UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

TEOREMA DE PITÁGORAS

ELIONALDO FIRMINO RAMOS

CAMPINA GRANDE – PB
2012

ELIONALDO FIRMINO RAMOS

TEOREMA DE PITÁGORAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Graduação em Matemática.

ORIENTADOR: VANDENBERG LOPES VIEIRA

CAMPINA GRANDE – PB

2012

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

R175t Ramos, Elionaldo Firmino.
Teorema de Pitágoras [manuscrito] / Elionaldo Firmino Ramos. - 2013.
56 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.
"Orientação: Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Pitágoras. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Escola pitagórica. I. Título.

21. ed. CDD 516

ELIONALDO FIRMINO RAMOS

O TEOREMA DE PITÁGORAS

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

MONOGRAFIA APROVADA EM: 11/06/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vandenberg Lopes vieira

Departamento de Matemática – CCT/UEPB)
Orientador

Leopoldo Maurício Barbosa
Prof. Ms. Leopoldo Maurício Tavares Barbosa

Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

José Ginaldo de Souza Farias
Prof. Ms. José Ginaldo de Souza Farias

Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

AGADECIMENTO A DEUS

Em primeiro lugar tenho que agradecer a Deus, pois, em minha opinião é o criador de tudo o que há na terra inclusive uma das melhores e mais interessantes matérias que é a matemática.

Tenho que agradecer porque durante todo o curso houve vários momentos em que o pensamento de desistir era maior que eu, mas, Deus sempre me deu forças para seguir e ele também mandou anjos em foram de amigos que sempre me ajudaram e me incentivaram a continuar essa tarefa em alguns momentos muito árdua.

E com esse trabalho encerro uma história de lágrimas e sorrisos que me marcou e que jamais esquecerei.

Obrigado Meu **DEUS**!

AGRADECIMENTO AOS PROFESSORES

Quero agradecer a todos os professores que em alguns momentos os tive não como meus professores mais como amigos, pois, em muitos momentos dessa jornada foi preciso levar um ser reanimado, foi preciso levar uma bronca para que eu acordasse.

E nem todos os professores tem esse interesse, só os que realmente se importam com o aluno, e a esses tomei a liberdade de chama-los de amigos.

Um abraço forte a todos e que sempre obtenham sucesso em vossas vidas.

AGRADECIMENTO A MINHA MÃE

O que seria de mim sem você minha mãe? Eu não seria nada pois foi você quem meu colocou no mundo, e dentro dele vi em você toda dedicação para que nele estando me portasse com decência, caráter, alegria, respeito, valorizar seus amigos, dentre tantos outros ensinamentos.

Dedico esse trabalho acadêmico a você minha mãe que foi em minha vida a fonte de inspiração que sempre me motivava a lutar, sempre ter fé e jamais desistir por mais difícil que a tarefa se apresentar.

Obrigado minha mãe por estar sempre do meu lado. Fique certa que sempre estarei contigo.

AOS AMIGOS

Tenho que agradecer aos amigos, pois, em muitos momentos eles foram anjos que não me deixaram desistir de forma alguma. Foi preciso me darem bronca para que eu percebesse que seguir em frente era a única e melhor saída.

Em especial a minha esposa **FERNANDA SOARES TRAJANO** que desde entrou em minha vida sempre me incentivou a continuar meu curso e junto comigo fizemos grandes esforços para que eu pudesse concluí-lo. Dai eu a considero minha melhor amiga por estar sempre ao meu lado e não me deixando fraquejar.

Um abraço especial a meu irmão **GUILHERME FIRMINO RAMOS** pelo incentivo e por sempre me mostrar que tem que sempre buscar realizar o que nos dá prazer, no meu caso a Matemática.

Hoje quando vejo esta etapa ser vencida tenho que agradecer a todos os amigos, que sempre estarão comigo. Valeuuuuuuuuuuu.

SUMÁRIO

Capítulo 3

1- TEOREMA DE PITAGORAS EM UMA NOVA VERSÃO

1.1- INTRODUÇÃO

OTeorema de Pitágoras que é um dos conceitos matemáticos mais relevantes para um melhor compreender a geometria do cotidiano convida o aluno a participar de uma experiência descontraída, educativa e serve para que o aluno desenvolva sua autoconfiança pegando gosto pela matéria.

2- TEOREMA DE PITAGORAS EM NOSSO COTIDIANO

2.1- JUSTIFICATIVA

Faz-se necessário desenvolver no aluno o gosto pelo aprendizado, proporcionando-lhes atividades prazerosas e que o ajudem em seu desenvolvimento. Além de tirar da cabeça do mesmo a ideia de que a matemática é algo difícil. Através deu um trabalho dinâmico e diversificado queremos evitar a memorização que é uma das características encontradas nos métodos tradicionais. Queremos leva-los a construção independente levando em consideração as ideais pessoais.

2.2- OBJETIVO GERAL

Tornar possível que o aluno desenvolva a capacidade de compreender o Teorema de Pitágoras aplicando seus conceitos em seu cotidiano.

3- GUIAS METODOLÓGICOS

3.1- GUIA METODOLÓGICO 1

Aluno: Elionaldo Firmino Ramos

Assunto: TEOREMA DE PITÁGORAS

Séries: 8ª e 9ª Ano do Ensino Fundamental

3.1.1- Objetivos

1. Reconhecer o Teorema de Pitágoras

2. Fazer a relação com outras áreas de conhecimento

3. Valorizar o Teorema em nossa vida

3.1.2- Recursos Didáticos

Papel, tesoura, régua, esquadro, papel milimetrado, kit pedagógico, livro didático.

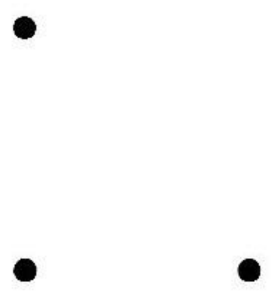
3.1.3- Procedimentos Pedagógicos

1. Oficina
2. Guia Metodológico

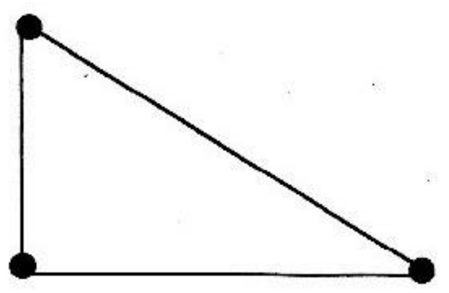
Isopor; cola; estiletes; papel; cartolina; papel milimetrado, etc.

Procedimentos:

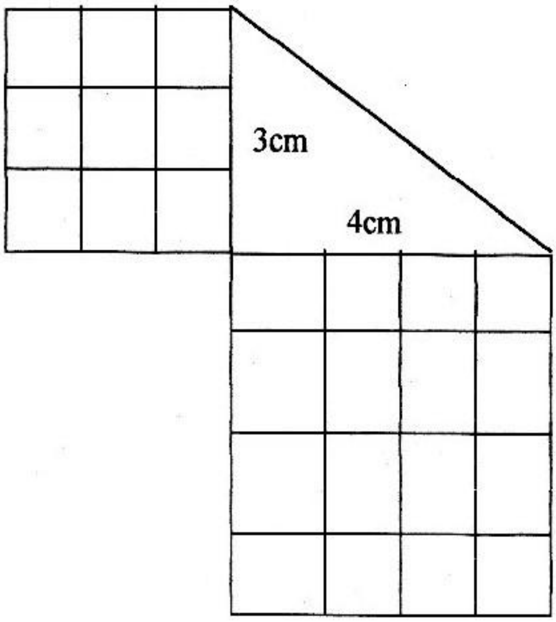
1. Observe os pontos abaixo



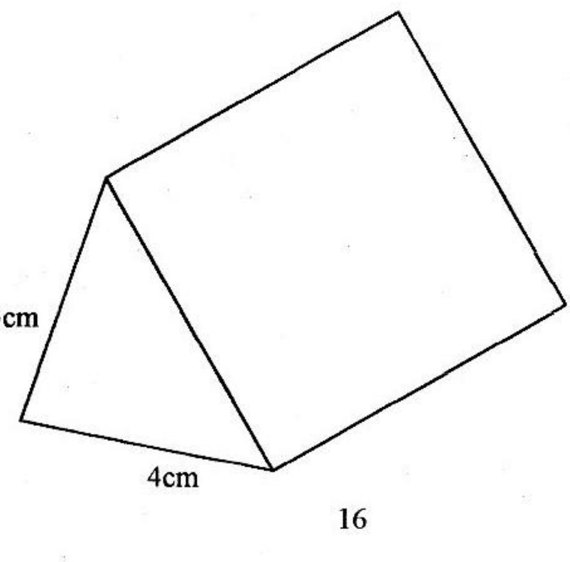
2. Ligue os pontos do triangulo.



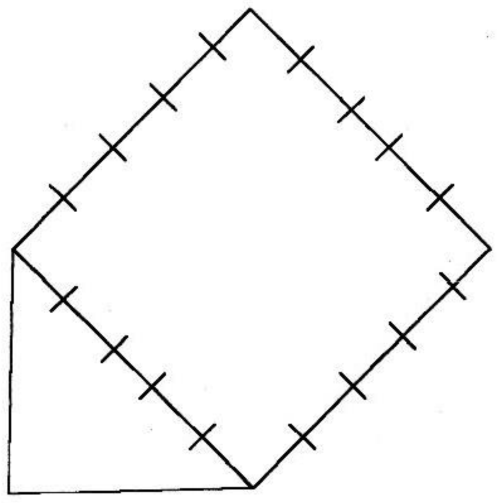
3. Construa quadrados sobre os catetos usando unidades do papel milimetrado.



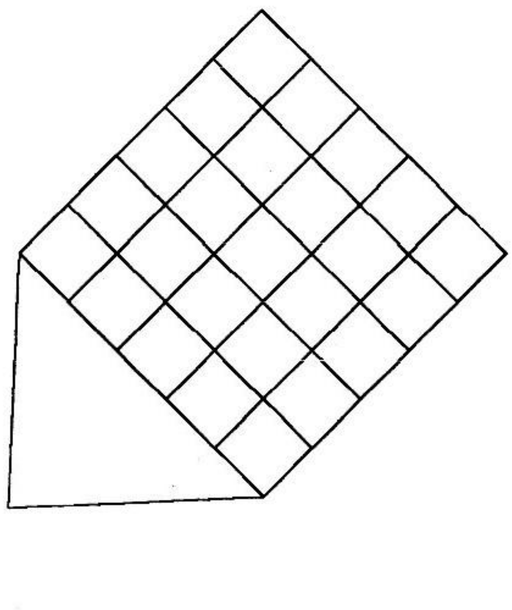
4. Agora construa sobre a hipotenusa um quadrado, com medida igual à medida da hipotenusa.



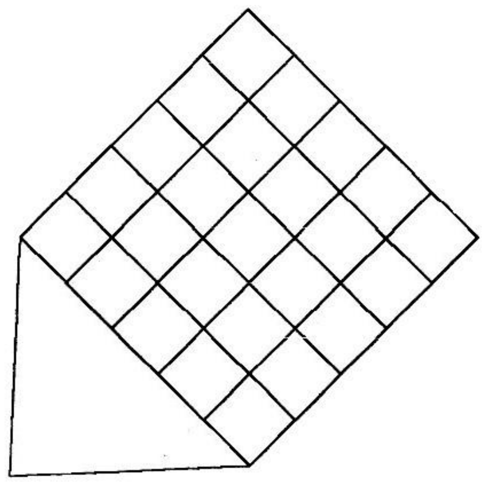
5. Divida os lados do quadrado da hipotenusa em 5 unidades de 1cm.



6. Agora ligue os pontos do quadrado da hipotenusa.



7. Recorte as unidades de áreas construídas sobre os catetos. Depois forme os quadrados construídos na hipotenusa.



3.2 – GUIA METODOLÓGICO

1. Observe os quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo construído.

2. Verifique a área dos respectivos quadrados.

2.1 – A área do quadrado I é AI = __________

2.2 -A área do quadrado II é AII = _________

2.3 – A área do quadrado III é AIII = _________

3. Que relação existe entre AI, AII e AIII.

Escreva: _____________ = ________________ + ________________

4. Concluímos que a soma das _____________ dos quadrados dos catetos é igual ou equivalente à _________________ do quadrado da hipotenusa. Seja a relação $a^2 + b^2 = c^2$que conhecida como Teorema de ______________.

3.3 – GUIA METODOLÓGICO

3.3.1 – Objetivos:

1. Apreciar o enfoque histórico do Teorema de Pitágoras;
2. Reconhecer o Teorema de Pitágoras;
3. Relacionar o Teorema de Pitágoras com outras áreas de conhecimento;
4. Valorizar a importância do Teorema de Pitágoras em nossa vida.

3.3.2- Recursos Didáticos

Papel, tesoura, régua, esquadro, papel milimetrado, kit pedagógico, poliplano, livro didático e etc.

3.3.3 – Procedimentos Metodológicos

a) Oficina
b) Guia Metodológico.

a) Oficina:

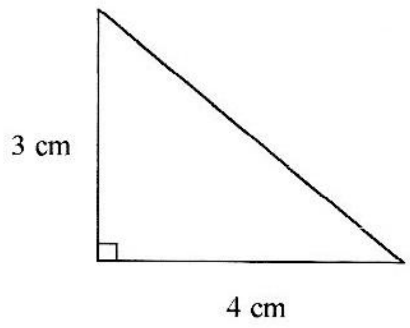
Material para confeccionar o kit.

Isopor; cola; tesoura; estiletes; papel camurça; cartolina guache; régua; imãs; esquadro; borracha; apontador e etc.

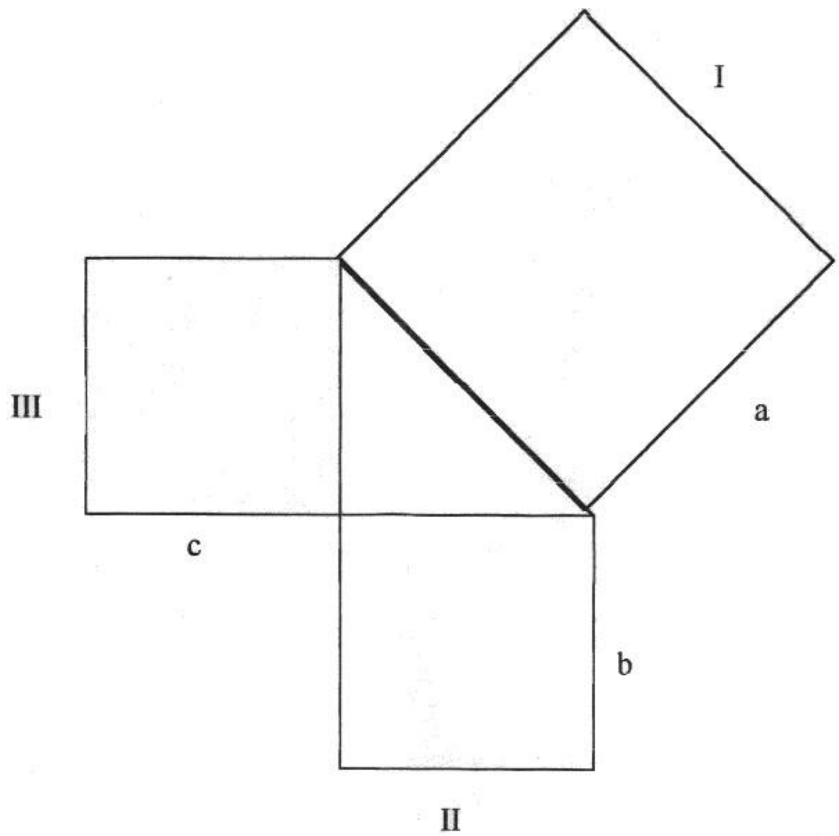
a.1) Descrição do material metodológico.

Como elaborar?

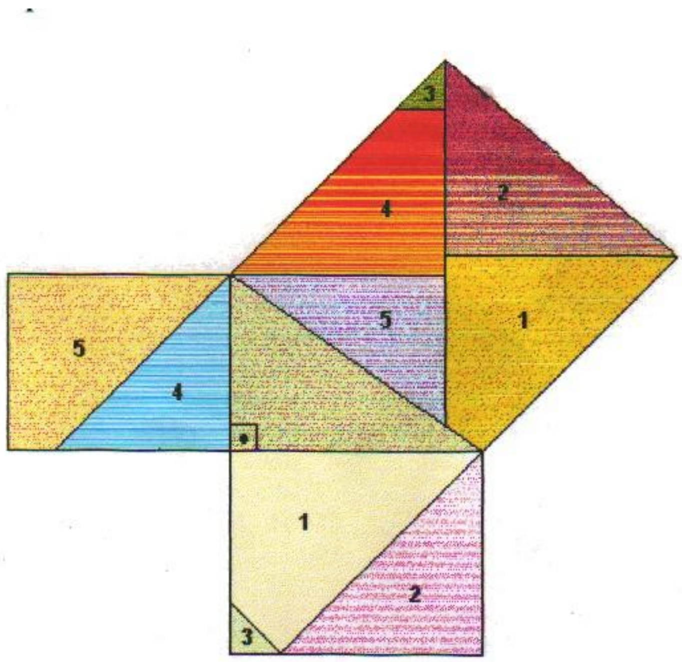
1) Desenhar um triângulo cujos os catetos medem respectivamente 3 *cm* e 4 *cm;* depois ligar as extremidades dos catetos formando a hipotenusa (lado maior).



2) Construa quadrados sobre os catetos e hipotenusa com medidas de lados iguais as medidas; respectivamente dos catetos e da hipotenusa.



3) Observe como foi dividido os catetos no triângulo do poliplano, em seguida faça o mesmo com o triângulo que você desenhou. Depois monte as peças no quadrado da hipotenusa.



b) **Guia Metodológico**

b.1) Tente montar as peças de 1, 2, 3, 4 e 5 no quadrado I (o da hipotenusa)

b.2) Calcule as áreas das figuras 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto obtemos:

$$A_{QI} = \underbrace{A1 + A2}_{A_{QII}} + \underbrace{A3 + A4}_{A_{QIII}} + A5$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

4- ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

4.1- OBJETIVOS

2. Apreciar o enfoque histórico do Teorema de Pitágoras;
3. Reconhecer o Teorema de Pitágoras com outras áreas do conhecimento;
4. Relacionar a importância do Teorema em nossas vidas.

4.2- RECURSOS DIDÁTICOS

✓ Kit pedagógico, poliplano, mini antena de rádio, quadro, lápis, giz, apagador, livro didático e etc.

4.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

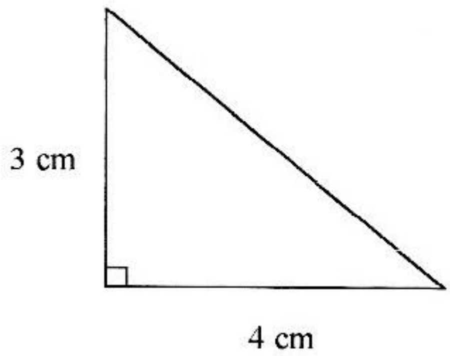
a) Oficina
b) Guia Metodológico

Material para confeccionar o kit:

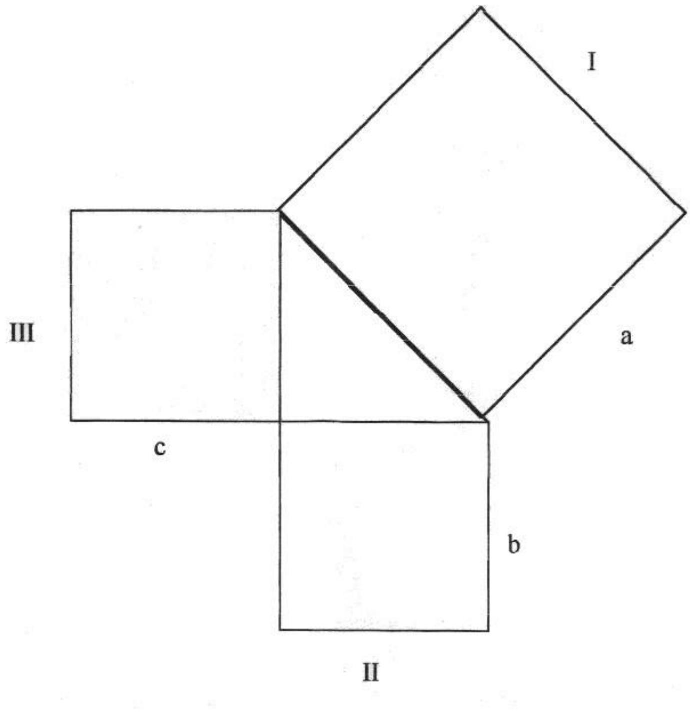
Isopor, cola, tesoura, estilete, papel camurça, cartolina guache, régua, imãs, esquadro, apontador, borracha e etc.

a.1) Discrição do material metodológico – Como elaborar?

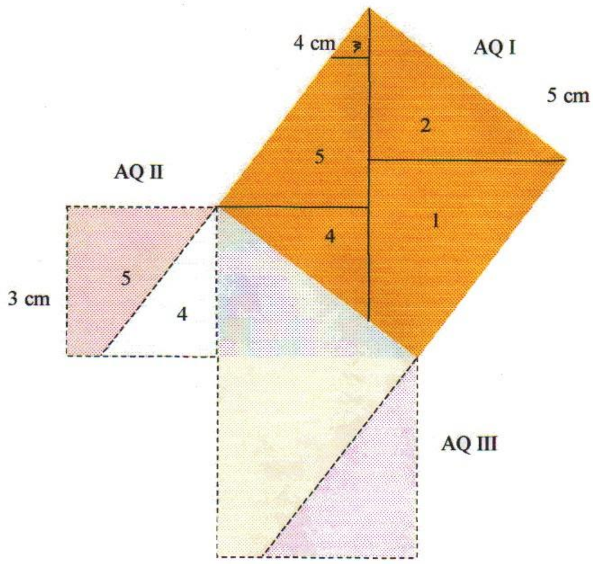
a.2) Desenhar um triângulo cujos catetos medem respectivamente 3 *cm* e 4 *cm*; depois ligar as extremidades dos catetos formando a hipotenusa (maior lado).



a.3) Construa quadrados sobre os catetos e hipotenusa com medidas de lados iguais às medidas respectivas dos catetos e da hipotenusa.



- Observe como foi dividido os catetos no triângulo do poliplano, em seguida faça o mesmo como o triângulo que você desenhou. Depois monte as peças no quadrado da hipotenusa.



- Guia Metodológico

1. Tente montar as peças1, 2, 3, 4 e 5 no quadrado I (o da hipotenusa)
2. Calcule as áreas das figuras 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto obtemos

$$\underset{\displaystyle a^2}{\underbrace{A_{QI}}} = \underset{\displaystyle b^2}{\underbrace{A_1 + A_2}_{A_{QII}}} + \underset{\displaystyle c^2}{\underbrace{A_3 + A_4 + A_5}_{A_{QIII}}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

5. ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

5.1 **OBJETIVOS**

1. Apreciar o enfoque histórico do Teorema de Pitágoras;

2. Relacionar o Teorema de Pitágoras;

3. Relacionar o Teorema com outras áreas do conhecimento

4. Valorizar sua importância em nossas vidas.

5.2 **RECURSOS DIDÁTICOS**

Papel, tesoura, régua, esquadro, papel milimetrado, kit pedagógico, poliplano, livro didático e etc.

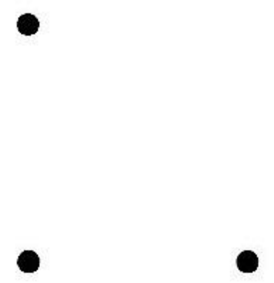
5.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS:

a) Oficina
b) Guia Metodológico

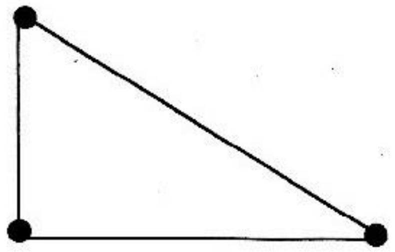
a.1) Descrição do Material metodológico. Como elaborar?

Procedimentos:

a.1.1) Observe os pontos abaixo.

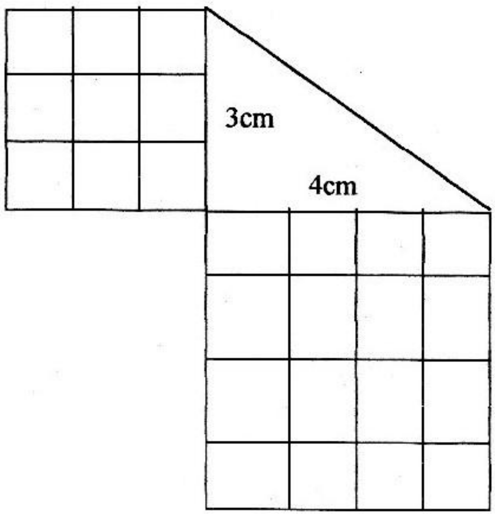


a.1.2) Ligue os pontos formando um triângulo.

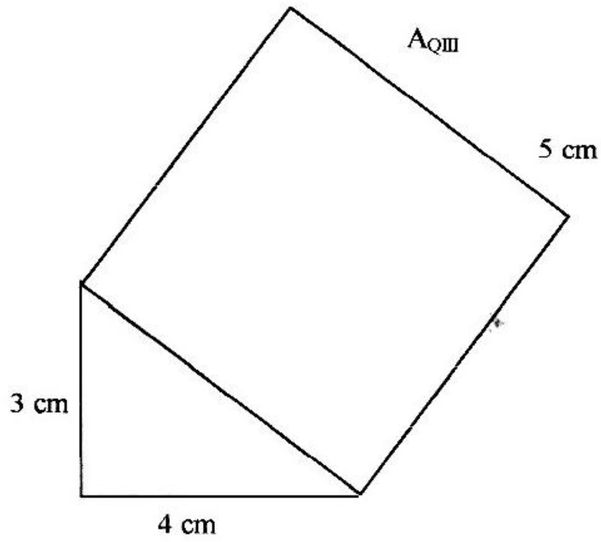


3.0) Construa quadrados sobre os catetos usando unidades do papel milimetrado.

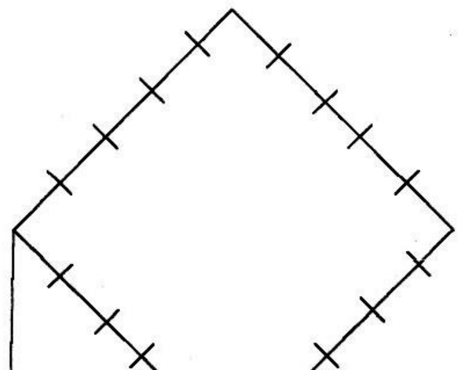
a.1.3)



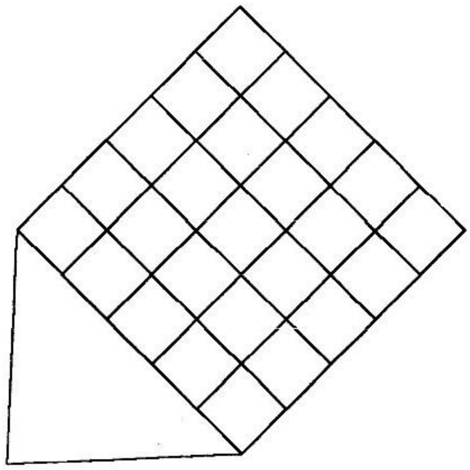
a.1.4) Agora construa sobre a hipotenusa um quadrado com medida igual a medida da hipotenusa.



a.1.5) Divida os lados do quadrado da hipotenusa em 5 unidades de 1*cm*.



Recorte as unidades de área construídas sobre os catetos. Depois dorme os quadrados construídos há hipotenusa.



c) Guida Metodológico

c.1) Observar os quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo construído.

c.2) Verifique a área dos respectivos quadrados.

2.1 – A área do quadrado I é A_I= _______________
2.2 - A área do quadrado II é A_{II}= ________________
2.3 - A área do quadrado III é A_{III}= ________________

c.3) Que relação existe entre AI, AII e AIII? *Escreva 25 = 16 + 9*

Concluímos que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual ou equivalente à área do quadrado da hipotenusa. Considere a relação que é conhecida como Teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

O TEOREMA DE PITÁGORAS: SUA EVOLUÇÃO E A ESCOLA PITAGÓRICA

O mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônia. Tales de Mileto(624 – 548 a.C aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580 – 500 a.C aproximadamente) tinham ainda uma vantagem estavam em condições de viajar aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informações de primeira mão sobre astronomia e matemática.

Pitágoras é uma figura pouco menos discutida que Tales, pois foi mais completamente envolto em lendas e apoteose. Tale s era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta místico, nascido em Samos, uma das ilhas de Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar de nascimento de Tales. Pitágoras incidentalmente foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse de modo que esse século grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona na Costa Sudeste do que agora é a Itália, mas era então chamado Magno Grécia. Lá formou uma sociedade secreta (a escola Pitagórica).

A escola Pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto a seus membros aparentemente porque o Pitagorismo aceitava a doutrina dametempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação consequente de que podia matar um animal que fosse moradia da alma a de um amigo morto.

Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras filosofia (ou amor à sabedoria) e matemática (ou o que aprendido) supõem terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais.

Dizia-se que o lema da escola pitagórica era: *tudo é número.* Lembrando que os Babilônicos tinham associado várias medidas às coisas que os cercavam, desde os movimentos nos céus até o valor de seus escravos, podemos perceber nesse lema uma forte afinidade com a mesopotâmia. Mesmo o Teorema, a que o nome de Pitágoras ainda esta ligado, veio provavelmente dos Babilônios. Sugeriu-se como justificativa parachama-lo Teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar demonstrações dele, mas não há meio de verificar esta conjectura. A doutrina da terra esférica é frequentemente atribuída a Pitágoras, mas não se sabe se essa conclusão era baseada em observação(talvez de novas constelações quando Pitágoras viajava para o sul) ou em imaginação. A própria ideia de que o universo é um “cosmos” ou todo harmoniosamente ordenado, parece ser uma contribuição pitagórica relacionada com essas ideias. Os pitagóricos foram os primeiros a acreditar que as operações da natureza podiam ser entendidas por meio da matemática.

A visão dos pitagóricos parece ter sido tão completamente abstrata e filosófica, que detalhes técnicos de computação não tinham importância nenhuma para eles. Tais técnicas eramrelegada a uma disciplina parte chamada logística. Essa tratava de enumeração das coisas em vez da essência e propriedade do número em si, questões que pertenciam à aritmética. Também é bom ter em mente que tanto Pitágoras "o pai dos sofistas", quanto Sócrates, o arquioponente do movimento, eram contrários à matemática e às ciências. Quanto ao caráter, Platão contrasta Mipias e Sócrates. Diz-se que Pitágoras se retirou para Metapontum no fim de sua vida e morreu lá (500 a.C aproximadamente).

A tradição diz que não deixou obras escritas, mas suas ideias foram levadas adiante por um grande número de discípulos entusiastas. O centro em Crotona foi abandonado quando um grupo político rival, de Sibaris, surpreendeu e assassinou muito dos chefes, mas os que escaparam do massacre levaram as doutrinas da escola a outras partes do mundo grego. A seita Pitagóricatinha exercido forte influência intelectual através de toda Magno Grécia, com matrizes políticas que podem ser descritas como interacional reacionária. Mas a Pitágoras se atribuiu ter tomado a matemática uma disciplina liberal, mas Platão teve grande influência para que se torne parte essencial do currículo da educação de homens de estado. Poucas contribuições matemáticas específicas são atribuídas a Platão. Uma fórmula para triplos Pitagóricos $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$, onde ***n*** é qualquer número natural, tem o nome de Platão, mas é apenas uma versão ligeiramente modificada de um resultado já conhecido por Babilônicos e Pitagóricos. No quinto livro dos elementos de Euclides, ele apresenta a bem fundamentada teoria das proporções, e até então o uso de proporcionalidade é evitado o quanto possível. Para o Teorema de Pitagórico, Euclides usou em vez disso a bela prova com uma figura às vezes descrita como um moinho de vento, cauda de pavão ou cadeira de noiva. Euclides tem a seu favor o fato de o Teorema de Pitágoras ser seguido imediatamente numa prova recíproca: se num triângulo o quadrado sobre um lado é igual à soma dos quadrados sobre os outros dois lados, o ângulo entre esses dois lados é reto.

6.1 – TERNOS PITAGÓRICOS

As realizações dos babilônios no domínio da algébrica são admiráveis, mas os motivos que impulsionaram essa obra não são fáceis de entender. O que pode ter havido é tolerância pra com a matemática por si mesma se não encorajamento; é sugerido por uma tabela (nº 322) na PlimptomCollection da Columbia University. No entretando, análise mostra que há um profundo significado na teoria dos números e que se relacione som uma espécie de prototrigmático.

A tabela de Plimptom 322 poderia dá a pressão de um exercício em teoria dos números, mas é provável que esse aspecto do assunto fosse apenas auxiliar para o problema de medir áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo.

Os babilônios não gostavam de trabalhar com recíprocos de números irregulares; pois esses não podiam ser expressos exatamente em frações sexagesimais finitas. Tão grande parte da matemática babilônica depende de tabelas de recíprocos, que não é de admirar que os itens em Plimptom 322 se apresentem com relações recíprocas. Se a = 1, então: 1 = (c + B).(c – B); de modo que c + b e c – b são recíprocos. Se começarmos com c+ b = n onde **n** é qualquer sexagesimal regular, então c – b = $\frac{1}{n}$ donde a = 1 e b = $\frac{1}{g}$(n - $\frac{1}{n}$) e c = $\frac{1}{2}$(n + $\frac{1}{n}$) são uma tripla fracionária Pitagóricas.

Se atribuído aos pitagóricos a regra para triadas pitagóricas dadas por $\frac{(m^2-1)}{2}$; $\frac{(m^2+1)}{2}$; com um **m** inteiro ímpar, mas como essa regra se relaciona de perto com exemplos babilônios; talvez não seja uma descoberta independente.

Exemplo:

a) (4; 3; 5) = $4^2 + 3^2 = 5^2$

$16 + 9 = 25$

$\mathbf{25 = 25}$

b) (12; 5; 13) = $12^2 + 5^2 = 13^2$

$144 + 25 = 169$

$\mathbf{169 = 169}$

6.2 – PRÉ-SOCRÁTICOS (SÉC VI E V a.C)

Os pré-socráticos, também chamados, ao longo da história da filosofia, *pré-platônicos* e*pré-aristotélicos*, são os primeiros pensadores do Ocidente, aqueles que deram início ao questionamento filosófico. Seus principais representantes são: Tales de Mileto, Anaximandro de Mileto, Anaxímenes de Mileto, Xenófanes de Cóloffon, Heráclito de Éfeso, Pitágoras de Samos, Alcmeão de Cróton, Parmênides de Eléia, Zenão de Eléia, Melisso de Samos, Empédocles de Agrigento, Filolau de Cróton, Arquitas de Tarento, Anaxágoras de Clazômena, Leucipo de Abdera, Demócrito de Abdera (era comum, na antiguidade, designar uma pessoa por seu nome e cidade de origem). Segundo as afinidades existentes entre seus pensamentos, estes filósofos se agruparam em determinadas escolas, como a jônica, a milésia, a pitagórica, a elática. É interessante notar que a filosofia não surge a princípio, como seria possível pensar, em Atenas, mas sim nas colônias gregas espalhadas pela Ásia Menos.

Segundo os historiadores da filosofia, isso foi propiciado devido a expansão econômica, mercantil e técnica, destas colônias, ocorrida durante o séc. VII, o que contribuiu para a formação de um pensamento eminentemente especulativo e compreensivo da realidade.

Aristóteles chamou estes pensadores de fisiólogos (*physiólogoi)* porque os seus pensamentos investigam a natureza (*physis*). A caracterização de Aristóteles deve ser corretamente compreendida. *Fisiólogo* não é um termo que deve ser confundido com as noções modernas e científicas de física ou fisiologia. Os pré-socráticos merecem tal denominação porque pensam a natureza (*physis)* como o princípio *(arché)* de constituição de toda e qualquer realidade. Para eles, a *physis* é compreendida como "o que brota e emerge a partir de si mesmo", podendo ser reunida e apresentada no *logos*. Traduzido por discurso, razão ou pensamento, o *logos* caracteriza a possibilidade de falar de acordo com a *physis*, buscando compreender a unidade que dá origem à multiplicidade aparente. Seja a água, como em Tales, o fogo, em Heráclito, o indeterminado de Anaximandro, a comunhão dos elementos em Empédocles, o átomo de Leucipo e Demócrito, ou mesmo o número para Pitágoras, trata-se sempre de um pensamento que busca indicar, através de um determinado elemento, a unidade original da *physis*, pela qual a totalidade do real pode ser compreendida. Por ser um pensamento (*logos) (physis)*, Aristóteles a cerca da natureza os caracterizou como fisiólogos. Os escritos dos pré-socráticos chegaram até nós sob forma de fragmentos, através de citações ou comentários (doxografia) de Platão, Aristóteles, Teofrasto, Diógenes Laércio e outros fisiólogos e historiadores de períodos mais recentes.

7- CONHECIMENTOS FUNDAMENTAIS DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

7.1 – APRESENTAÇÃO

Enquanto futuro professor de matemática sinto-me responsável e disponível a apresentar um ensino inovador e revolucionário, dedicando-me no momento a produzir novas metodologias de ensino, direcionando no momento meu objetivos ao Teorema de Pitágoras espero com o presente contribuir para melhoria do ensino de matemática nas escolas.

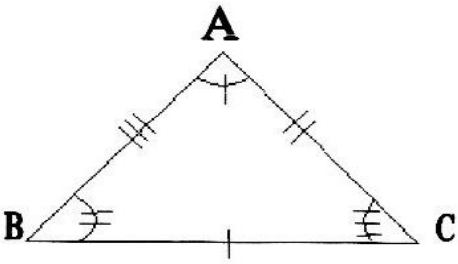
A seguir abordaremos um assunto que é de grande importância para a apresentação do Teorema de Pitágoras, iniciaremos com o significado da palavra congruência:

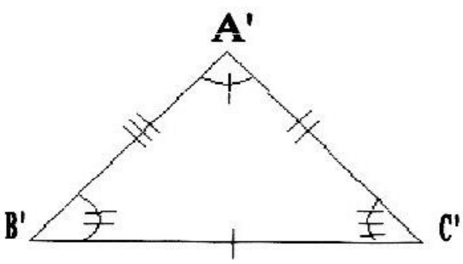
Congruência: s.f. Qualidade de congruente, coerência, conveniência.

Congruente: Adj. Harmônico, apropriado, conveniente, diz-se de duas figuras que podem coincidir por superposição.

7.1.1 – CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são congruentes quando seus lados e seus ângulos são respectivamente congruentes. Veja:





Logo teremos:

$AB \cong A'B'$ $\qquad \hat{A} \cong \hat{A}'$

$AC \cong A'C'$ e $\qquad B \cong B'$

Portanto:

$BC \cong B'C'$ $\qquad C \cong C'$

$\Leftrightarrow \quad \Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$

A relação de congruência satisfaz as seguintes propriedades:

Reflexiva: $\Delta\ ABC \cong \Delta\ ABC$

Simétrica: $\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C' \Leftrightarrow \Delta\ A'B'C' \cong \Delta\ ABC$

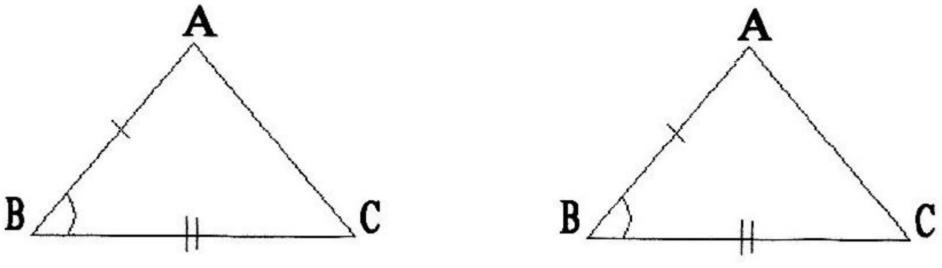
Transitiva: $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$ e $\Delta\ DEF \cong \Delta\ A'B'C'$, então $\Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$.

Dois triângulos são congruentes quando possuem três lados e os três ângulos, respectivamente congruentes. Basta, porém verificar se três desses elementos (pelo menos um de ser lado) são congruêntes, para que possamos garantir a congruência entre os triângulos.

1º Caso: L.A.L (lado-ângulo-lado)

Dois Triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes.

Ex:

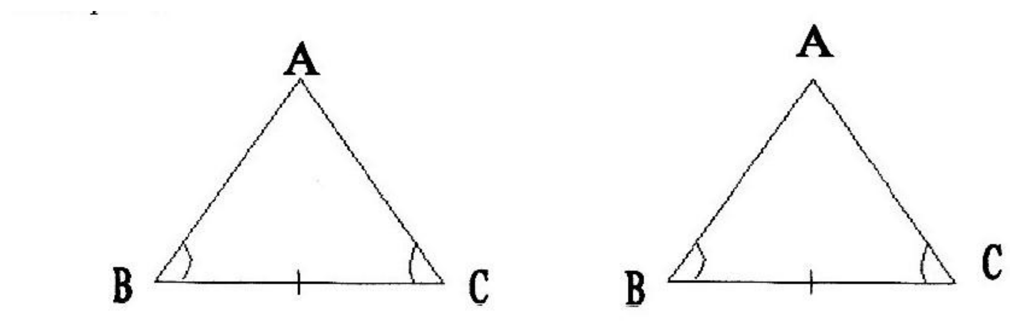


$AB \cong A'B'$, $\quad B \cong B'$ $\quad$ e $\quad BC \cong B'C' \quad \Rightarrow \quad \Delta\ ABC \cong \Delta\ A'B'C'$

2º Caso: A.L.A (ângulo-lado-ângulo)

Dois triângulos que possuem um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado são respectivamente congruentes são congruentes.

Ex:

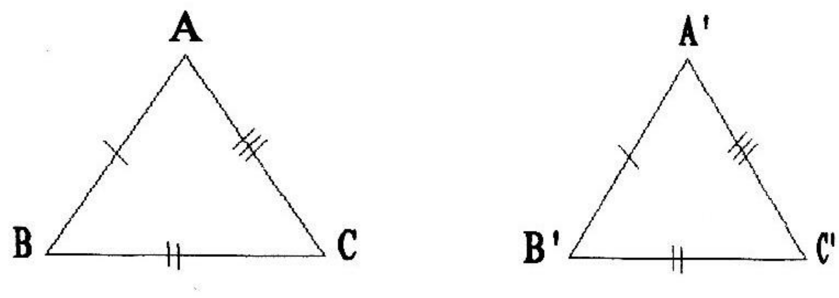


B ≅ B', BC ≅ B'C' e C ≅ C' Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

3º Caso: L.L.L (lado-lado-lado)

Dois triângulos que possuem os três lados congruentes são congruentes.

Ex:

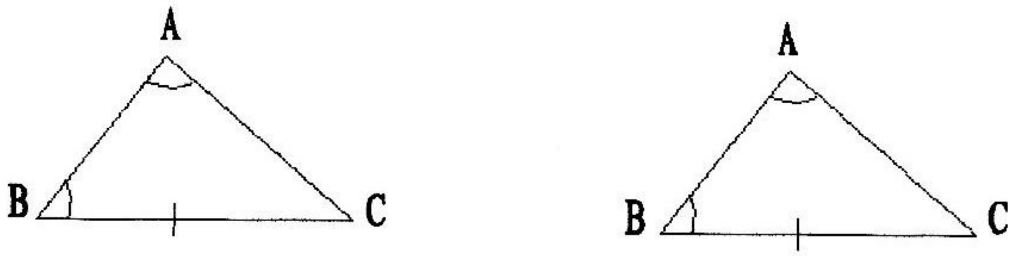


AB ≅ A'B', BC ≅ B'C', AC ≅ A'C' ⇒ Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

4º Caso: L.A.Ao (lado-ângulo-ângulo oposto)

Dois triangulos que possuem um lado, um ângulo adjacente e um Ângulo oposto a esse lado, respectivamente congruentes são congruentes.

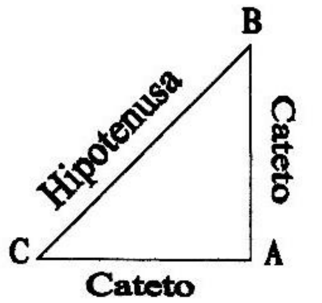
Ex:



$\hat{A} \cong A'$, $B \cong B'$ e $BC \cong B'C' \Rightarrow \Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

7.1.2 – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS – Propriedades:

São várias as propriedades dos triângulos retângulos. Analisaremos a mais significativa para o assunto posterior que é o Teorema de Pitágoras.



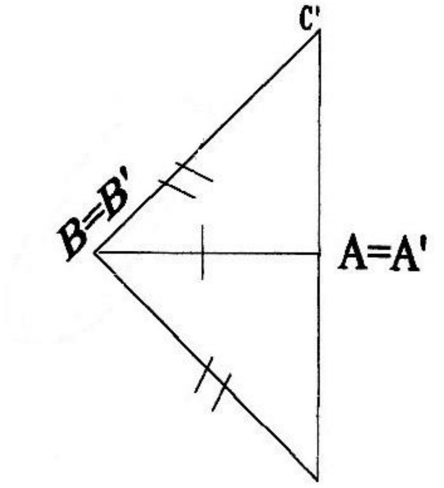
Dois triângulos que possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes são congruentes.

Por Hipótese m (Â) = m (Â) = 90º

AB = A'B'

BC = B'C'

Demonstração:



Construimos o ∆ ACB' que é isósceles

Logo, m (C) = m (Â')

Assim: ∆ABC ≡ ∆A'B'C'

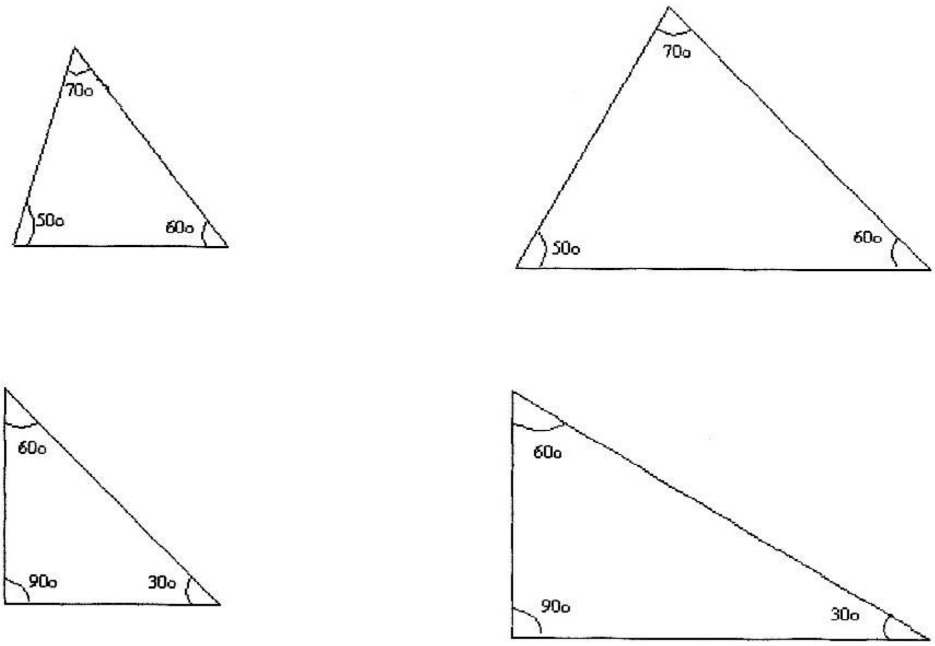
7.1.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Outro assunto que é de enorme importância para entendermos o Teorema de Pitágoras. O significado de semelhança:

Semelhança: Qualidade de semelhante, parença, analogia, aspecto, imitação, identidade.

Semelhante: Adj. 2º general, análogo, parecido, igual, conforme, da mesma natureza, s.m (substantivo masculino) possoa ou coisa da mesma natureza que outra parecida com ele.

a) Usando um transferidor, confira a medida dos ângulos internos dos triângulos abaixo:

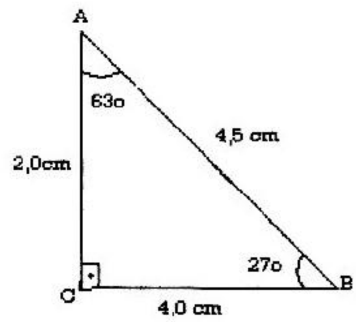


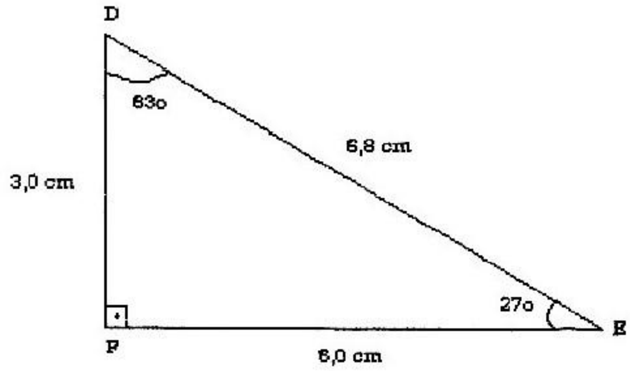
O que você observa em relação à medida dos triângulos em cada par de triângulos? Cada par de triângulos tem os três ângulos com medidas respectivamente iguais.

Triângulos Senelhantes – Dois triângulos que possuem os três ângulos com as mesmas medidas são chamados de triângulos semelhantes.

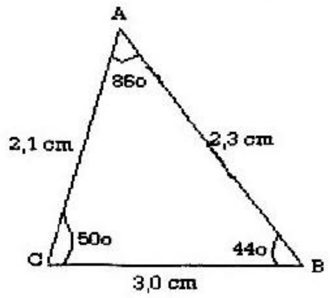
b) Observe que os triângulos abaixo são semelhantes, em seguida use a régua e meça os lados dos triângulos. Calcule em cada item as seguites razões:

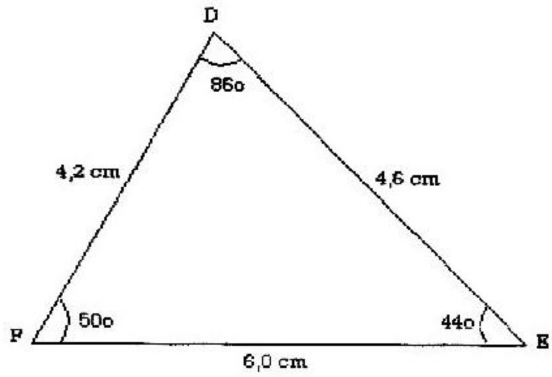
$$\frac{AB; BC; AC}{DE; EF; DF}$$





$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{2}{3}$$



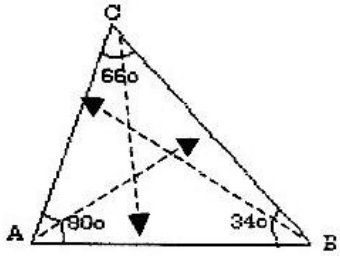


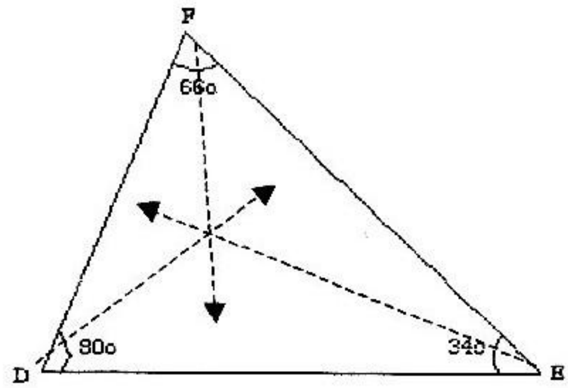
$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{1}{2}$$

Comparando as razões que você observa que as razões são iguais?

Em triângulos semelhantes ldaos <u>opostos</u> a ângulos de mesma medida são chamados de lados <u>correspondentes</u> ou <u>homólogos.</u>

Ex: Os Triângulos ΔABC e ΔCEF abaixo são semelhantes.





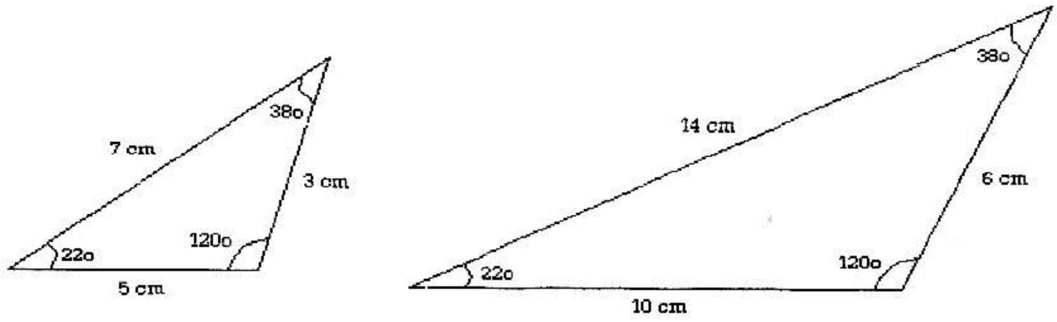
Assim temos:

AB e DF são correspondentes

BC e EF são correspondentes

CA e FD são correspondentes

a) Em seguida, calcule as razões entre as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos.



R = $\frac{7}{14} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

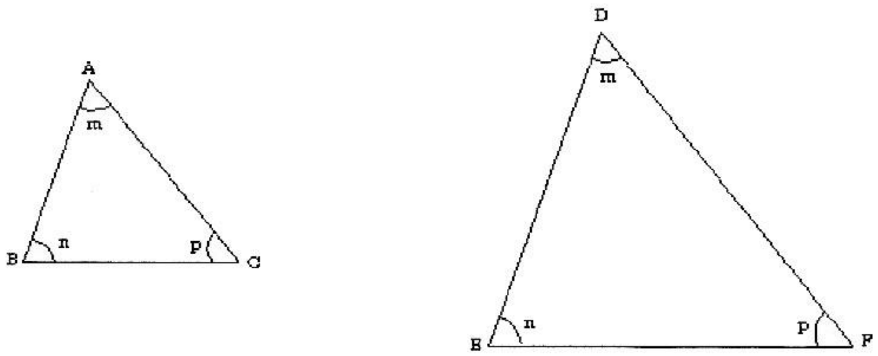
O que você observa? As razões dos lados correspondentes são iguais.

Lembramos, triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos com as medidas respectivamente iguais.

Lados opostos a ângulos de medidas iguais são chamados correspondentes ou homólogos.

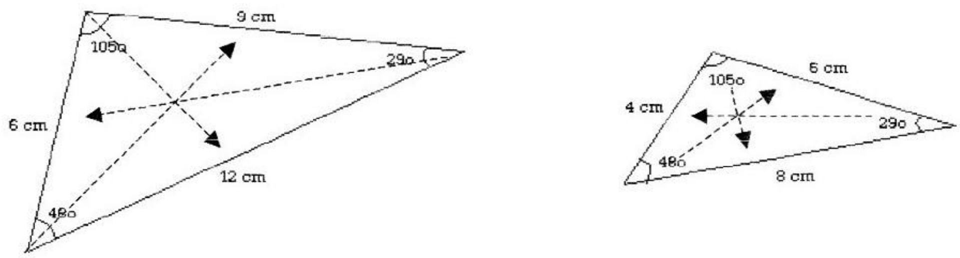
7.1.4 – PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS TRIÂNGULOS SEMELHANTES.

Se os triângulos ABC e DEF são semelhantes, então as medidas dos lados do triângulo ABC são proporcionais às medidas dos lados correspondentes ao triângulo DEF.



Os triângulos ABC e DEF são semelhantes logo $\frac{AB}{DE}$ = $\frac{CA}{DF}$ = $\frac{BC}{EF}$ razão de semelhança.

Ex: Os triângulos abaixo são semelhantes, pois possuem os ângulos com medidas respectivamente iguais:



Note que: $\frac{6}{4}$ = $\frac{9}{6}$ = $\frac{12}{8}$ = 1,5 razão de semelhança.

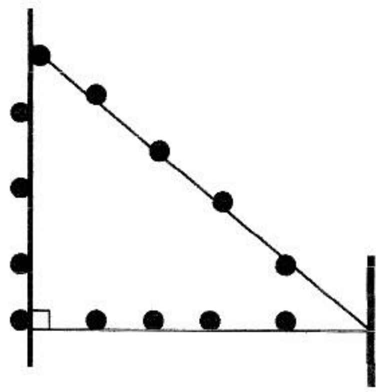
8 – UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras nasceu em Samos, uma ilhano mar Egeu, no século VI a.C, e fundou uma escola em Crotona, cidade da Magna Grécia (*hoje sul da Itália*). Nessa escola se estudava filosofia, religião, ciências, música e matemática. Ali todas as descobertas eram assumidas coletivamente de modo que não se sabe exatamente quem foi o autor da demonstração do teorema, atribuída a Pitágoras.

Apesar do teorema receber o nome de Pìtágoras sabe-se que seu conteúdo era conhecido muitos séculos antes por babilônios, egípcios e chineses. É provável que Pitágoras tenha tido contato com esse fato geométrico em suas andanças pelo Egito.

O Teorema de Pitágoras atraiu a atenção de matemáticos, filósofos e curiosos de todas as partes do planeta. Do indiano Bhaskara (1114 – 1185), ao presidente dos Estados Unidos Abram Garfield (1831 – 1881). O norte-americano Elisha Scott Loomis publicou em 1940 uma coletânea com 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, mais recentes o educador matemático PaulusGerdes, estudioso da matemática produzida pelos povos da África descobriu várias maneiras distintas de demonstrações do Teorema.

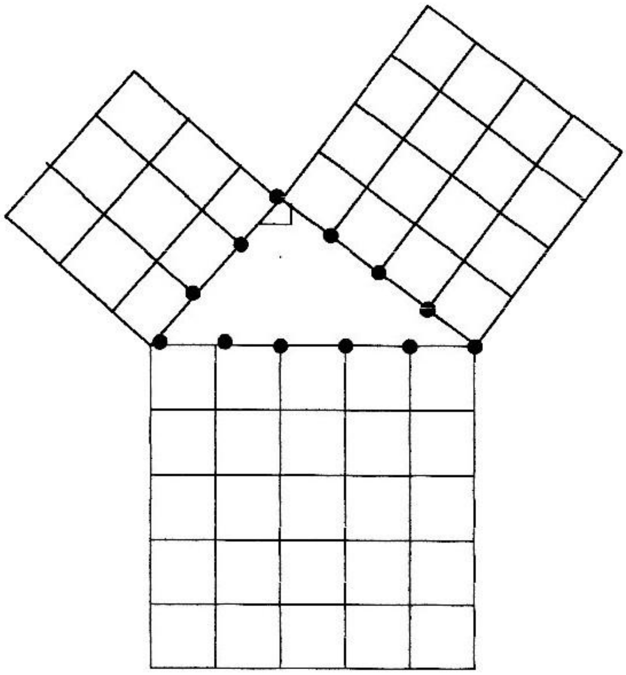
No Egito antigo, os arquitetos que construíram as famosas pirâmides tinham que determinar com certa precisão o ângulo reto, afinal a base das pirâmides é um quadrado. Para conseguir o ângulo reto, eles usavam um método curioso, faziam 13 nós equidistantes numa corda com 12 unidades de comprimento, juntavam o 1º nó com 13º formando um triângulo como ilustra a figura.



Eles sabiam que um triângulo construído dessa forma produzia um ângulo reto. Como eles descobriram isso ninguém sabe. Mas o fato é que um triângulo de lados – 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo.

Observe que a terna (3;4; 5) satisfaz a igualdade $3^2 + 4^2 = 5^2$

Em outras palavras, a área do quadrado construído sobre a *hipotenusa* (lado maior) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os *catetos* (lados menores).



A igualdade não é verificada nos casos

(2; 5; 5) e (4; 4; 4)

$2^5 + 5^2 = 5^2 4^2 + 4^2 = 4^2$

4 + 25 > 25 16 + 16 > 16

29 > 25 32 > 16

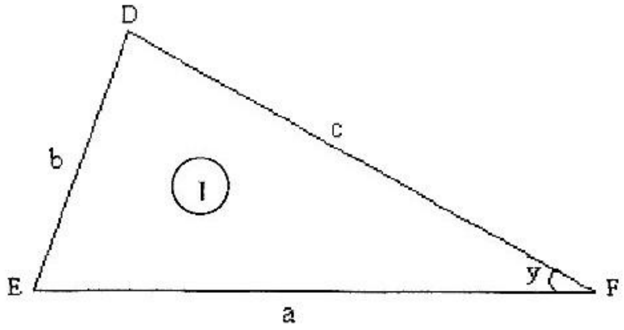
As ternas (a; b; c) de números inteiros que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$ são chamadas **Ternas Pitagóricas.**

Vejamos uma representação geométrica do Teorema de Pitágoras.

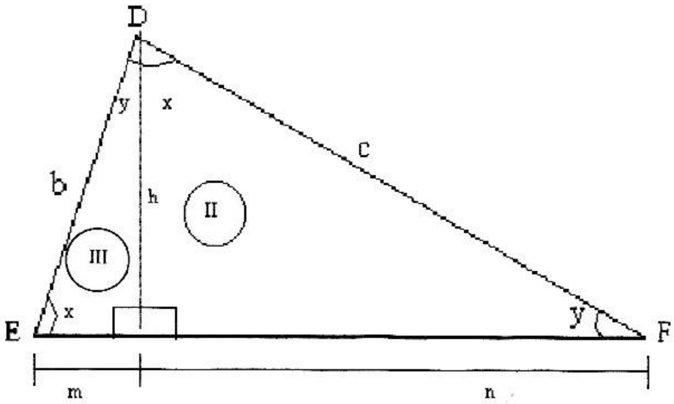
Para entendermos essa interpretação iremos ao assunto semelhança de triângulos que você já viu.

Vejamos as relações métricas num triângulo retângulo.

Considere o triângulo retângulo DEF abaixo, com catetos medindo **b**e **c** e hipotenusa medindo **a**.

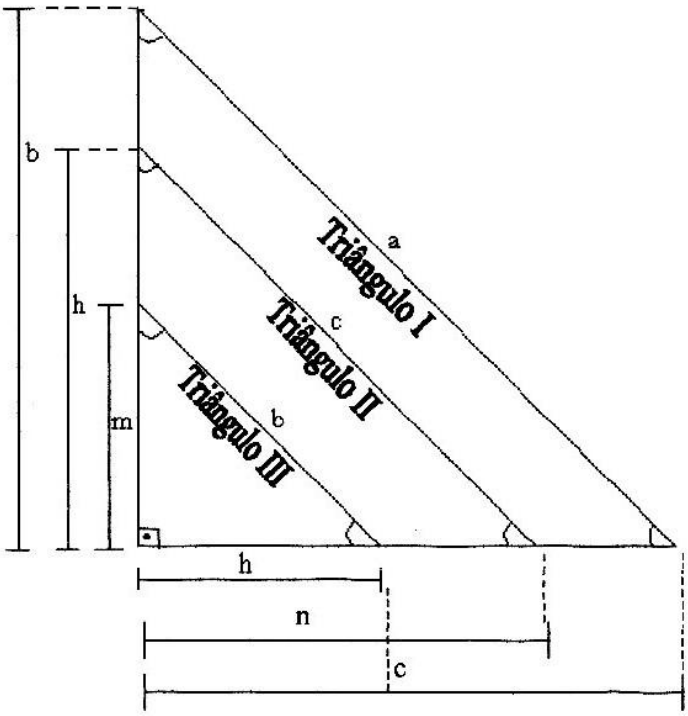


Trace a altura desse triângulo; tendo a hipotenusa como base:



Desse modo; obtivemos dois triângulos que são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo DEF dado; pois possuem os três ângulos com medidas respectivamente iguais.

Para facilitar as conclusões, desenhamos os três triângulos, um sobre outro, como mostra a figura abaixo:



Assim temos:

Triângulo I semelhante ao triângulo II, logo:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$

De $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow$ ah = bc1^{a} relação

De $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow c^2$ = na 2^{a} relação

Triângulo I semelhante ao triângulo III, logo:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$; de $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2$ = am 3ª relação

→ Triângulo I semelhante ao triângulo III, logo:

$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$; de $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow h^2$ = m.n 4ª relação.

Adicionando membro a membro, as relações 2ª e 3ª obtemos

$$\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = am \end{cases}$$

b^2 + c^2 = am + na → b^2 + c^2 = a(m + n) como m + n = a, vem $a^2 + b^2 = c^2$ 5ª relação – O Teorema de Pitágoras.

Portanto:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

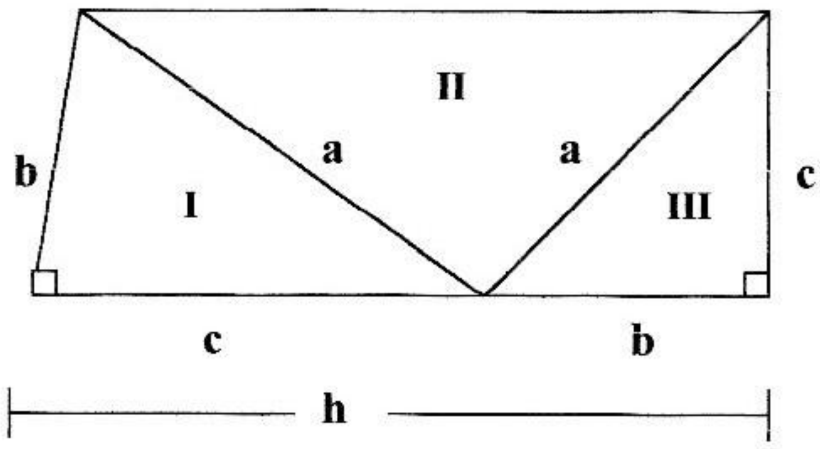
A demonstração que acabamos de conhecer baseia-se em triângulos semelhantes e é parecida à realizada por matemáticos da Índia.

Curiosidade:

Existem atualmente centenas de demonstrações do Teorema de Pitágoras. Agora você vai conhecer um dos mais simples.

Vamos calcular a área do triângulo de duas maneiras: pela fórmula e pelo cálculo das áreas dos três triângulos.

A = (b + B).$\frac{h}{2}$



Trapézio = (b + c).$\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{b^2+bc+cb+c^2}{2} = \dfrac{b^2+c^2+2bc}{2}$

$A_t = A_t + A_2 + A_3$

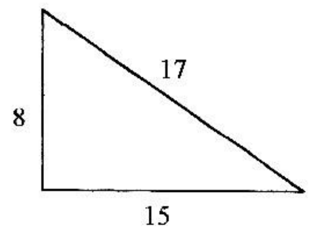
$$A_t = \frac{bc}{2} + \frac{a.a}{2} + \frac{cb}{2} = \frac{a^2 + 2bc}{2}$$

Igualando os dois resultados temos:

$$\frac{a^2 + 2cb}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2cb}{2} \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Qualquer triângulo de lados a, b e c, para os quais vale a relação $a^2 + b^2 = c^2$, é um triângulo retângulo, cujo ângulo reto é oposto ao lado c.

Ex:



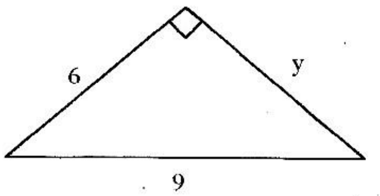
$8^2 + 15^2 = 17^2$

64 + 225 = 289

289 = 289

Sim, é retângulo

Ex:



$6^2 + y^2 = 9^2$

$y^2 = 81 - 36$

$y^2 = 45$

$y = 3\sqrt{5}$

8.1 – PITÁGORAS E O RAIO DA TERRA

O Teorema de Pitágoras, surpreendentemente, nos mostra uma maneira de calcular o raio da terra. Para compreender, a ideia bastante criativa, é necessário muita atenção.

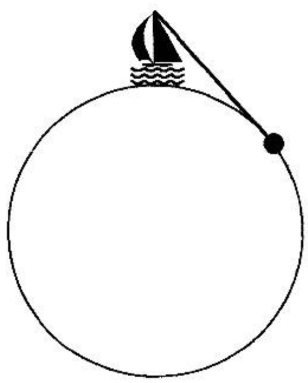
Para começar, imagine-se numa praia. Olhando o mar, você ao longo do horizonte, isto é, o lugar em que o mar céu parecem se encontrar. É nessa altura que os barcos que vão ao mar adentro desaparecem de sua vista. Deixando de vê-los devido à curvatura da terra.

Da praia você observa o horizonte. Suponha seus olhos a 2m de altura. Qual será a distância entre o ponto que você está e o horizonte?

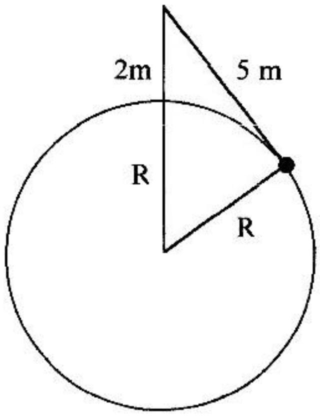
Um jeito seria pedir ajuda de um amigo. Ele sairia da praia num barco a motor de velocidade conhecida, numa rota perpendicular à linha da praia. Aí bastaria marcar o tempo que ele leva para desaparecer no horizonte.

Calma! Você não precisa fazer nada disso. Essa distância foi medida muitas vezes e sabe-se que ela é de aproximadamente 3 Km. Com essa medida e o Teorema de Pitágoras conseguimos calcular o raio da terra. Parece incrível, mas é verdade.

Vejamos:



Com os olhos da imaginação



Hipotenusa: R + 0,002 Km (veja 0,002 Km = 2m)

Cateto maior: R

Cateto menor: 5 Km

Por Pitágoras:

$$0,002\ ^{2} = R^2 + 5^2$$

0,000004 + 0,004R + $R^2 = R^2 + 5^2$

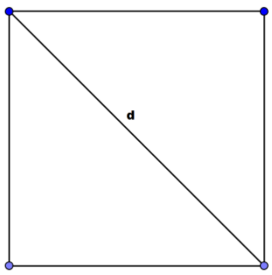
0,004R = 25 – 0,000004 $\rightarrow$ R = $\dfrac{24,999996}{0,004} = 6249,99Km$

Concluímos que o raio da terra é de aproximadamente 6250 Km. Métodos atuais e precisos chegam ao valor de 6375 km.

8.1.1 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras tem muitas aplicações mesmo quando trabalhamos com outros tipos de polígonos. Vejamos algumas situações:

Ex: O quadrado da figura tem 16 *cm* de perímetro. Qual é o comprimento da diagonal?

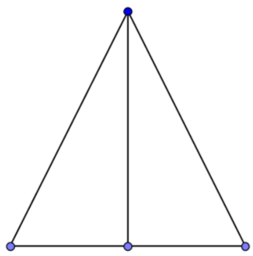


$$d^2 = 4^2 + 4^2$$

$$d^2 = 3^2$$

$$d = 4\sqrt{2}\ cm$$

Ex: - Considere um triângulo equilátero cuja medida de cada lado é 6*cm*. Qual é o comprimento da altura?



$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h^2 = 36 - 9$$

$$h^2 = 27\ h = 3\sqrt{3}$$

Ex: - Qual é o perímetro do trapézio da figura?

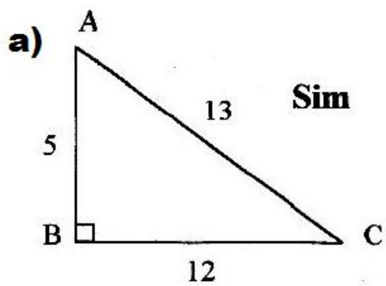
$x^2 + 5^2 = 13^2$

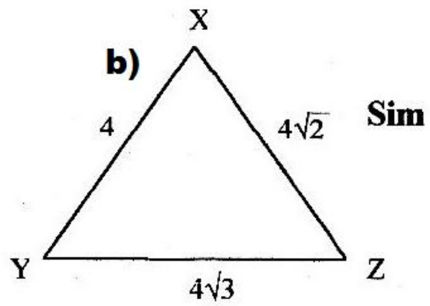
$x^2 = 169 - 25$

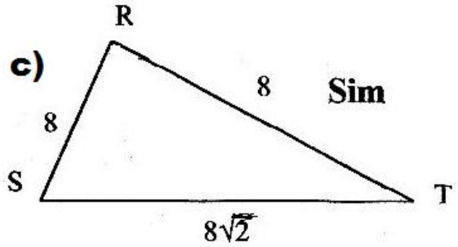
$x = \sqrt{144} \Rightarrow$ x=12

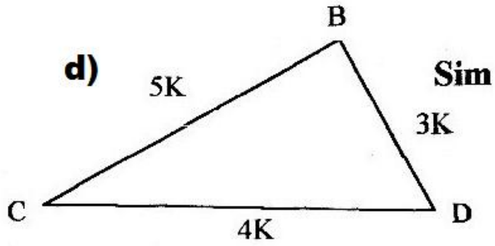
Perímetro iguala 12 + 21 + 16 + 13 = 62

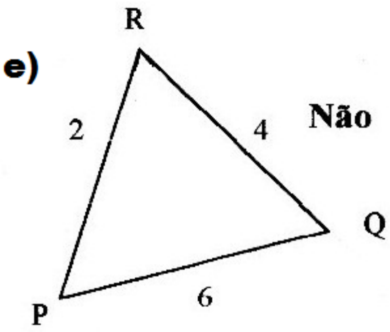
Ex: - Comprove se cada triângulo é retângulo e indique quando for caso, triângulo reto.

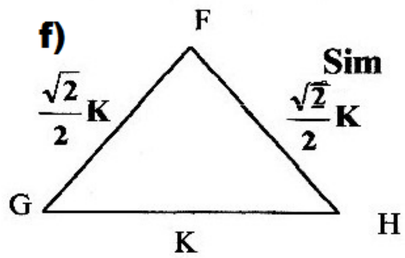












Resolução:

a) $13^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow 169 = 25 + 144 \Rightarrow 169 = 169$ Sim, é retângulo

b) $(4\sqrt{3})^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 16.\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16 + 16.2 \Rightarrow 48 = 48$, Sim

c) $(8\sqrt{2})^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 64.2 = 64 + 64 \Rightarrow 128 = 128$, Sim

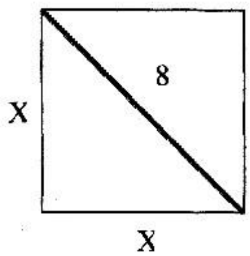
d) $(5k)^2 = (4k)^2 + (3k)^2 \Rightarrow 25k^2 = 16k^2 + 9k^2 \Rightarrow 25k^2 = 25k^2$, Sim

e) $2^2 + 4^2 = 6^2 \Rightarrow 20 \neq 36$, Não é retângulo

f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{2}{4}k^2 + \frac{2}{4}k^2 = k^2 \Rightarrow \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} = k^2 \Rightarrow k^2 = k^2$,

Sim, é retângulo

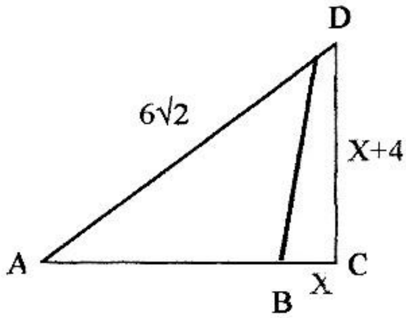
Ex: - O diagrama do quadrado mede 8*dm*. Qual é o seu perímetro?



$8^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 64 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = \sqrt{32} \Rightarrow$

$x = \sqrt{2^4.2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$, perímetro= $4.\ 4\sqrt{2} \Rightarrow 16\sqrt{2}$ dm

Na figura AC=CD. Encontre a medida BD



$\Delta = 64 + 80$

$\Delta = 144$

$$x = \frac{-8 \pm 12}{2}$$

$$x' = \frac{-8+12}{2} = 2 \quad x'' = \frac{-8-12}{2} = -10$$ Não convém

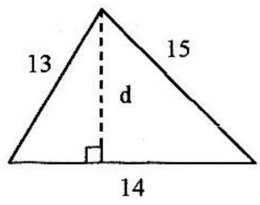
$$x+4\ ^{2} .\ x+4\ ^{2} = \ 6\sqrt{2}\ ^{2} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + x^2 + 8x + 16 = 36.2$$

$$2x^2 + 16x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$

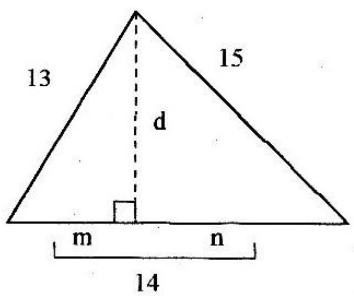
$$BD^2 = 2^2 + 36 \Rightarrow BD = \sqrt{40}$$

$$BD = 10\sqrt{2}$$

Encontre d:



Solução:



$m + n = 14$

$m = -n + 14$

$d^2 + m^2 = 13^2 \rightarrow d^2 = -m^2 + 13^2$

$d^2 + n^2 = 15^2$

$-m^2 + n^2 + 13^2 = 15^2$

$-\ \ -n+14\ ^{2} + n^2 + 13^2 = 15^2$

$\ n^2 - 28n + 196\ \ + n^2 + 13^2 = 15^2$

$-n^2 + 28n - 169 + n^2 + 169 = 225$

$28n - 27 = 225$

$28n = 252$

$n = 9$

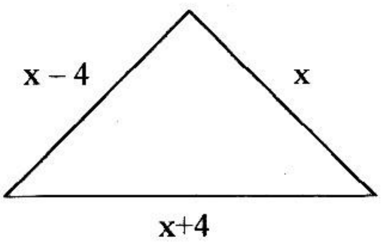
$d^2 + 9^2 = 15^2$

$d^2 = 225 - 91$

$d = \sqrt{144}$

$d = 12$

Ex: Qual é o perímetro do triângulo da figura?



Usando o teorema de Pitágoras para encontrar o valor de X

$\ x-4\ ^{2} + x^2 = \ x+4\ ^{2}$

$x^2 - 8x + 16 + x^2 = x^2 8x + 16$

$x^2 = 16x$

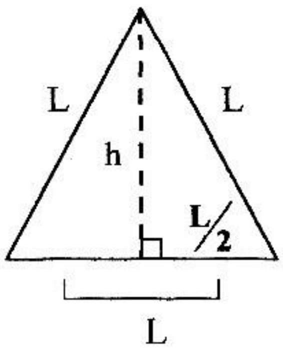
$x^2 - 16x = 0$

$x\ \ x-16\ \ = 0$

X = 0 ou X = 16

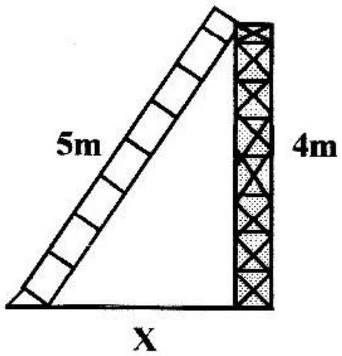
Perímetro: $x-4+x+x+4 = 3.x = 3.16 = 48$

Ex: Qual é altura de um triângulo equilátero de lado L?



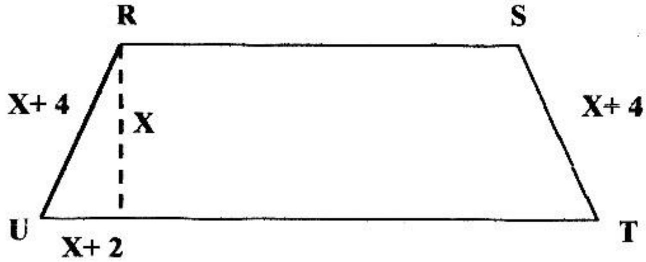
$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$
$$l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$$
$$3l^2 = 4h^2$$
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2}$$
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Ex: Uma escada de 5*m* de comprimento está apoiada em um muro que tem 4*m* de altura. Qual a distância do pé da escada ao muro?



$$5^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 25 - 16$$
$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

Ex: O trapézio **RSTU** é isóscele. Qual é o seu perímetro?

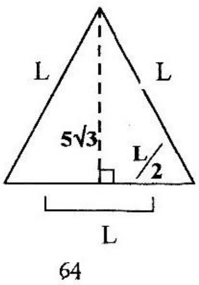


$$(x+4)^2 = x^2 + (x+2)^2$$
$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$\Delta = 16 + 48$$
$$\Delta = 64$$
$$x = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow$$

X = 6 e X = -2(*não convém)*

Perímetro = $6.x + 12 = 6.6 + 12 = 48$

Ex: Qual é o perímetro de um triângulo equilátero, cuja altura mede $5\sqrt{3}$?



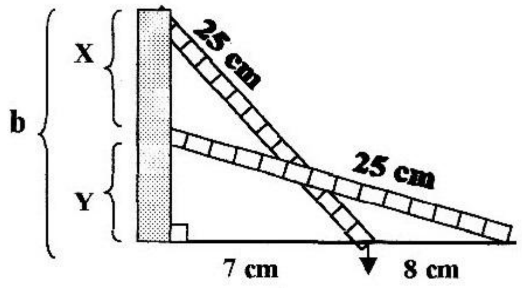
$$l^2 = (5\sqrt{3})^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 25.3 + \frac{l^2}{4}$$
$$l^2 - \frac{l^2}{4} = 75 \Rightarrow 3l^2 = 300$$

Perímetro = 3.1 = 30*cm*

$$l^2 = 100 \Rightarrow l = 10$$

EXERCÍCIO

1º Uma escada de 25*cm* de comprimento está apoiada em um muro, do qual seu pé dista 7*cm*. Se o pé da escada se afastar mais 8*cm* do muro, qual será o deslocamento superior da escada?



$b^2 + 7^2 = 25$

$b^2 = 625 - 49$

$b^2 = 576 \Rightarrow b = 24cm$

Com o deslocamento, teremos:

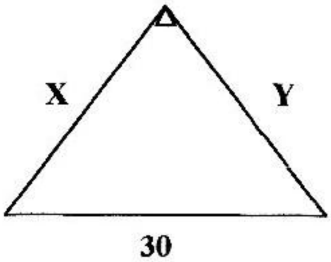
$y^2 + 15^2 = 30^2$

$y^2 625 - 125$

$y^2 = 400 \Rightarrow y = 20cm$

Como b = x + y → x = b – y → x = 24 – 20 = 4 *cm*

2º Num triângulo de hipotenusa 30 *cm*, a diferença entre os catetos é 6*cm*. Encontre a medida dos catetos.



X – y = 6 **x = y + 6**

$$x^2 + y^2 = 30^2$$

$$y+6\ ^2 + y^2 = 900$$

$$y^2 + 12y + 36 + y^2 = 900$$

$$2y^2 + 12y - 864 = 0 \rightarrow y^2 + 64 - 432 = 0$$

$$\Delta = 36 + 64 - 432 = 0$$

$$\Delta = 1764$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{1764}}{2}$$

$$y = -\frac{-6 \pm 42}{2}$$

$$y' = \frac{-6+42}{2} = 18$$

$y'' = \dfrac{-6-42}{2} = -24$ Não convém

$x = 18 + 6 = 24$ então os catetos medem 18 *cm* e 24 *cm.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras em nossa vida surge como um excelente incentivo e apoio a contínua tarefa de tomar decisões com isso tem de modo surpreendente e emocionante, proporcionando ao educando seu encontro com a vida na busca de suas afirmações e vontade de crescer como cidadão consciente da sua importância na sociedade. Mas um momento inesquecível em sua vida escolar em que a observação; a experimentação; a interação aluno-aluno e professor-aluno, em contato com recursos concretos possam aplicar no cotidiano conhecimentos correlatos ao Teorema de Pitágoras.

Firmando a ideia de que o método tradicional de apresentação do Teorema de Pitágoras pode ser muito melhorado e aperfeiçoado na medida do possível, contribuindo para a melhoria da qualidade de ensino para o educando que é o nosso futuro para um Brasil justo e melhor. Já que um país se constrói com homens, livros e porque não também bons mestres.

BIBLIOGRAFIA

BIGODE, Antônio José Lopes.

Matemática Atual/ Antônio José Lopes Bigode. São Paulo: Atual; 1994.

GUELLI, Oscar; 1943

Matemática: Uma Aventura do Pensamento: Livro do Professor/ Oscar Guelli – São Paulo – Ática, 1998.

IMENES, Luiz Márcio.

Descobrindo o Teorema de Pitágoras/ Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis – São Paulo: Scipione; 2000 (Coleção Vivendo a Matemática).

SILVEIRA, Ênio, 1958 – Matemática/ Ênio Silveira; Cláudio Marques; - São Paulo: Moderna, 1995.