziu equicontinuidade em 1884, um tema considerado como um dos conceitos fundamentais da teoria das funções reais.

Por sua vez, Cesare Arzelá nasceu em 6 de março de 1847, em Santo Stefano di Magra, La Spezia, Itália e morreu em 15 de março de 1912, em sua Terra Natal. De família com meios financeiros limitados. Frequentou o liceu em Sarzana por dois anos 1856-1858. Posteriormente, ele foi para o Liceu, em Pisa, onde passou três anos 1858-1861. Após ter ganho um concurso de admissão para a Escola Normal Superior de Pisa, que lhe deu uma bolsa de estudos, ele começou seus estudos como um estudante de ciências matemáticas e

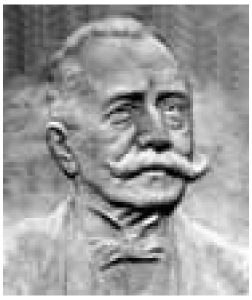


Figura A.2: César Arzelá

físicas, em novembro de 1861. Em 1869 Arzelá graduou-se tendo seu trabalho concluído com a dissertação sobre a teoria do potencial.

Depois de se formar, Arzelà continuou a frequentar cursos de análise superior, física matemática e mecânica superior, entre outros. Iniciou sua carreira de professor no Liceu de Macerata e, após dois anos, pediu licença para continuar seus estudos em Pisa no ano de 1872-1873, passando a frequentar um curso sobre a elasticidade dado por Enrico Betti, que também o orientou em sua tese e, um curso sobre a teoria de funções de uma variável real dada por Ulisse Dini.

Arzelá deixou várias contribuições, entre elas, o mais importante trabalho científico, onde elaborou o conceito de convergência uniforme gradual que dá uma condição necessária e suficiente para uma série de funções contínuas convergir para uma função contínua (1883). Na verdade, ele publicou três artigos em 1885: Sulla Integrazione por série; Sulla integrabilità di una serie di Funzioni e Sui prodotti Infiniti. Foi quatro anos depois que ele publicou o resultado para o qual ele é mais conhecido hoje em seu artigo Sulle Funzioni di linee (1895). Ele provou o resultado hoje conhecido como o teorema de Ascoli - Arzelà sobre a existência de uma subsequência uniformemente convergente em cada seqüência de funções equilimitada e equicontinua. Ambos, Giulio Ascoli e Arzelà tinham estudado o conceito de equicontinuidade e o teorema de Arzelà era uma generalização de um muito mais fraco do que tinha sido provado por Ascoli, em 1884.

Note-se que hoje o teorema de Ascoli - Arzelà é um resultado sobre compacidade mas, essa ideia só foi introduzida por Maurice Fréchet em 1904.

B Desigualdade de Minkowski

Exemplo 1.3

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.1}$$

onde $x = (\xi_i) \in l^p$ e $y = (\eta^i) \in l^p$, e $p \geq 1$. Para somas finitas essa desigualdade foi dada por $H.Minkowski$ (1896).

Demonstração. Para $p = 1$ a desigualdade segue prontamente a apartir da desigualdade triangular para números.

Seja $p > 1$. Para simplificar as fórmulas vamos escrever $\xi_i + \eta_i = \omega_i$. A desigualdade triangular para números nós dá

$$|\omega_i|^p = |\xi_i+\eta_i||\omega_i|^{p-1} \leq (|\xi_i|+|\eta_i|)|\omega_i|^{p-1}. \tag{B.2}$$

Aplicando o somatório de j variando a um n qualquer fixo, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n}|\xi_j||\omega_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j||\omega_j|^{p-1}. \tag{B.3}$$

Para a primeira soma à direita, aplicamos a desigualdade de Holder dada por

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{B.4}$$

e encontramos

$$\sum_{j=1}^{n}|\xi_j||\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{n}(|\omega_m|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{B.5}$$

Á direita temos simplesmente

$$(p-1)q = pq - q = p + q - q = p$$

pois, $pq = p + q$ onde p e q são ditos *expoentes conjugados*. Já que, sendo $p > 1$ definimos q por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O que implica $(p-1)(q-1) = 1$. Assim,

$$\frac{1}{p-1} = q - 1,$$

de modo que

$$u = t^{p-1} \text{ implica } t = u^{q-1}$$

Analogamente, da última soma em (B.3), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j||\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{n} |\omega_m|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{B.6}$$

Daí, de (B.5) e (B.6) segue que

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p \leq \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \left(\sum_{m=1}^{n} |\omega_m|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{B.7}$$

Dividindo pelo o último fator na direita e observando que $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, obtemos (B.1) com n em vez de ∞.

Agora $n \longrightarrow \infty$. À direita, isso gera duas séries que convergem, porque, $x, y \in l^p$. Por isso, a série no lado esquerdo também converge, e (B.1) está provada.

Assim, de $(B.1)$ segue-se que a série em

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{B.8}$$

converge. (B.1) também produz a desigualdade triangular. Na verdade, tendo qualquer $x, y, z \in l^p$, escrevendo $z = (\zeta_j)$ e usando a desigualdade triangular para números, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \left(\sum |\xi_j - \eta_j|^p\right); \\ &\leq \left[\sum (|\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum |\xi_j - \zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |\zeta_j - \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y). \end{aligned}$$

Isto completa a prova de que l^p é um espaço métrico. $\square$

C Demonstração do Exemplo (1.7)

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x_n,\, x_{n+1},\, \ldots\},$$

temos

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$$

e os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = \inf X$ onde $n = 1,\, 2,\, 3, \ldots$. Então, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b = \sup \cdot X_1$. Como toda sequência monótona limitada de números reais é convergente, então, existe o número $a = \lim a_n$. Assim temos que $a = \lim x_n$. Daí, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n). De fato, sejam dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.[1] Logo, sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como,

$$a_m = \inf X_m,$$

existe $n \geq m$ e, portanto, $n > n_1$ tal que

$$a_m \leq x_n < a + \varepsilon,$$

isto é,

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

□

[1]Ver [1], Proposição 3, pág. 162 e Proposição 4, pág. 119.

D Mais alguns Resultados

Proposição D.1. Se uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $x \in X$.

Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donde segue o resultado. $\square$

Proposição D.2. (Weierstrass). Se M é compacto, toda função real contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Isto é, existem $x_0,\ x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in M$.

Demonstração. Como a imagem $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Logo, é limitado e fechado. Donde segue que, f é limitada e tomando $\alpha = \inf f(M)$, $\beta = \sup f(M)$, daí $\alpha \in f(M)$, $\beta \in f(M)$. O que implica que, existem $x_0,\ x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = \alpha$, $f(x_1) = \beta$. Portanto, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$. $\square$