UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I - CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

DIEGO DIAS FELIX

A integral de Lebesgue e alguns resultados de convergência nos Espaços L_p

Campina Grande/PB

2014

DIEGO DIAS FELIX

A integral de Lebesgue e alguns resultados de convergência nos Espaços L_p

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Especialista.

Orientadora: **Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas**

Campina Grande - PB

2014

F316i Felix, Diego Dias.
A integral de Lebesgue e alguns resultados de convergência nos Espaços Lp [manuscrito] / Diego Dias Felix. - 2014.
76 p.

Digitado.
Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Integral de Lebesgue. 2. Teoremas de Convergências. 3. Espaços Lp. I. Título.

21. ed. CDD 515

Diego Dias Felix

A integral de Lebesgue e alguns resultados de convergência nos Espaços L_p

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Estadual da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Aprovada em 14/03/2014

Luciana Freitas

Profª Dra. Luciana Roze de Freitas

Orientadora

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

Examinador

Thiciany Matsudo Iwano

Profª Ms. Thiciany Matsudo Iwano

Examinadora

Ao meu pai Antônio Felix da Costa e a minha mãe Joana Darque Dias Felix que um dia sonharam e hoje compartilham mais um importante momento comigo, momento de conquista. A meus irmãos Diogo, Hugo e Ana Clara aos quais tenho muito amor. A minhas cunhadas. A Sebastiana Felix Nascimento (Mocinha), minha segunda mãe. A "Denga"com amor e carinho.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A DEUS por todas as coisas maravilhosas que me foram concedidas, onde dentre tantas ressalto duas: a minha FAMÍLIA e o curso de Matemática. Sou grato a DEUS por ter me dado fôlego para persistir tanto nesse curso. Sem DEUS não teria chegado até aqui. A ELE devo a minha vida, tudo que sou e tudo que tenho.

A minha família: Mainha, Painha e Meus Irmãos, os quais mesmo distante sempre estiveram presentes, em meu coração, dando-me força e coragem para superar todas as barreiras encontradas em minha jornada. EU AMO VOCÊS! A Dona Mocinha, uma senhora que deu oportunidade para um desconhecido, vivendo em seu lar, lutar por um futuro melhor... Faltam palavras para expressar a minha gratidão por tudo que a senhora realizou em minha vida; a senhora é uma benção de DEUS em minha vida, Muito Obrigado!

A Prof(a). Dra. Luciana Roze de Freitas, minha orientadora, pelo suporte, correções e incentivos, por todo apoio e conhecimento que, brilhantemente, deu-me durante todo curso e, especialmente, pela confiança em mim depositada ao assumir a orientação. Não posso deixar de agradecê-la por toda compreensão e paciência diante de tantos fatos ocorridos na produçãoo deste trabalho. Agradeço Prof(a). Dra. Luciana Roze de Freitas pela oportunidade de termos trabalhados juntos.

Aos meus familiares.

Ao motorista Osvaldo, por nossa amizade e por todos os favores feitos.

A todos os meus amigos, em especial aos que fizeram parte desse curso: Alex, Klécio, Mizaelle e Rossane. Não posso deixar de agradecer a Rossane: A você amiga Rossane, que neste ano difícil, foi uma amiga que me deu força e colaborou muito para a conclusão deste curso e, a obtenção da vaga no Mestrado, ai vai meu MUITO OBRIGADO. Ao amigo Mauri, por ajudar-me tirando dúvidas de digitação.

Ao Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira, pela paciência em ajudar-me na edição final desse trabalho. A todos os Professores que contribuíram para minha formação, onde destaco os desse curso: Abigail, Aldo, Isabelle, Joselma, Nathan e Thiciany.

Aos professores: Dr. Davis Matias de Oliveira e Ms. Thiciany Matsudo Iwano que formaram a banca examinadora e me deram ótimas sugestões para o trabalho.

?

RESUMO

Neste trabalho, iremos apresentar, em partes, a teoria da Integral de Lebesgue, onde apresentaremos alguns Teoremas sobre convergências e, vamos abordar alguns resultados de convergência nos Espaços L_p. Como foco principal iremos relacionar os Modos de Convergências Uniforme, Pontual, em Quase Todo Ponto, em L_p, em Medida e Quase Uniforme neste espaços.

Palavras-chaves: Integral de Lebesgue; Teoremas de Convergências; Espaços L_p; Relação entre os Modos de Convergências.

ABSTRACT

In this paper, we present, in part, the theory of Lebesgue integral, which present some theorems on convergence and, let's address some results of convergence in L_p spaces. Main focus will relate the modes Uniform Convergence, Spot, almost everywhere, L_p, and Almost Uniform Measure in these spaces.

Keywords: Lebesgue integral; Convergence theorems; L_p spaces; Relationship between Modes Convergence.

SUMÁRIO

Introdução

O método de calcular áreas e volumes de figuras geométricas complicadas, por meio de áreas e volumes de figuras mais simples, já era usado por Arquimedes (287-212 A.C). Embora essa ideia seja tão antiga, sua formalização matemática, denominada teoria da integração, teve seu apogeu no século passado.

Com os trabalhos de Cauchy $(1787-1857)$ e Riemann $(1826-1866)$ o conceito de integral foi estabelecido em bases rigorosas, tornando-se um poderoso instrumento, para época, na resolução de inúmeros problemas. A teoria de integração baseada nas ideias de Riemann predominaram durante muito tempo, porém esta teoria contém certos inconvenientes que a torna inadequada ao estudo de vários problemas da Análise Matemática. Deste modo, deveria-se obter um conceito de integral tal que a nova classe de funções integráveis contivesse a classe de funções integráveis a Riemann (onde as duas integrais deveriam coincidir) e na qual os inconvenientes da integral de Riemann desaparecessem ou, pelo menos, fossem minimisados.

A partir daí, surge Henri Lebesgue $(1875-1941)$ com um conceito de integral que baseia-se na noção de medida de conjuntos. Suas ideias, em princípio, não foram muito bem aceitas. Todavia, a originalidade dessas ideias encontrou crescente reconhecimento, vindo a complementar certas lacunas inerentes a integral de Riemann.

Neste trabalho estudaremos a teoria da Integral de Lebesgue dando ênfase as relações entre os modos de convergências nos espaços L_p.

No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos de funções mensuráveis e medida, teorias fundamentais para o objetivo deste trabalho.

No segundo capítulo desenvolveremos a Integral de Lebesgue e os Espaços L_p. Tais espaços ocorrem com frequência nos estudos de Análise Matemática. Além da própria importância destes espaços, eles serão examinados para indicar as aplicações de alguns resultados deste trabalho.

No terceiro capítulo constará três seções nas quais apresentaremos alguns resultados de convergência nos Espaços L_p, Convergência em Medida e Convergência Quase Uniforme. Ainda serão apresentados outros importantes resultados como a reciproca do Teorema da Convergência Dominada, a generalização do Teorema da Convergência Dominada e o Teorema de Egoroff.

Finalmente, no quarto capítulo, estabeleceremos as relações entre os modos de convergência apresentados neste trabalho.

Capítulo 1

Funções Mensuráveis e Medida.

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de σ-álgebra, funções mensuráveis, com algumas propriedades, e definiremos importantes funções, tais como, função característica de um conjunto, parte positiva e parte negativa de uma função e função real estendida, essa última após definirmos o que seja o sistema numérico real estendido. Será apresentado o conceito de medida de conjuntos juntamente de algumas propriedades, das quais destaca-se a propriedade μ-q.t.p. em um conjunto X, e fechamos a seção definindo o que seja uma medida com sinal ou carga.

1.1 Funções Mensuráveis

Definição 1.1.1 *Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é dita ser uma σ-álgebra se:*

a) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$;

c) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathcal{A}$.

Observação 1.1.2 *Um par ordenado $(X, \mathcal{A})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, é chamado um* ***espaço mensurável****. Um elemento de $\mathcal{A}$ é dito conjunto* ***$\mathcal{A}$-mensurável*** *ou* ***mesurável****.*

Exemplo 1.1.3 *Seja X um conjunto não enumerável. O conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset X; A \text{ é enumerável ou } A^C \text{ é enumerável} \right\}$$

é uma σ-álgebra.

Solução:
a) Temos que $\varnothing \in \mathcal{A}$, pois, $\varnothing$ é enumerável e, $X^C = \varnothing \Longrightarrow X \in \mathcal{A}$;

b) Seja $A \in \mathcal{A}$, então A é enumerável ou A^C é enumerável: Se A é enumerável, então $A = \left(A^C\right)^C$ oque implica que $A^C \in \mathcal{A}$. Se A^C é enumerável, então $A^C \in \mathcal{A}$;

c) Vamos mostrar que se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, então $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \mathcal{A}$.
Suponha que A_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$ é enumerável. Portanto,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Agora, suponha que ao menos um dos A_n não é enumerável. Seja A_{n_0} esse conjunto. Neste caso, $A_{n_0}^C$ é enumerável. Segue, das Leis de Morgan, que

$$\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right)^C = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} A_n^C \subset A_{n_0}^C$$

logo, $\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right)^C$ é enumerável, e portanto,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Exemplo 1.1.4 (σ-álgebra gerada por uma coleção de subconjuntos) *Seja X um conjunto qualquer não vazio e seja $\bar{A}$ uma coleção de subconjuntos de X.* ***Afirmação:*** *Existe uma menor σ-álgebra $S_{\bar{A}}$ em X que contém $\bar{A}$.*

Solução:
De fato, considere $S_{\bar{A}} = \underset{\alpha}{\cap}\mathcal{A}_\alpha$, onde $\mathcal{A}_\alpha$ é uma σ-álgebra que contém $\bar{A}$.
a) $S_{\bar{A}} \neq \varnothing$, pois $\mathcal{P}(X)$[1] é uma σ-álgebra e $\mathcal{P}(X) \supset \bar{A}$;

b) $\varnothing, X \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\alpha$. Logo, $\varnothing, X \in \underset{\alpha}{\cap}\mathcal{A}_\alpha \Longrightarrow \varnothing, X \in S_{\bar{A}}$;

c) $A \in S_{\bar{A}} \Longrightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\alpha \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\alpha \Longrightarrow A^C \in \underset{\alpha}{\cap}\mathcal{A}_\alpha \Longrightarrow A^C \in S_{\bar{A}}$;

d) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{\bar{A}} \Longrightarrow A_n \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\alpha$ e $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\alpha \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in \underset{\alpha}{\cap}\mathcal{A}_\alpha \Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n \in S_{\bar{A}}$;

e) Seja $\mathcal{A}_{\alpha_0}$ uma σ-álgebra que contém $S_{\bar{A}}$. Assim, $\underset{\alpha}{\cap}\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_{\alpha_0}$, isto é, $S_{\bar{A}} \subset \mathcal{A}_{\alpha_0}$.

Observação 1.1.5 *Se $B \subset S_{\bar{A}}$, então $S_B \subset S_{\bar{A}}$.*

Exemplo 1.1.6 (σ-álgebra de Borel) *Seja X um espaço métrico. A σ-álgebra gerada pela família formada pelos conjuntos abertos de X é uma σ-álgebra que chamamos de* ***σ-álgebra de Borel***[2] *e denotamos por $\beta_X \equiv \beta$. Os elementos de β são os conjuntos* ***de Bolerou*** *ou* ***Bolerianos****.*

[1] A coleção $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}$ representa o conjunto das partes de X.

[2] Félix Édouard Justin Émile Borel (Saint-Affrique, 7 de janeiro de 1871 — Paris, 3 de fevereiro de 1956) foi um matemático e político francês. Juntamente com René-Louis Baire e Henri Lebesgue, foi um dos pioneiros da teoria da medida e suas aplicações à teoria da probabilidade.

Definição 1.1.7 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função $\mathcal{A}$-mensurável ou simplesmente mensurável quando para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$[f > \alpha] := \{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

é mensurável , isto é, quando $[f > \alpha] \in \mathcal{A}$, ou ainda, $f^{-1}(\alpha, +\infty) \in \mathcal{A}$.

Exemplo 1.1.8 *Toda função constante é mensurável.*

Solução:
Com efeito, sejam

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = c \end{array}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo:

$$[f > \alpha] = \begin{cases} \varnothing, & \text{se} \quad \alpha \geq c \\ X, & \text{se} \quad \alpha < c \end{cases},$$

e portanto, f é mensurável.

Exemplo 1.1.9 (Função Característica) *Dado um conjunto $E \subset X$, a **função característica** associada a E, denotada por $\mathcal{X}_E$, é definida como sendo a função $\mathcal{X}_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in E \\ 0, & se \quad x \in E^C \end{cases}.$$

A função $\mathcal{X}_E$ é mensurável se, e somente se, $E \in \mathcal{A}$.

Solução:
Ora,

$$[\mathcal{X}_E > \alpha] = \begin{cases} \varnothing, & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ E, & \text{se} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ X, & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{X}_E$ é mensurável se, e somente se, $E \in \mathcal{A}$.

Exemplo 1.1.10 *Valem as propriedades:*

a) *Toda função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é β-mensurável.*

b) *Toda função monótona $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é β-mensurável.*

Solução:

a) Sendo f contínua, temos que $f^{-1}(\alpha,+\infty) \in \beta$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e portanto, f é mensurável.

b) Suponha que f é monótona crescente, no sentido de que $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$. Note que, $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\}$ assume uma das quatro formas:

$$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R}; x > \alpha\} \\ \{x \in \mathbb{R}; x \geq \alpha\} \\ \mathbb{R} \\ \varnothing \end{cases}.$$

Em qualquer caso $[f > \alpha] \in \beta$, e portanto, f é β-mensurável.

O próximo Lema mostra que a forma do conjunto na definição de mensurabilidade não é única.

Lema 1.1.11 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

b) $B_\alpha = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

c) $C_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

d) $D_\alpha = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Prova: De acordo com o Lema 1.1.11. diego

As equivalências $(a) \Longleftrightarrow (b)$ e $(c) \Longleftrightarrow (d)$ decorrem dos seguintes fatos

$$([f > \alpha])^C = [f \leq \alpha] \text{ e } ([f < \alpha])^C = [f \geq \alpha].$$

$[(a) \Longrightarrow (c)]$ Note que se (a) ocorre, então $A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $C_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Com efeito,

$$x \in C_\alpha \Longrightarrow f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in A_{\alpha-\frac{1}{n}},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

e

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \Longrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x) \geq \alpha \Longrightarrow x \in C_\alpha. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) obtemos $C_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Supondo (a), temos que

$$A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}.$$

Assim, $C_\alpha \in \mathcal{A}$ o que implica que vale (c).

$[(c) \Longrightarrow (a)]$ Se $C_\alpha \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, então $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, assim, $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que $A_\alpha = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$. Com efeito,

$$x \in A_\alpha \Longrightarrow f(x) > \alpha \Longrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} > \alpha$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então, $x \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$. Agora,

$$x \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \Longrightarrow x \in C_{\alpha+\frac{1}{n_0}} \Longrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} > \alpha \Longrightarrow x \in A_\alpha.$$

Assim, $A_\alpha = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$, de onde segue que $A_\alpha \in \mathcal{A}$, ou seja, vale (a). ■

Agora, mostraremos algumas operações com funções mensuráveis.

Lema 1.1.12 *Sejam f e g funções a valores reais mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então, as funções $cf, f \pm g, f^2, fg$ e $|f|$ são mensuráveis.*

Prova:

a) cf é mensurável:

i) $c = 0 \Longrightarrow cf \equiv 0$;

ii) $c > 0 \Longrightarrow \{x \in X; cf > \alpha\} = \left\{x \in X; f > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathcal{A}$;

iii) $c < 0 \Longrightarrow \{x \in X; cf > \alpha\} = \left\{x \in X; f < \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathcal{A}$;

logo, de **(i)**, **(ii)** e **(iii)**, obtemos que cf é mensurável.

b) $f + g$ é mensurável:

Para cada $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina

$$S_r = (\{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\}) \in \mathcal{A}.$$

Afirmação:

$$\{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} = \underset{r\in\mathbb{Q}}{\cup} S_r \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Portanto, $f + g$ é mensurável.

Justificativa de (1.3):

Se $x \in X$ verifica $f(x) + g(x) > \alpha$, então $f(x) > \alpha - g(x)$. Escolhendo $r_0 \in \mathbb{Q}$, verificando $\alpha - g(x) < r_0 < f(x)$, obtemos

$$g(x) > \alpha - r_0 \text{ e } f(x) > r_0,$$

o que mostra que $x \in S_{r_0}$. Logo,

$$x \in \underset{r\in\mathbb{Q}}{\cup} S_r \Longrightarrow \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} \subseteq \underset{r\in\mathbb{Q}}{\cup} S_r. \tag{1.4}$$

Por outro lado, se $x \in S_r$, então

$$f(x) > r \ e \ g(x) > \alpha - r, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ e \ \forall r \in \mathbb{Q},$$

o que implica que

$$f(x) + g(x) > r + \alpha - r = \alpha.$$

Assim,

$$S_r \subseteq \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}. \tag{1.5}$$

Portanto, de (1.4) e (1.5), obtemos (1.3).

c) f^2 é mensurável:

i) $\alpha < 0$, temos

$$\left\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\right\} = X \in \mathcal{A};$$

ii) $\alpha \geq 0$, temos

$$\left\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\right\} = \left\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\right\} \in \mathcal{A},$$

e portanto, f^2 é mensurável.

d) fg é mensurável:

Basta verificar que $fg = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\}$, e portanto, pelos item $(a), (b)$ e (c), fg é mensurável.

c) $|f|$ é mensurável:

i) $\alpha < 0 \Longrightarrow [|f| > \alpha] = X \in \mathcal{A}$;

ii) $\alpha \geq 0 \Longrightarrow [|f| > \alpha] = [f > \alpha] \cup [f < -\alpha] \in \mathcal{A}$;

e portanto, $|f|$ é mensurável. ∎

Definição 1.1.13 (Parte Positiva e Parte Negativa de uma função) *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Denotaremos por $f^+, f^- : X \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções não-negativas definidas por $f^+ = \sup\{f(x), 0\}$ e $f^- = \sup\{-f(x), 0\}$. A função f^+ é a parte positiva de f e f^- é a parte negativa de f.*

Note que:

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-$$

daí,

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \text{ e } f^- = \frac{|f| + f}{2}.$$

Com isso, concluímos que uma função f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são funções mensuráveis.

O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$[3] consiste do conjunto $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ e é chamado **sistema numérico real estendido.**

Agora, queremos definir mensurabilidade de funções reais estendidas.

Definição 1.1.14 (Função Real Estendida) *Uma função a valores reais estendido $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensuráveis se o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observação 1.1.15 *Denotaremos por $M(X,\mathcal{A})$ a coleção de todas as funções $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que são $\mathcal{A}$-mensuráveis. Se $f \in M(X,\mathcal{A})$, então os conjuntos*

$$A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > n\}$$

e

$$B = \{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) \geq -n\}\right]^C$$

são mensuráveis. Note que:

$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) > n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > n\},$$
$$x \in B \Longleftrightarrow f(x) \leq -n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) < -n\}.$$

Lema 1.1.16 *Seja $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então, f é mensurável se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{x \in X;\ f(x) = +\infty\}$$

e

$$B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$$

são mensuráveis e a função $f_1 : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \notin A \cup B \\ 0, & se \quad x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável.

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Suponha que $f \in M(X,\mathcal{A})$. Pela observação anterior, temos que $A, B \in \mathcal{A}$.

$i)$ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} &= \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A \\ &= \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^C \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

[3]Uma razão para considerar $\overline{\mathbb{R}}$ é que é conveniente dizer que o comprimento da reta é $+\infty$. Além disso, podemos definir o supremo de um conjunto não vazio que não tem limite superior como sendo $+\infty$, então todo subcojunto não vazio de $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) tem um único supremo (ou similarmente um único ínfimo) em $\overline{\mathbb{R}}$.

De fato,

$$\begin{aligned} y \in \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} &\Longrightarrow y \notin A \cup B \Longrightarrow f_1(y) = f(y) \\ &\Longrightarrow y \in \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \subseteq \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A.$$

Por outro lado,

$$y \in \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A \Longrightarrow f(y) > \alpha \ e \ y \notin A,$$

como $y \notin B$, então $y \notin A \cup B$. Segue, da definição de f_1, que

$$f_1(y) = f(y) \Longrightarrow f_1(y) > \alpha \Longrightarrow y \in \{x \in X; f_1(x) > \alpha\},$$

daí,

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A \subseteq \{x \in X; f_1(x) > \alpha\}.$$

Assim,

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A.$$

$ii)$ Agora, suponha que $\alpha < 0$. Neste caso,

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B \in \mathcal{A}.$$

De fato,

$$f_1(x) > \alpha \Longleftrightarrow f(x) > \alpha \text{ ou } x \in A \cup B,$$

assim,

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \underbrace{\{x \in X; f(x) > \alpha\}}_{A\subset} \cup A \cup B = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B.$$

Portanto, de (i) e (ii), obtemos que f_1 é mensurável.

$(\Longleftarrow)$ Se $A, B \in \mathcal{A}$ e f_1 é mensurável, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A \text{ para } \alpha \geq 0 \tag{1.6}$$

e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \setminus B \text{ para } \alpha < 0. \tag{1.7}$$

Portanto, f é mensurável.

Justificativas de (1.6) e (1.7):

(1.6) Dado
$$x \in \{x \in X; f(x) > \alpha\},$$
temos que ou $x \in A$ ou $f_1(x) = f(x) > \alpha$, pois $x \notin B$. Daí,
$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} \subseteq \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A. \tag{1.8}$$
Por outro lado,
$$x \in A \Longrightarrow f(x) > \alpha \Longrightarrow x \in \{x \in X; f(x) > \alpha\}$$
e
$$\begin{aligned} f_1(x) > \alpha \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow f(x) = f_1(x) > \alpha \\ \Longrightarrow x \in \{x \in X; f(x) > \alpha\}, \end{aligned}$$
ou melhor,
$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A \subseteq \{x \in X; f(x) > \alpha\} \tag{1.9}$$
e portanto, de (1.8) e (1.9), obetemos (1.6).
A justificativa de (1.7) é análoga. ■

Observação 1.1.17 *Como consequência dos* ***Lemas 2.1.12*** *e* ***2.1.16*** *temos que se $f \in M(X, \mathcal{A})$, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- também pertencem a $M(X, \mathcal{A})$. Note que $f \in M(X, \mathcal{A}) \Longrightarrow f_1$ é mensurável $\Longrightarrow cf_1, f_1^2, |f_1|, f_1^+$ e f_1^- são mensuráveis $\Longrightarrow cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- são mensuráveis.*

Observação 1.1.18 *Se $f, g \in M(X, \mathcal{A})$, a soma não está bem definida pela fórmula $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ nos conjuntos*
$$E_1 = \{x \in X; f(x) = +\infty \text{ e } g(x) = -\infty\}$$
e
$$E_2 = \{x \in X; f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\}$$
com ao menos um sendo não vazio. No entanto, se definirmos $f+g$ como sendo zero sobre $E_1 \cup E_2$, então a função $f+g$ é mensurável. Ora,
$$f, g \in M(X, \mathcal{A}) \Longrightarrow f_1, g_1 \in M(X, \mathcal{A}) \Longrightarrow f_1 + g_1 \in M(X, \mathcal{A}).$$
Além disso,
$$\begin{aligned} f = +\infty \text{ ou } g = +\infty &\Longrightarrow f + g = +\infty; \\ f = -\infty \text{ ou } g = -\infty &\Longrightarrow f + g = -\infty; \\ f = \pm\infty \text{ e } g = \mp\infty &\Longrightarrow f + g = 0. \end{aligned}$$

Lema 1.1.19 *Seja* (f_n) *uma sequência em* $M(X, \mathcal{A})$*. Defina as funções:*

a) $f(x) = \inf f_n(x)$;

b) $F(x) = \sup f_n(x)$;

c) $f^*(x) = \liminf f_n(x)$;

d) $F^*(x) = \limsup f_n(x)$.

Então f, F, f^* e F^* pertencem a $M(X, \mathcal{A})$.

Prova:

Considere as seguintes igualdades:

i) $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$;

ii) $\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$.

De (**i**) e (**ii**) obtemos que f e F são mensuráveis.

Justificativas de (**i**) **e** (**ii**):

i) $f(x) \geq \alpha \Longleftrightarrow \inf f_n(x) \geq \alpha \Longleftrightarrow f_n(x) \geq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Note que

$$x \in \{x \in X; F(x) > \alpha\} \Longleftrightarrow F(x) > \alpha \Longleftrightarrow \sup f_n(x) > \alpha,$$

se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < f_{n_0}(x) < F(x) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}.$$

Para provar (c) e (d), basta observar que

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

e

$$F^*(x) = \limsup f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

e aplicar os itens (b) e (a), respectivamente. ■

Definição 1.1.20 *A sequência* (f_n) ***converge pontualmente*** *para* f *se para cada* $\epsilon > 0$ *e* $x \in X$ *existe* $N_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > N_{\epsilon,x}$*, então* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$*. Neste caso, escrevemos* $\lim f_n(x) = f(x)$.

Corolário 1.1.21 *Se* (f_n) *é uma sequência em* $M(X, \mathcal{A})$ *e* $\lim f_n(x) = f(x)$*, então* $f \in M(X, \mathcal{A})$.

Prova:
Note que

$$f(x) = \lim f_n(x) = \liminf f_n(x), \ \forall x \in X.$$

Logo, pelo **Lema 2.1.19**, $f \in M(X, \mathcal{A})$. ■

Lema 1.1.22 *Se $f, g \in M(X; \mathcal{A})$, então $fg \in M(X; \mathcal{A})$.*

Prova:
Se $n \in \mathbb{N}$, considere

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad |f(x)| \leq n \\ n, & \text{se} \quad f(x) > n \\ -n, & \text{se} \quad f(x) < -n \end{cases}.$$

Se $m \in \mathbb{N}$, considere

$$g_m(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se} \quad |g(x)| \leq m \\ m, & \text{se} \quad g(x) > m \\ -m, & \text{se} \quad m(x) < -m \end{cases}.$$

Assim, f_n e g_m são mensuráveis. De fato,

$$-n \leq \alpha \leq n \Longrightarrow \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\},$$

$$\alpha > n \Longrightarrow \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} = \varnothing$$

e

$$\alpha < -n \Longrightarrow \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} = X$$

e portanto, pelo **Lema 2.1.12**, o produto $f_n g_m$ é mensurável. Além disso,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \ \text{ e } \lim_{m \longrightarrow \infty} g_m(x) = g(x)$$

Com efeito, fixado $x \in X$, dado $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| < n_0$, temos que

$$f_n(x) = f(x), \forall n > n_0 > |f(x)| \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$f(x) = \pm\infty \Longrightarrow f_n(x) = \pm n, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \pm\infty = f(x).$$

Uma vez que

$$(fg_m)(x) = f(x) g_m(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) g_m(x), \ x \in X,$$

então, pelo **Corolário 2.1.21**, temos que $fg_m \in M(X, \mathcal{A})$. Sendo

$$(fg)(x) = f(x) g(x) = \lim_{m \longrightarrow \infty} f(x) g_m(x), \ x \in \mathbb{N},$$

ainda pelo **Corolário 2.1.21**, concluímos que $fg \in M(X, \mathcal{A})$. ■

Lema 1.1.23 *Se f é uma função não negativa em $M(X, \mathcal{A})$, então existe uma sequência $(\varphi_n) \subset M(X, \mathcal{A})$ tal que:*

a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$;

b) *Para cada* $x \in X$, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$;

c) *Cada φ_n possui apenas um número finito de valores reais.*

Prova:
Veja [1]. ∎

1.2 Medida

Definição 1.2.1 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é chamada **medida** se satisfaz:*

a) $\mu(\varnothing) = 0$

b) $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$

c) *μ é aditivamente contável, isto é, se $(E_n) \subset \mathcal{A}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos, $E_m \cap E_n = \varnothing$ para $m \neq n$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição 1.2.2 *Dizemos que μ é **finita** se $\mu(E) < +\infty$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Se existe uma sequência $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ com $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então μ é dita **σ-finita.***

Observação 1.2.3 ***1)*** *Na definição de medida se $\mu(E_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$ (série divergente).*

2) *μ é finita se, e somente se, $\mu(X) \leq +\infty$. Com efeito, sendo $\mu(E) < +\infty$ para todo $E \in \mathcal{A}$, temos que $\mu(X) < +\infty$, pois $X \in \mathcal{A}$. Recirpocamente, para todo $E \in \mathcal{A}$, temos $X = (X \setminus E) \cup E$. Logo,*

$$\mu(X) = \mu((X \setminus E) \cup E) = \mu(X \setminus E) + \mu(E) \geq \mu(E).$$

Portanto,

$$\mu(E) \leq \mu(X) < +\infty$$

Exemplo 1.2.4 (Medida de contagem) *Defina*

$$\begin{array}{rccl} \mu: & P(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \longmapsto & \mu(E) = \begin{cases} \#E, & se \quad E \text{ é finito} \\ +\infty, & se \quad E \text{ é infinito} \end{cases}. \end{array}$$

onde $\#E$ *é o número de elementos de* E. *Note que* μ *é* σ*-finita mas não é finita. De fato, dado a sequência* $(E_n) \subset \mathcal{A}$, *onde* $E_n = \{n\}$, *temos que*

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ e } \mu(E_n) = 1$$

para todo n, *porém,* $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$.

Exemplo 1.2.5 *Considere um conjunto* $X \neq \varnothing$ *qualquer e,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Seja* $p \in X$ *e defina*

$$\begin{array}{rccl} \mu: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \longmapsto & \mu(E) = \begin{cases} 0, & se \quad p \in E \\ 1, & se \quad p \notin E \end{cases}. \end{array}$$

Então, μ *é uma medida finita (*μ *é* σ*-finita), e é chamada medida unitária centrada em* p.

Solução:

a) $\mu(\varnothing) = 0$, pois $p \notin \varnothing$;

b) $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, segue da definição de μ;

c) Se $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$, com $E_m \cap E_n = \varnothing$ para $m \neq n$, então $p \notin E_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, o que implica que $\mu(E_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in E_{n_0}$, então $\mu(E_{n_0}) = 1$ *e* $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \neq n_0$ o que implica que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

Segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E\right) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \\ 1, & \text{se} \quad p \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \end{cases} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Por outro lado, para todo $E \in \mathcal{A}$ temos que $\mu(E) < +\infty$, ou é 0 ou é 1, ou seja, μ é σ-finita.

Exemplo 1.2.6 (Medida de Lebesgue na reta) [4]*Seja $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \beta$. Defina*

$$\begin{array}{rcccl} \lambda: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} & \\ & (a,b) & \longmapsto & \lambda((a,b)) & = b-a. \end{array}$$

λ é a única medida definida em β que coincide com o comprimento de intervalos abertos. Ela não é uma medida finita, mas é $\sigma-finita$, pois, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(-n,n)$ e $\lambda((-n,n)) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.2.7 *Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Se $E, F \in \mathcal{A}$ com $E \subset F$, então $\underbrace{\mu(E) \leq \mu(F)}_{(\star)_1}$. Se $\mu(E) < +\infty$, então $\underbrace{\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)}_{(\star)_2}$.*

Prova:
Note que, $F = E \cup (F \setminus E)$ onde $E \cap (F \setminus E) = \varnothing$. Segue que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$$

o que prova $(\star)_1$. Se $\mu(E) < +\infty$, então

$$\mu(F) - \mu(E) = (\mu(E) + \mu(F \setminus E)) - \mu(E) = \mu(F \setminus E),$$

o que prova $(\star)_2$. ■

Lema 1.2.8 *Seja (E_n) uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$. Então,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Prova:
Considere, a sequência $(A_n) \subset \mathcal{A}$ definida por:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1; \\ A_2 &= E_2 \setminus E_1; \\ A_3 &= E_3 \setminus (E_2 \cup E_1); \\ &\vdots \\ A_n &= E_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\right); \\ &\vdots \end{aligned}$$

[4]A medida de Lebesgue generaliza as medidas anteriormente usadas, juntamente com a integral de Lebesgue, em uma ferramenta padrão da Análise Matemática.

de modo que $A_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_m \cap A_n = \varnothing$ se $m \neq n$. Além disso,

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} E_j, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).\end{aligned}$$

■

Lema 1.2.9 *Seja μ uma medida definida em uma $\sigma -$ álgebra $\mathcal{A}$.*

a) *Se (E_n) é uma sequência crescente em $\mathcal{A}$, então$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.*

b) *Se (F_n) é uma sequência decrescente em $\mathcal{A}$ e se $\mu(F_1) < +\infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n).$$

Prova:

a) Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Neste caso, $\mu(E_n) = +\infty$ para $n \geq n_0$, pois $\mu(E_{n_0}) \leq \mu(E_n)$. Daí,

$$lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = +\infty. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$E_{n_0} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty. \tag{1.11}$$

De (1.10) e (1.11) obtemos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Agora, suponha que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere os conjuntos em $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1; \\ A_2 &= E_2 \setminus E_1; \\ A_3 &= E_3 \setminus E_2; \\ &\vdots \\ A_n &= E_n \setminus E_{n-1}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

de modo que $E_n = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$, $\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} E_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$, além disso, $A_m \cap A_n = \varnothing$, para $m \neq n$. Segue que:

$$\mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) = \lim_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n).$$

Pelo **Lema 2.2.7,** obtemos

$$\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}),$$

para $n > 1$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n) = \mu(A_n) + (\mu(E_2) + \mu(E_1)) + \cdots + (\mu(E_m) + \mu(E_{m-1})) = \mu(E_m),$$

logo,

$$\mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) = \lim_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n) = \lim_{m\in\mathbb{N}}\mu(E_m).$$

Portanto,

$$\mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}}\mu(E_n).$$

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1 \setminus F_1 = \varnothing \\ E_2 &= F_1 \setminus F_2 \\ E_3 &= F_1 \setminus F_3 \\ &\vdots \\ E_n &= F_1 \setminus F_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

de modo que $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$, ou seja, $\{E_n\}$ é uma sequência crescente em $\mathcal{A}$. Note que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \left[\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}}(F_1 \setminus F_n)\right] = \left[F_1 \setminus \left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} F_n\right)\right].$$

Segue, do item **(a)**, que

$$\mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \lim_{m\in\mathbb{N}}\mu(E_m),$$

isto é,

$$\mu\left(F_1 \setminus \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} F_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}}(F_1 \setminus F_n).$$

Pelo **Lema 2.2.7**, temos:

$$\mu(F_1) - \mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} F_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}}[\mu(F_1) - \mu(F_n)]$$

daí,

$$\mu\left(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n).$$

■

Exemplo 1.2.10 *Se μ é uma medida em $\mathcal{A}$ e $A \in \mathcal{A}$ está fixado, então a função*

$$\begin{array}{llll} \lambda: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & E & \longmapsto & \lambda(E) \ = \mu\left(A \cap E\right) \end{array}$$

é uma medida em $\mathcal{A}$.

Solução:

Com efeito,

i) $\lambda(\varnothing) = \mu(A \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$;

ii) $\lambda(E) = \mu(A \cap E) \geq 0,\ \forall E \in \mathcal{A}$, pois, $\mu(F) \geq 0,\ \forall F \in \mathcal{A}$;

iii) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência disjunta em $\mathcal{A}$. Logo $\{A \cap E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma sequência disjunta em $\mathcal{A}$. Daí,

$$\lambda\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \mu\left[A \cap \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right)\right] = \mu\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A \cap E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Portanto, de (i), (ii) e (iii), obtemos que λ é uma medida.

Exemplo 1.2.11 *Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $\mathcal{A}$ e $a_1, \ldots, a_n$ são números reais positivos, então a função*

$$\begin{array}{llll} \lambda: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & E & \longmapsto & \lambda(E) \ = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \end{array}$$

é uma medida em $\mathcal{A}$.

Solução:

Ora,

i) $\lambda(\varnothing) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\varnothing) = 0 \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$;

ii) $\lambda(E) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0,\ \forall E \in \mathcal{A}$, pois, $a_j, \mu_j(E) \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$;

iii) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência disjunta em $\mathcal{A}$. Logo

$$\begin{aligned} \lambda\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n). \end{aligned}$$

Portanto, de **(i)**, **(ii)** e **(iii)**, obtemos que λ é uma medida.

Definição 1.2.12 *A terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é chamada* ***espaço de medida.***

$X :=$ *conjunto qualquer;*

$\mathcal{A} := \sigma$*-álgebra em* X;

$\mu :=$ *medida em* $\mathcal{A}$.

1.2.1 Propriedade μ-q.t.p. em X

Dizemos que uma determinada propriedade P vale em quase todo ponto (q.t.p) de X se existe um subconjunto $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que a propriedade P é válida em $X \setminus N$. **Notação:** P μ-q.t.p *em* X.
Assim, dizemos que duas funções são iguais μ-q.t.p. no caso de $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X \setminus N$, onde $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$. *Escrevemos:*

$$f(x) = g(x) \ \mu\text{-q.t.p. em } X.$$

Dizemos que uma sequência (f_n) de funções em X converge μ-q.t.p. para f se existe um conjunto $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ para $x \notin N$. *Escrevemos*:

$$f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \ \mu\text{-q.t.p. em } X.$$

1.2.2 Medida com sinal ou carga

Definição 1.2.13 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Então uma função* $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita ser uma* ***medida com sinal*** *ou* ***carga*** *se:*

a) $\lambda(\varnothing) = 0$;

b) λ *é aditivamente contável, isto é, se* $\{E_n\}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos, então*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).$$

A soma ou a diferença de duas cargas é uma carga. De modo mais geral qualquer combinação linear finita de cargas é uma carga.

Capítulo 2

A Integral de Lebesgue e os Espaços L$_p$.

Aqui será apresentado a definição de funções simples junto à sua integral. Também definiremos a integral de funções reais extendidas não negativas, e provaremos importantantes resultados como o Teorema da Convergência Monótona, que é uma ferramenta básica para tudo, e o Lema de Fatou. Iremos examinar a integração de funções mensuráveis que podem assumir tanto valores reais positivos quanto negativos. Nós exigiremos que os valores das funções e da integral sejam finitos. Faremos também o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que é um dos resultados mais importantes para este trabalho. Daremos as definições de *espaços linear normado* e dos *espaços* L_p, provando as Desigualdades de Holder e Minkowski.

Denotaremos por $M^+(X, \mathcal{A})$ o subconjunto de $M(X, \mathcal{A})$ formado pelas funções mensuráveis não -negativas.

Iniciaremos introduzindo a definição de funções simples. É conveniente requerer que essas funções assumam valores em $\mathbb{R}$ em vez de $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.0.14 (Funções Simples) *Uma função $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada* ***função simples*** *se φ assume apenas uma quantidade finita de valores.*

Observação 2.0.15 *Uma função simples φ pode ser representada na forma*

$$\varphi\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}\left(x\right) \tag{2.1}$$

onde

$$E_j = \{x \in X : \varphi(x) = a_j\} = \varphi^{-1}(\{a_j\}),\ E_j \cap E_i = \varnothing \text{ para } i \neq j \text{ e } X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

A representação (2.1) é chamada de ***forma fundamental*** *e é única. Note que, φ é mensuravel $\Leftrightarrow$ $E_j \in \mathcal{A}$ para $j = 1, ...n$. Com efeito,*

$$E_j = [\varphi \geq a_j] \cap [\varphi \leq a_j] \in \mathcal{A}$$

para $j = 1, ...n$. *Reciprocamente, como a soma e a multiplicação por escalar de funções mensuráveis é mensurável, então*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

é mensuravel.

Exemplos 2.0.16 ***1)*** *Função constante*

$$\begin{array}{rcccl} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto & f(x) & = c \end{array}.$$

2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *onde*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \leq -2 \\ 1, & se \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 2, & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & se \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 3, & se \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \left(\begin{cases} E_1 = (-\infty, -2] \\ E_2 = (-2, -1] \cup (1, 2] \\ E_3 = (-1, 1] \\ E_4 = (2, +\infty) \end{cases} \right).$$

Definição 2.0.17 *Se* φ *é uma função simples em* $M^+(X, \mathcal{A})$ *com a representação (2.1), definimos a integral de* φ *com respeito a* μ *como sendo o seguinte número real estendido*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Observação 2.0.18 ***a)*** *A integral de funções identicamente nula é igual a 0, pois, por convenção temos* $0(+\infty) = 0$, *logo* $\int 0 d\mu$ *independe se o espaço tem medida finita ou infinita.*

b) *Sendo os* $a_j \geq 0$, *então* $\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$ *está bem definido, pois, nós não encontramos expressões sem sentido, tais como* $(+\infty) - (+\infty)$.

Exemplos 2.0.19 ***1)*** *A integral do* ***Corolário 3.0.16.(1)****. Neste caso,* $f(x) = c$ *para todo* $x \in X$, *logo*

$$\int f(x) d\mu = c\mu(X).$$

2) *Integral do* ***Corolário 3.0.16.(2)****. Considere o espaço de medida* $(\mathbb{R}, \beta, \lambda)$ *onde* β *é a* σ*-álgebra de Borel e* λ *é a medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}$. *Logo,*

$$\begin{aligned} \int g(x) d\mu &= 0\lambda((-\infty, -2)) + 1\lambda((-2, -1] \cup (1, 2]) + 2\lambda((-1, 1]) + 3\lambda((2, +\infty)) \\ &= 0 + 2 + 4 + 3(+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Agora, apresentaremos algumas propriedades elementares da integral.

Lema 2.0.20 *Propriedades elementares da integral:*

a) *Se φ e ψ são funções simples em $M^+(X,\mathcal{A})$ e $c \geq 0$, então*

$$\int c\varphi d\mu = c\int \varphi d\mu \tag{2.2}$$

e

$$\int (\varphi+\psi)d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu. \tag{2.3}$$

b) *Se λ está definida em $\mathcal{A}$ por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \mathcal{X}_E d\mu,\ \forall E \in \mathcal{A},$$

então λ é uma medida em $\mathcal{A}$.

Prova:

a) Se $c=0$, então $c\varphi \equiv 0$ e

$$\int c\varphi d\mu = 0\mu(X) = 0 = 0\int \varphi d\mu = c\int \varphi d\mu.$$

Agora, seja $c>0$ e

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

a representação fundamental de φ. Note que:

$$c\varphi(x) = c\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} ca_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

logo,

$$\int c\varphi(x)d\mu = \sum_{j=1}^{n} ca_j\mu\left(E_j\right) = c\sum_{j=1}^{n} a_j\mu\left(E_j\right) = c\int \varphi(x)d\mu$$

o que prova (2.2). Por outro lado, sejam

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x) \text{ e } \psi(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathcal{X}_{F_k}(x)$$

as formas fundamentais de φ e ψ, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi+\psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \mathcal{X}_{F_k} \\
&= (a_1\mathcal{X}_{E_1}+\cdots+a_n\mathcal{X}_{E_n}) + (b_1\mathcal{X}_{F_1}+\cdots+b_m\mathcal{X}_{F_m}) \\
&= (a_1+b_1)\mathcal{X}_{E_1\cap F_1}+\cdots+(a_1+b_m)\mathcal{X}_{E_1\cap F_m}+(a_2+b_1)\mathcal{X}_{E_2\cap F_1}+\cdots+ \\
&+ (a_2+b_m)\mathcal{X}_{E_2\cap F_m}+(a_n+b_1)\mathcal{X}_{E_n\cap F_1}+\cdots+(a_n+b_m)\mathcal{X}_{E_n\cap F_m} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[(a_j+b_1)\mathcal{X}_{E_j\cap F_1}+\cdots+(a_j+b_m)\mathcal{X}_{E_j\cap F_m}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mathcal{X}_{E_j\cap F_k}.
\end{aligned}$$

Observação 2.0.21 **i**) *Para todo $x \in X$ existem $j,k \in \mathbb{N}$ tais que $x \in E_j \cap F_k$.*

ii) *Os conjuntos $E_j \cap F_k$ são disjuntos, pois se $(E_j \cap F_k) \cap (E_{j'} \cap F_{k'}) \neq \varnothing$, então $E_j \cap E_{j'} \neq \varnothing$ e $F_k \cap F_{k'} \neq \varnothing$, contradição.*

Segue que $\varphi+\psi$ é uma função simples com a seguinte representação

$$\varphi+\psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mathcal{X}_{E_j\cap F_k}$$

Tal representação não é única, pois os valores (a_j+b_k) podem não ser distintos. Podemos ter $a_j+b_k = a_{j'}+b_{k'}$ com $j \neq j'$ e $k \neq k'$.

Considere c_h, $h = 1,\ldots,p$, os valores distintos no conjunto

$$\{(a_j+b_k);\ j=1,\ldots,n \ e\ k=1,\ldots,m\}$$

e G_h a união dos conjuntos $E_j \cap F_k$, onde $a_j+b_k = c_h$. Assim,

$$\mu(G_h) = \mu(\bigcup_{j,k} E_j \cap F_k) = \sum_h \mu(E_j \cap F_k)$$

além disso,

$$\varphi+\psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \mathcal{X}_{G_h}$$

é a forma fundamental de $\varphi+\psi$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{h=1}^{p} c_h\mu(G_h)\\
&= \sum_{h=1}^{p} c_h\sum_{(h)}\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{h=1}^{p}\sum_{(h)}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_j\mu(E_j\cap F_k).
\end{aligned}$$

Sendo $X=\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j$ e $X=\bigcup\limits_{k=1}^{m}F_k$, então

$$E_j=E_j\cap X=E_j\cap(\bigcup_{k=1}^{m}F_k)=\bigcup_{k=1}^{m}(E_j\cap F_k)$$

e

$$F_k=F_k\cap X=F_k\cap(\bigcup_{j=1}^{n}E_j)=\bigcup_{j=1}^{n}(E_j\cap F_k)$$

logo,

$$\mu(E_j)=\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k)$$

e

$$\mu(F_k)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k).$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{k=1}^{m}b_k\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)+\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(F_k)\\
&= \int\varphi d\mu+\int\psi d\mu
\end{aligned}$$

provando assim (2.3). ■

b) Observe que

$$\varphi\mathcal{X}_E=\sum_{j=1}^{n}a_j\mathcal{X}_{E_j\cap E}.$$

Logo,

$$\lambda(E)=\int\varphi\mathcal{X}_E d\mu=\int\sum_{j=1}^{n}a_j\mathcal{X}_{E_j\cap E}=\sum_{j=1}^{n}\int a_j\mathcal{X}_{E_j\cap E}=a_j\mu(E_j\cap E).$$

Segue, pelos Exemplos (1.2.10) e (1.2.11), que λ é uma medida. ■

Observação 2.0.22 *Por indução podemos mostrar que*

$$\int (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) = \int \varphi_1 d\mu + \int \varphi_2 d\mu + \cdots + \int \varphi_n d\mu.$$

Agora, introduziremos a integral de uma função arbitrária em $M^+(X, \mathcal{A})$. Observe que não é exigido que o valor da integral seja finito.

Definição 2.0.23 *Se $f \in M^+(X, \mathcal{A})$, definimos a integral de f com relação a μ como sendo o elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ dado por*

$$\int_X f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto de todas as funções simples $\varphi \in M^+(X, \mathcal{A})$, satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Se $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ e $E \in \mathcal{A}$, então $f\mathcal{X}_E \in M^+(X, \mathcal{A})$ e definimos a integral de f sobre E com respeito a μ como sendo o elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ dado por

$$\int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu.$$

Lema 2.0.24 *Valem as seguintes propriedades:*

a) *Se $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ e $f \leq g$, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

b) *Se $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ e $E, F \in \mathcal{A}$ com $E \subseteq F$, então*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Prova:

a) Sendo $f \leq g$, de

$$A = \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \mathcal{A}), \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \right\}$$

e

$$B = \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \mathcal{A}), \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq g(x) \right\}$$

temos que $\sup A \leq \sup B$, pois $A \subseteq B$, o que acarreta

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

b) Ora, $f\mathcal{X}_E \leq f\mathcal{X}_F$, pois, $E \subseteq F$. Segue, do item (**a**), que

$$\int f\mathcal{X}_E d\mu \leq \int f\mathcal{X}_F d\mu \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

■

Agora, apresentaremos um resultado importante, o Teorema da Convergência Monótona, devido a B. Levi[1]. Este teorema será muito útil para a prova das propriedades de convergência fundamentais da Integral de Lebesgue.

Teorema 2.0.25 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja (f_n) uma sequência em $M^+(X, \mathcal{A})$ monótona não decrescente com $\lim_{n\to\infty} f_n = f(x)$. Então,*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração

Temos que f é o limite de uma sequência de funções em $M^+(X, \mathcal{A})$, logo, f é uma função mensurável e não negativa. Além disso,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x), \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, pelo **Lema 3.0.24 (a)**,

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

logo, existe em $\overline{\mathbb{R}}$ o limite

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{2.4}$$

Agora, mostremos que

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu. \tag{2.5}$$

Sejam $\varphi \in M^+(X, \mathcal{A})$ uma função simples dada por

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, e $0 \leq \alpha \leq 1$. Consideremos os conjuntos

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}, n \in \mathbb{N}.$$

[1]Beppo Levi (14 de maio, 1875 - 18 de agosto 1961) foi um Matemático Italiano que participou ativamente em todos os grandes desenvolvimentos matemáticos da época. Publicou numerosos artigos e livros sobre temas de elevados padrões acadêmicos em matemática, física, história, filosofia e ensino. Contribuiu para o estudo das cordas sobre superfícies algébricas, Integral de Lebesgue e Teoria da Medida e Integração, onde ganhou maior destaque com o Teorema da Convergência Monótona.

Observe que $A_n \subset \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$ e $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Segue que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu. \tag{2.6}$$

Além disso, para cada j fixado e $E_j \in \mathcal{A}$ temos que

$$E_j \cap A_n \in \mathcal{A},\ E_j \cap A_n \subset E_j \cap A_{n+1} \text{ e } E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_j \cap A_n.$$

Assim,

$$\mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_j \cap A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (E_j \cap A_n).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int \varphi \mathcal{X}_{A_n} d\mu \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{E_j} \cdot \mathcal{X}_{A_n} d\mu \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{N} \int a_j \mathcal{X}_{E_j \cap A_n} d\mu
\end{aligned}$$

daí,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \lim_{n\to\infty} \mu(E_j \cap A_n) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) = \int \varphi d\mu. \tag{2.7}$$

Tomando o limite com $n \to \infty$ em (2.6) e usando (2.7) resulta que

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,\ \forall \alpha \in (0,1).$$

Logo,

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

para φ função simples satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Segue que

$$\int f d\mu = \sup_{0\leq\varphi(x)\leq f(x)} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \text{ ou } \int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

o que prova (2.5).

Portanto, de (2.4) e (2.5), obtemos que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

■

Corolário 2.0.26 *Se $f, g \in M^+$ e $c \geq 0$, então:*

a) *cf pertence a M^+ e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu;$$

b) *$f+g$ pertence a M^+ e*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Prova:

a) Se $c = 0$, então

$$cf \equiv 0 \text{ e } \int cf d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

onde φ é uma função simples em M^+ satisfazendo

$$0 \leq \varphi(x) \leq cf(x), \ \forall x \in X.$$

Daí,

$$\int cf d\mu = 0 = 0 \left(\sup \int \varphi d\mu\right) = c \int f d\mu.$$

Agora, seja $c > 0$. Considere $\{\varphi_n\}$ uma sequência monótona de funções simples em M^+ convergindo para f em X **(Lema 2.1.23)**. Então, $(c\varphi_n)$ é uma sequência monótona convergindo para cf $(\lim c\varphi_n = c \lim \varphi_n = cf)$. Aplicando o **Lema 3.0.20 (a)** e o **Teorema 3.0.25**, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim \int c\varphi_n d\mu = c \lim \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu.$$

b) Sejam $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sequências monótonas crescentes de funções simples convergindo para f e g respectivamente. Então, $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente convergindo para $f+g$. Assim, pelo **Teorema 3.0.25**,

$$\int (f+g) d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

■

Como consequência do **Teorema 3.0.25** apresentaremos o Lema de Fatou[2], um importante resultado que nos permite lidar com sequências de funções que não são monótonas.

Lema 2.0.27 (Fatou) *Se (f_n) pertence a $M^+(X, \mathcal{A})$, então*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu, \ \left(\lim_{n\to\infty} \inf := \varliminf_{n\to\infty}\right).$$

[2]Pierre Joseph Louis Fatou (28 fevereiro de 1878 - 10 de agosto de 1929) foi um matemático francês e astrônomo . Ele é conhecido por grandes contribuições para diversos ramos da análise . O Lema de Fatou's e o Conjunto de Fatou's são nomeados após ele.

Prova:

Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \cdots\}$, assim,

$$g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \cdots\} \leq \inf\{f_{m+1}, f_{m+2} \cdots\} = g_{m+1},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Segue que g_m é uma sequência monótona crescente e $g_m \leq f_n$ para todo $m \leq n$. Logo, pelo Lema 3.0.46,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu,\ m \leq n,$$

e daí,

$$\int g_m d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{2.8}$$

Sendo $\{g_m\}$ uma sequência crescente e

$$\mathit{lim}_{m\to\infty} g_m = \sup_m\{g_m\} = \sup_m\{\inf_{n\geq m} f_n\} = \varliminf_{n\to\infty} f_n,$$

pelo **Teorema 3.0.25**, obtemos que

$$\lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu = \int \lim_{m\to\infty} g_m d\mu = \int \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{2.9}$$

Portanto, de (2.8) e (2.9), obtemos

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

■

Corolário 2.0.28 *Seja $f \in M^+(X, \mathcal{A})$. Se λ é definida em $\mathcal{A}$ por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu,$$

então λ é uma medida.

Prova:

a) $\lambda(\varnothing) = 0$.

Seja $E = \varnothing$, então $f\mathcal{X}_E = 0$ e, temos que:

$$\lambda(\varnothing) = \lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\mathcal{X}_E d\mu = 0.$$

b) $\lambda(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$.

Sendo $f \geq 0$, então pelo **Lema 3.0.24:**

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq 0.$$

c) λ é aditivamente contável.
Seja (E_n) uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ e \ E_m \cap E_n = \varnothing, \text{ se } m \neq n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x)\mathcal{X}_{E_k}(x).$$

Segue-se, do **Corolário 3.0.26.(b)** e por indução, que

$$\int f_n(x) = \int \sum_{k=1}^{n} f(x)\mathcal{X}_{E_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \int f(x)\mathcal{X}_{E_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Sendo (f_n) uma sequência crescente em M^+ convergindo para $f\mathcal{X}_E$, pelo **Teorema 3.0.25**, obtemos

$$\lambda(E) = \int f\mathcal{X}_E d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).$$

Assim,

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Portanto, de (**a**), (**b**) e (**c**), obtemos que λ é uma medida. ■

Corolário 2.0.29 *Se $f \in M^+(X, \mathcal{A})$, então $f \equiv 0$ μ-q.t.p. em X se, e somente se,* $\int f d\mu = 0$.

Prova:
$(\Longrightarrow)$ Seja $E = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$, então por hipótese $\mu(E) = 0$. Considere

$$g\,(y) = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad y \in E \\ 0, & \text{se} \quad y \in E^C \end{cases}.$$

Temos que $0 \leq f \leq g$, e portanto,

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Como $0 \leq n\mathcal{X}_E \longrightarrow g$, temos

$$0 = \int nX_E d\mu \longrightarrow \int g d\mu,$$

e portanto, $\int g d\mu = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Suponha que $\int f d\mu = 0$ e seja

$$E_n = \{x \in X; f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Note que,

$$E_n \subset E_{n+1} \text{ e } f \geq \frac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se} \quad x \in E_n \\ 0, & \text{se} \quad x \notin E_n \end{cases}.$$

Segue que

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0 \Longrightarrow \mu(E_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

logo, pelo Lema 2.0.31

$$\mu(\{x \in X; f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0,$$

ou seja, mostramos que $f \equiv 0$ μ-q.t.p. em X. ∎

Definição 2.0.30 *Seja λ e μ medidas sobre $\mathcal{A}$. Dizemos λ é absolutamente contínua em relação a μ se $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$.*

Corolário 2.0.31 *Suponha que $f \in M^+$, e defina λ em $\mathcal{A}$ por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Então a medida λ é absolutamente continua com respeito a μ.

Prova:

Se $\mu(E) = 0$ para algum $E \in \mathcal{A}$, então $f\mathcal{X}_E \equiv 0$ μ-q.t.p. em X. Aplicando o **Corolário 3.0.29**, obtemos

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\mathcal{X}_E d\mu = 0.$$

∎

Agora, mostraremos que o **Teorema 3.0.25** vale se a Convergência em X é substituida por convergência μ-q.t.p..

Corolário 2.0.32 *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \mathcal{A})$ que converge μ-q.t.p. em X para a função $f \in M^+$, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Prova:

Seja $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ e f_n converge (pontualmente) para f em $M = X \setminus N$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f(x), \ \forall x \in M.$$

Logo,

$$f_n\mathcal{X}_M \leq f_{n+1}\mathcal{X}_M, \, \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} \text{ e}, \, \lim_{n\to\infty} f_n\mathcal{X}_M = f\mathcal{X}_M, \, \forall x \in M.$$

Segue, do **Teorema 3.0.25**, que

$$\int f\mathcal{X}_M d\mu = \lim \int f_n\mathcal{X}_M d\mu.$$

Sendo $\mu(N) = 0$, então $f\mathcal{X}_N = f_n\mathcal{X}_N = 0$ μ-q.t.p. em X. Pelo **Corolário 3.0.29**, temos

$$\int f\mathcal{X}_N d\mu = \int f_n\mathcal{X}_N d\mu = 0.$$

Como $f = f\mathcal{X}_M + f\mathcal{X}_N$ e $f_n = f_n\mathcal{X}_M + f_n\mathcal{X}_N$, então

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\mathcal{X}_M d\mu + \underbrace{\int f\mathcal{X}_N d\mu}_{=0} \\
&= \int f\mathcal{X}_M d\mu \\
&= \lim \int f_n\mathcal{X}_M d\mu \\
&= \lim \left(\int f_n\mathcal{X}_M d\mu + \underbrace{\int f_n\mathcal{X}_N d\mu}_{=0} \right) \\
&= \lim \int f_n d\mu.
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.0.33 *Seja (g_n) uma sequência em M^+. Então*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Prova:

Seja $f_n = g_1 + \cdots + g_n$. Note que

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} g_n \in M^+(X, \mathcal{A}), \ f_n \leq f_{n+1} \text{ e } \lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n.$$

Aplicando o **Teorema 3.0.25**, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int \sum_{j=1}^{n} g_j d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu\\ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int g_j d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu\\ &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\int g_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu.\end{aligned}$$

■

2.1 Funções Integráveis

Definição 2.1.1 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que f é integrável quando as funções f^+ e f^- tem integrais finitas com respeito a μ, isto é,*

$$\int f^+ d\mu < +\infty \ e \ \int f^- d\mu < +\infty.$$

Neste caso, definimos a integral de f com respeito a μ como sendo

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

No caso em que $E \in \mathcal{A}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Observação 2.1.2 ***a)*** *O conjunto $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as funções reais $\mathcal{A}$ mensuráveis que são integraveis.*

b) *Temos*

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \ f^- = \min\{-f, 0\}$$

e vale

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-, (-f)^- = f^+ \ e \ (-f)^+ = f^-.$$

c) *Se $f = f_1 - f_2$ onde f_1 e f_2 são funções mensuráveis não negativas com integrais finitas, então*

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

De fato, sendo $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$, então $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Pelo **Corolário 3.0.26 (b)** temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu,$$

como todos os termos acima são finitos, obtemos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Lema 2.1.3 *Se $f \in L$ e $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida em $\mathcal{A}$ por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu,$$

então λ é uma medida com sinal.

Prova:
Sendo $f^+, f^- \in M^+$, o **Corolário 3.0.28** implica que as funções λ^+ e λ^- definidas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

são medidas em $\mathcal{A}$ e são finitas pois $f \in L$. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, segue λ é uma medida com sinal. Observe que:

a) $\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \lambda^+(E) - \lambda^-(E)$;

b) $\lambda(\varnothing) = 0$

c) $\lambda\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda^+\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \lambda^-\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^+(E_n) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^-(E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda^+(E_n) - \lambda^-(E_n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$. ■

Observação 2.1.4 *A função λ definida no* ***Lema 3.1.3*** *é chamada integral indefinida de f com relação μ. Uma vez que λ é uma medida com sinal se (E_n) é uma sequência disjunta em $\mathcal{A}$ com união E, então*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Isto nos diz que a integral indefinida de $f \in L$ é aditivamente contável.

Teorema 2.1.5 *Uma função mensurável f pertence a L se, e somente se, $|f|$ pertence a L. Neste caso,*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Demonstração:
$(\Longrightarrow)$ Note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0.$$

Logo, $f \in L$ implica que

$$\int |f|^+ \, d\mu = \underbrace{\int f^+ d\mu}_{<+\infty} + \underbrace{\int f^- d\mu}_{<+\infty} < +\infty \text{ e } \int |f|^- \, d\mu = 0 < +\infty,$$

o que acarreta que $|f| \in L$.

($\Longleftarrow$) Se $|f| \in L$ então

$$\int |f|^+ \, d\mu < +\infty \ e \ \int |f|^- \, d\mu < +\infty.$$

Assim,

$$\left.\begin{array}{l} \int f^+ d\mu \leq \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f|^+ \, d\mu < +\infty \\ \int f^- d\mu \leq \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f|^+ \, d\mu < +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in L.$$

Além disso,

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu.$$

Portanto,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

■

Corolário 2.1.6 *Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e*

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu.$$

Prova:
Ora,

$$|f| = f^+ + f^- \Longrightarrow f^+ \leq |f| \ \text{ e } f^- \leq |f| \, .$$

Como $|f| \leq |g|$, então

$$\int f^+ d\mu \leq \int |g| \, d\mu < +\infty \ \text{e} \ \int f^- d\mu \leq \int |g| \, d\mu < +\infty.$$

Logo, $f \in L$. Como $|f| \leq |g|$, então pelo **Lema 3.0.24 (a)**

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu.$$

■

Teorema 2.1.7 *Sejam $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

$$\alpha f, f + g \in L, \quad \int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \ e \ \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração:
Se $\alpha = 0$, então $\alpha f = 0$. Se $\alpha > 0$, então

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \text{ e } (\alpha f)^- = \alpha f^-.$$

Daí,

$$\int \alpha f d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \alpha (\int f^+ - \int f^-) d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

Agora, considedre $\alpha = -\delta$, $\delta > 0$. Note que

$$(\alpha f)^+ = (-\delta f)^+ = (\delta f)^- = \delta f^- \text{ e } (\alpha f)^- = (-\delta f)^- = (\delta f)^+ = \delta f^+.$$

Logo,

$$\begin{cases} \int (\alpha f)^+ d\mu = \int \delta f^- d\mu = \delta \int f^- d\mu < +\infty \\ \int (\alpha f)^- d\mu = \int \delta f^+ d\mu = \delta \int f^+ d\mu < +\infty \end{cases}.$$

Assim, $\alpha f \in L$. Temos, pelo **Teorema 3.1.5**, que:

$$f, g \in L \Longleftrightarrow |f|, |g| \in L,$$

e mais,

$$(|f| + |g|)^+ = |f| + |g| \text{ e } (|f| + |g|)^- = 0,$$

daí,

$$(|f| + |g|)^+ = f^+ + f^- + g^+ + g^- \Longrightarrow \int (|f| + |g|)^+ d\mu < +\infty.$$

Logo, $(|f| + |g|) \in L$. Como $f + g$ é mensurável e $|f + g| \leq |f| + |g|$, então, pelo **Corolário 3.1.6**, $(f + g) \in L$. Para estabelecer a relação desejada, observe que

$$(f + g) = \left(f^+ + g^+\right) - \left(f^- + g^-\right).$$

Sendo $(f^+ + g^+)$ e $(f^- + g^-)$ funções integráveis não negativas, segue-se que

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \int \left(f^+ + g^+\right) d\mu - \int \left(f^- + g^-\right) d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1.8 *Se f é uma função real mensurável e se $f \equiv 0$ μ-q.t.p. em X, então $f \in L$ e $\int f d\mu = 0$.*

Solução:

Ora,

$$\begin{aligned} f \equiv 0 \ \mu\text{-q.t.p. em } X &\Longrightarrow \begin{cases} f^+ \equiv 0, \ \mu\text{-q.t.p. em } X \\ f^- \equiv 0, \ \mu\text{-q.t.p. em } X \end{cases} \\ &\Longrightarrow \int f^+ d\mu = \int f^- d\mu = 0 < +\infty \\ &\Longrightarrow f \in L \end{aligned}$$

e

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = 0.$$

Exemplo 2.1.9 *Se $f \in L$ e g é uma função real mensurável tal que $f = g$ μ-q.t.p. em X, então $g \in L$ e $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

Solução:
Note que

$$f = g \ \mu\text{-q.t.p. em } X \Longrightarrow g - f \equiv 0 \ \mu\text{-q.t.p. em } X$$

logo, pelo **Corolário 3.1.8,** obtemos

$$(g - f) \in L \text{ e } \int (g - f)\, d\mu = 0.$$

Segue, pelo **Teorema 3.1.7,** que

$$g = f + (g - f) \Longrightarrow g \in L$$

e

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \underbrace{\int (g - f) d\mu}_{=0} \Longrightarrow \int g d\mu = \int f d\mu.$$

Observação 2.1.10 *O espaço L munido da adição e multiplicação por $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaz às condições de espaço vetorial.*

2.2 Normas em L_p

Definição 2.2.1 *Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $N : V \to \mathbb{R}$ é dita ser uma **norma** em V se satisfaz:*

a) $N(v) \geq 0, \forall v \in V$;

b) $N(v) = 0 \iff v = 0$;

c) $N(\alpha v) = |\alpha|\, N(v), \forall v \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

d) $N(u + v) \leq N(u) + N(v), \forall u, v \in \mathbb{R}$.

Se a condição **(b)** não ocorre, a função N é chamada **semi-norma** *(ou **pseudo-norma**)* em V. Um espaço vetorial V munido com uma norma é chamado **espaço vetorial normado.**

Exemplos 2.2.2 ***1)*** *$V = \mathbb{R}^n$, $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $N(v) = \|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ é uma norma.*

2) *$V = \mathbb{R}^n$, $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $N(v) = \|v\| = \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ é uma seminorma, pois, por exemplo, $v = (1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ e $\|v\| = 0$.*

3) *O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido da norma $N(v) = \|v\|$ é um espaço vetorial normado.*

Definição 2.2.3 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, definamos*

$$N_u(f) = \int |f| \, d\mu.$$

Mostraremos que $N_u(f) = \int |f| \, d\mu$ é uma semi- norma do espaço $L(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Lema 2.2.4 *O espaço $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida vetorial com as operações*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \;\; x \in X,$$

e N_μ é uma semi-norma em $L(X, \mathcal{A}, \mu)$. Além disso, $N_u(f) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$ μ-q.t.p. em X.

Prova:
Vimos no **Teorema 3.1.7** que se $f, g \in L$, então $f + g, \alpha f \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Logo, $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações indicadas. Segue que:
a) $N_u(f) \geq 0$, $\forall f \in L$, pois, $|f| \geq 0 \Longrightarrow \int |f| \, d\mu \geq 0$;

c) $N_u(\alpha f) = \int |\alpha f| \, d\mu = \int |\alpha| \, |f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu = |\alpha| \, N_u(f)$;

d) $N_u(f+g) = \int |f+g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = N_u(f) + N_u(f)$.
Portanto, N_u é uma semi-norma em L. Além disso, pelo **Corolário 3.0.29**, temos

$$\begin{aligned} N_u(f) = 0 \Longleftrightarrow \int |f| \, d\mu = 0 &\Longleftrightarrow |f(x)| = 0 \; \mu\text{-q.t.p.} \\ &\Longleftrightarrow f = 0 \; \mu\text{-q.t.p.} \;\; \not\Rightarrow f(x) = 0, \;\; \forall x \in X \end{aligned}$$

■

Definição 2.2.5 *Duas funções f e g em L são ditas* ***iguais*** *ou* ***μ-equivalentes*** *se $f = g$ μ-q.t.p.. A classe de equivalência determinada por f é o conjunto*

$$[f] = \{g \in L : f = g \;\; \mu\text{-q.t.p.}\}.$$

O espaço de Lebesgue $L_1 = L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes μ-equivalentes em L, isto é,

$$L_1 = \{[f] : f \in L\}.$$

Se $[f] \in L_1$, definimos a norma de $[f]$ por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu. \tag{2.10}$$

Teorema 2.2.6 *O espaço de Lebesgue L_1 é um espaço vetorial normado.*

Demonstração:
As operações com vetores em L_1 são definidas por

$$[f+g] = [f] + [g] \ \ e \ \ [\alpha f] = \alpha [f]$$

e o elemento zero de L_1 é $[0]$.
Vejamos que $\|\cdot\|_1$ é uma norma em L_1 :
b) $\|[0]\|_1 = 0$ e, se $\|[f]_1\| = 0$, então

$$\int |f| \, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \Longrightarrow [f] = [0].$$

As demais propriedades seguem do **Lema 3.2.4**. ■
Notações: $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ μ-q.t.p..
Para um elemento $[f] \in L_1$ usamos a notação: $f := [f]$ e $\|f\|_1 := \|[f]\|_1$.

Definição 2.2.7 *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes μ-equivalentes de funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis f com*

$$\int |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

*Duas funções são μ-**equivalentes** se são iguais μ-q.t.p.. Nós definiremos*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.11}$$

Observação 2.2.8 *Se $p = 1$, então* (2.11) *é a norma em L_1. Deveremos subsequente mostrar que se $1 \leq p < \infty$, então L_p é um espaço linear normado com* (2.11)*, e é completo com esta norma; logo L_p é um espaço de Banach. As operações em L_p são*

$$[f+g] = [f] + [g] \ \ e \ [cf] = c[f]; \ \ f \in L_p, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.2.9 (Desigualdade de Holder) [3]*Sejam $f \in L_p, g \in L_q, p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L_1 \ \ e \ \ \|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q. \tag{2.12}$$

Prova:

[3]Otto Ludwig Hölder (Estugarda, 22 de Dezembro de 1859 — Leipzig, 29 de agosto de 1937) foi um matemático alemão. Em 1877 entrou para a Universidade de Berlim, com doutoramento em 1882 na Universidade de Tübingen, com a tese Beiträge zur Potentialtheorie (Contribuições para a teoria do potencial). Foi professor na Universidade de Leipzig, de 1899 até a sua reforma. Otto é conhecido por: Desigualdade de Hölder, Teorema de Jordan-Hölder e Espaços de Hölder

Segue, da desigualdade de Young[4], que

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \text{ e } AB = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \Longleftrightarrow A^p = B^q. \tag{2.13}$$

Suponha que

$$f \in L_p, \; g \in L_q, \; \|f\|_p \neq 0 \text{ e } \|g\|_q \neq 0.$$

O produto fg é mensurável e fazendo em (2.13)

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ e } B = \frac{|g|}{\|g\|_q},$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q}. \tag{2.14}$$

Como $|f|^p$ e $|g|^q$ são integraveis, pois $f \in L_p$ e $g \in L_q$, então ambas as parcelas do lado direito de (2.14) são integráveis. Segue, do **Corolário 3.1.6** e do **Teorema 3.1.7,** que fg é integrável, e mais,

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f| \, d\mu + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g| \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\Longrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

■

Observação 2.2.10 *A desigualde de Holder implica que o produto de uma função em L_p e uma função em L_q é integrável quando $p, q > 1$ satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou, equivalentemente, $p + q = pq$. Dois números satisfazendo esta condição são chamados de índices conjugados. Note que $p = 2$ é o único auto conjugado. Assim, o produto de duas funções em L_2 é integrável.*

Lema 2.2.11 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskli-Schwarz) *Se $f, g \in L_2$, então fg é integrável e*

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

■

Lema 2.2.12 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L_p$, então $f + g \in L_p$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

[4]William Henry Young (Londres, 20 de outubro de 1863 — Lausanne, 7 de julho de 1942) foi um matemático inglês. A desigualdade de Young é devida a ele.

Prova:

Para $p=1$ é óbvio:

$$\int |f+g| \leq \int (|f|+|g|) \leq \int |f| + \int |g|.$$

Suponha $p>1$. Sendo f e g mensuráveis, então $f+g$ é mensurável. Note que

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq \{2\sup(|f|+|g|)\}^p = 2^p\{\sup(|f|+|g|)\}^p \leq 2^p\left\{|f|^p+|g|^p\right\}.$$

Assim, do **Corolário 3.1.6** e do **Teorema 3.1.7,** temos que $f+g \in L_p$. Além disso,

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}. \tag{2.15}$$

Como $f+g \in L_p$, então $|f+g|^p \in L_1$. Sendo $p=(p-1)q$, temos que

$$|f+g|^{p-1} \in L_q \quad \left(\text{pois} \int (|f+g|^{p-1})^q = \int |f+g|^p\right).$$

Pela desigualdade de Holder

$$\begin{aligned}\int |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|f\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q &= \|f\|_p \left[\int (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}=\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_p \left[\left(\int |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Analogamente,

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Integrando em (2.15), obtemos

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} = \left\{\|f\|_p + \|g\|_p\right\}\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Se $\|f+g\|_p = 0$, então

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Seja $\|f+g\|_p \neq 0$, então

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

mas, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow p-\frac{p}{q}=1$.Portanto,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Observação 2.2.13 *L_p é um espaço vetorial normado e, $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ define uma norma em L_p.*

Capítulo 3

Modos de Convergências nos Espaços $\mathbf{L}_p$

Neste capítulo, definiremos as convergências uniforme, pontual, quase todo ponto (q.t.p.) e em L_p. Iremos introduzir outros dois tipos de convergências para uma sequência de funções mensuráveis, convergências em medida e quase uniforme. Apresentaremos importantes resultados como a reciproca do Teorema da Convergência Dominada, generalização do Teorema da Convergência Dominada e o Teorema de Egoroff.

Definição 3.0.14 *A sequência (f_n)* ***converge uniformemente*** *para f se para todo $\epsilon > 0$ dado existe um número natural N_ϵ tal que se $n \geq N_\epsilon$ e $x \in X$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição 3.0.15 *A sequência (f_n)* ***converge pontualmente*** *para f se para cada $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existe $N_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$, tal que se $n > N_{\epsilon,x}$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição 3.0.16 *A sequência (f_n)* ***converge em quase todo ponto*** *para f se existe um $M \in \mathcal{A}$ com $\mu(M) = 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ e $x \,\epsilon\, X \setminus M$, existe $N_{\epsilon,x} \,\epsilon\, \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_{e,x}$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definição 3.0.17 *Uma sequência (f_n) em L_p* ***converge em $\boldsymbol{L}_p$*** *para $f \in L_p$, se para todo $\epsilon > 0$ dado existe um número natural $N_\epsilon > 0$ tal que se $n \geq N_\epsilon$, então $\|f_n - f\| = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$. Uma sequência (f_n) em L_p é dita ser uma* ***sequência de Cauchy em $\boldsymbol{L}_p$****, se para todo $\epsilon > 0$ dado existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N_\epsilon$, então $\|f_n - f_m\| = \left(\int |f_n - f_m|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$.*

3.1 Resultados de convergência nos Espaços $\mathbf{L}_p$

Agora, apresentaremos um dos Teoremas mais importantes para funções integráveis.

Teorema 3.1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge μ-q.t.p. para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração:

Como $f_n \longrightarrow f$ μ-q.t.p. em X, então existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in M = X \setminus N.$$

Defina

$$\begin{aligned}\widetilde{f_n}(x) &= f_n \mathcal{X}_M(x),\ \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}\\ \widetilde{f}(x) &= f\mathcal{X}_M(x),\ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{f_n}(x) = \widetilde{f}(x),\ \forall x \in X.$$

Seja $\widetilde{g}(x) = g\mathcal{X}_M(x)$, $\forall x \in X$. Logo,

$$\left|\widetilde{f_n}(x)\right| \leq \widetilde{g}(x),\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left|\widetilde{f}(x)\right| = \lim \left|\widetilde{f_n}(x)\right| \leq \widetilde{g}(x) \leq |\widetilde{g}(x)|$$

Pelo **Corolário 3.1.9**, temos

$$\tilde{f} \in L \Longrightarrow f \in L,\ g \in L \Longrightarrow \widetilde{g} \in L,\ \text{e } \widetilde{f_n} \in L \Longrightarrow f_n \in L,$$

e mais,

$$\int g d\mu = \int \widetilde{g} d\mu,\ \int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu \text{ e } \int \widetilde{f_n} d\mu = \int f_n d\mu.$$

Agora, observe que

$$\left|\widetilde{f_n}(x)\right| = |f_n \mathcal{X}_M(x)| = |f_n(x)|\, \mathcal{X}_M(x) \leq g(x) \Longrightarrow -g(x) \leq \widetilde{f_n}(x) \leq g(x),$$

ou seja:

i) $g(x) + \widetilde{f_n}(x) \geq 0$;

ii) $g(x) - \widetilde{f_n}(x) \geq 0$.

Segue, das propriedades de ínfimo, pelo **Corolário 3.0.26**, do **Teorema 3.1.7** e do fato que $\int g(x) d\mu < +\infty$, que:

caso (i):

$$\begin{aligned}
\int g(x)d\mu + \int \widetilde{f}(x)d\mu &= \int \left[g(x) + \widetilde{f}(x)\right] d\mu \\
&= \int \liminf \left[g(x) + \widetilde{f}_n(x)\right] d\mu \\
&\leq \int \left[g(x) + \liminf \widetilde{f}_n(x)\right] d\mu \\
&= \int g(x)d\mu + \int \liminf \widetilde{f}_n(x)d\mu \\
&\Longrightarrow \int \widetilde{f}(x)d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_n(x)d\mu. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

caso (ii):

$$\begin{aligned}
\int g(x)d\mu - \int \widetilde{f}(x)d\mu &= \int \left[g(x) - \widetilde{f}(x)\right] d\mu \\
&\leq \int \liminf \left[g(x) - \widetilde{f}_n(x)\right] d\mu \\
&\leq \liminf \int \left[g(x) - \widetilde{f}_n(x)\right] d\mu \\
&\leq \int g(x)d\mu - \limsup \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \\
&\Longrightarrow \limsup \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \leq \int \widetilde{f}(x)d\mu. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

De (4.1) e (4.2), obtemos

$$\int \widetilde{f}(x)d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \leq \limsup \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \leq \int \widetilde{f}(x)d\mu.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \widetilde{f}(x)d\mu &= \liminf \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \\
&= \limsup \int \widetilde{f}_n(x)d\mu \\
&\Longrightarrow \int f(x)d\mu = \lim \int \widetilde{f}_n(x)d\mu
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int f(x)d\mu = \lim \int f_n(x)d\mu.$$

■

O próximo teorema representa o **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em $\mathbf{L}_p$**.

Teorema 3.1.2 *Seja $(f_n) \subset L_p$ convergindo μ-q.t.p para uma função mensurável f. Se existe $g \in L_p$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in X$, e $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.*

Demonstração:

Temos que $|f_n(x)| \leq g(x)\,,\ \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$, passando ao limite, $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$|f(x)| \leq g(x)\,,\ \mu\text{-q.t.p em } X,$$

o que implica

$$|f(x)| \leq g(x)\,,\ \forall x \in F = X \setminus E,\ E \in \mathcal{A} \text{ e } \mu(E) = 0.$$

Daí,

$$|f\mathcal{X}_F| \leq g\mathcal{X}_F,\ \forall x \in X,$$

o que acarreta

$$|f\mathcal{X}_F|^p \leq |g\mathcal{X}_F|^p \in L \Longrightarrow |fX_F|^p \in L.$$

Mas,

$$|f\mathcal{X}_F|^p = |f|^p\ \ \mu - q.t.p. \Longrightarrow |f|^p \in L \Longrightarrow f \in L_p.$$

Por outro lado,

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (|f_n(x)| + |f(x)|)^p \leq (2g(x))^p\ \ \mu\text{-q.t.p.}$$

Sendo

$$\lim |f_n(x) - f(x)|^p = 0\ \mu\text{-q.t.p e } 2^p g^p \in L_1,$$

segue, do **Teorema 4.1.1,** que

$$lim \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0,$$

e portanto, (f_n) converge em L_p para f. ■

O próximo teorema representa a **reciproca do Teorema da Convergência Dominada.**

Teorema 3.1.3 *Se (f_n) é uma sequência de funções convergente em L_p com limite f, então existem uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) e uma função $g \in L_p$ tais que:*

a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *μ-q.t.p em X;*

b) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)\,,$ *μ-q.t.p em X, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

Como (f_n) é de Cauchy em L^p, podemos extrair uma subsequência (f_{n_k}) verificando

$$\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Assim,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|,$$

implica que $\|g_n\|_p \leq 1$ e, pelo **Teorema da Convergência Monotona**, temos que $g_n \longrightarrow g$ μ-q.t.p. em X e $g \in L_p$. Por outro lado, se $k > l$, então

$$|f_{n_k} - f_{n_l}| \leq \left| f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \right| + \cdots + \left| f_{n_{l+1}} - f_{n_l} \right| \leq g(x) - g_{n_{l-1}}.$$

Segue que, $(f_{n_l}(x))$ converge μ-q.t.p em X. Se

$$\tilde{f}(x) = \lim_{l \to \infty} f_{n_l}(x),$$

quando este limite existir, então

$$\left| f_{n_l}(x) - \tilde{f}(x) \right| \leq g(x) \ \ \mu\text{-q.t.p em } X.$$

Segue, do **Teorema 4.1.1,** que

$$\left\| f_{n_l} - \tilde{f} \right\|_p \underset{l \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ e } \tilde{f} \in L^p \Longrightarrow f = \tilde{f}$$

o que prova (a). Para provar (b), basta tomar $h = |f| + g$. ■

O próximo teorema representa a **generalização Teorema da Convergência Dominada.**

Teorema 3.1.4 *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tal que $|f_n| \leq |g_n|$, onde g_n é uma sequência de funções integráveis com*

$$\lim g_n = g \ \ \mu\text{-q.t.p}, \ \lim f_n = f \ \ \mu\text{-q.t.p em } X \text{ e } \lim \int g_n d\mu = \int g d\mu.$$

Então, f é integrável e

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Demonstração:

Como $|f_n| \leq |g_n|$ μ-q.t.p em X, passando ao limite com $n \longrightarrow \infty$, temos que $|f| \leq |g|$ μ-q.t.p em X, o que implica que $|f|$ é integrável, pois $|g|$ é integrável. Logo, f é integrável. Note que

$$f_n \leq |f_n| \leq |g_n| \Longrightarrow -g_n \leq f_n \leq g_n,$$

logo,

$$f_n + g_n \geq 0 \text{ e } g_n - f_n \geq 0.$$

Assim,

$$\underline{\lim} \int (f_n + g_n) \, d\mu \geq \int \underline{\lim} (f_n + g_n) \, d\mu = \int (f + g) \, d\mu \ \mu\text{-q.t.p em } X$$

e
$$\underline{\lim}\int(g_n-f_n)\,d\mu \geq \int \underline{\lim}\,(g_n-f_n)\,d\mu = \int (g-f)\,d\mu \;\; \mu\text{-q.t.p em } X.$$
Sendo f_n e g_n integráveis, então
$$\underline{\lim}\left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu\right) \geq \int f d\mu + \int g d\mu \;\; \mu\text{-q.t.p em } X$$
e
$$\underline{\lim}\left(\int g_n d\mu - \int f_n d\mu\right) \geq \int g d\mu - \int f d\mu \;\; \mu\text{-q.t.p em } X.$$
Como f e g são integráveis, emtão
$$\underline{\lim}\int f_n d\mu + \int g d\mu \geq \int f d\mu + \int g d\mu \Longrightarrow \underline{\lim}\int f_n d\mu \geq \int f d\mu \;\; \mu\text{-q.t.p em } X$$
e
$$\int g_n d\mu - \overline{\lim}\int f_n d\mu \geq \int g d\mu - \int f d\mu \Longrightarrow -\overline{\lim}\int f_n d\mu \geq -\int f d\mu \;\; \mu\text{-q.t.p em } X.$$
Daí,
$$\underline{\lim}\int f_n d\mu \geq \int f d\mu \geq \overline{\lim}\int f_n d\mu,$$
e portanto,
$$\lim\int f_n d\mu = \int f d\mu$$

■

3.2 Convergência em Medida.

Definição 3.2.1 *Uma sequência (f_n) de funções reais mensuráveis* ***converge em medida*** *para uma função real mensurável f se para cada $\alpha > 0$,*
$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X : |f_n(x)-f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$
A sequência (f_n) é dita ser de ***Cauchy em medida*** *se para cada $\alpha > 0$*
$$\lim_{m,n\to\infty}\mu(\{x\in X : |f_m(x)-f_n(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Exemplo 3.2.2 *Se uma sequência (f_n) converge em medida para uma função f, então toda subsequência de (f_n) converge em medida para f. Mais geralmente, se (f_n) é de Cauchy em medida, então toda subsequência de (f_n) é de Cauchy em medida.*

Solução:
Ora, se (f_n) Converge em medida para f, então dado $\epsilon > 0$ e $\alpha > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\mu(\{x\in X : |f_n(x)-f(x)| \geq \alpha\}) < \epsilon,\ \forall n > n_0.$$

Em particular, se (f_{n_k}) é uma subsequência qualquer de (f_n), então

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \alpha\}) < \epsilon, \ \forall n_k > n_0$$

como queríamos provar. Mostramos de forma análoga que, se (f_n) é de Cauchy em medida, então toda subsequência de (f_n) é de Cauchy em medida.

Teorema 3.2.3 *Seja (f_n) uma sequência de funções reais mensuráveis que é de Cauchy em medida. Então, existe uma subsequência que converge μ-q.t.p e em medida para uma função real mensurável.*

Demonstração:
Temos que para $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}\right) < \epsilon, \ \forall m, n > n_0.$$

Fazendo $\alpha = \epsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-1}\right\}\right) < 2^{-1}, \ \forall m, n > n_1.$$

Considere $m = n_1$ e $g_1 = f_{n_1}$, assim,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g_1(x)| \geq 2^{-1}\right\}\right) < 2^{-1}, \ \forall n > n_1. \tag{3.3}$$

Fazendo $\alpha = \epsilon = \frac{1}{2^2}$, existe $n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-2}\right\}\right) < 2^{-2}, \ \forall m, n > n_2.$$

Considere $m = n_2$ e $g_2 = f_{n_2}$, assim,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g_2(x)| \geq 2^{-2}\right\}\right) < 2^{-2}, \ \forall n > n_2. \tag{3.4}$$

Por (3.3), temos

$$\mu\left(\left\{x \in X : |g_2(x) - g_1(x)| \geq 2^{-1}\right\}\right) < 2^{-1}.$$

Fazendo $\alpha = \epsilon = \frac{1}{2^3}$, existe $n_3 > n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-3}\right\}\right) < 2^{-3}, \ \forall m, n > n_3.$$

Considere $m = n_3$ e $g_3 = f_{n_3}$, assim,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g_3(x)| \geq 2^{-3}\right\}\right) < 2^{-3}, \ \forall n > n_3.$$

Por (3.4), temos

$$\mu\left(\left\{x \in X : |g_3(x) - g_2(x)| \geq 2^{-2}\right\}\right) < 2^{-2}.$$

Continuando podemos selecionar uma subsequência $(g_k) \subset (f_n)$ tal que o conjunto

$$E_k = \left\{x \in X : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\right\}$$

é tal que $\mu(E_k) < 2^{-k}$. Seja $F_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j$. Note que $F_k \in \mathcal{A}$, pois, $E_j \in \mathcal{A}$, $\forall j \geq k$, e

$$\mu(F_k) = \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

ou seja, $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$. Se $i \geq j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + |g_{i-}(x) - g_{i-2}(x)| + \cdots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \\ &\leq 2^{-(i-1)} + 2^{-(i-2)} + \cdots + 2^{-j} = \sum_{n=j}^{i-1} \frac{1}{2^n} \\ &< \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^j}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^j} \cdot 2 = \frac{1}{2^{j-1}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Seja $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Note que $F \in \mathcal{A}$, pois, $F_k \in \mathcal{A}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e

$$\mu(F) = \lim F_k \leq \lim \frac{1}{2^{k-1}} = 0,$$

porque $F_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j \supset \bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty} E_j = F_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_1) < +\infty$. Se $x \notin F$, então $x \notin F_k$ para algum k, assim, para $i \geq j$

$$|g_i(x) - g_j(x)| < \frac{1}{2^{j-1}} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad (j \longrightarrow +\infty \Longrightarrow i \longrightarrow +\infty),$$

assim, $(g_k(x))$ é de Cauchy em $X \setminus F$, logo, $(g_k(x))$ converge em $X \setminus F$. Defina

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(x), & \text{se} \quad x \notin F \\ 0, & \text{se} \quad x \in F \end{cases}.$$

Então, $(g_j(x))$ converge μ-q.t.p. em X para a função real f. Note que, dado $\delta > 0$, se tomarmos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{K-1}} < \delta$ temos que $\mu(F_k) < \delta$ e passando ao limite quando $i \longrightarrow +\infty$ em (4.5), temos que se $j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$|f(x) - g_j(x)| < \frac{1}{2^{j-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{3.6}$$

Isto mostra que a sequência (g_j) converge uniformemente para f no complementar de cada conjunto F_k. Para ver que (g_j) converge em medida para f, seja $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ e escolha $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande que $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)} < \inf(\alpha, \epsilon)$. Se $j \geq k$, então pelo argumento para se obter (3.6), obtemos

$$\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\} \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq 2^{-(k-1)}\right\} \subseteq F_k.$$

Logo,

$$\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\} \leq \mu(F_k) < \epsilon, \ \forall j \geq k.$$

Portanto, (g_j) converge em medida para f. ■

Corolário 3.2.4 *Seja (f_n) uma sequência de funções rais mensuráveis que é de Cauchy em medida. Então, existe uma função real mensurável f para a qual a sequência converge em medida. Esta função limite f é unicamente determinada q.t.p.*

Prova:

Pelo **Teorema 4.2.3**, existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge em medida para uma função f. Para ver que a sequência (f_n) converge em medida para f, observe que

$$|f - f_n| \leq |f - f_{n_k}| + |f_{n_k} - f_n|,$$

e considere,

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\} \\ B &= \left\{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \\ C &= \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Daí, $A \subseteq B \cup C$ o que implica que $\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo, $f_n \longrightarrow f$ em medida. Provemos a unicidade de f. Suponha que a sequência (f_n) converge em medida para f e g. Sendo,

$$|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$$

e

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\} \\ B &= \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \\ C &= \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \end{aligned}$$

temos que $A \subseteq B \cup C$ o que implica

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

acarretando,

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\}) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Agora, fazendo $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f = g \ \mu\text{-q.t.p.}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0 \\ &\Longrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \ \mu\text{-q.t.p} \\ &\Longrightarrow f(x) - g(x) = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \end{aligned}$$

o que prova a unicidade de f. ■

Teorema 3.2.5 *Seja $(f_n) \subset L_p$ que converge em medida para f e seja $g \in L_p$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-q.t.p. Então, $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.*

Demonstração:
Se (f_n) não converge em L_p para f, existe uma subsequência $(g_k) \subseteq (f_n)$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$\|g_k - f\|_p > \epsilon \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Sendo (g_k) uma subsequência de (f_n), segue do **Exemplo 4.2.2** que ela converge em medida para f. Pelo **Teorema 4.2.3**, existe uma subsequência (h_r) de (g_k) que converge μ-q.t.p e em medida para uma função h. Da unicidade do **Corolário 4.2.4** segue que $h = f$ μ-q.t.p em X. Como h_r converge μ-q.t.p para f e é dominada por g, o **Teorema 4.1.2** implica que $f \in L_p$ e $h_r \longrightarrow f$ em L^p, ou seja,

$$\|h_r - f\|_p \longrightarrow 0$$

o que contradiz (3.7). ■

3.3 Convergência Quase Uniforme.

Definição 3.3.1 *Uma sequência (f_n) de funções mensuráveis é dita ser **quase uniformemente convergente** para uma função mensurável f se para cada $\delta > 0$, existe um conjunto $E_\delta \in \mathcal{A}$ com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) converge uniformemente para f em $X \setminus E_\delta$. A sequência (f_n) é dita ser uma sequência de **Cauchy quase uniforme** se para cada $\delta > 0$ existir um conjunto $E_\delta \in \mathcal{A}$ com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) uniformemente convergente em $X \setminus E_\delta$.*

Teorema 3.3.2 *Se uma sequência (f_n) converge quase uniformemente para f, então ela converge em medida. Reciprocamente, se uma sequência (g_n) converge em medida para g, então alguma subsequência de (g_n) converge quase uniforme para g.*

Demonstração:
Suponha que (f_n) converge quase uniformemente para f. Seja α e ϵ números rais positivos. Então, existe um conjunto $E_\epsilon \in \mathcal{A}$ com $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$ tal que para f uniformemente em $X \setminus E_\epsilon$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \alpha, \ \forall x \in X \setminus E_\epsilon \text{ e } \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subseteq E_\epsilon, \ \forall n \geq n_0$$

mostrando que

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) \leq \mu\left(E_\epsilon\right) < \epsilon, \ \forall n \geq n_0$$

o que implica que f_n converge em medida para f. Reciprocamente, suponha que (g_n) converge em medida para g. Do **Teorema 4.2.3**, existe uma subsequência (h_k) de (g_n) que converge em medida para uma função g e a prova do **Teorema 4.2.3** mostra que a convergência é quase uniforme. Se (h_k) converge em medida para ambas g e h, segue do **Corolário 4.2.4** que $h = g$ μ-q.t.p em X. Portanto, a subsequência (h_k) de (g_n) converge quase uniformemente para g. ■

Teorema 3.3.3 (Teorema de Egoroff) [1]*Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que (f_n) é uma sequência de funções reais mensuráveis que converge em quase todo ponto em X para uma função real mensurável f. Então, a sequência (f_n) converge quase uniformemente e em medida para f.*

Demonstração:
Suponha sem perda de generalidade que (f_n) converge para f em cada ponto de X.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Caso contrário, considere:} \\ \widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{se} \quad x \notin N \\ 0, & \text{se} \quad x \in N \end{cases} \text{ e } \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \notin N \\ 0, & \text{se} \quad x \in N \end{cases}, \\ \text{onde } N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0 \text{ e } f_n(x) \longrightarrow f(x),\ \forall x \in X \setminus N \end{array}\right]$$

Se $m, n \in N$, considere

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Note que

$$E_n(m) \in \mathcal{A}, E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m) \ \text{ e } \ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \varnothing.$$

Como $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ μ-q.t.p em X, então

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m},\ \forall k \in \mathbb{N} \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \geq \frac{1}{m},$$

contradição. Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \varnothing$. Uma vez que $\mu(X) < +\infty$, temos, pelo **Lema 2.2.9 (b)**, que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(m)) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m)\right) = \mu(\varnothing) = 0 \Longrightarrow \mu(E_n(m)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sejam $\delta > 0$ e $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_m}(m)) < \frac{\delta}{2^m}$. Considere

$$E_\delta = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n_m}(m)\right) \in \mathcal{A},$$

[1]Dmitri Fyodorovich Egoroff (Moscou, 22 de dezembro de 1869 — Kazan, 10 de setembro de 1931) foi um matemático russo. O nome Teorema de Egoroff é em sua honra.

então
$$\mu\left(E_{\delta}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E_{n_m}(m)\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

CSe $x \notin E_{\delta}$, então

$$x \notin E_{n_m}(m), \ \forall m, \Longrightarrow x \notin E_n(m), \ \forall n \geq n_m$$

Logo,
$$\left|f_k(x) - f(x)\right| < \frac{1}{m} \ \forall k > n_m \text{ e } \forall x \in X \setminus E_{\delta}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, fixando $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \epsilon$, temos

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{m} \ \forall n \geq n_m \text{ e } \forall x \in X \setminus E_{\delta}$$

o que mostra a convergência quase uniforme. A convergência em medida segue do **Teorema 4.3.2**. ■

Capítulo 4

Relação entre Modos de Convergências

Neste capítulo serão apresentadas as relações, duas a duas, entre as convergências uniforme, pontual, q.t.p., em L_p, em medida e quase uniforme. Algumas implicações serão provadas de forma imediata com a citação de outras que ja foram provadas ou ainda vem a ser. Quando necessário, daremos contra exemplos.

Teorema 4.0.4 *Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que $(f_n) \subset L_p$ converge uniformemente em X para f. Então, $f \in L_p$ e a sequência (f_n) converge em L_p para f.*

Demonstração:
Dado $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_\epsilon$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}}.$$

Assim,

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \frac{\epsilon^p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}}\mu(X)^{\frac{1}{p}} = \epsilon,$$

e portanto, (f_n) converge em L_p para f. ■

Corolário 4.0.5 *Sejam $\mu(X) < +\infty$ e (f_n) uma sequência em L_p que converge em quase todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma constante k tal que $|f_n(x)| \leq k$, $\forall x \in X$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.*

Prova:
Seja $g(x) = k$ (função simples), sendo $\mu(X) < +\infty$, então $g \in L_p$. Logo, pelo **Teorema 5.0.4**, obtemos o resultado. ■

Agora, dois a dois, relacionaremos os modos de convergência estudados neste trabalho.

1. *Convergência Uniforme* $\Longrightarrow$ *Convergência Pontual* $\Longrightarrow$ *Convergência q.t.p.*

Prova:
Segue imediato das definições.

2. *Reciproca de (1).*

a) *Convergência Pontual* $\nRightarrow$ *Convergência Uniforme.*
Prova:
Considere a sequência

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^n \end{array}.$$

Note que:

$$f_n(x) \underset{pont.}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 1 \\ 0, & \text{se} \quad x \in [0,1) \end{cases}.$$

Por outro lado, seja $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $\epsilon = \frac{1}{3}$, logo

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n)| = \left| \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

Portanto, (f_n) não converge uniformemente para f em $[0,1]$.

Observação 4.0.6 *Se X é finito, então convegência pontual $\Longrightarrow$ convergência uniforme. Com efeito, se X é finito, então para cada $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existe $N^j_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tal que $n > N^j$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Tome $N_0 = \max\limits_j N^j$ que segue o resultado.*

b) *Convergência q.t.p* $\nRightarrow$ *Convergência uniforme.*
Prova:
Segue pelo item 2.c.

c) *Convergência q.t.p* $\nRightarrow$ *Convergência pontual.*
Prova:
Considere

$$f_n(x) = \frac{x}{n},\ x \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}^C \end{cases}.$$

Note que, para $x \in \mathbb{Q}^C$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

e sendo $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, então

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \ \ \mu\text{-q.t.p. em } X.$$

Por outro lado, para $x \in \mathbb{Q}$ temos $f(x) = 1$, mas

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \neq f(x)$$

Portanto, não vale a convergência pontual.

Observação 4.0.7 *Se apenas o conjunto $\varnothing$ possui medida nula, então convergência q.t.p. $\Longrightarrow$ convergência pontual. Com efeito, convergência q.t.p. garante convergência pontual fora de um conjunto de medida nula, e por hipótese, o único conjunto de medida nula e o $\varnothing$. Logo, garante convergência pontual em X.*

3. *Convergência uniforme $\nRightarrow$ Convergência em L_p.*

Prova:
Seja $f_n = n^{-\frac{1}{p}} \mathcal{X}_{[0,n]}$. Mostremos que f_n converge uniformemente para $f \equiv 0$, mas não converge em $L_p(\mathbb{R}, \beta, \lambda)$.
Temos que:

$$f_n(x) = n^{-\frac{1}{p}} \mathcal{X}_{[0,n]}(x) = \begin{cases} n^{-\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad x \in [0,n] \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [0,n] \end{cases}.$$

a) $f_n \underset{unif.}{\longrightarrow} f$.
Note que:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| n^{-\frac{1}{p}} \mathcal{X}_{[0,n]}(x) \right| \leq n^{-\frac{1}{p}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n^{-\frac{1}{p}} < \epsilon$. Logo, $n \geq n_0$ implica que $n^{-\frac{1}{p}} \leq n_0^{-\frac{1}{p}} < \epsilon$, ou seja,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall x \in \mathbb{R},$$

mostrando que $f_n \underset{unif.}{\longrightarrow} f$ em $\mathbb{R}$.
b) $f_n \underset{Lp.}{\nrightarrow} f$.
Com efeito,

$$\int |f_n|^p \, d\lambda = \int n^{-1} \mathcal{X}_{[0,n]} = n^{-1} \lambda([0,n]) = n^{-1} n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\|f_n\|_p = 1 \nrightarrow 0, \ n \longrightarrow +\infty,$$

o que prova que f_n não converge para f em L_p.

Observação 4.0.8 *: Se $\mu(X) < +\infty$, então convergência uniforme implica convergência em L_p. Veja **Teorema 5.0.4**.*

4. *Convergência em $L_p \nRightarrow$ Convergência uniforme.*

Prova:
Segue pelo item (8).

5. *Convergência pontual $\nRightarrow$ Convergência em L_p.*

Prova:
Seja $f_n = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$. Mostremos que a sequência (f_n) converge pontualmente para a função $f \equiv 0$, mas não converge em $L_p(\mathbb{R}, \beta, \lambda)$. Note que

$$f_n(x) = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}(x) = \begin{cases} n, & \text{se} \quad x \in \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \end{cases}.$$

Segue-se que, dado $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \notin \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$, $\forall n \geq n_0$, logo $f_n(x) = 0$, $\forall n \geq n_0$, o que implica que $\lim f_n(x) = 0$, mostrando a convergência pontual. Porém,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &= \left(\int |f_n|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]} n^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n\lambda\left(\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]\right) \\ &= n\frac{1}{n} \\ &= 1 \nrightarrow 0, \ n \longrightarrow +\infty, \end{aligned}$$

e portanto, f_n não converge para f em L_p.

Observação 4.0.9 *Se a sequência é dominada por uma sequência em L_p, então a convergência em L_p acontece. Veja **Teorema 4.1.2**.*

6. *Convergência em $L_p \nRightarrow$ Convergência Pontual.*

Prova:
Segue pelo item (8).

7. *Convergência q.t.p. $\nRightarrow$ Convergência em L_p.*

Prova:
Segue pelo item (3).

8. *Convergência em $L_p \nRightarrow$ Convergência q.t.p.*

Prova:

Seja $X = [0,1]$, β a σ-álgebra de Borel e λ a medida de Lebesgue. Considere os intervalos

$$\begin{aligned}
I_1 &= [0,1]\\
I_2 &= \left[0,\frac{1}{2}\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{2},1\right]\\
I_4 &= \left[0,\frac{1}{3}\right],\ I_5 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\ I_6 = \left[\frac{2}{3},1\right]\\
I_7 &= \left[0,\frac{1}{4}\right],\ I_8 = \left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right],\ I_9 = \left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right],\ I_{10} = \left[\frac{3}{4},1\right]\\
I_{11} &= \left[0,\frac{1}{5}\right],\ I_{12} = \left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right],\ I_{13} = \left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right],\ I_{14} = \left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right],\ I_{15} = \left[\frac{4}{5},1\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Seja $f_n = \mathcal{X}_{I_n}$ e $f \equiv 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
&\lambda(I_1) = 1;\\
&\lambda(I_2) = \lambda(I_3) = \frac{1}{2};\\
&\lambda(I_4) = \lambda(I_5) = \lambda(I_6) = \frac{1}{3};\\
&\lambda(I_7) = \lambda(I_8) = \lambda(I_9) = \lambda(I_{10}) = \frac{1}{4};\\
&\lambda(I_{11}) = \lambda(I_{12}) = \lambda(I_{13}) = \lambda(I_{14}) = \lambda(I_{15}) = \frac{1}{5};\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Se $n \geq (1+2+3+\cdots+m)$, então $\lambda(I_n) < \frac{1}{m}$. Daí, $\lambda(I_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Observe que $f_n \longrightarrow 0$ em L_p. Com efeito,

$$\|f_n - f\|_p = \|f_n\|_p = \left(\int |f_n|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{I_n} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda(I_n)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda(I_n) < \epsilon^p,\ \forall n \geq n_0$$

Assim,

$$\|f_n - f\|_p < \epsilon,\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow f_n \longrightarrow 0 \text{ em } L_p([0,1]).$$

Por outro lado, dado $x \in [0,1]$ arbitrário, existem duas subsequências $\left(f_{n_j}(x)\right)$ e $(f_{n_k}(x))$ tais que

$$f_{n_j}(x) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } f_{n_k}(x) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Daí,

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 1$$

Portanto, a sequência não converge em nenhum $x \in [0,1]$.

Observação 4.0.10 *Observa-se, no entanto, que se pode selecionar uma subsequência de* (f_n) *que converge para* f.

9. *Convergência Uniforme* $\Longrightarrow$ *Convergência em Medida.*

Prova:

Se $f_n \underset{unif.}{\longrightarrow} f$, então dado $\alpha > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \alpha, \ \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall x \in X.$$

Daí,

$$\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \varnothing, \ \forall n \geq n_0$$

o que implica que

$$\mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = \mu(\varnothing) = 0, \ \forall n \geq n_0$$

acarretando convergência em medida.

10. *Convegência em Medida* $\nRightarrow$ *Convergência Uniforme.*

Prova:

Segue pelos itens (4) e (11).

11. *Convergência em* $L_p \Longrightarrow$ *Convergência em Medida.*

Prova:

Seja $\alpha \geq 0$ e $E_n(\alpha) = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu < \epsilon\alpha^p, \ \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon\alpha^p > \int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu &\geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \\ &\geq \int_{E_n(\alpha)} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(E_n(\alpha)), \ \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mu(E_n(\alpha)) < \epsilon, \ \forall n \geq n_0 &\Longrightarrow \mu(E_n(\alpha)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

e portanto, $f_n \longrightarrow f$ em medida.

12. *Convergência em Medida* $\nRightarrow$ *Convergência em* L_p.

Prova:
Vimos no item (5) que a sequência $f_n = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ não converge para $f \equiv 0$ em L_p. Porém, dado $\alpha \geq 0$ vemos facilmente que $\lambda\left(\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto, $f_n \longrightarrow f$ em medida.

13. *Convegência Pontual* $\nRightarrow$ *Convergência em Medida.*

Prova:
Seja $f_n = \mathcal{X}_{[n,n+1]}$. Mostremos que $f_n \longrightarrow 0$ pontualmente, mas f_n não converge em medida. Note que

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{[n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in [n, n+1] \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [n, n+1] \end{cases}.$$

Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$. Logo, $x \notin [n, n+1]$, $\forall n \geq n_0$ o que implica que

$$f_n(x) = 0, \ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Por outro lado, para $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = [n, n+1]$$

o que implica que

$$\mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

o que acarreta que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 1$$

e portanto, $f_n \nrightarrow 0$ em medida.

Observação 4.0.11 : *Se X é finito, então convergência pontual* $\Longrightarrow$ *convergência uniforme* $\Longrightarrow$ *convergência em medida.*

14. Convergência em Medida $\nRightarrow$ Convegência pontual.

Prova:
Segue pelos itens (8) ou (16).

15. *Convergência q.t.p.* $\nRightarrow$ *Convergência em Medida.*

Prova:
Segue pelo item (13).

Observação 4.0.12 *Se* (f_n) *é uma sequência de funções reais e* $\mu(X) < +\infty$, *então convergência q.t.p.* $\Longrightarrow$ *convergência em medida. Veja* ***Teorema 4.3.3.***

16. *Convergência em Medida* $\nRightarrow$ *Convergência q.t.p.*

Prova:
No item (8), vimos que a sequência $f_n(x) = \mathcal{X}_{I_n}$ converge em L_p para $f \equiv 0$, logo converge em medida, porém não converge q.t.p.

Observação 4.0.13 *Apesar desse fato, vimos um resultado devido a F. Riesz,* ***Teorema 4.2.3,*** *que implica que, se uma sequência* f_n *converge em medida para* f, *então alguma subsequência converge q.t.p para* f.

17. *Convergência Uniforme* $\Longrightarrow$ *Convergência Quase Uniforme.*

Prova:
Segue imediato das definições.

18. *Convergência Quase Uniforme* $\nRightarrow$ *Convergência Uniforme.*

Prova:
Mostremos que a sequência (f_n) do item (5) tem a propriedade de que, se $\delta > 0$, então (f_n) é uniformemente convergente sobre o complemento do conjunto $[0, \delta]$. No entanto, mostremos que não existe um conjunto de medida nula em que (f_n) é uniformemente convergente no complemento.
Se $\delta > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right] \subset [0, \delta] \text{ e } f_n(x) \equiv 0, \ \forall x \in \left[\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right]^C.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall n > n_0 \text{ e } \forall x \in \left[\frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}\right]^C,$$

ou seja $f_n \underset{unif.}{\longrightarrow} f$, e portanto, $f_n \longrightarrow f$ quase uniforme em $\mathbb{R}$.
Por outro lado, temos que existe $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ tal que $f_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|f_n(x) - f(x)| = n > \epsilon, \ \forall x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right],$$

e portanto, $f_n \nrightarrow f$ uniformemente.

19. *Convegência Pontual* $\nRightarrow$ *Convergência Quase Uniforme.*

Prova:
Segue pelo item 2.a.

Observação 4.0.14 *Se* $\mu(X) < +\infty$, *então convergência pontual implica convergência uniforme que acarreta convergência quase uniforme.*

20. *Convergência Quase Uniforme* $\nRightarrow$ *Convegência Pontual.*

Prova:
Vimos no item (18) que a sequência $f_n = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ converge quase uniforme para $f \equiv 0$, porém dado $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ temos que

$$\lim f_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

e portanto, $f_n \underset{pont.}{\nrightarrow} f$.

21. *Convergência q.t.p.* $\nRightarrow$ *Convergência Quase Uniforme.*

Prova:
Vimos no item (13) que a sequência $f_n = \mathcal{X}_{[n,n+1]}$ converge pontualmente. Logo converge q.t.p.. Mostremos que $f_n \nrightarrow f$ quase uniforme.
Com efeito, seja $0 < \delta < 1$. Note que para todo $E_\delta \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu(E_\delta) < \delta$ temos que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_n = 1,\ \forall x \in [n, n+1] \subset \mathbb{R} \setminus E_\delta.$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, temos que

$$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = 1 > \epsilon,\ \forall x \in \left[n, n+1\right],$$

assim, $f_n \nrightarrow f$ uniformemente, e portanto, f_n não converge quase uniforme para f.

Observação 4.0.15 *Se* (f_n) *é uma sequência de funções reais e* $\mu\left(X\right) < +\infty$, *então convergência q.t.p* $\Longrightarrow$ *convergência quase uniforme. Veja* ***Teorema 4.3.3.***

22. *Convergência Quase Uniforme* $\Longrightarrow$ *Convegência q.t.p.*

Prova:
Dado $\delta = \frac{1}{n}$ temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \subset X$ com $\mu\left(E_n\right) < \frac{1}{n}$ tal que

$$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \frac{1}{n}, \forall x \in X \setminus E_n.$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu\left(E_n\right) = 0 \text{ e } f_n\left(x\right) \longrightarrow f\left(x\right),\ \forall x \in X \setminus E_n,$$

e portanto, obtemos a convergência q.t.p

23. *Convergência em $L_p \nRightarrow$ Convergência Quase Uniforme.*

Prova:
Segue dos itens (8) e (22).

Observação 4.0.16 *Decorre do **Teorema 4.3.2** que, se uma sequência converge em L_p, então ela tem uma subsequência que converge quase uniformemente.*

24. *Convergência Quase Uniforme $\nRightarrow$ Convergência em L_p.*

Prova:
Vimos no item (18) que a sequência $f_n = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ converge quase uniforme para $f \equiv 0$. Já no item (5) mostramos que a mesma não converge em L_p, e portanto, segue o resultado.

Observação 4.0.17 *Se a sequência (f_n) for dominada por uma função em L_p, então pelo **Teorema 4.2.5** e o item (26), obtemos que convergência quase uniforme implica convergência em L_p.*

25. *Convergência em Medida $\nRightarrow$ Convergência Quase Uniforme.*

Prova:
Segue pelo item (23).

Observação 4.0.18 *Pelo **Teorema 4.3.2** temos que se uma sequência (g_n) converge em Medida para g, então alguma subsequência converge quase uniforme para g.*

26. *Convergência Quase Uniforme $\Longrightarrow$ Convergência em Medida.*

Prova:
Segue pelo **Teorema 4.3.2**.

O quadro abaixo, resume os modos de convergências estudados neste trabalho. No quadro, as implicações são da primeira coluna para a primeira linha, por exemplo, sabemos que convergência q.t.p não implica convergência em Medida, localizando a linha da convergência q.t.p na primeira coluna e a coluna da convergência em medida na primeira linha, onde elas se cruzam está o sinal ($\nRightarrow$) que é usado para mostrar que não há convergência.

Notação:

$C.U$: convergência uniforme; $C.P$: convergência pontual; $C.Q.T.P$: convergência q.t.p; $C.L^p$: convergência em L^p; $C.M$: convergência em medida; $C.Q.U$: convergência quase uniforme.

$\Rightarrow$: implica em (A $\Rightarrow$ B: A implica em B);

$\nRightarrow$: não implica em (A $\nRightarrow$ B: A não implica em B);

$\rightsquigarrow$: implica sob certas condições (A $\rightsquigarrow$ B: A implica em B sob certas condições).

Quadro de convergências:

	$C.U$	$C.P$	$C.Q.T.P$	$C.L^p$	$C.M$	$C.Q.U$
$C.U$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$C.P$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$
$C.Q.T.P$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$
$C.L^p$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$
$C.M$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$
$C.Q.U$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\nRightarrow$ $\rightsquigarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$

Capítulo 5

Apêndice.

Lema 5.0.19 (Desigualdade de Young) *Sejam A e B números reais não negativos e $1 < p, q < +\infty$, verificando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Prova:
Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < 1$ e considere a função $\varphi : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha$. Note que:

$$\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1}) < 0$$

daí,

$$1 - t^{\alpha-1} < 0 \Longleftrightarrow t^{\alpha-1} < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{t^{1-\alpha}} < 1 \Longleftrightarrow t^{\alpha-1} < 1.$$

Como $1 - \alpha > 0$ então $t < 1$. Assim,

$$\varphi'(1) = 0;$$

$$\varphi'(t) < 0 \text{ para } 0 < t < 1 \Longrightarrow \varphi \text{ é decrescente} \Longrightarrow \varphi(t) > \varphi(1);$$

$$\varphi'(t) > 0 \; para \; t > 1 \Longrightarrow \varphi \text{ é crescente} \Longrightarrow \varphi(t) > \varphi(1).$$

Segue que

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \text{ para } t \geq 0 \text{ e } \varphi(t) = \varphi(1) \Longleftrightarrow t.$$

Portanto,

$$\varphi(1) = \alpha - 1 \leq \alpha t - t^\alpha = \varphi(t),\; t \geq 0 \Longrightarrow t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Se $a, b > 0$ e $t = \frac{a}{b}$, temos

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha \Longrightarrow b^{1-\alpha} a^\alpha \leq \alpha a + b(1 - \alpha)$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$ $(t = 1)$. Considere agora p e q satisfazendo

$$1 < p, q < +\infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = 1$$

e tome $\alpha = \frac{1}{p}$. Logo, se $A, B \in \mathbb{R}^+$, então

$$(A^p)^{\frac{1}{p}}(B^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} \cdot A^p + (1 - \frac{1}{p})B^q \Longrightarrow AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $A^p = B^q$. ■

REFERÊNCIAS

[1]. Barra, G. Measure Theory and Integration. New Age International Publishers, 2000.

[2]. Bartle, R. G., The Elements of Integration, John Wiley and Sons, 1966.

[3]. Boyer, C.B. História da Matemática. Edgard Blucher, 2 edição. São Paulo, 1996.

[4]. Burk, Frank. Lebesgue Measure and Integration: an introdution. Jonh Wiley e Sons, 1998.

[5]. Fernandez, Pedro Jesus, Medida e Integração / Pedro Jesus Fernandez. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[6]. Lima, Elon Lages. Curso de Análise: vol 1, 13 edição. Rio de Janeiro. IMPA 2011.

[7]. Lima, Elon Lages. Curso de Análise: vol 2, 11 edição. Rio de Janeiro. IMPA 2012.

[8]. Medeiros, L. A. e Mello, E. A., A integral de Lebesgue. UFRJ, 6 Edição, Rio de Janeiro, 2011.

[9]. Rudin, Walter, 1921 - Real and Complex Analysis: International Edition 1987.

[10]. Ziemer, William P. Modern Real Analysis. Disponível em http://www.indiana.edu/~mathwz/PRbook.pdf