UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EUDES HENRIQUE DE SOUZA

CÔNICAS E SUAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE-PB
SETEMBRO / 2013

EUDES HENRIQUE DE SOUZA

CÔNICAS E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em convênio com a Escola de Serviço Público do Estado da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de licenciatura em Matemática.

CAMPINA GRANDE – PB
SETEMBRO/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S729c Souza, Eudes Henrique de.
Cônicas e suas aplicações [manuscrito] / Eudes Henrique de Souza. – 2013.
41 f. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.
"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática".

1. Cônicas. 2. Elipse. 3. Parábola. 4. Hipérbole. I. Título.

21. ed. CDD 512

EUDES HENRIQUE DE SOUZA

CÔNICAS E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática – CCT/UEPB (10)
Orientador

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Prof. Ms. Fernando Luis Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 24 de setembro de 2013

Dedicatória

À minha esposa Ana Eloíza da Silva Souza, pela dedicação, ensinamentos, companheirismo, amizade e amor, dedico este trabalho.

Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente ao nosso senhor Jesus Cristo e depois a minha mãe Maria de Fátima; a minha irmã Renata ao meu padrasto Eudes Pereira de Queiroz o qual tenho muita estima e minha nova família que é composta por minha esposa; Ana Eloíza, Matheus e a dona Socorro que é a minha sogra e ainda aos amigos e colegas que me apoiaram na elaboração deste trabalho.

Este trabalho foi elaborado com todo carinho, pois as palavras aqui escritas foram frutos de um trabalho árduo, no qual me dediquei meses a fio, sem pestanejar e sem titubear em prol do término de meu curso.

A todos os meus familiares, que contribuíram significativamente tanto me dando forças para não desistir quanto financiando por varias vezes os meus estudos. A minha querida esposa que por varias vezes apoiou-me nas minhas decisões e pelo mesmo motivo dedico ao meu filho Matheus que por varias vezes mostrou-me o verdadeiro sentido da palavra Pai e ainda a minha sogra a Srª Socorro Costa que me tem como um filho.

Aos amigos que me ajudaram a querer continuar e prosseguir na busca incansável do saber: Douglas Lima, Deodorio Souza, Valquíria Lopes, Iolanda, Guedes e em especial aos amigos Josinaldo Batista e Tereza Cristina, meus sinceros agradecimentos.

A todos os meus professores que contribuíram na minha formação acadêmica, em especial aos meus professores Aldo Trajano, Samuel Duarte, Ernesto Trajano e Vandenberg Lopes, pela enorme paciência para comigo e por terem despertado em mim o amor pela matemática, com tudo e não menos importante agradeço ao meu orientador Juarez, que me ajudou do início ao término de meu trabalho.

A filosofia está escrita nesse grande livro, ou seja, o Universo que se encontra aberto continuamente ante os olhos, mas ele não pode ser entendido a menos que se aprenda primeiro, a ler sua linguagem e interpretar as letras com as quais o compuseram. Ele foi escrito no idioma da matemática e seus símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma única palavra de seu texto. “GALILEU GALILEI, Il Saggiatore (1623)”.

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre as curvas: elipses, parábolas, hipérboles e suas aplicações, estudadas inicialmente no século II a.C pelo astrônomo Apolônio. Em seu desenvolvimento deduzem-se as formas algébricas a partir das definições. Apresentam-se aplicações em áreas do conhecimento, como na Física e na Astronomia com as leis de Kepler, e nas áreas de saúde. A importância deste trabalho é retratada nas aplicações apresentadas. O trabalho traduz a importância de conhecermos bem as formas matemáticas que estão por toda parte do nosso planeta.

PALAVRAS-CHAVE: Cônicas. Elipse. Parábola. Hipérbole.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As formas planas conhecidas por todos como cônicas são na realidade curvas obtidas por intersecções de um dado plano com um cone reto. É sabido que Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfila (atual Turquia) por volta de 262 a.C, foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as secções cônicas na antiguidade. Uma das contribuições de Apolônio que merece respeito é a de ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecções de planos perpendiculares às retas ditas geratrizes de um cone, obtendo assim elipses, parábolas e hipérboles conforme o ângulo de corte fosse agudo, reto ou obtuso.

As cônicas estão presentes em toda parte do mundo e do universo aparecendo de forma marcante nas diversas áreas do conhecimento humano, por exemplo, na física, matemática, astronomia, etc. As curvas cônicas que se fazem bastante úteis nas três leis de Johannes Kepler (1571 – 1630), matemático e astrônomo alemão, cuja principal contribuição à astronomia e astrofísica foram às três leis do movimento planetário que tem como principio norteador a observação da trajetória elíptica dos planetas. Uma das formas cônicas que chamamos comumente de elipse também é bastante utilizada na área da saúde humana em aparelhos utilizados pelos dentistas e outros profissionais da saúde para tratamentos radioterápicos e em especial contra o câncer. Já a parábola que se faz presente na tecnologia das antenas, ditas parabólicas, é observada no lançamento de projéteis.

Por fim mostraremos a aplicação da hipérbole no estudo da astronomia, cuja forma cônica é utlizada para descrever a trajetória dos cometas em aparelhos como o telescópio espacial *habble*. A hipérbole é a última das cônicas que será apresentada neste trabalho.

1.1 AS CÔNICAS NO TEMPO (HISTÓRIA)

Antes de Euclides (±325 – 265 a.C.) existiam alguns tratados sobre secções cônicas associadas à história. Em especial deve-se dar a devida importância a Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfila (Turquia) por volta de 262 a.C e viveu aproximadamente até 190 a.C.

Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu aproximadamente, entre 287 a.C e 212 a.C, e juntamente com Euclides formam a tríade considerada a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade. Apolônio estudou com os discípulos de Euclides e foi um astrônomo notável; infelizmente a maior parte de suas obras desapareceu. O pouco que se tem das obras perdidas devem-se a Pappus de Alexandria (séc. IV a.C), a qual tem como obra prima as secções cônicas que são compostas por 8 volumes. Sabe-se que da obra original sobreviveram 7 volumes. Dentre estes, os três primeiros são baseados em tratados de Euclides e o oitavo foi perdido.

Os precursores de Apolônio nos estudos das cônicas foram Menaecnus e o próprio Euclides. Nesse período, as cônicas eram obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular à geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas conforme a secção meridiana do cone fosse um ângulo (reto, agudo ou obtuso), conforme se ilustra na Figura 1.

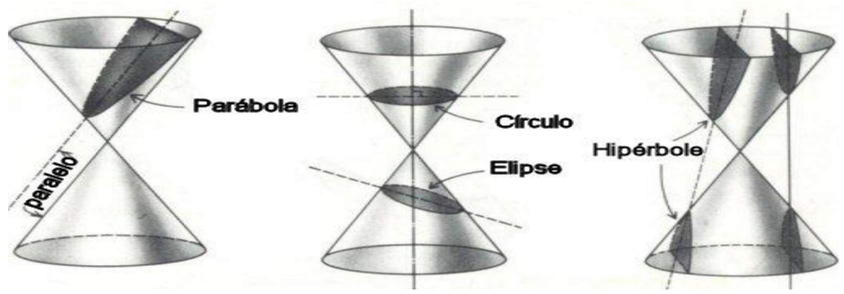

Figura 1: Cônicas obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular à geratriz do cone.

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as secções cônicas na antiguidade. Uma das contribuições de Apolônio que merece atenção especial é a de ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecção.

Alguns estudiosos importantes fizeram uso das cônicas de Apolônio, das quais se destaca Kepler, que se interessou pelas cônicas devido às suas aplicações na óptica e na construção de espelhos parabólicos. Assim como Kepler, Galileu e Newton fizeram uso das cônicas.

As cônicas aqui apresentadas são de grande importância para o desenvolvimento matemático da sociedade, pois sem o conhecimento delas muitos aparatos tecnológicos não existiriam na sua forma atual tais como, as antenas parabólicas, os satélites e até mesmo a astronomia estaria perdida sem a compreensão das formas elípticas que lhes auxiliam a entender ou definir as órbitas dos planetas. Sendo assim, nessa ordem definiremos elipse, parábola e hipérbole.

Define-se cônica como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa "d" é igual a uma constante não negativa "*e*". O ponto fixo F é chamado de foco, a reta fixa d de diretriz e a razão constante "*e*" de excentricidade da cônica. Com a excentricidade "*e*" podemos determinar as cônicas de acordo com as condições abaixo:

- Se a excentricidade for 1 a cônica é uma parábola.
- Se a excentricidade for menor que 1 a cônica é uma elipse.
- Se a excentricidade for maior que 1 a cônica é uma hipérbole.

2. ELIPSE

Definição:

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α seja, 2c a distância entre eles. Chama-se Elipse o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a com 2a > 2c, ou seja, se $P \in \alpha \rightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$, Figura 2.

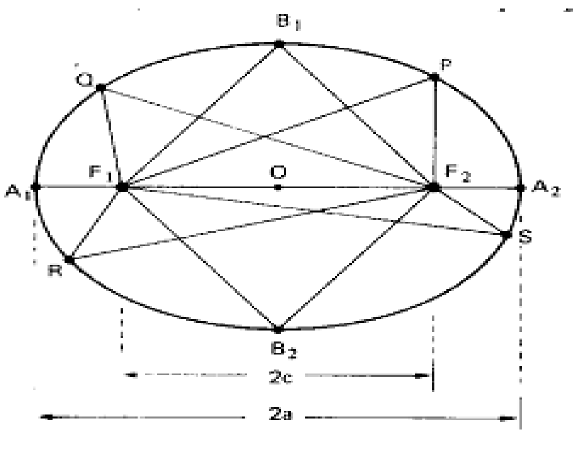

Figura 2: Elipse obtida a partir de dois pontos distintos fixos, F_1 e F_2.

Assim, de acordo com a Figura 2, temos que:

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$

$$RF_1 + RF_2 = 2a$$

$$SF_1 + SF_2 = 2a$$

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$

$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$

$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a.$$

Observa-se também que: $A_1A_2 = 2a$, como mostra-se a seguir.

Considere $A_1F_1 = x$ e $A_2F_2 = y$, para que $A_1A_2 = 2a$ é preciso que $A_1F_1 = A_2F_2$ ou seja $x = y$, conforme verifica-se abaixo.

Fazendo:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_1 + A_2F_2.$$

Onde $A_1F_2 = x + 2c$ e $A_2F_1 = y + 2c$, então,

$$x + (x+2c) = y + 2c + y$$

logo

$$x = y$$

Agora verificando que $A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + A_2F_2.$

Conforme a Figura 2. $F_1F_2 = 2c$, logo

$$A_1A_2 = x + 2c + y$$

Como $x = y$

$$A_1A_2 = 2x + 2c = 2a$$

2.1 ELEMENTOS DA ELIPSE

Em uma elipse, e de acordo com Figura 3, podemos destacar os seguintes elementos:

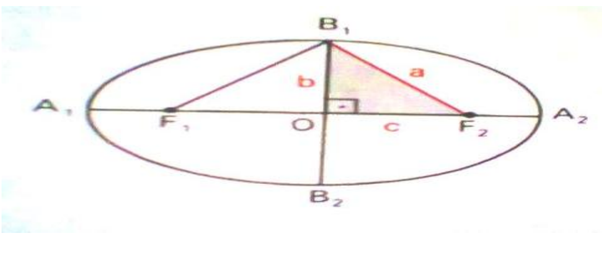

Figura 3: Triângulo inscrito na elipse.

- F_1 e F_2 são os focos da elipse;
- O é o centro ;
- A_1A_2 é o eixo maior;
- B_1B_2 é o eixo menor;
- 2c é a distância focal;
- 2a é a medida do eixo maior;
- 2b é a distância do eixo menor;
- $\frac{a}{c} = e$ é a excentricidade.

No triângulo destacado pela Figura 3 é válido o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

2.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Se A_1A_2 esta sobre o eixo das abscissas, então a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração:

Se A_1A_2 esta sobre o eixo dos x e P(x,y) pertence a α, então os focos F_1 e F_2 tem coordenadas $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ por definição:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Usando a formula de Euclides para distância entre dois pontos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando os dois membros da igualdade acima, ao quadrado, obtemos:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Substituindo $(a^2 - c^2)$ por b^2, temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo esta igualdade por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se A_1A_2 esta sobre o eixo dos y, então

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

2.3 APLICAÇÕES DA ELIPSE:

2.3.1 CORTE E COSTURA

Se a professora ou professor, por motivo particular, deseja mudar de ramo, sem se afastar do visgo da Matemática, aqui vai uma colaboração. Como cortar uma manga (de camisa)?

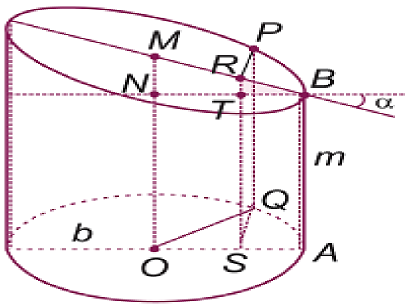

Figura 4. Manga de uma camisa

Uma manga é um tronco de cilindro, dependendo do modelo. A secção é uma elipse, cujo plano possui uma inclinação de um ângulo α em relação à base. Precisamos medir b, que é a circunferência do braço dividida por 2π, e α, que dá a inclinação. O comprimento da parte interna da manga é m. Vamos fazer o corte em função de b, α e m. Para cada ponto P da

Figura 5, vamos calcular a altura y = PQ em função do arco AQ, de medida x. Para isto, calculemos T R em função de x:

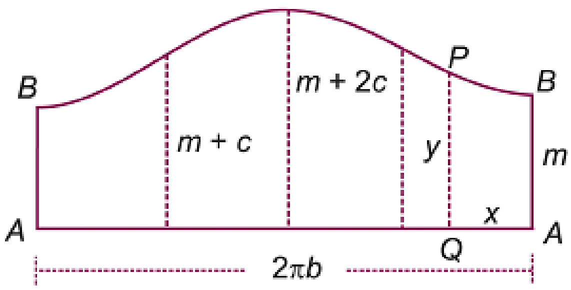

Figura 5. Comprimento da parte interna da manga.

Nos triângulos BRT e MNT temos:

$$\mathrm{COS}\alpha = \frac{\mathrm{TB}}{\mathrm{TR}} = \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{MB}} \Rightarrow 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{b}^2}$$

Fazendo MB = a, temos:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} - 1 = \frac{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}{\mathrm{b}^2} = \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{b}^2} \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$$

Onde c é a semi distância focal da elipse de semi-eixos a e b.

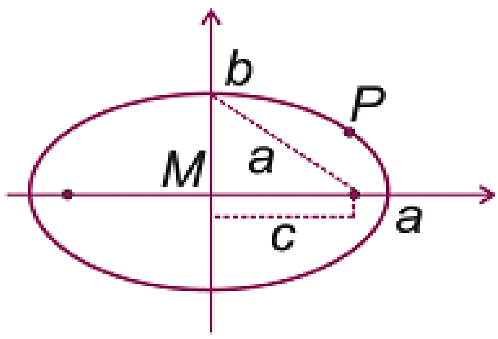

Figura 6: Figura elíptica obtida a partir do corte da manga da camisa.

$$TR = TC\ tg\alpha = \mathrm{SAtg} = (\mathrm{AO} - \mathrm{OS})\mathrm{tg}\alpha = (\mathrm{b} - \mathrm{b}.\cos \mathrm{x}).\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \mathrm{c}(1 - \cos \mathrm{x}), \mathrm{logo}\ \ \mathrm{y} = \mathrm{QP}$$

$$= \mathrm{SR} = \mathrm{ST} + \mathrm{TR} = \mathrm{m} + \mathrm{c}(1 - \mathrm{cosx}) \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{m} + \mathrm{c} - \mathrm{c}.\mathrm{cosx}$$

Portanto, uma elipse se “desenrola” numa cossenóide. Isso pode ser concretizado também em cartolina, que é molde para corte.

2.3.2 MOVIMENTO DOS PLANETAS E PLANETÁRIO DE TYCHO BRAHE

De acordo com Enéias de Almeida Prado, durante muitos séculos as concepções sobre o universo eram fundamentalmente: concepções geostáticas (equilíbrio da terra), isto é, admitia-se que a terra estava fixa; concepções geocêntricas, pois se considerava que a terra ocupava o centro do universo, movimentando-se o sol, a lua e as estrelas em torno dela. Os astrônomos estavam convencidos que: todos os astros se movimentavam em volta da terra, as trajetórias dos outros planetas eram circunferências, ou curvas compostas por circunferências que rodavam uma sobre as outras.

Mesmo depois de Copérnico, que no século XVI formulou a teoria heliocêntrica, se acreditava que o "movimento natural" era o movimento circular e, por isso, os planetas deveriam seguir esse tipo de trajetórias à volta do sol. Foi o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler, em 1969, que descobriu que “cada planeta descreve uma elipse e que o Sol ocupa um dos focos” (1ª lei de Kepler). O interesse de Kepler pelas cônicas surgiu devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos. Quando Kepler estava a realizar um estudo preciso sobre o planeta Marte, e tentou encontrar a circunferência que correspondia ao conjunto das posições que conhecia, verificou que tal não era possível porque as posições conhecidas distribuíam-se por uma espécie de oval. Para surpresa de Kepler constatou que as curvas estudadas pelos gregos, dezoito séculos antes, constituíam agora um modelo para a interpretação das trajetórias dos planetas. E não só regem os planetas naturais, cometas e asteroides, como todos os satélites artificiais e astronaves cujas trajetórias, podem, hoje, ser preestabelecidas pelos matemáticos, minuto a minuto. Kepler sugere que "o planeta Marte não segue uma trajetória elíptica". Formula então a sua primeira lei. É de notar que as órbitas dos planetas são, de um modo geral, de excentricidade muito pequena. Anos depois, foi a partir das leis de Kepler que Newton, usando cálculo diferencial, concluiu a Lei da Atração Universal, verificando ainda que os satélites efetuam também uma órbita elíptica em torno do seu planeta. Por exemplo: a órbita da lua que descreve uma trajetória elíptica da qual a terra é um dos seus focos, o que pode ser parcialmente observado na Figura 7.

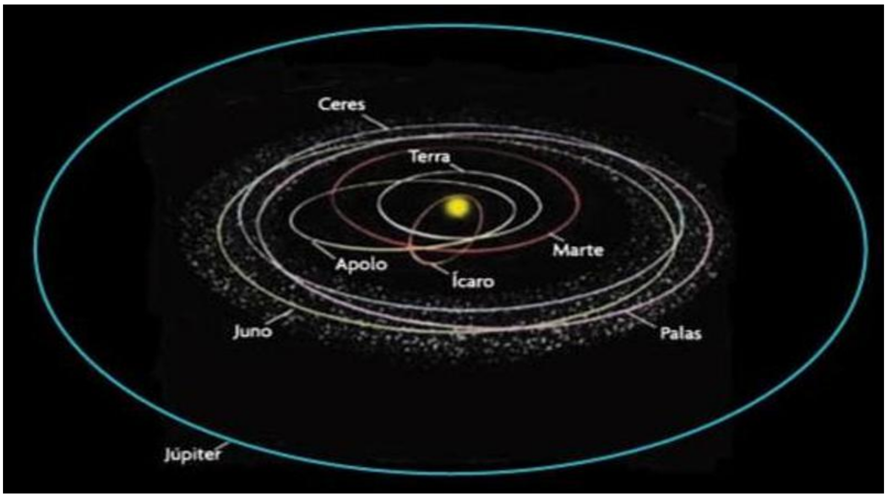

Figura 7: Movimento dos planetas em órbitas elípticas.

As formas elípticas também são muita utilizadas na construção civil, com muitas aplicações na arquitetura do observatório de *tycho brahe*, esse é um observatório onde Tycho Brahe desenvolveu vários de seus trabalhos esse astrônomo Dinamarquês que nasceu em 1545 na cidade de Tyge Ottesen Brahe, teve seu observatório chamado Uranienborg na ilha de Ven, no Öresund, entre a Dinamarca e a Suécia, conforme a Figura 8:

Figura 8: Observatório de tycho brahe.

3. PARÁBOLA

Definição:

Sejam F e d um ponto e uma reta respectivamente, pertencentes a um plano α, com F$\notin$d, e seja P a distância entre F e d. Define-se parábola como o conjunto de pontos de α que estão à mesma distância de F e de d, ou seja: se $P \in \alpha, \rightarrow PF = Pd$

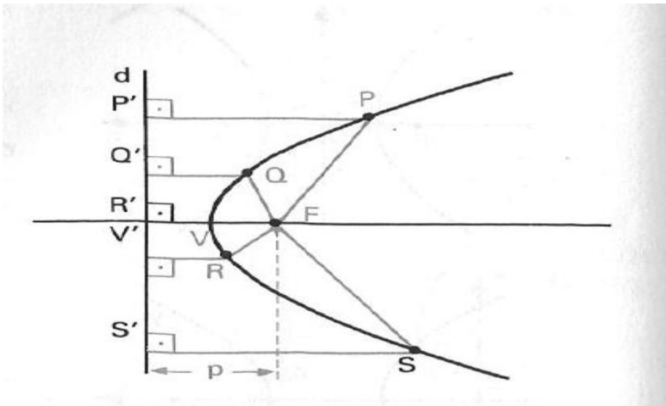

Figura 9: Parábola com vértice no eixo x.

Assim, de acordo com a Figura 9, temos que:

$VF = VV'$
$PF = PP'$
$QF = QQ'$
$RF = RR'$
$SF = SS'$

3.1 ELEMENTOS PRINCIPAIS DA PARÁBOLA:

Na figura 9 os elementos os elementos principais da parábola são:

- F → foco da parábola;
- d → diretriz da parábola;
- p → parâmetro;
- V → vértice da parábola;

Com isso utilizamos uma relação notável definida como:

$$VF = \frac{p}{2}$$

3.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA PARÁBOLA:

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com vértice da parábola na origem e eixo nas abscissas passando pelo foco, F $(\frac{p}{2}, 0)$ com a diretriz d dada pela equação $x = -\frac{p}{2}$. Então a equação reduzida da parábola é

$$y^2 = 2px$$

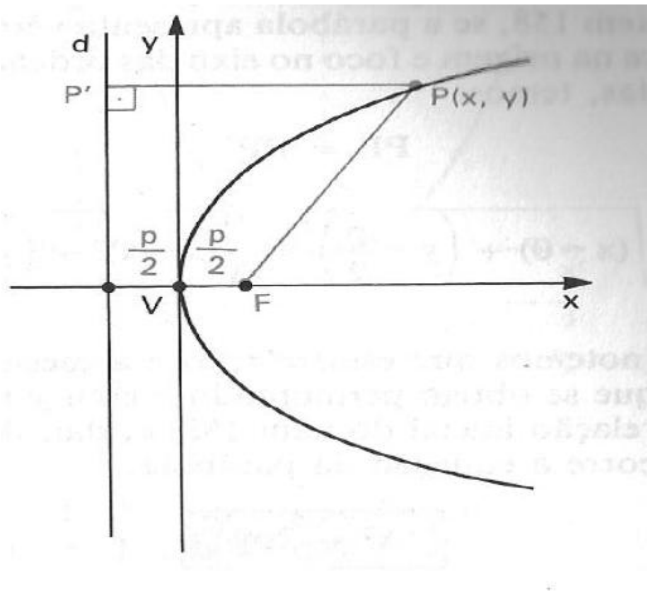

Figura 10: Ponto P(x, y) sob a parábola.

Demonstração:

Seja P(x,y) um ponto genérico sobre a parábola e seja P'(- $\frac{p}{2}$, y) um ponto sobre a diretriz da parábola, por definição.

$$PF = PP'$$

logo

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2}$$

Cancelando as raízes, temos:

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

Desenvolvendo os quadrados em ambos os membros:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

Analogamente, se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, Figura 11, a equação é

$$x^2 = 2py$$

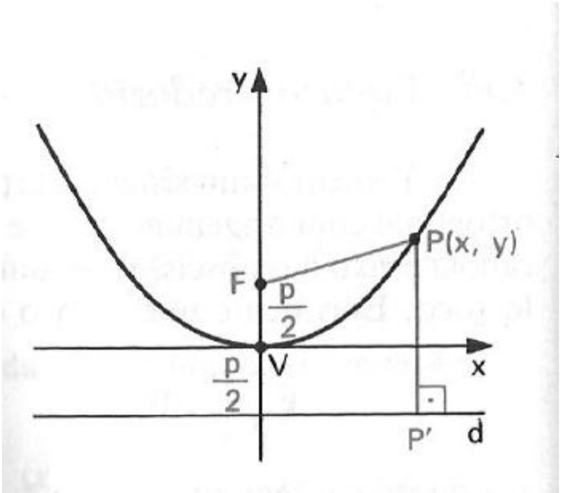

Figura 11: Ponto P(x, y) sob a Parábola que tem concavidade voltada para cima.

Demonstração:

Por definição PF = PP', ou seja

$$\sqrt{(x-0)^2} + (y - \frac{p}{2})^2 = \sqrt{(x-x)^2} + (y + \frac{p}{2})^2$$

Esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação anterior, de modo que:

$$x^2 = 2py$$

3.3 APLICAÇÕES DA PARÁBOLA:

3.3.1 PORQUE AS ANTENAS E ALGUNS ESPELHOS SÃO PARÁBOLICOS?

Os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

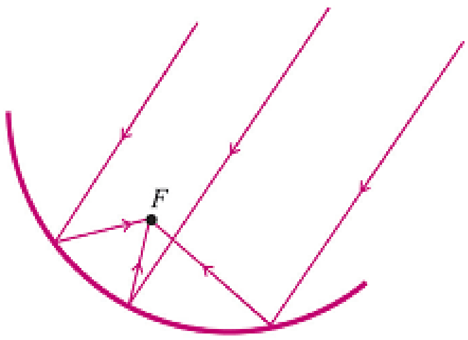

Figura 12: Sinais incidindo na Parábola.

A antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos ao ponto F. Vamos mostrar que se a superfície for parabólica, essa situação ocorre.

Observação 1.

Observemos inicialmente que uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz, chamada região interior, e outra, onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz, chamada região exterior.

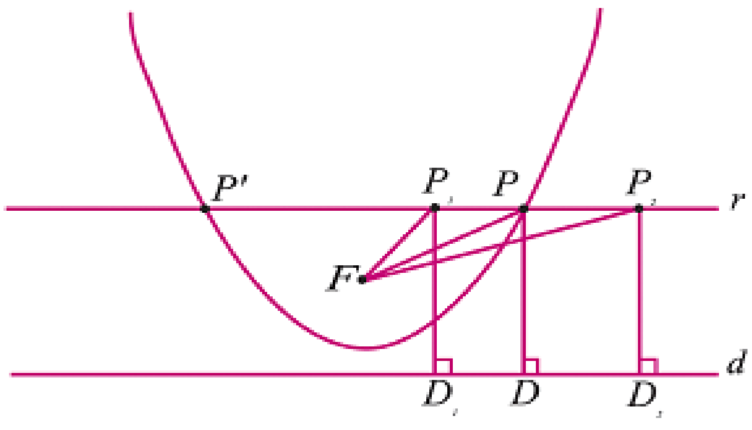

Figura 13. Parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela a d.

A Figura 13 mostra uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela à d, cortando a curva em P e P´. Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP´, então $P_1F <$ $PF = PD = P_1D_1$ e, portanto, é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r, exterior ao segmento PP´, então $P_2F < PF = PD = P_2D_2$ e P_2 é exterior à parábola.

Observação 2.

Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Aliás, isso não é inteiramente verdadeiro, mas para o observador da Terra é aceitável. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”.

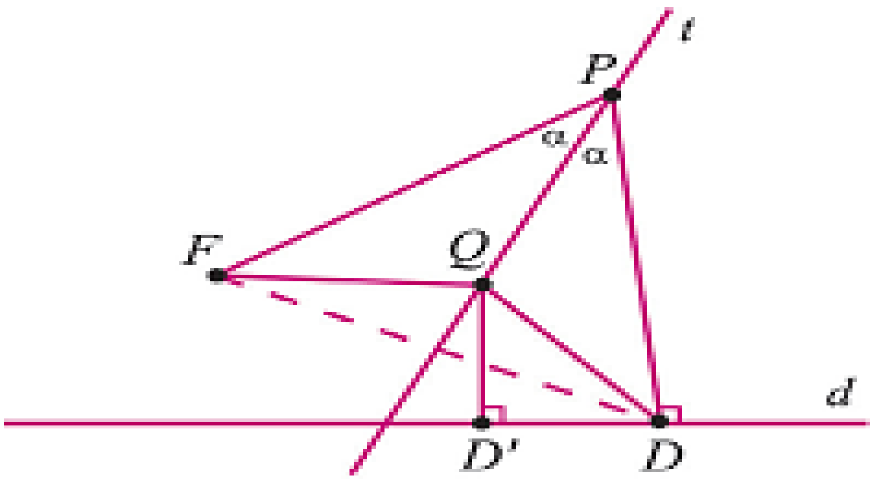

Figura 14: Bissetriz do ângulo FPD, no triangulo PFD.

Consideremos um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo FPD. Vamos mostrar geometricamente que t é tangente à parábola. No triângulo PFD, como PF = PD, a reta t, bissetriz do ângulo PFD, é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD. Seja agora Q, um ponto qualquer da reta t, distinto de P. Se D´é a projeção de Q sobre d, temos: QF = QD > QD´. Portanto, Q é exterior à parábola. Ora, o ponto P da reta t pertence à parábola, e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P.

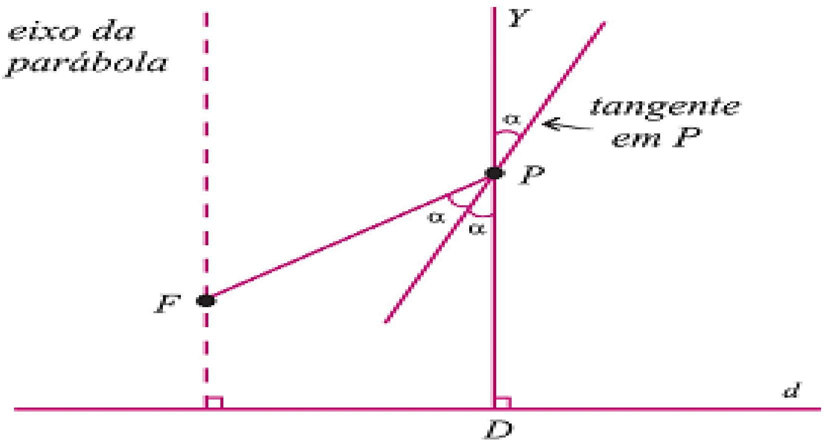

Figura 15: Reta tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD.

Observe, na figura acima, a semi-reta PY, prolongamento do segmento DP. Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD, temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

3.3.2 INCIDÊNCIA DE RAIOS SOLARES EM UMA PARÁBOLA

Conforme pode ser observado na Figura 16, a utilização doméstica da energia solar vem aumentando devido ao fato de ser renovável, não agredindo o meio ambiente. Células fotovoltaicas e os fornos solares são exemplos de sua utilização. Um desses fornos está localizado na França e em sua composição existem cerca de 10.000 espelhos organizados de forma parabólica, convergindo, assim, os raios do sol para o chamado foco do espelho. E essa formação tem capacidade para atingir temperaturas superiores a 3.000°C.

Figura 16: Esquema de incidência de raios solares sobre uma forma parabólica.

3.3.3 LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS

No lançamento de projéteis a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola; se levarmos em consideração que a resistência do ar seja a menor possível conforme a Figura 17 abaixo se percebe que a trajetória que a bola de golfe faz é uma parábola, obviamente para que tal trajetória seja uma parábola devemos levar em consideração que não há resistência do ar.

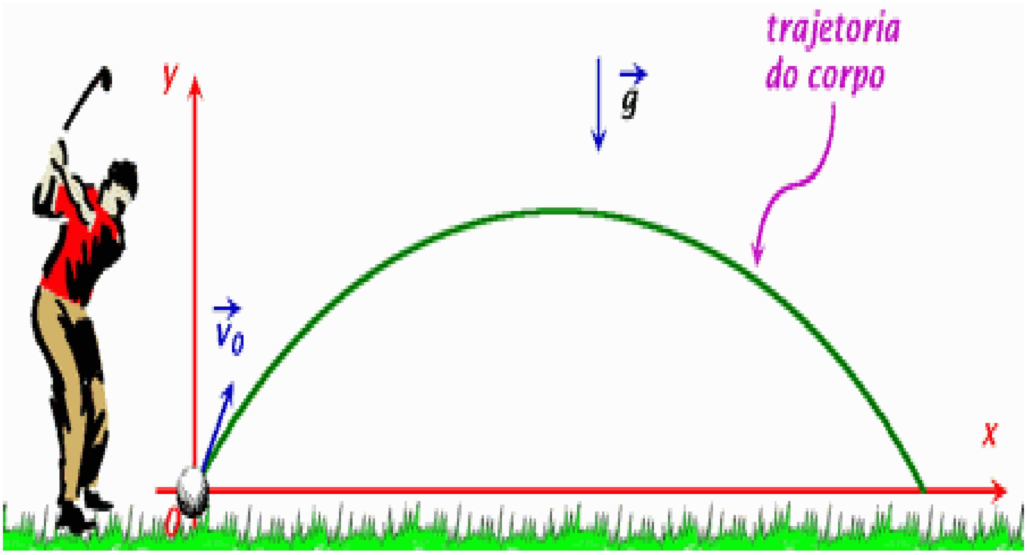

Figura 17: Trajetória da bola de golfe descrita por uma parábola.

4. HÍPERBOLE

Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Define-se Hipérbole como sendo o conjunto de pontos de α cuja diferença em valor absoluto das distâncias a F_1 e F_2 é constante, ou seja, se $P \in \alpha$ então $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

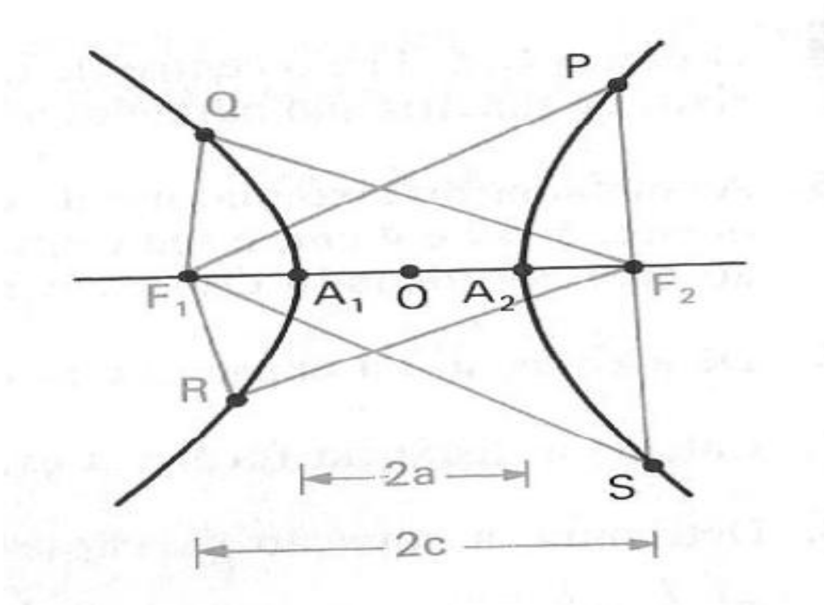

Figura 18: Hipérbole contida no plano α.

Assim, de acordo com a Figura 18 temos:

$$QF_2\text{-}QF_1 = 2a;$$

$$RF_2\text{-}RF_1 = 2a;$$

$$SF_1\text{-}SF_2 = 2a;$$

$$A_1F_2\text{-}A_1F_1 = 2a;$$

$$A_2F_2\text{-}A_2F_1 = 2a$$

Notemos que o módulo é abolido desde que façamos a diferença da maior para a menor distância. Se um ponto X está no ramo da direita, temos:

$$XF_1\text{-}XF_2 = 2a, \text{ pois } XF_1 > XF_2$$

Se X está no ramo da esquerda temos:

$$XF_2\text{-}XF_1 = 2a, \text{ pois } XF_2 > XF_1$$

4.1 ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE:

De acordo com a Figura 19 destacaremos os seguintes elementos da hipérbole.

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.
- O é o centro da hipérbole.
- A_1A_2 é o eixo real.
- B_1B_2 é o eixo imaginário (seu significado é um tanto abstrato).
- 2c é a distancia focal.
- 2a é a medida do eixo real.
- 2b é a medida do eixo imaginário.
- $\frac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole.

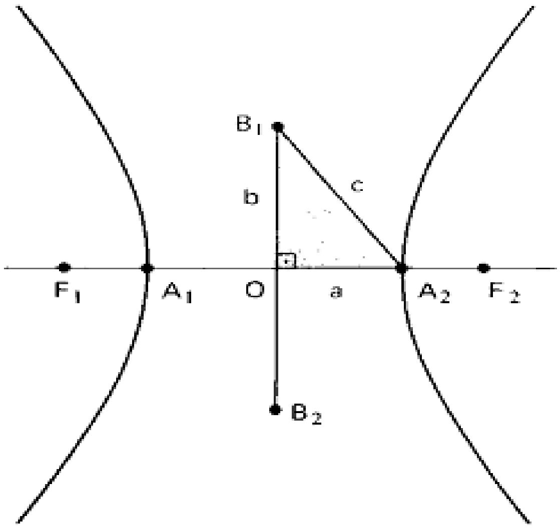

Figura 19: Triângulo A_2OB_1 na hipérbole.

No triângulo A_2OB_1 é válida a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Observação. O eixo B_1B_2 na Figura 19 é imaginário.

4.2 ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

Na Figura 20 está representada uma hipérbole de centro em O.

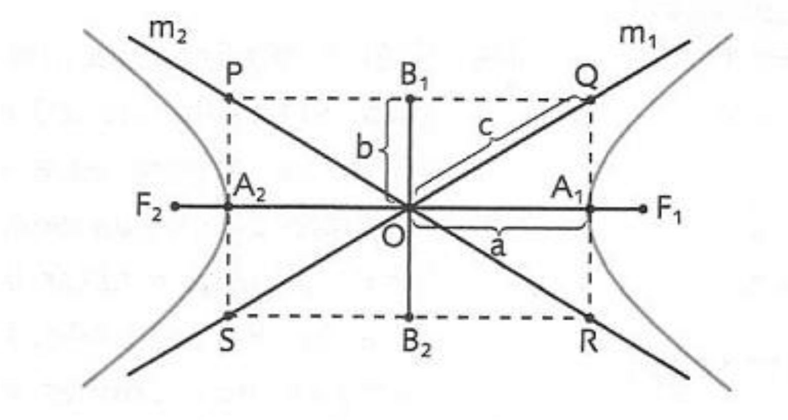

Figura 20: Assíntotas m_1 e m_2 da hipérbole.

.

O retângulo PQRS com $A_1 \in QR_1$, $A_2 \in PS$ e $B_1 \in PQ$ e $B_2 \in RS$ é denominado retângulo referência da hipérbole. Ele tem lados com medidas 2a e 2b, e diagonais com medida 2c.

Denominam-se assíntotas da hipérbole as retas m_1 e m_2 que contém as diagonais do retângulo PQRS da figura que é chamado retângulo de referência.

4.3 EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE:

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com eixo real A_1A_2 sobre o eixo das abscissas com P(x,y) pertencente a α e seus focos F_1 e F_2 de coordenadas $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, Então a equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

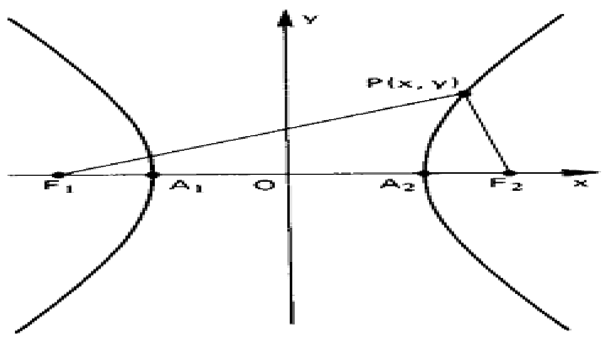

Figura 21: Ponto (x ,y) contido na hipérbole.

Demonstração:

Se A_1A_2 esta sobere o eixo dos x e P(x,y) pertence a α, os focos F_1 e F_2 tem coordenadas $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, por definição

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

Usando a formula de Euclides para distância entre dois pontos

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando os membros da igualdadem ao quadrado temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Divindindo os membros da igualdade por a^2b^2 obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se A_1A_2 esta sobere o eixo dos y e P(x,y) pertence a α, os focos F_1 e F_2 tem coordenadas $F_1(0,c)$ e $F_2(0,-c)$, Então

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

4.4 APLICAÇÕES DA HIPÉRBOLE:

4.4.1 TELESCÓPIO DE REFLEXÃO.

É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um da segunda.

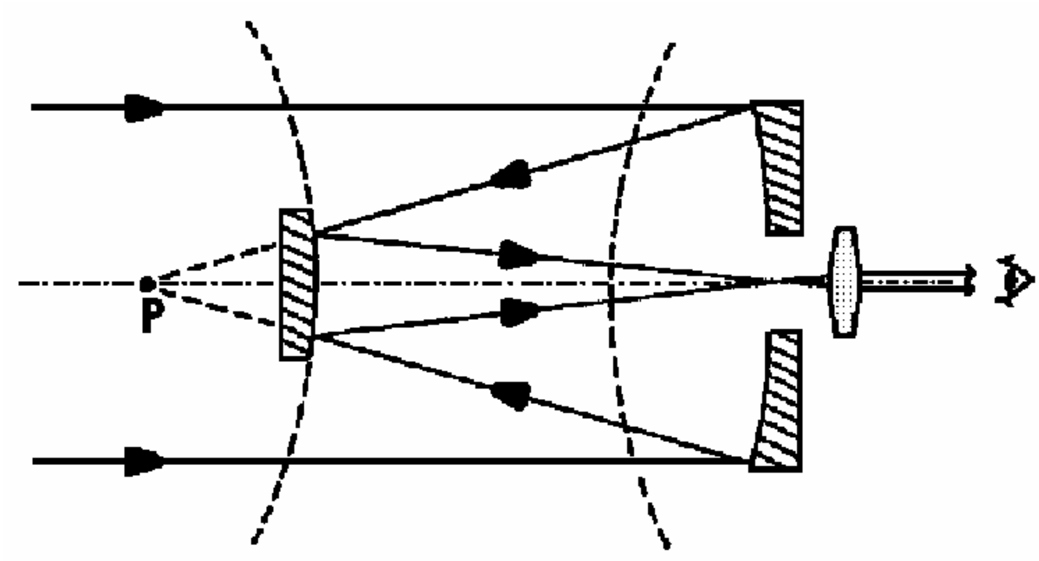

Figura 22: Raios de luz incidindo em um único ponto.

Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica.

A vantagem deste tipo de telescópio reside no fato de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação. Por exemplo, uma objetiva fotográfica com 500 mm de distância focal é muito grande e pesada se for de refração, o que já não acontece se for de reflexão, sendo pequena e manejável, o que pode ser vantajoso.

4.4.2 TELESCÓPIO ESPACIAL HUBBLE.

Assim como no caso da elipse, algumas das aplicações práticas mais importantes da hipérbole estão relacionadas à astronomia, principalmente no que se refere ao estudo da trajetória de alguns cometas e na utilização de espelhos hiperbólicos para a construção de telescópios de reflexão. Esses aparelhos possuem dois espelhos – um parabólico e um hiperbólico cujo ajuste dos focos permite obter, em um espaço bastante reduzido, se comparado aos telescópios de refração, o mesmo poder de ampliação destes. Um exemplo da aplicação desse mecanismo de reflexão pode ser encontrado no telescópio espacial Hubble, em órbita a cerca de 600 km de altura e cujo maior espelho possui 2,4 metros de diâmetro.

Figura 23: Telescópio *Hubble* em órbita terrestre.

4.4.3 TELESCÓPIO

Em 1672 o astrônomo francês Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico no qual um dos focos da hipérbole coincide com o foco F da parábola. Então, os raios que iriam formar a imagem no foco F são refletidos pelo espelho e formarão essa imagem no outro foco da hipérbole O espelho de Cassegrain, pelo contrário, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco F, mantendo-se fixa a distância FF' entre os focos da hipérbole; em consequência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos F e F' também pode ser alterada para mais ou para menos, sem mudar a posição do foco F. A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico adequando-o, assim, às exigências das observações. Essas montagens de Cassegrain somente começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então passaram a ser largamente usadas, e hoje em dia estão presentes não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios.

Figura 24: Telescópio que utiliza o espelho de Cassegrain.

4.4.4 ARQUITETURA

As curvas hiperbólicas também são utilizadas na arquitetura como pode ser observado da catedral de Brasília.

Figura 25: Catedral de Brasilia-DF.

Já na engenharia civil, o hiperboloide (sólido originado da rotação de uma hipérbole) é utilizado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. Isso se deve ao fato de que o hiperboloide é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície, Deste modo às torres podem ser construídas com vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais e mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção.

Figura 26: Usina nuclear.

CONCLUSÃO

Neste trabalho mostrou-se a importância das cônicas em outras áreas, assim como a dedução das principais equações sobre Elipse, Parábola e Hipérbole.

É importante ressaltar que existem outras aplicações das cônicas em outras áreas do conhecimento humano possibilitando também qualidade de vida.

O trabalho apresentado está direcionado a alunos e professores do ensino médio, assim esperamos que o mesmo possa ser útil para eles.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMARGO, I. **Geometria analítica.** São Paulo 3ª Ed. 2005.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** Geometria Analítica.

LOPES, J. **Cônicas e Aplicações**. Rio Claro: [s.n.], 2011.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**, nº 6, Moderna, São Paulo, 1998.

RIBEIRO, J. **Matemática ciência linguagem e tecnologia**. 5ª Ed. Atual Editora Ltda., São Paulo, 2011.

SATO, J. **As cônicas e suas aplicações.** Uberlândia - MG, Brasil 2005.

WAGNER, E. **Porque as antenas são parabólicas.** Revista do Professor de Matemática, nº 33, SBM, São Paulo, 1997.

WANDERLEY, E. **Cônicas e aplicações.** UFMG. nº10, Minas Gerais, 2008.

SITES CONSULTADOS:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Leis_de_Kepler#Primeira_Lei_de_Kepler:_Lei_das_.C3.93rbitas_El.C3.ADpticas

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_hiperbole/introteohiperbole.htm

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_parabola/introteoparabola.htm

http://www.wikipedia.com

http://www.google.com.br

http://funcoesopcao1c.blogspot.com.br/p/algumas-aplicacoes-de-funcoes.html

(http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=13838)

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/conicas.htm

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/conicas.html

http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo4/prob_aplicas2.html

http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html