



Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Estatística

José Juraci Fernandes dos Santos

Análise de Séries Temporais com aplicação em dados de exportações

Campina Grande

Março de 2014

José Juraci Fernandes dos Santos

Análise de Séries Temporais com aplicação em dados de exportações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Orientador:

Dr. Gustavo Henrique Esteves

Campina Grande

Março de 2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S237a Santos, José Juraci Fernandes dos.
Análise de séries temporais com aplicação em dados de exportações [manuscrito] / José Juraci Fernandes dos Santos. - 2014. 38 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Gustavo Henrique Esteves, Departamento de Estatística".

1. Séries temporais. 2. Metodologia de Box e Jenkins. 3. Modelos ARIMA. I. Título.

21. ed. CDD 519.5

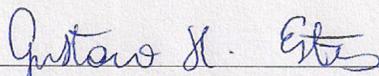
José Juraci Fernandes dos Santos

Análise de Séries Temporais com aplicação em dados de exportações

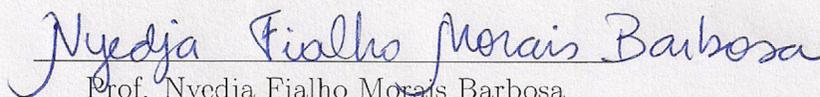
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Aprovado em: 11 / 03 / 2014

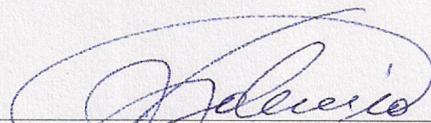
Banca Examinadora:



Prof. Gustavo Henrique Esteves
Departamento de Estatística - CCT/UEPB
Orientador



Prof. Nyedja Fialho Moraes Barbosa
Departamento de Estatística - CCT/UEPB
Examinadora



Prof. Juarez Fernandes de Oliveira
Departamento de Estatística - CCT/UEPB
Examinador

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais (Augustinho e Julia) e aos meus irmãos (Janduy, Jurandi, Jucimar, Juciane, Jusati e Jacy) que sempre apoiaram.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Gustavo pela dedicação e paciência.

A Leticiana que sempre esteve ao meu lado.

Aos ex prefeitos Lucivaldo e Robério pela inestimável ajuda.

A prefeita Iris que sempre apoiou.

Aos amigos de apartamento Cristiano, João Batista, Antonio e Felipe.

Resumo

No planejamento de qualquer atividade é necessário ter conhecimento prévio, na execução de determinadas estratégias e na tomada de decisão. Nesse contexto, compreende-se a utilização de ferramentas estatísticas para ajudar os governantes definir futuras ações. O estudo de séries temporais a ser abordado neste trabalho contempla a metodologia de Box e Jenkins que é muito usada e que é referência nesse assunto, tratando da identificação do modelo, estimação dos parâmetros, verificação e previsão. Neste estudo será utilizada uma única variável, ou seja, totais mensais das exportações do Brasil para o Chile, cujos dados coletados do *site* do Banco Central do Brasil. Usamos o *software* R na elaboração dos gráficos com as respectivas funções de autocorrelações. Nas análises foi identificado o modelo ARIMA(1,1,1), com parâmetros iguais a um, tanto para a parte autorregressiva como de médias móveis e com uma diferença simples no tempo. Através deste modelo fizemos também previsões de 12 meses a frente.

Palavras-chave: Séries temporais, metodologia de Box e Jenkins, modelos ARIMA.

Abstract

For any activity planning it is necessary some prior knowledge, specially to implement certain strategies or to decision making. In this context, the use of statistical tools to help policy makers in new decisions becomes fundamental. The study of time series to be addressed in this work covers the Box and Jenkins methodology, dealing with the model identification, parameter estimation, testing and prediction. In this case a single variable data will be used, ie total monthly exports from Brazil to Chile, that were obtained from Central Bank of Brazil's site. We use the R software in the preparation of the charts with their autocorrelation functions. In the analysis the ARIMA(1,1,1) model was identified, with the parameters equal one for both autoregressive part and moving averages one, and a simple difference in time. Through this model we also made predictions for 12 months ahead.

Keywords: Time series, Box-Jenkins methodology, ARIMA models.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 11
2	Fundamentação Teórica	p. 12
2.1	Séries Temporais	p. 12
2.1.1	Ruído Branco	p. 12
2.1.2	Processos Estocásticos	p. 12
2.1.3	Especificação de um processo estocástico	p. 13
2.1.4	Tipos de modelos	p. 15
2.2	Modelos ARIMA	p. 16
2.2.1	Processo Linear Geral	p. 16
2.2.2	Modelos autorregressivos - AR	p. 17
2.2.3	Modelos de Médias Móveis - MA	p. 18
2.2.4	Modelos auto-regressivos e de médias móveis - ARMA	p. 19
2.2.5	Modelos não-estacionários	p. 20
2.2.6	Modelos autoregressivos integrados de médias móveis - ARIMA	p. 21
2.3	Identificação do modelo ARIMA	p. 21
2.3.1	Função de Autocovariância - FAC	p. 22
2.3.2	Função de autocorrelação parcial - FACP	p. 23
2.3.3	Critério de Informação de Akaike - AIC	p. 24

2.3.4	Critério de Informação Bayesiano - BIC	p. 25
2.4	Estimação de Modelos ARIMA	p. 25
2.4.1	Método dos momentos	p. 25
2.4.2	Variâncias dos estimadores	p. 26
2.5	Diagnóstico em modelos ARIMA	p. 27
2.5.1	Análise de Resíduos	p. 27
2.5.2	Teste de autocorrelação residual	p. 28
2.5.3	Teste de Box-Pierce	p. 28
2.5.4	Teste da Autocorrelação Cruzada	p. 29
2.6	Previsão Com Modelos ARIMA	p. 30
2.6.1	Formas básicas de previsão	p. 30
3	Aplicação	p. 32
4	Conclusão	p. 36
	Referências	p. 37

Lista de Figuras

- 1 Filtro linear com entrada a_t , saída Z_t e função de transferência $\Psi(B)$. . . p. 16
- 2 Gráfico da série original e com uma diferença no tempo, com as respectivas funções f_{ac} e f_{acp} p. 33
- 3 Gráfico da série padronizada com o correlograma p. 35

Lista de Tabelas

1	Valores reais e previstos a partir do modelo ajustado, para o ano de 2013, com os respectivos erros.	p. 34
---	---	-------

1 Introdução

O Chile é um dos países mais desenvolvidos da América do Sul e há poucos anos houve uma evolução bastante positiva do comércio entre Brasil e Chile, que apresentou um crescimento anual com taxas de 27% em 2003, de 46% em 2004 e de 34% em 2005, com saldos igualmente crescentes para o Brasil. A pauta de exportações brasileiras para o Chile é bastante ampla, incorporando produtos manufaturados diversos (automóveis, calçados, maquinários, químicos, medicamentos) e produtos primários (petróleo, carne bovina, café). O Brasil colocava-se em 2007 como o quarto sócio comercial do Chile, logo após EUA, China e Japão, e superando a Argentina. No primeiro trimestre de 2006, posicionava-se em segundo lugar. Esses resultados do comércio bilateral podem ser explicados pela complementaridade existente entre as economias brasileira e chilena e, também, pelo amadurecimento do Acordo de Cooperação Econômica (ACE) - 35 em vigor desde 25 de junho de 1996, que já permite tarifa alfandegária zero para mais de noventa e sete por cento do universo dos produtos comercializados. As exportações brasileiras beneficiaram-se do bom momento da economia chilena nestes últimos anos, com crescimento da economia, elevação da renda e consumo, com população de 15,116 milhões (2002, último senso realizado) e PIB per capita de 5.898 dólares em 2004 e 7.139 dólares em 2005 (Ministério das Relações Exteriores, 2014).

Um país que deseja aumentar seu superávit, além de vender mais do que compra, precisa de informações de preferência sobre o futuro. Como isso ainda não é possível, podemos usar as ferramentas de análise de séries temporais para fazer previsões estimadas para determinado período do futuro com base nas informações de bancos de dados.

O objetivo desse trabalho é estudar modelos de séries temporais com ênfase em modelos ARIMA da metodologia de Box e Jenkins, aplicado a série de totais mensais das exportações do Brasil para o Chile e selecionar o modelo de série temporal que melhor represente os dados, e que será utilizado para fazer previsões de 12 meses a frente. Por fim, neste trabalho usamos um banco de dados público, mantido pelo Banco Central do Brasil e disponíveis através do endereço eletrônico <http://www.bcb.gov.br>.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Séries Temporais

Para Ehlers (2009), uma série temporal é um conjunto de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo. Com base no conjunto gerado, pode-se classificar a série em *contínua* ou *discreta*. Uma série temporal ainda pode ser classificada como *determinística* ou *estocástica*. É *determinística* quando os futuros valores da série podem ser estabelecidos precisamente por uma expressão matemática em função do tempo e é *estocástica* quando seus futuros valores só puderem ser expostos em termos probabilísticos através de expressões matemáticas em função do tempo, adicionada de um termo aleatório residual, necessário à explicação de algum movimento irregular da série (FISCHER, 1982).

A seguir serão apresentados alguns conceitos que são importantes para a definição de modelos adequados para a análise de séries temporais.

2.1.1 Ruído Branco

Segundo Souza (2006), ruído branco é a sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas e identicamente distribuídas, com média zero e variância constante, com distribuição normal.

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$$

2.1.2 Processos Estocásticos

De acordo com Morettin e Toloi (2006), sendo T um conjunto arbitrário, um *processo estocástico* é uma família $Z = Z(t), t \in T$, tal que, para cada $t \in T$, $Z(t)$ é uma variável aleatória. Com estas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (v.a.), que supõe-se definidas num mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

O conjunto T é normalmente entendido como o conjunto dos inteiros $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ou o conjunto dos reais \mathbb{R} . Assim $Z(t)$ é uma função de dois argumentos, $Z(t, \omega)$ e $t \in T, \omega \in \Omega$. Veja a ilustração de um processo estocástico em Morettin e Toloi (2006), página 20. Para cada $\omega \in \Omega$ fixado pode-se obter uma função de t , ou seja, uma *realização* ou *trajetória* do processo, ou ainda, uma *série temporal*.

Denotando essas realizações de $Z(t, \omega)$ por $Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \dots$, observa-se que cada realização $Z^{(j)}(t)$ é uma função do tempo t não aleatória e, para cada t fixo, $Z^{(j)}(t)$ é um número real. Uma maneira de considerar a distribuição de probabilidades de $Z(t, \omega)$, para um t fixado, é compreender a proporção de trajetórias que passam por uma “janela” de amplitude Δ . Essa proporção será $f_Z(z) \times \Delta$, se $f_Z(z)$ for a f.d.p. de $Z(t, \omega)$. O conjunto de valores $\{Z(t), t \in T\}$ é chamado *espaço dos estados*, \mathcal{E} , do processo estocástico, e os valores de $Z(t)$ são chamados *estados*. Se o conjunto T for finito ou enumerável, com $T = \{1, 2, \dots, N\}$ ou $T = \mathbb{Z}$, o processo diz-se com *parâmetros discretos*. Se T for um intervalo de \mathbb{R} obtém-se um processo com *parâmetros contínuos*. Neste trabalho uma série temporal $Z^{(j)}(t)$ será denotada simplesmente por $Z(t)$ enquanto que as observações discretas e equidistantes no tempo denota-se Z_1, Z_2, \dots, Z_N .

2.1.3 Especificação de um processo estocástico

Ainda conforme Morettin e Toloi (2006), sejam t_1, t_2, \dots, t_n elementos quaisquer de T e considerando

$$F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n) = P\{Z(t_1) \leq z_1, \dots, Z(t_n) \leq z_n\}, \quad (2.1)$$

então o processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ estará especificado quando se conhece as *distribuições finito-dimensionais* (2.1), para todo $n \geq 1$. Isto significa que, para $n = 1$, tem-se as distribuições unidimensionais da v.a. $Z(t_1), t_1 \in T$, para $n = 2$, tem-se as distribuições bidimensionais da v.a. $(Z(t_1), Z(t_2)), t_1, t_2 \in T$. As funções de distribuições (f.d.) (2.1) devem satisfazer as duas condições seguintes:

1. (Condição de Simetria) para qualquer permutação j_1, \dots, j_n , dos índices $1, 2, \dots, n$, tem-se:

$$F(z_{j_1}, \dots, z_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n}) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n) \quad (2.2)$$

2. (Condição de Compatibilidade) para $m < n$,

$$F(z_1, \dots, z_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) = F(z_1, \dots, z_m; t_1, \dots, t_m), \quad (2.3)$$

onde o membro esquerdo de (2.3) deve tomado como

$$\lim_{z_{m+1} \rightarrow +\infty, \dots, z_n \rightarrow +\infty} F(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n; t_1, \dots, t_m).$$

Considerando somente os momentos de primeira e segunda ordem. A *função média*, ou *média*, de Z é:

$$\mu(1; t) = \mu(t) = E\{Z(t)\} = E\{Z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z; t) dz, \quad (2.4)$$

enquanto a sua *função de autocovariância* (facv) é:

$$\mu(1, 1; t_1, t_2) - \mu(1; t_1)\mu(1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) = E\{Z(t_1)Z(t_2)\} - E\{Z(t_1)\}E\{Z(t_2)\}, \quad t_1, t_2, \in T.$$

Observe que $\gamma(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 . Por isso, quando $t_1 = t_2 = t$; tem-se que:

$$\gamma(t, t) = Var\{Z(t)\} = E\{Z^2(t)\} - E^2\{Z(t)\}$$

Em resumo os parâmetros importantes a considerar, serão a *média* e a *função de autocovariância*

$$\mu(t) = E\{Z(t)\}, \quad \gamma(t_1, t_2) = Cov\{Z(t_1), Z(t_2)\}.$$

Intuitivamente, um processo Z é estacionário se ele se desenvolve no tempo de modo que a escolha de uma origem dos tempos não é importante (MORETTIN; TOLOI, 2006). Ou seja, as características de $Z(t + \tau)$, para todo τ , são as mesmas de $Z(t)$. Um processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ diz-se *estritamente estacionário* se todas as distribuições finito-dimensionais dadas por (2.1) permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,

$$F(z_1, \dots, z_n; \tau, \dots, t_n + \tau) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.5)$$

para quaisquer $t_1, \dots, t_n, \tau \in T$. Isso significa, em particular, que todas as distribuições unidimensionais são invariantes sob translações do tempo, logo a média $\mu(t)$ e a variância $V(t)$ são constantes, isto é,

$$\mu(t) = \mu, \quad V(t) = \sigma^2, \quad \forall t \in T. \quad (2.6)$$

Sem perder a generalidade, pode-se supor que $\mu = 0$; caso contrário, considere o processo $\{Z(t) - \mu\}$. Do mesmo modo, todas as distribuições bidimensionais dependem

de $t_1 - t_2$. De fato, como $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + t, t_2 + t)$, fazendo $t = -t_2$ vem que

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2, 0) = \gamma(\tau),$$

para $\tau = t_1 - t_2$. Logo, $\gamma(t_1, t_2)$ é uma função de um só argumento, no caso do processo ser estritamente estacionário. Fazendo $t = -t_1$, vemos que na realidade $\gamma(t_1, t_2)$ é função de $|t_2 - t_1|$.

Um processo estocástico $Z = \{Z(t), t \in T\}$ diz-se *fracamente estacionário* ou estacionário de segunda ordem se e somente se atender as seguinte condições:

1. $E\{Z(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante para todo $t \in T$
2. $E\{Z^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;
3. $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{Z_{t_{(1)}}, Z_{t_{(2)}}\}$ é uma função de $|t_1 - t_2|$.

Se um processo for *Gaussiano* (ou normal) ele será determinado pelas médias e covariâncias; em particular, se ele for estacionário de segunda ordem, ele será estritamente estacionário.

2.1.4 Tipos de modelos

Para Morettin e Tolo (2006) é possível classificar os modelos para séries temporais em duas classes, de acordo com o número de parâmetros envolvidos.

Modelos Paramétricos, para os quais o número de parâmetros é finito. Para os modelos paramétricos faz-se a análise no domínio do tempo e os modelos mais usados são os modelos de erro (ou regressão), os modelos auto-regressivos e de médias móveis (ARMA), os modelos auto-regressivos integrados de médias móveis (ARIMA), modelos de memória longa (ARFIMA), modelos estruturais e modelos não-lineares.

Modelos Não-Paramétricos, que tem um infinito número de parâmetros. Na classe dos modelos não paramétricos os mais utilizados são a função de auto-covariância (ou auto-correlação) e sua transformação de Fourier, o espectro.

Outra maneira de escrever uma série temporal é observada na forma

$$Z_t = f(t) + a_t, t = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

onde $f(t)$ é uma função chamada *sinal* e a_t é o *ruído*.

A seguir serão apresentados os principais modelos adotados usualmente para a análise de séries temporais.

2.2 Modelos ARIMA

2.2.1 Processo Linear Geral

De acordo com Morettin e Tolo (2006) o modelo de filtro linear supõe que a série temporal seja gerada através de um filtro linear (ou sistema linear), cuja entrada é um ruído branco, como mostra a Figura 1.

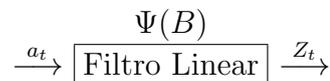


Figura 1: Filtro linear com entrada a_t , saída Z_t e função de transferência $\Psi(B)$.

Na forma matemática, tem-se que:

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \psi(B)a_t, \quad (2.8)$$

onde $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ é denominada *função de transferência* do filtro e μ é um parâmetro que determina o nível da série.

Z_t dado por (2.8) é um processo linear (discreto), em que

- $E(a_t) = 0; \forall t;$
- $Var(a_t) = \sigma_a^2, \forall t;$
- $E(a_t a_s) = 0, s \neq t.$

Chamando $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, temos

$$\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t \quad (2.9)$$

Se a sequência de pesos $\{\psi_j, j \geq 1\}$ finita ou infinita convergir, o filtro é estável e Z_t é estacionário. Neste caso μ é a média do processo. Caso contrário, Z_t é não estacionário e μ não tem significado específico, mas pode ser um ponto de referência para o nível da série. Da equação (2.8) temos

$$E(Z_t) = \mu + E\left(a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right),$$

e como $E(a_t) = 0$, para todo t , temos que $E(Z_t) = \mu$ se a série $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$ convergir.

Assim a covariância γ_j de Z_t é dada por

$$\gamma_j = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j}, \quad (2.10)$$

Como $\psi_0 = 1$. Em particular, para $j = 0$, obtemos a variância de Z_t ,

$$\gamma_0 = Var(Z_t) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2. \quad (2.11)$$

A condição de existência de (2.10) e (2.11) é que $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_{ji}^2 < \infty$. A média e a variância de Z_t são constantes e a covariância só depende de j , logo Z_t é estacionária.

Podemos escrever Z_t como a soma ponderada de valores passados $\tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}, \dots$ mais um ruído a_t

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{z}_{t-j} + a_t, \quad (2.12)$$

e segue-se que

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) \tilde{z}_j = a_t$$

ou

$$\pi(B) \tilde{z}_j = a_t, \quad (2.13)$$

onde temos o operador $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$.

Das expressões dadas por (2.13) e (2.14) temos que

$$\pi(B) \psi(B) a_t = a_t,$$

de modo que

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B), \quad (2.14)$$

e assim podemos obter os pesos π_j em função dos pesos ψ e vice-versa.

2.2.2 Modelos autorregressivos - AR

Morettin e Toloi (2006) também propõe que se um processo pode ser descrito pela expressão dado por (2.12) e se $\pi_j = 0$, para todo $j > p$, temos um *modelo auto-regressivo de ordem p*, que é denotado por $AR(p)$ e pode ser escrito como

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t, \quad (2.15)$$

note que aqui os pesos foram renomeados de π_j para ϕ_j , para $j = 1, 2, \dots, p$.

Tomando-se o operador auto-regressivo estacionário de ordem p

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \quad (2.16)$$

e então podemos escrever

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = a_t. \quad (2.17)$$

Como exemplo, o caso mais simples do modelo auto-regressivo é o de ordem $p = 1$, ou seja $AR(1)$, que pode ser denotado como

$$\tilde{Z}_t = \phi\tilde{Z}_{t-1} + a_t, \quad (2.18)$$

onde \tilde{Z}_t depende apenas de \tilde{Z}_{t-1} e do ruído no instante t . Como $\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi(B)$, o processo é sempre invertível.

Fazendo-se sucessivas substituições de \tilde{Z}_{t-1} , \tilde{Z}_{t-2} , etc., em (2.18), obtém-se

$$\tilde{Z}_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j},$$

ou seja,

$$\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots)a_t,$$

e se pode perceber facilmente que

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j = [\phi(B)]^{-1} = (1 - \phi B)^{-1}.$$

De acordo com a expressão (2.7) o processo será estacionário se $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$. Com isso deve-se ter $|\phi| < 1$. Como a raiz da equação $\phi(B) = 1 - \phi B = 0$ é $B = \phi^{-1}$, esta condição é equivalente a dizer que a raiz de $\phi(B) = 0$ deve cair fora do círculo unitário.

2.2.3 Modelos de Médias Móveis - MA

Considerando o processo linear dado (2.8) e supondo que $\psi_j = 0$, para $j > q$, obtemos um processo de médias móveis de ordem q , que denotamos por $MA(q)$ (do termo em inglês “moving average”). A partir de agora usaremos a notação

$$Z_t = \mu + a_t - \theta a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (2.19)$$

e sendo $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, temos

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t$$

onde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é o operador de médias móveis de ordem q . O caso mais simples é quando $q = 1$, $MA(1)$, ou seja

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta a_{t-1},$$

ou

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta B) a_t,$$

de modo que $\theta(B) = 1 - \theta B$. Como $\psi(B) = 1 - \theta B$ é finito, o processo é sempre estacionário.

Por outro lado, como

$$a_t = [\theta(B)]^{-1} \tilde{Z}_t = \frac{1}{1 - \theta B} \tilde{Z}_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) \tilde{Z}_t,$$

podemos obter a forma invertível do processo de maneira simples

$$\tilde{Z}_t = -\theta \tilde{Z}_{t-1} - \theta^2 \tilde{Z}_{t-2} - \dots + a_t.$$

Se $|\theta| < 1$, ou seja, a série $\pi(B) = \theta^{-1}(B)$ converge para $|B| \leq 1$. Isto é equivalente a dizer que os zeros de $\theta(B) = 1 - \theta B = 0$ estão fora do círculo unitário.

2.2.4 Modelos auto-regressivos e de médias móveis - ARMA

Os modelos auto-regressivos são bastantes populares em algumas áreas, como em economia, onde é natural pensar o valor de alguma variável no instante t como função de valores defasados da mesma variável. Mas representar um processo por um modelo de médias móveis puro parece não ser natural ou intuitivo.

Em muitas séries encontradas na prática, se quisermos um modelo com um número razoável de parâmetros, a inclusão de termos auto-regressivos e de médias móveis é uma solução adequada. Surgem, assim, os modelos $ARMA(p, q)$, da forma

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (2.20)$$

Se $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são os operadores auto-regressivos e de médias móveis, respectivamente, introduzidos anteriormente, a equação dada por (2.20) acima pode ser escrita de

uma forma mais compacta

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t. \quad (2.21)$$

O caso mais simples é quando $p = q = 1$, $ARMA(1, 1)$, onde têm-se $\phi(B) = 1 - \phi B$ e $\theta(B) = 1 - \theta B$, e a expressão (2.20) se reduz a

$$\tilde{Z}_t = \phi\tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}. \quad (2.22)$$

Fazendo-se a substituição na sequência de $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots$, em (2.22), obtêm-se \tilde{Z}_t escrito como um processo linear (ou médias móveis de ordem infinita), $\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t$ onde $\psi_j = \phi^{j-1}(\phi - \theta)$, para $j \geq 1$, de modo que o processo será estacionário se $\sum \psi_j = (\phi - \theta) \sum \phi^{j-1} < \infty$, ou seja, se $|\phi| < 1$. Além disso, o modelo $ARMA(1, 1)$ também pode ser escrito na forma

$$\pi(B)\tilde{Z}_t = a_t,$$

onde os pesos $\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta)$, $j \geq 1$, de modo que o processo é invertível se $\sum \pi_j < \infty$, ou seja, $|\theta| < 1$.

Logo a condição de estacionariedade para um processo $ARMA(1, 1)$ é a mesma que para um processo $AR(1)$ e a condição de invertibilidade é a mesma que para um processo $MA(1)$. Tais conclusões podem ser facilmente generalizadas para um processo $ARMA(p, q)$ para quaisquer p e q , pois pode-se escrever

$$\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t = \theta(B)\psi^{-1}(B)a_t \quad \text{ou} \quad \pi(B)\tilde{Z}_t = \phi(B)\theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t = a_t.$$

2.2.5 Modelos não-estacionários

Muitas séries encontradas na prática não são estacionárias. Uma série pode apresentar várias formas de não-estacionariedade. Observe, por exemplo, um modelo $AR(1)$

$$(1 - \phi B)\tilde{Z}_t = a_t, \quad (2.23)$$

onde a estacionariedade é dada para $|\phi| < 1$.

Quando $\phi = 1$ obtêm-se um processo não-estacionário $\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_{t-1} + a_t$ (passeio casual), porém se $|\phi| < 1$ o processo (2.23) “explode”, à medida que t aumenta.

Séries Z_t tais que, obtendo-se d diferenças tornam-se estacionárias, são denominadas

não-estacionárias homogêneas ou são portadoras de *raízes unitárias*. Existem também séries não-estacionárias, não-explosivas, que apresentam uma tendência determinística de modo que

$$Z_t = B_0 + B_1t + a_t.$$

2.2.6 Modelos autoregressivos integrados de médias móveis - ARIMA

Se $W_t = \Delta^d Z_t$ for estacionária, pode-se representar W_t por um modelo $ARMA(p, q)$, onde Δ^d é a d -ésima diferença da série W_t ou seja

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t. \tag{2.24}$$

Quando W_t for uma diferença de Z_t , então Z_t é uma *integral* de W_t . Daí vem o nome ARIMA de ordem (p, d, q) e escreve-se $ARIMA(p, d, q)$, sendo que p e q são as ordens de $\phi(B)$ e $\theta(B)$, respectivamente.

O modelo (2.24) supõe que a d -ésima diferença da série Z_t pode ser representada por um modelo ARMA, estacionário e invertível. A maioria dos casos se resolvem com uma ou duas diferenças, e em linhas gerais têm-se.

1. séries não estacionárias quanto ao nível: oscilam perto de um nível médio por algum tempo e depois saltam para outro nível tornam-se estacionárias com $d = 1$.
2. séries não-estacionárias quanto à inclinação: oscilam numa direção por algum tempo e depois mudam para outra direção temporária tornam-se estacionárias com $d = 2$.

O modelo $ARIMA(p, d, q)$ é um caso especial de um processo integrado. Em geral, diz-se que Z_t é integral de ordem d se $\Delta^d Z_t$ for estacionária, e então $Z_t \sim I(d)$. Quando $d = 0$, Z_t é estacionário.

2.3 Identificação do modelo ARIMA

Segundo Morettin e Tolo (2006), a identificação do modelo ARIMA é a fase mais crítica do ciclo iterativo do método de Box e Jenkins. Essa escolha é baseada, principalmente nas autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas. Geralmente, essa técnica é eficiente, mas pode ser que seja identificado mais de um modelo para a mesma série. O

objetivo da identificação é determinar os valores de p , d e q do modelo $ARIMA(p,d,q)$, além de estimativas preliminares dos parâmetros para serem usadas no estágio de identificação.

O procedimento de identificação consiste em:

1. verificar se a série é estacionária, por meio da análise do gráfico da série original e sua função de autocorrelação;
2. diferenciar a série até que se torne estacionária por meio do operador de diferença. O número de diferenças necessárias d é obtido quando a FAC amostral $Wt = \Delta^d Z_t$ decai com rapidez para zero;
3. conhecer o processo $ARMA(p, q)$ por meio da análise das autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas que devem imitar os comportamentos das respectivas quantidades teóricas.

2.3.1 Função de Autocovariância - FAC

Segundo Morettin e Tolo (2006) seja $\{Z_t, t \in T\}$ um processo estacionário real discreto, de média zero e facv $\gamma_\tau = E\{Z_t Z_{t+\tau}\}$. A *função de autocovariância* (facv) de um processo estocástico satisfaz às seguintes propriedades:

1. γ_0 ,
2. $\gamma_{-\tau} = \gamma_\tau$,
3. $|\gamma| \leq 0$,
4. γ_τ é positiva definida, no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0, \quad \forall a_1, \dots, a_n \quad \text{e} \quad \tau_1, \dots, \tau_n \in Z. \quad (2.25)$$

A *função de autocorrelação* do processo é definida por

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}, \tau \in T, \quad (2.26)$$

e tem as propriedades de γ_τ , exceto que agora $\rho = 1$.

Com observações Z_1, \dots, Z_n , a fac ρ_j é estimada por

$$r_j = \frac{c_j}{c_0}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (2.27)$$

em que c_j é a estimativa da função de auto-covariância γ_j ,

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} [(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+j} - \bar{Z})], \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.28)$$

onde $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$ é a média amostral. Neste caso fazemos $c_{-j} = c_j$ e $r_{-j} = r_j$.

2.3.2 Função de autocorrelação parcial - FACP

A função de autocorrelação parcial (fACP) é uma ferramenta bastante útil durante a fase de identificação do modelo a ser ajustado aos dados observados. Veja, a seguir, como é construída essa função.

Denotando por ϕ_{kj} o j -ésimo coeficiente de um modelo $AR(k)$, tem-se que ϕ_{kk} é o último coeficiente. Utilizando esse fato, as equações de Yule-Walker podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

e resolvendo, sucessivamente, estas equações para $k = 1, 2, \dots$, obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1, \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

De modo geral, podemos escrever

$$\phi_{kk} = \frac{|\mathbf{P}_k^*|}{|\mathbf{P}_k|},$$

onde \mathbf{P}_k é a matriz de autocorrelações e \mathbf{P}_k^* é a mesma matriz \mathbf{P}_k , exceto pela última coluna, que é substituída pelo vetor de autocorrelação. A função de autocorrelação parcial é definida como sendo a quantidade ϕ_{kk} , encarada como função de k .

Para um processo $AR(p)$ a facp se anula para todas as defasagens maiores do que p , isto é, o seu gráfico apresenta um “corte” após a defasagem p . Já para o processo $MA(q)$, a facp é dominada por uma mistura de exponenciais e/ou senóides amortecidas. Por fim, a facp de um processo $ARMA(p, q)$, comporta-se de modo semelhante à facp de um processo MA puro. Durante o estágio de identificação do modelo precisa-se calcular as estimativas das facp, com objetivo de compará-las com as respectivas facp teóricas. No caso dos modelos AR, tais estimativas podem ser feitas, ajustando-se sucessivamente, processos autoregressivos de ordem $p = 1, 2, 3, \dots$, por mínimos quadrados e considerando as estimativas $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots$ do último coeficiente de cada ordem. A facp pode ser obtida, de modo alternativo, substituindo-se as fac ρ_j por suas estimativas nas equações de Yule-Walker

$$r_j = \hat{\phi}_{k1}r_{j-1} + \hat{\phi}_{k2}r_{j-2} + \dots + \hat{\phi}_{kk}r_{j-k}, j = 1, \dots, k \quad (2.31)$$

e resolvendo-se estas equações para $k = 1, 2, \dots$.

2.3.3 Critério de Informação de Akaike - AIC

Para Ehlers (2009), uma forma de se escolher entre possíveis modelos competidores é utilizar os critérios de informação que levam em conta além da qualidade de ajuste também penalizam a inclusão de parâmetros extras.

A definição mais utilizada é

$$AIC = -2 \log(\text{verossimilhança maximizada}) + 2m \quad (2.32)$$

onde m é o número de parâmetros (para modelos $ARIMA(p, d, q)$, por exemplo, temos $m = p + q + 1$). Aplicando estimativas de máxima verossimilhança em dados normalmente distribuídos ficamos com

$$AIC = n \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2m$$

onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sum \hat{\varepsilon}_t^2$.

2.3.4 Critério de Informação Bayesiano - BIC

Dos critérios baseados em modificações do AIC o mais conhecido é o critério de informação Bayesiano, dado por

$$BIC = -2 \log(\text{verossimilhança maximizada}) + m \log n. \quad (2.33)$$

Observe que este critério penaliza bem mais a inclusão de parâmetros extras. Portanto tende a selecionar modelos mais parcimoniosos do que o critério definido pelo AIC.

2.4 Estimação de Modelos ARIMA

Ao identificar um modelo provisório a ser ajustado à série temporal, deve-se obter estimativas eficientes para os seus parâmetros, onde denotamos por $\xi = (\phi, \theta, \sigma_a^2)$ o vetor com os $p + q + 1$ parâmetros de um modelo $ARIMA(p, d, q)$, onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$.

Agora supondo que a série original $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ tenha sido gerada por um processo $ARIMA(p, d, q)$. A partir daí, considerando d diferenças, pode-se gerar uma série W_t estacionária: $Z = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, onde $W_t = \Delta^d Z_t$ e $n = N - d$. Assim, o problema de estimar os parâmetros do modelo ARIMA é equivalente a estimar os parâmetros do modelo $ARMA(p, q)$ estacionário e invertível, representado por

$$a_t = \tilde{W}_t - \phi_1 \tilde{W}_{t-1} - \phi_2 \tilde{W}_{t-2} - \dots - \phi_p \tilde{W}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q},$$

em que $W_t = \Delta^d Z_t$, $\tilde{W}_t = W_t - \mu_w$ e $\mu_w = E[W_t]$.

Quando $d > 0$, é conveniente considerar $\mu_w = 0$. Caso contrário, μ_w será mais um parâmetro a ser estimado.

2.4.1 Método dos momentos

Este método consiste em substituir, nas equações que relacionam as autocorrelações (ou autocovariâncias) e os parâmetros do modelo, os momentos teóricos (médias, variâncias e autocorrelações) pelos estimadores amostrais equivalentes e resolver as equações resultantes.

Para o modelo $AR(p)$, o estimador de θ pelo método dos momentos é dado usando

equações da função de autocorrelação

$$\hat{\theta}_{0,MM} = \overline{W}(1 - \hat{\phi}_{1,MM} - \dots - \hat{\phi}_{p,MM}),$$

$$\hat{\phi}_{MM} = R_p^{-1}r_p,$$

$$\hat{\sigma}_{MM}^2 = c_0[1 - r_p' R_p^{-1} r_p],$$

em que $r_p = (r_1, r_2, \dots, r_p)'$ e R_p é a matriz formada pelos elementos $(r_{i-j})_{i,j=1}^p$; $\hat{\phi}_{MM}$ também é conhecido como estimador de Yulle-Walker.

Para o modelo $MA(q)$ os estimadores de θ são dados resolvendo-se as equações

$$r_j = \frac{-\hat{\theta}_{j,MM} + \hat{\theta}_{1,MM}\hat{\theta}_{j+1,MM} + \hat{\theta}_{2,MM}\hat{\theta}_{j+2,MM} + \dots + \hat{\theta}_{q-j,MM}\hat{\theta}_{q,MM}}{1 + \hat{\theta}_{1,MM}^2 + \dots + \hat{\theta}_{q,MM}^2}, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$\hat{\theta}_{MM}^2 = \frac{c_0}{1 + \hat{\theta}_{1,MM}^2 + \dots + \hat{\theta}_{q,MM}^2}.$$

Para o modelo $ARMA(p, q)$ os estimadores de θ e ϕ são obtidos em duas fases, dadas por

1. obtém-se o estimador de ϕ resolvendo a equação

$$r_j = \hat{\phi}_{1,MM}r_{j-1} + \dots + \hat{\phi}_{p,MM}r_{j-p}, \quad j = q+1, \dots, q+p,$$

2. obtém-se o estimador θ resolvendo a equação de autocovariâncias amostrais e os estimadores de ϕ obtido no passo anterior.

No caso particular quando $p = q = 1$, tem-se

$$r_2 = \hat{\phi}_{MM}r_1,$$

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{(1 - \hat{\phi}_{MM}\hat{\theta}_{MM})(\hat{\phi}_{MM} - \hat{\theta}_{MM})}{1 + \hat{\theta}_{MM}^2 - 2\hat{\phi}_{MM}\hat{\theta}_{MM}}.$$

2.4.2 Variâncias dos estimadores

Para mensurar a precisão dos estimadores encontrados, precisa-se construir intervalos de confiança para os parâmetros.

Seja $\eta = (\phi, \theta)$, de ordem $k \times 1$, onde $k = p + q$. Para n grande, os EMV têm uma distribuição assintótica normal, assim

$$\hat{\eta} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_k(\eta, \mathbf{V}),$$

onde temos que

$$\mathbf{V} = 2\sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_1 \partial \eta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_k \partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_k^2} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Pode-se provar que o EMV de σ_a^2 é

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\eta})}{n},$$

e que, para n grande, $\hat{\sigma}_a^2$ e $\hat{\eta}$ são não-correlacionados.

Substituindo σ_a^2 por $\hat{\sigma}_a^2$ na matriz anterior e calculando as derivadas $\frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$ numericamente, obtém-se estimativas das variâncias dos estimadores e estimativas das covariâncias entre os estimadores. Com as estimativas das variâncias tem-se intervalos de confiança para os parâmetros η_i , $i = 1, \dots, k$.

2.5 Diagnóstico em modelos ARIMA

2.5.1 Análise de Resíduos

Segundo Morettin e Tolo (2006) depois de estimar o modelo deve-se verificar se ele representa, ou não, adequadamente os dados. Essa verificação pode ser feita através da análise dos resíduos do modelo ajustado. Supondo que o modelo ajustado seja

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t,$$

com

$$W_t = \Delta^d Z_t.$$

Se este modelo for verdadeiro, então os “erros verdadeiros” $a_t = \theta^{-1}(B)\phi(B)W_t$ constituirão um ruído branco.

2.5.2 Teste de autocorrelação residual

Estimados ϕ e θ , as quantidades

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\phi}(B)W_t \quad (2.35)$$

são chamadas resíduos estimados ou simplesmente resíduos. Se o modelo for adequado, os valores de \hat{a}_t deverão estar próximos dos a_t e, portanto, deverão ser não-correlacionados. Se denotarmos por \hat{r}_k as autocorrelações dos resíduos \hat{a}_t , então deve-se ter $\hat{r}_k \simeq 0$.

Em particular, tais valores devem ter distribuição aproximadamente,

$$\hat{r}_k \sim \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad (2.36)$$

sempre supondo que o modelo ajustado é apropriado. As autocorrelações \hat{r}_k são calculadas por

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2}. \quad (2.37)$$

Segundo Box, Jenkins e Reinsel (1994) apud Morettin e Toloi (2006) um modelo $AR(1)$, tem

$$\begin{aligned} Var[\hat{r}_k] &\simeq \frac{1}{n} [1 - \phi^{2(k-1)}(1 - \phi^2)] \\ Cov\{\hat{r}_i, \hat{r}_j\} &\simeq \frac{1}{n} \{\delta_{ij} - \phi^{i+j-2}(1 - \phi^2)\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.5.3 Teste de Box-Pierce

Box e Pierce (1970) apud Morettin e Toloi (2006) sugeriram um teste para as autocorrelações dos resíduos estimados que não detecta quebras específicas no comportamento de ruído branco, e que pode indicar se esses valores são muito altos.

Ljung e Box (1978) sugeriram uma variação deste mesmo teste.

Sendo o modelo adequado, a estatística

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{j=1}^K \frac{\hat{r}_j^2}{(n-j)}$$

terá aproximadamente uma distribuição χ^2 com $K - p - q$ graus de liberdade. Se deseja uma distribuição assintótica, obtém-se sob a hipótese que $K = K(n) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, se atender as condições:

1. $\psi_j = O(n^{-1/2})$, $j \geq K(n)$, onde os ψ_j são coeficientes na expansão em médias móveis de W_t ;
2. $K(n) = O(n^{1/2})$, $n \rightarrow \infty$.

A hipótese de ruído branco para os resíduos é rejeitada para valores grandes de $Q(K)$. Sendo que as 10 ou 15 \hat{r}_k primeiras observações são suficientes.

2.5.4 Teste da Autocorrelação Cruzada

A análise das autocorrelações $|\hat{r}_k|$ dá informações sobre os novos termos de médias móveis que podem ser incluídos no modelo. Por exemplo, se $|\hat{r}_7| > 2/\sqrt{n}$, então um termo $\theta_7 a_{t-7}$ deve ser inserido no modelo.

Uma alternativa consiste em investigar a função de correlação cruzada (fcc) entre valores passados da série e o valor presente do ruído. Se o modelo for adequado, logo a_t e Z_{t-k} serão não correlacionadas para $k \geq 1$, então $\text{Cov}\{a_t, Z_{t-k}\} = \gamma_{az}(k) = 0$, $k \geq 1$. Isso requer uma investigação da função de correlação cruzada definida por

$$s_k = \frac{\sum a_t (Z_{t-k} - \bar{Z})}{[\sum a_t^2 \sum (Z_t - \bar{Z})^2]^{1/2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Sugere-se que o modelo é inadequado se para um dado k_0 , o valor de s_k for grande.

Como são desconhecidos os a_t e \hat{s}_k , eles devem ser substituídos por seus estimadores, dados por

$$\hat{s}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{a}_t (Z_{t-k} - \bar{Z})}{[\sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2 \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2]^{1/2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pode-se provar que, se Z_t for estacionário, com fac ρ_k , então

$$E(s_k) \rightarrow 0, \quad (a)$$

$$\text{Var}(s_k) \rightarrow \frac{1}{n-k} \simeq \frac{1}{n}, \quad k > 0, \quad (b)$$

$$\text{Cov}\{s_k, s_{k+l}\} \rightarrow \frac{1}{n-k} \rho_l \simeq \frac{1}{n} \rho_l, \quad k > 0.$$

As relações (a) e (b) mostram que $\gamma_{az}(k)$ é significativamente diferente de zero se $|s_k| > 2/\sqrt{n}$. Mas não são válidas quando usa-se os resíduos estimados \hat{a}_t . Hokstad (1983) *apoud* Morettin e Toloi (2006) mostra que $1/n$ é um limite superior para $\text{Var}(\hat{s}_k)$, quando $Z_t \sim AR(p)$. Logo julgar s_k quando $|\hat{s}_k| > 2/\sqrt{n}$ é razoável para k grande.

2.6 Previsão Com Modelos ARIMA

Após a identificação, estimação e checagem do diagnóstico, que oferecem uma estimativa do modelo gerador da série ajustável aos dados reais, podemos utilizar o modelo ajustado para fazer previsões, não esquecendo que é apenas uma aproximação do processo gerador verdadeiro, e que por isso está sujeito a erros de identificação como também de estimação. Portanto, uma boa representatividade do modelo depende muito do trabalho nas etapas de identificação e estimação.

De acordo com Morettin e Toloi (2006), se o interesse é prever um valor Z_{t+h} , $h \geq 1$, supondo que se tem observações $\dots, Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t$, até o instante t , conhecido como origem das previsões. A previsão de origem t e horizonte h será denominada por $\hat{Z}_t(h)$.

Nesta seção assume-se que $W_t = (1 - B)^d Z_t$ é estacionário e invertível e os parâmetros do modelo são conhecidos. Supondo agora que temos o modelo $ARIMA(p, d, q)$ e que $t + h$ assume o lugar de t , temos que

(a) **forma de equação de diferenças**

$$Z_{t+h} = \varphi_1 Z_{t+h-1} + \dots + \varphi_{p+d} Z_{t+h-p-d} - \theta_1 a_{t+h-1} - \theta_2 a_{t+h-2} - \dots - \theta_q a_{t+h-q} + a_{t+h}; \quad (2.39)$$

(b) **forma de choques aleatórios**

$$Z_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^{t+h} \psi_{t+h-j} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j + a_{t+h-j}, \quad (2.40)$$

onde $\psi_0 = 1$ e os demais pesos ψ_j são obtidos fazendo $\varphi(B)\psi(B) = \theta(B)$.

(c) **forma invertida**

$$Z_{t+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t+h-j} + a_{t+h} \quad (2.41)$$

onde os pesos π_j são obtidos fazendo $\varphi(B) = \theta(B)\pi(B)$.

2.6.1 Formas básicas de previsão

Pode-se expressar $\hat{Z}_t(h)$ de três maneiras de acordo com as formas de previsão de um modelo ARIMA, conforme citado acima. A seguir iremos detalhar um pouco mais cada uma destas formas.

(a) **Previsão utilizando a equação de diferenças**

Tomando a esperança condicional em (2.39), obtém-se que

$$\hat{Z}_t(h) = \varphi_1[Z_{t+h-1}] + \dots + \varphi_{p+d}[Z_{t+h-p-d}] - \theta[a_{t+h-1}] - \dots - \theta_q[a_{t+h-q}] + [a_{t+h}], \quad (2.42)$$

para $h \geq 1$. Aqui deve-se atender as seguintes condições

$$[Z_{t+k}] = \hat{Z}_t(k), k > 0,$$

$$[Z_{t+k}] = Z_{t+h}, k \leq 0,$$

$$[a_t + k] = 0, k > 0,$$

$$[a_t + k] = a_t + k, k \leq 0$$

(b) Previsão usando a forma de choques aleatórios

De $\varphi(B)\psi(B) = \theta(B)$ tem-se

$$\hat{Z}_t(h) = \psi_1[a_{t+h-1}] + \psi_2[a_{t+h-2}] + \dots + \psi_{h-1}[a_{t+1}] + \psi_h[a_t] + \dots + [a_{t+1}] \quad (2.43)$$

(c) Previsão usando a forma invertida

De $\varphi(B) = \theta(B)\pi(B)$ obtém-se

$$\hat{Z}_t(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [Z_{t+h-j}] + [a_{t+h}]. \quad (2.44)$$

3 Aplicação

Com um conjunto de observações bem definido podemos coletar informações para diversos fins, neste caso, usaremos estas informações para prever valores futuros, ou seja, fazer previsões estimadas dos totais mensais em dólar de exportações do Brasil para o Chile. Toda análise será feita com o auxílio do *software R* versão 2.13.1. Gráficos, testes, tabelas e previsões serão algumas das ferramentas utilizadas para ilustrar melhor este trabalho.

No site do Banco Central, na aba intitulada “Economia e Finanças” encontramos o item séries temporais. Clicando em “Acesso ao Sistema de Séries temporais” e depois em “Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS)”, escolhendo a opção “Setor Externo” clique em “Balança Comercial” e selecione “Exportações por países”, bastando por fim marcar de qual país deseja coletar seus dados para estudo. Uma vez escolhido o país é necessário definir o período de coletas dos seus dados.

No presente estudo foram coletadas informações de exportações para o Chile de janeiro de 2000 a dezembro de 2012, onde será feita uma análise para tentar descobrir se a série apresenta alguma tendência de crescimento ao longo dos meses ou dos anos. O objetivo é selecionar o modelo de série temporal que melhor represente os dados, e que será utilizado para fazer previsões de 12 meses a frente.

Na escolha do modelo adequado se faz necessário analisar gráficos, porém, é preciso ter bastante cuidado ao observar os gráficos da Função de Autocorrelação (FAC) e Função de Autocorrelação Parcial (FACP). Os Critérios AIC (Akaike information criterion) e BIC (Bayesian information criterion) podem ser usados para identificar o modelo mais parcimonioso. Apesar de ter sido motivo de estudo neste trabalho, o BIC não será usado na análise.

Observe na Figura 2 da série de dados originais (à esquerda, superior) que pode-se perceber a existência de uma evidente tendência de crescimento. Ainda na Figura 2 no gráfico à esquerda inferior, observa-se que a série parece estacionária com apenas uma

diferença simples.

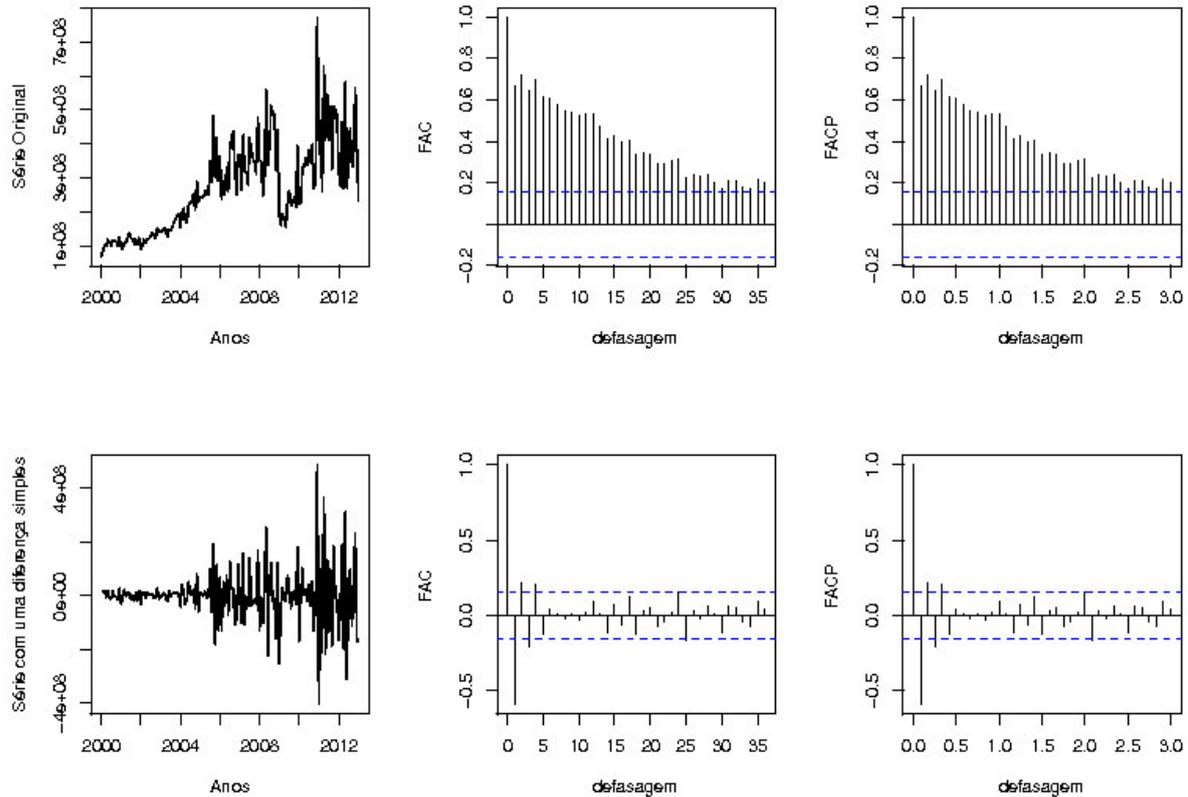


Figura 2: Gráfico da série original e com uma diferença no tempo, com as respectivas funções fac e facp.

Analisando os gráficos da FAC e FACP (Figura 2, gráficos da linha inferior ao centro e à direita) foi selecionado o modelo $ARIMA(1,1,1)$, ou seja, um modelo integrado autorregressivo e de médias móveis com parâmetros $p = 1$, $d = 1$, e $q = 1$.

Usando o *software* R, calculou-se os coeficientes estimados e o valor de AIC para este modelo, que será usado para definir o melhor modelo. Para isto foi fixado o valor do parâmetro $d=1$, e variou-se os parâmetros p e q de 0 até 2. O resultado mostrou que o modelo $ARIMA(1,1,1)$ tem o menor valor de AIC.

```
m = arima(y, order = c(1, 1, 1))
```

Call:

```
arima(x = y, order = c(1, 1, 1))
```

Coefficients:

```
ar1      ma1
```

```

-0.2364 -0.6332
s.e.   0.1070  0.0881

```

```
sigma^2 estimated as 6.786e+15: log likelihood = -3065.16, aic = 6136.32
```

Observando os gráficos da Figura 3, contendo os resíduos padronizados e o correlograma, o gráfico da FAC não apresenta pontos fora dos limites e os p -valores do teste de Ljung-Box para autocorrelações parecem estar distribuídos aleatoriamente.

O resultado da previsão para 12 meses, com os dados reais e a diferença ou erro de previsão podem ser contemplados na Tabela 1. Apesar de os números dados em milhões de dólares, não foi usada a transformação logarítmica.

Tabela 1: Valores reais e previstos a partir do modelo ajustado, para o ano de 2013, com os respectivos erros.

Mês	Valores reais	Valores previstos	Erro
Jan	234170712	365019026	-130848314
Feb	329832741	395948840	-66116099
Mar	372151503	357707869	14443634
Apr	342039021	366747236	-24708215
May	450550685	364610519	85940166
Jun	357488860	365115594	-7626734
Jul	334730378	364996205	-30265827
Aug	393662990	365024426	28638564
Sep	398782526	365017755	33764771
Oct	431344587	365019332	66325255
Nov	406377357	365018959	41358398
Dec	432651616	365019047	67632569

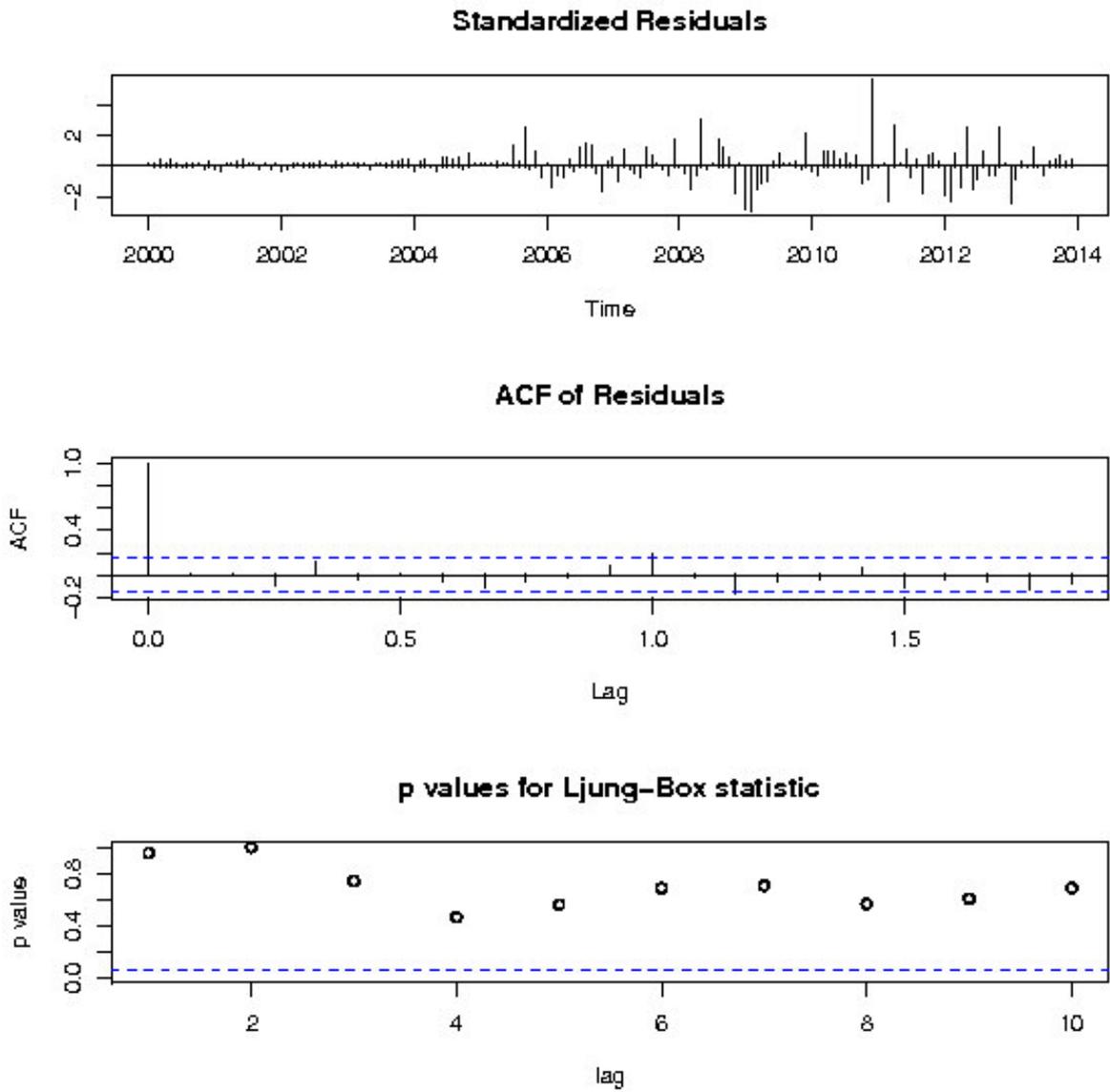


Figura 3: Gráfico da série padronizada com o correlograma

4 Conclusão

Os resultados encontrados na aplicação do modelo $ARIMA(1,1,1)$ no banco de dados de exportações durante os anos de 2000 até 2012, foi o melhor modelo encontrado, na rápida análise visual com interpretação das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial FAC e FACP, respectivamente.

Além da análise visual dos gráficos também foram comparados os valores de AIC para os modelos $ARIMA(1,1,0)$, $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(0,1,1)$, $ARIMA(1,1,2)$ com o valor do AIC obtido para o modelo $ARIMA(1,1,1)$, ajustado neste trabalho. Na comparação dos modelos observamos que o $ARIMA(1,1,1)$ foi o que apresentou o menor AIC e, por isso, foi escolhido para fazer previsões 12 meses a frente e comparado com os dados reais, dado que os valores de exportação para o ano de 2013 também foram obtidos.

É importante destacar que esta análise poderia ter ido mais adiante, observando se há sazonalidade ao longo do tempo, caso em que seria mais adequada a utilização de modelos SARIMA. Porém, como este assunto de sazonalidade não foi estudado neste trabalho, a análise de modelos SARIMA não foi realizada e tratamos de modelos ARIMA.

De modo geral, esse trabalho teve resultados satisfatórios, com o objetivo de expor uma breve revisão teórica sobre séries temporais e sua aplicação no desenvolvimento de estratégias de planejamento e ajuda no processo de tomada de decisão.

Referências

EHLERS, R. S. *Análise de séries temporais*. São Carlos, 2009.

FISCHER, S. *Séries univariantes de tempo-metodologia de Box e Jenkins*. Rio Grande do Sul: [s.n.], agosto 1982.

Ministério das Relações Exteriores. *Como exportar-Chile*. 2014. Disponível em: <http://www.fecomerciomg.org.br/pdfs/como_exportar_chile.pdf>. Acesso em: 03 de março de 2014.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries temporais*. São Paulo: Blucher, 2006.

SOUZA, F. M. *Modelos Box & Jenkins Aplicados A Demanda De Leitos Hospitalares*. Santa Maria, RS, Brasil, 2006.