



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA**

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

**DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIAS CLÁSSICAS DE  
CAMPOS E SUAS APLICAÇÕES**

CAMPINA GRANDE – PB  
2014

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIAS CLÁSSICAS DE  
CAMPOS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Licenciatura em Física  
da Universidade Estadual da Paraíba, em  
cumprimento à exigência para obtenção do grau  
de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alex da Silva

CAMPINA GRANDE – PB  
2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

M528d Melo, Têssio Rogério Nóbrega Borja de.

Defeitos topológicos em teorias clássicas de campos e suas aplicações [manuscrito] / Têssio Rogério Nóbrega Borja de Melo. - 2014.

64 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Alex da Silva, Departamento de Física".

1. Topol6gia. 2. Teorias de campos. 3. Formalismo lagrangiano. 5. Formalismo hamiltoniano. I. T6tulo.

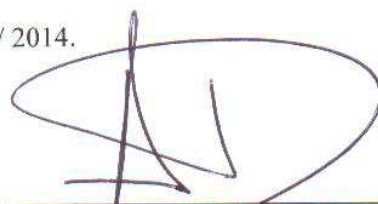
21. ed. CDD 514

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

## DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS E SUAS APLICAÇÕES

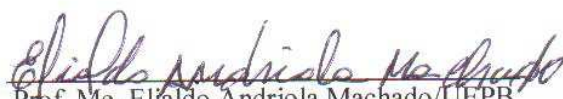
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em: 28/ 02/ 2014.



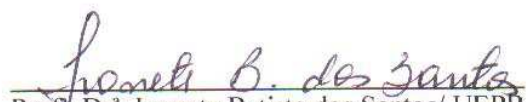
---

Prof. Dr. Alex da Silva/ UEPB  
Orientador



---

Prof. Me. Elivaldo Andriola Machado/UEPB  
Examinador



---

Prof. Dr.ª Ivonete Batista dos Santos/ UEPB  
Examinadora

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, coragem e perseverança para enfrentar o difícil caminho até aqui.

Aos meus pais Romero Tadeu e Maria do Rosário, por nunca medirem esforços para que eu tivesse uma boa formação intelectual e moral. Por às vezes fazerem até mais do que estava ao alcance, e principalmente, pelos momentos em que eles fizeram não a minha vontade, mas o que era melhor para mim.

Aos meus irmãos Téssia, Talyta e Romerinho, e a toda minha família, por sempre me apoiarem e cuidarem de mim.

À minha namorada Ana Cláudia, pelo amor, carinho, constante apoio e compreensão. Sem ela, talvez eu não tivesse conseguido chegar até aqui.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Física da UEPB, que ao longo destes anos, contribuíram não só com os conhecimentos acadêmicos, mas com ensinamentos de vida. Em especial ao meu orientador, professor Alex da Silva, pelas oportunidades de crescimento dentro do curso, pelo estímulo e ótima orientação. À professora Morgana Lígia, por me ajudar a dar um jeito nas situações, mesmo quando elas pareciam sem jeito.

Ao curso de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pela contribuição significativa na minha formação acadêmica.

Aos colegas de curso da UEPB, pela amizade e boa companhia.

Aos amigos da UFCG, em especial Pablo, Paulinho e Tico, pelas boas conversas na hora do almoço.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho trata de forma sucinta das aplicações dos defeitos topológicos em teorias de campos. Discute-se inicialmente a construção de teorias clássicas de campos nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, dando ênfase maior ao formalismo lagrangiano. São apresentados também métodos matemáticos importantes na obtenção de soluções das equações de movimento para o sistema, conhecido como método de Bogomol'nyi, e soluções de novas teorias a partir de teorias conhecidas, utilizando o método de deformação. São discutidos conceitos fundamentais em teorias de campos, como quebra espontânea de simetria e defeitos topológicos, juntamente com suas aplicações em física de partículas e, principalmente, em física da matéria condensada, nos fenômenos de transição de fase, ferromagnetismo, superfluidez e supercondutividade.

**Palavras-chave:** Defeitos topológicos, campos, simetria, supercondutividade, superfluidez.

# ABSTRACT

This work succinctly deals with topological defects applications in field theories. It discusses first the construction of classical field theory in lagrangian and hamiltonian formalisms, giving greater emphasis to the lagrangian formalism. Important mathematical methods are presented as well, to obtain solutions of the motion equations for the system, known as Bogomol'nyi method, and solutions for new theories from known theories, making use of the deformation method. Fundamental concepts are discussed in field theories, such as spontaneous symmetry breaking and topological defects, along with its applications in particle physics, and especially, in condensed matter physics, in the phenomena of phase transition, ferromagnetism, superfluidity and superconductivity.

**Keywords:** Topological defects, fields, symmetry, superconductivity, superfluidity.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1:</b> Potencial da teoria $\phi^4$ . Com $\mu^2 > 0$ há um único mínimo, com $\mu^2 < 0$ , dois estados de vácuo. ....	14
<b>Figura 2:</b> Quebra de simetria na teoria $\phi^4$ . A simetria do potencial é quebrada quando escolhemos um dos estados de vácuo. ....	14
<b>Figura 3:</b> Potencial da teoria do campo complexo $\varphi$ . $V(\varphi)$ apresenta uma infinidade de mínimos no círculo $\varphi = a$ . ....	16
<b>Figura 4:</b> Soluções tipo defeito da teoria do campo escalar real em $(1 + 1)D$ . O gráfico da esquerda representa um <i>kink</i> , e o da direita um <i>antikink</i> . ....	22
<b>Figura 5:</b> Densidade de energia do <i>kink</i> da teoria $\phi^4$ . ....	23
<b>Figura 6:</b> Defeito original $\phi(x)$ e defeito deformado $\tilde{\phi}(x)$ . ....	32
<b>Figura 7:</b> Modelo de elétrons localizados em uma rede cristalina. ....	35
<b>Figura 8:</b> Sólido no estado paramagnético e no estado ferromagnético No estado paramagnético os spins apontam em direções aleatórias. No estado ferromagnético, spins alinham-se gradativamente na direção de um eixo, gerando uma magnetização espontânea. ....	36
<b>Figura 9:</b> Parâmetro de ordem em função da temperatura. Em transições de segunda ordem, $\phi$ varia continuamente. Já em transições de primeira ordem, $\phi$ apresenta uma descontinuidade em $T = T_C$ . ....	37
<b>Figura 10:</b> Densidade de energia livre $f(\phi, T)$ . Acima de $T_C$ , $f$ apresenta um único mínimo em $\phi = 0$ . Abaixo de $T_C$ , $f$ apresenta mínimos para $\phi \neq 0$ . ....	39
<b>Figura 11:</b> Densidade de energia livre com a presença de um campo magnético $H$ . A presença de $H$ quebra explicitamente a simetria do sistema. ....	41
<b>Figura 12:</b> Estados topologicamente distintos em uma cadeia de Ising unidimensional. (a) Estado fundamental de spins <i>up</i> . (b) Estado fundamental de spins <i>down</i> . (c) <i>Kink</i> . (d) <i>Antikink</i> . ....	42
<b>Figura 13:</b> Magnetização $\phi(x)$ ao longo da cadeia de spins. ....	43
<b>Figura 14:</b> Vórtices linear e em anel. ....	46
<b>Figura 15:</b> Vórtices em um sistema superfluido formado por átomos de sódio. ....	47
<b>Figura 16:</b> Efeito Meissner. Abaixo da temperatura crítica, as linhas do campo magnético são repelidas do interior do supercondutor. ....	48
<b>Figura 17:</b> Vórtices em um supercondutor tipo II, formado de $\text{NbSe}_2$ . ....	51



# SUMÁRIO

1	Introdução .....	1
2	Teorias Clássicas de Campos.....	4
2.1	Teorias de Campos no Formalismo Lagrangiano .....	4
2.2	Teorias de Campos Relativísticas .....	6
2.2.1	Campo de Klein-Gordon .....	7
2.3	Teoria de Campos no Formalismo Hamiltoniano .....	8
2.4	O Método de Bogomol'nyi .....	9
3	Quebra Espontânea de Simetria .....	12
3.1	QES na Teoria do Campo Escalar Real .....	12
3.2	QES na Teoria do Campo Escalar Complexo.....	15
3.3	Mecanismo de Higgs .....	17
4	Defeitos Topológicos .....	20
4.1	Carga Topológica.....	20
4.2	<i>Kinks</i> e <i>Domain Walls</i> .....	21
4.2.1	Energia do <i>Kink</i> .....	23
4.2.2	Dinâmica do <i>Kink</i> .....	24
4.3	Vórtices e Cordas .....	26
5	Método de Deformação .....	29
5.1	Modelo $\phi^4$ Deformado pela Função $\operatorname{sen}x$ .....	30
6	Aplicações em Física da Matéria Condensada .....	33
6.1	QES e Transições de Fase.....	33
6.2	Descrição Termodinâmica de Sistemas Ordenados.....	34
6.3	Teoria de Landau .....	36
6.3.1	Quebra Explícita de Simetria .....	40
6.4	<i>Kinks</i> no Modelo de Ising .....	41
6.5	Vórtices em Superfluidos.....	44
6.6	Supercondutividade .....	48
7	Metodologia .....	52
8	Considerações Finais .....	53
	Bibliografia.....	55

# 1 INTRODUÇÃO

Teorias de campos possuem uma importância fundamental na física contemporânea. A idéia de campo não é nova e, historicamente, surgiu em contraposição à idéia de ação à distância entre corpos interagentes. A teoria da gravitação de Newton é um dos exemplos mais claros de teoria de ação à distância, embora o próprio Newton considerasse inadmissível essa idéia. Em uma carta escrita a Bentley em 1693, ele disse:

[...] que um corpo possa atuar sobre outro à distância através do vácuo, sem qualquer agente intermediário que possa transmitir esta ação de um ao outro, parece-me um absurdo tão grande, que não acredito que qualquer pessoa competente para raciocinar em termos de filosofia natural possa acreditar nisso (NUSSENZVEIG, 1997, p.17).

Dentre as primeiras teorias de campos que surgiram encontram-se o eletromagnetismo clássico e a mecânica de meios contínuos. Posteriormente, com o surgimento de outras teorias, passou-se a formulá-las utilizando a mecânica analítica, podendo-se aproveitar assim, todo o rico aparato matemático, alto grau de generalidade e flexibilidade que ela oferece. Outra grande vantagem que este formalismo proporciona é a clara relação entre a dinâmica de um sistema e suas propriedades de simetria.

Com o surgimento da mecânica quântica, apareceram métodos de quantização dos campos clássicos, a fim de descrever objetos quânticos. A compreensão atual das interações fundamentais da Natureza é inteiramente baseada em teorias quânticas de campos. O modelo padrão é a teoria que explica, com enorme êxito, as partículas elementares observadas atualmente e como elas interagem. Segundo esta teoria, os objetos físicos fundamentais são os campos quânticos, e as partículas emergem como os *quanta* desses campos. Nesse contexto, as teorias clássicas continuam a desempenhar um papel muito importante, pois a construção de teorias quânticas depende crucialmente da possibilidade de formulá-las primeiro como teorias clássicas, para só depois quantizá-las (LEMOS, 2007, p.319).

Um dos conceitos de maior importância em teorias de campos é o de quebra espontânea de simetria. A descrição das partículas no modelo padrão, parte do pressuposto que a Natureza possui uma invariância pelo grupo de simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Entretanto, esta invariância requer que todas as partículas tenham massa nula, o que evidentemente está em desacordo com as observações. Para resolver esse problema da geração da massa das partículas foi introduzido o mecanismo de Higgs, o qual está fundamentado na idéia de quebra espontânea de simetria. Este mecanismo, essencial para a consistência do modelo padrão, ganhou solidez com a confirmação experimental da existência do bóson de Higgs em 2012 no LHC.

A hipótese subjacente a esse mecanismo é que o universo inicialmente possuía invariância pelo grupo de simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , mas com a sua expansão e conseqüente resfriamento, sofreu transições de fase, quebrando a simetria original, até chegar ao seu estado atual, onde observa-se apenas a simetria de gauge do grupo  $SU(3) \times U(1)$ , correspondente à eletrodinâmica e às interações fortes. Esta idéia é estendida à cosmologia, onde se investiga a possibilidade do surgimento de defeitos topológicos, como por exemplo, cordas cósmicas e monopólos magnéticos, em decorrência dessas quebras de simetria.

Além dessas aplicações em física de altas energias, essas idéias têm grande importância em física da matéria condensada. Quebra espontânea de simetria está intimamente relacionada a fenômenos de transição de fase, como a transição de um material paramagnético ao estado ferromagnético, ou ainda a transição de um metal condutor comum, para o estado supercondutor. Nesse tipo de sistema, há ainda a possibilidade do surgimento de defeitos topológicos, a exemplo de *kinks* e vórtices.

O estudo de teoria de campos tem se tornado cada vez mais abstrato e generalista, não se atendo a sistemas físicos em particular. Os campos são tratados como entidades abstratas e define-se sua teoria por meio de uma ação conveniente, podendo-se dessa forma, investigar as propriedades matemáticas dessa teoria e desenvolver novos métodos e ferramentas teóricas, as quais posteriormente poderão ser aplicadas, diretamente ou com algumas adaptações, na formulação de modelos para sistemas específicos.

Neste trabalho procuramos destacar a importância de teorias de campos na física atual e seu potencial de aplicabilidade nas mais variadas áreas, desde física da matéria condensada até física das altas energias. Estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

No capítulo 2 tratamos dos aspectos gerais da formulação de teorias clássicas de campos nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano. Discutimos a incorporação dos princípios da relatividade especial, dando o exemplo na teoria de Klein-Gordon. Depois apresentamos o método de Bogomol'nyi, o qual permite obter a solução para uma teoria substituindo as equações de movimento originais, por equações equivalentes de mais simples resolução.

No capítulo 3 discutimos o conceito de quebra espontânea de simetria nas teorias do campo escalar real, campo escalar complexo e no modelo de Higgs abeliano, destacando as suas conseqüências e as diferenças existentes entre quebras de simetrias contínuas e discretas.

No capítulo 4 discutimos os defeitos topológicos – em especial os *kinks* e os vórtices – que surgem em decorrência de quebras de simetria nos modelos discutidos no capítulo 3.

No capítulo 5 apresentamos o método de deformação, o qual possibilita a obtenção de novos defeitos (topológicos e não topológicos) a partir de teorias de soluções conhecidas.

O capítulo 6 é dedicado a aplicações em física da matéria condensada. Apresentamos a conexão existente entre quebra espontânea de simetria e fenômenos de transições de fase, juntamente com a teoria fenomenológica de Landau. Em seguida, discutimos a presença de defeitos topológicos em alguns sistemas específicos: *kinks* em sistemas magnéticos e vórtices em sistemas superfluidos. Por fim, discutimos o fenômeno da supercondutividade.

No capítulo 7 descrevemos a metodologia e o capítulo 8 é reservado para as nossas considerações finais.

Ao longo deste trabalho, utilizamos o sistema natural de unidades com  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar = h/2\pi$ , sendo  $h$  a constante de Planck e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. A métrica utilizada é  $(+, -, -, -)$ .

## 2 TEORIAS CLÁSSICAS DE CAMPOS

Neste capítulo abordaremos os aspectos gerais da formulação de teorias de campos nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, embora a ênfase maior seja dada ao formalismo lagrangiano. Discutiremos como construir teorias de campos compatíveis com os princípios da Relatividade Especial e, como exemplo de teoria relativística, destacamos a teoria de Klein-Gordon. Por fim, apresentamos um método de redução das equações de movimento de 2ª ordem, a equações de 1ª ordem, chamado de método de Bogomol'nyi.

### 2.1 TEORIAS DE CAMPOS NO FORMALISMO LAGRANGIANO

Em termos gerais, um campo pode ser entendido como sendo uma entidade que possui infinitos graus de liberdade, tendo um valor definido em cada ponto do espaço e do tempo. Campos são naturalmente adequados para descrever sistemas contínuos, como a dinâmica de oscilações em uma corda vibrante ou o escoamento de um fluido.

As teorias de campos podem ser formuladas utilizando o arcabouço teórico da mecânica analítica. Na formulação lagrangiana da mecânica clássica, um sistema de  $N$  graus de liberdade é descrito por  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$  e suas derivadas no tempo  $\dot{q}_i$ . O estado do sistema é especificado pela lagrangiana  $L = T - V$ , onde  $T$  é a energia cinética e  $V$  a energia potencial. A evolução temporal do sistema é governada pelas equações de movimento, também chamadas equações de Euler-Lagrange. Quando tratamos de sistemas com um número infinito de graus de liberdade, a dinâmica do sistema passa a ser regida por uma função  $\mathcal{L}$ , denominada densidade lagrangiana. Ao invés das coordenadas generalizadas  $q_i$ , o sistema passa a ser representado por um campo  $\varphi$  definido em todo o espaço e no tempo. Ao invés das derivadas das coordenadas  $\dot{q}_i$ , aparecem as derivadas do campo  $\partial\varphi/\partial t$  e  $\nabla\varphi$ . Isso implica que  $\mathcal{L}$  pode, em geral, ter a seguinte dependência funcional,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi, \mathbf{x}, t\right) \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

A integral de  $\mathcal{L}$  sobre todo o espaço resulta na lagrangiana do sistema  $L$ ,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

e a integral de  $L$  no tempo é a ação  $S$ ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.3)$$

As equações de movimento para o campo são obtidas pelo princípio variacional de Hamilton (ou princípio de mínima ação), o qual afirma que a dinâmica do sistema entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  é tal que minimiza<sup>1</sup> a ação,

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Tomando a variação na ação (2.3) e impondo que as variações do campo se anulem nos extremos dos intervalos espaciais e temporais, temos

$$\delta \int d^4x \mathcal{L} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi, \mathbf{x}, t \right) = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right\} \delta \varphi = 0. \quad (2.5)$$

O que resulta na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.6)$$

A equação de movimento acima, obtida para um único campo, pode ser prontamente generalizada para um sistema de  $N$  campos  $\varphi_\alpha$ , ( $\alpha = 1, \dots, N$ ),

---

<sup>1</sup> A ação não é necessariamente mínima, podendo ser também máxima. Em geral, é correto dizer que ela é estacionária (LEMOS, 2007, p.50).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\alpha / \partial t)} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \varphi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0. \quad (2.7)$$

## 2.2 TEORIAS DE CAMPOS RELATIVÍSTICAS

A Natureza é relativística, e por essa razão as teorias de campos devem ser construídas de modo a serem compatíveis com a relatividade especial. Uma das exigências da relatividade é que as teorias sejam invariantes frente a transformações de Lorentz, fazendo com que espaço e tempo sejam colocados em condições de igualdade. Se exigirmos que a ação seja um escalar de Lorentz, as equações de movimento serão automaticamente invariantes por tais transformações, e assim, válidas com a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Podemos escrever as equações (2.7) em uma notação relativisticamente covariante fazendo  $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ . Dessa forma, podemos expandir (2.7) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\alpha / \partial x^0)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\alpha / \partial x^1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\alpha / \partial x^2)} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\alpha / \partial x^3)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita simplesmente como,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0, \quad (2.8)$$

onde  $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ , com o índice  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e estamos usando a convenção de soma de Einstein, que significa que índices repetidos devem ser somados.

Diz-se que as equações de Euler-Lagrange escritas nesta notação, estão escritas de forma manifestamente covariante, ou seja, válida sem modificação em todos os referenciais inerciais.

### 2.2.1 CAMPO DE KLEIN-GORDON

Como um exemplo de uma teoria de campo relativística, consideremos a seguinte densidade lagrangiana para o campo escalar real  $\phi$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.9)$$

Observa-se que esta lagrangiana é um escalar sob transformações de Lorentz, o que significa que ela é válida em todas as referências inerciais. Podemos calcular a equação de movimento para esse campo usando a equação (2.8). Temos que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.8), obtemos

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad (2.11)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon.

Observe que, sugestivamente, usamos a letra  $m$  na lagrangiana porque, em teorias de campos, o coeficiente do termo quadrático no campo é chamado de termo de massa. Podemos calcular a massa para o campo de Klein-Gordon derivando duas vezes o potencial e avaliando no ponto  $\phi_0$  que o minimiza,

$$massa^2 = \left. \frac{d^2 V(\phi)}{dx^2} \right|_{\phi=\phi_0}. \quad (2.12)$$

Substituindo o potencial de Klein-Gordon,

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

em (2.12), temos



$$\frac{d^2V(\phi)}{dx^2} = m^2.$$

Então,

$$massa = m. \quad (2.13)$$

Em teorias quânticas, campos escalares reais como o de Klein-Gordon, descrevem mésons escalares, que são partículas eletricamente neutras, de massa  $m$ , spin nulo e ainda têm a propriedade de serem as suas próprias antipartículas (ALDROVANDI; PEREIRA, 2008, p.109).

### 2.3 TEORIA DE CAMPOS NO FORMALISMO HAMILTONIANO

É possível ainda construir teorias clássicas de campos no formalismo hamiltoniano. Esse formalismo é muito útil em teorias quânticas de campos, porque permite a quantização da teoria por meio de um processo simples e direto, chamado quantização canônica. Se quisermos quantizar uma teoria escrita no formalismo lagrangiano, é necessária a utilização de integrais de trajetória, também conhecidas como integrais de Feynman (TONG, 2012).

Define-se a densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , a qual coincide com a densidade de energia  $\varepsilon$  do sistema, como

$$\mathcal{H} = \pi^\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L}, \quad (2.14)$$

onde a grandeza  $\pi^\alpha$  é chamada de momento canonicamente conjugado ao campo  $\phi_\alpha$ , e definido por

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha}. \quad (2.15)$$

A hamiltoniana  $H$  – igual à energia total do sistema  $E$  – é a integral de  $\mathcal{H}$  em todo o espaço

$$H = \int d^3x \mathcal{H} . \quad (2.16)$$

Nesse formalismo, as equações de movimento para os campos são as chamadas equações canônicas de Hamilton, dadas por

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \quad , \quad \dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} . \quad (2.17)$$

Uma das desvantagens deste formalismo é que, ao contrário do formalismo lagrangiano, ele não permite que as equações de movimento sejam postas em uma forma explicitamente covariante, por causa do papel diferenciado que o tempo desempenha em relação às coordenadas espaciais (ALDROVANDI; PEREIRA, 2008, p.77).

## 2.4 O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI

O método de Bogomol'nyi consiste em encontrar soluções para a equação de movimento de uma teoria (geralmente de 2ª ordem) através das equações de 1ª ordem que surgem do processo de minimização da energia (INÁCIO, 2003). A seguir, descrevemos o método, aplicando-o à teoria do campo escalar real.

Considere a seguinte lagrangiana<sup>2</sup>,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) . \quad (2.18)$$

Nela, os termos ganham denominações em analogia à Mecânica Clássica: o primeiro é chamado termo cinético e o segundo, potencial. O termo cinético apresenta a mesma forma em diferentes teorias para o campo escalar real, enquanto que a forma do potencial pode variar de acordo com o fenômeno físico que queremos descrever. Em outras palavras, o potencial  $V(\phi)$  caracteriza o modelo a ser investigado.

---

<sup>2</sup> É usual em teoria de campos referir-se à densidade lagrangiana simplesmente como lagrangiana, apesar de rigorosamente, estas serem grandezas físicas distintas. Conscientes do abuso de linguagem, daqui por diante nos referiremos a  $\mathcal{L}$  como lagrangiana.

Utilizando a equação de Euler-Lagrange (2.8), obtemos a equação de movimento para o campo  $\phi$ ,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.19)$$

a qual, para a maioria dos potenciais de interesse físico, é uma equação diferencial não linear, de difícil solução.

Para o caso de configurações estáticas em uma dimensão espacial, temos  $\phi = \phi(x)$ , e a equação (2.19) se reduz a

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.20)$$

A energia das configurações estáticas pode ser calculada usando a equação (2.16),

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.21)$$

Nesta expressão, o primeiro termo do integrando é chamado de energia gradiente e o segundo, energia potencial. Completando o quadrado na expressão do integrando, reescrevemos equação acima da seguinte forma,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx. \quad (2.22)$$

Como o primeiro termo dessa integral é sempre não negativo, a energia mínima  $E_B$  (também chamada de energia de Bogomol'nyi) é dada por,

$$E_B = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx, \quad (2.23)$$

desde que,

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (2.24)$$

As soluções desta equação – a qual é de primeira ordem – são também soluções da equação de movimento (2.20). De fato, diferenciando (2.24) em relação a  $x$  e usando em seguida a própria (2.24) e a regra da cadeia, recuperamos a equação de movimento (2.20).

Vemos então que, ao minimizar a energia, pudemos obter uma outra equação de movimento equivalente à original, porém de mais fácil solução. O método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção de uma equação diferencial de 1ª ordem, permite escrever a energia associada à configuração estática de forma simples, fechada e mínima (SILVA, 1996).

### 3 QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

A idéia da Quebra Espontânea de Simetria (QES) teve início por volta de 1960, com os trabalhos de Nambu e Goldstone. Em física das partículas elementares, essa idéia ganhou uma importância fundamental a partir de 1964, quando Higgs mostrou que a consequência da quebra espontânea de simetria em teorias de gauge é muito diferente de quando ela ocorre em teorias que não apresentam esse tipo de simetria. Weinberg e Salam, a partir do trabalho de Glashow, utilizaram a idéia de Higgs em uma teoria invariante pelo grupo de simetria  $SU(2) \times U(1)$ , e assim, puderam descrever satisfatoriamente a unificação das interações fracas e eletromagnéticas. Esta idéia consolidou-se quando t'Hooft, em 1971, mostrou que esta teoria é renormalizável (SILVA, 1996).

A quebra espontânea de simetria ocorre em sistemas que possuem alguma simetria, porém o seu estado fundamental não é invariante sobre esta simetria. Quando este fenômeno ocorre em uma teoria que apresenta simetria contínua, inevitavelmente aparecem bósons escalares sem massa, denominados bósons de Goldstone. Porém, quando a teoria apresenta simetria de gauge local, os bósons de Goldstone podem ser eliminados da teoria através de uma redefinição do campo de gauge. Neste caso, esses bósons são absorvidos pelos campos de gauge na forma de uma componente longitudinal. O que ocorre, portanto, é a eliminação do bóson de Goldstone com o aparecimento de massa para o campo de gauge.

#### 3.1 QES NA TEORIA DO CAMPO ESCALAR REAL

Considere a teoria do campo escalar real dada pela lagrangiana (2.18). Pela equação (2.14), podemos escrever a densidade de energia como

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi). \quad (3.1)$$

Note que o estado de mais baixa energia  $\phi_0$  é aquele para o qual o valor de  $\phi$  é constante. Vamos escolher o potencial  $V(\phi)$  do modelo  $\phi^4$ , o qual apresenta uma simetria discreta de reflexão  $\phi \rightarrow -\phi$  (simetria do grupo discreto  $Z_2$ ):

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2, \quad (3.2)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento, e

$$a^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda^2}. \quad (3.3)$$

Explicitamente, o potencial (3.2) se escreve,

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}\phi^4 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2, \quad (3.4)$$

onde foi omitido o termo constante, pois não tem qualquer influência para a teoria. O caso livre corresponde a  $\lambda = 0$ . Se  $\mu^2 > 0$ , o estado de mínimo do potencial (estado de vácuo) é  $\phi_0 = 0$ . Neste caso não existe quebra espontânea de simetria e a massa  $m$  do campo escalar, calculada de modo semelhante ao do campo de Klein-Gordon, é  $m = \mu$ .

Considere agora o caso  $\mu^2 < 0$ . Obtém-se o estado fundamental minimizando o potencial,

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 2\lambda^2(\phi^2 - a^2)\phi = 0. \quad (3.5)$$

Assim, observamos que o potencial apresenta dois mínimos em  $\phi = \pm a$ , e um máximo local em  $\phi = 0$ .

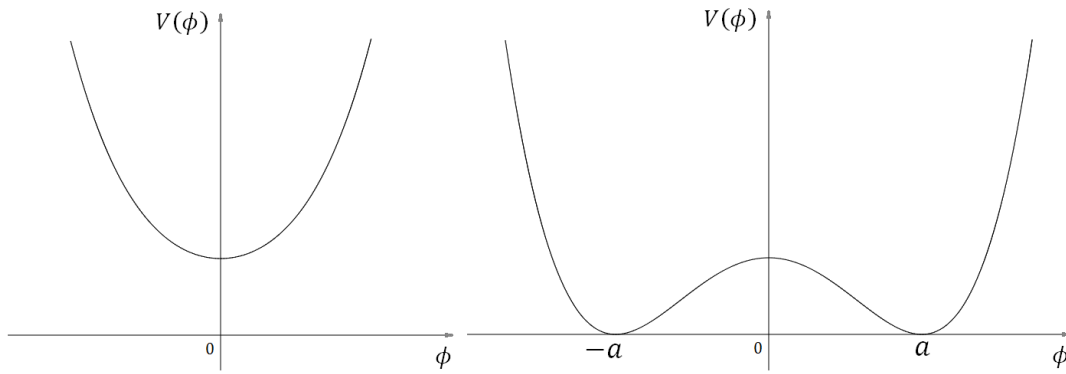


Figura 1: Potencial da teoria  $\phi^4$ . Com  $\mu^2 > 0$  há um único mínimo, com  $\mu^2 < 0$ , dois estados de vácuo.

Notamos ainda que a simetria original  $\phi \rightarrow -\phi$  é espontaneamente quebrada quando escolhemos um vácuo específico do sistema.

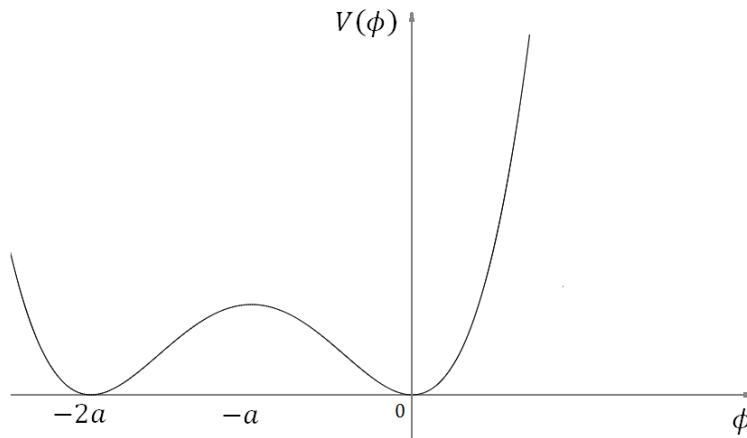


Figura 2: Quebra de simetria na teoria  $\phi^4$ . A simetria do potencial é quebrada quando escolhemos um dos estados de vácuo.

Vamos estudar a física desse sistema escolhendo o vácuo  $\phi_0 = a$ . Fazendo um deslocamento no campo tal que  $\phi' = \phi - a$ , podemos escrever o potencial  $V(\phi)$  dado na (3.2) como,

$$\begin{aligned} V(\phi') &= \frac{1}{2} \lambda^2 [(\phi' + a)^2 - a^2]^2 \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \phi'^4 + 2\lambda^2 a \phi'^3 + 2\lambda^2 a^2 \phi'^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da expressão acima para  $V(\phi')$ , podemos ver que o novo campo escalar  $\phi'$  apresenta uma massa positiva  $m^2 = 4\lambda^2 a^2$ . É uma característica importante desta teoria o fato de que, após o processo de quebra de simetria, obtém-se um campo escalar real

com massa. Em física de partículas esse campo pode descrever bósons escalares – partículas neutras de spin zero. Bósons escalares sem massa são chamados bósons de Goldstone, e acredita-se que esse tipo de partícula não exista na Natureza. Por esse motivo não é desejável, neste contexto, que se tenha teorias que apresentem campos escalares sem massa, pois eles não descrevem objetos físicos reais. Vemos assim que quando  $\mu^2 < 0$ , a massa do bóson escalar deve ser calculada fazendo um deslocamento no campo.

### 3.2 QES NA TEORIA DO CAMPO ESCALAR COMPLEXO

Considere a lagrangiana da teoria de um campo escalar complexo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|), \quad (3.7)$$

onde  $\bar{\varphi}$  é o complexo conjugado de  $\varphi$  e  $V(|\varphi|)$  é uma função polinomial em  $|\varphi| = \bar{\varphi}\varphi$ . Novamente vamos escolher  $V(|\varphi|)$  como,

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (3.8)$$

Assim podemos escrever  $\mathcal{L}$  da seguinte maneira,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (3.9)$$

Note que esta teoria é invariante frente a uma transformação de gauge global do grupo  $U(1)$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda} \varphi$ , onde  $\Lambda$  é uma constante arbitrária. O estado fundamental é obtido minimizando o potencial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \lambda^2 (\bar{\varphi} \varphi - a^2) \bar{\varphi} \\ &= \lambda^2 (\bar{\varphi} \varphi) \bar{\varphi} + \frac{\mu^2}{2} \bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$



Então, quando  $\mu^2 > 0$ , o mínimo do potencial ocorre para  $\bar{\varphi} = \varphi = 0$ , não havendo quebra espontânea de simetria. Se  $\mu^2 < 0$  existe um máximo local para  $\varphi = 0$  e uma infinidade de mínimos no círculo  $|\varphi| = a$ . Assim o estado de mais baixa energia é infinitamente degenerado. Na figura 3 está mostrado o gráfico do potencial para o caso  $\mu^2 < 0$ , o qual apresenta a forma de um “chapéu mexicano”.

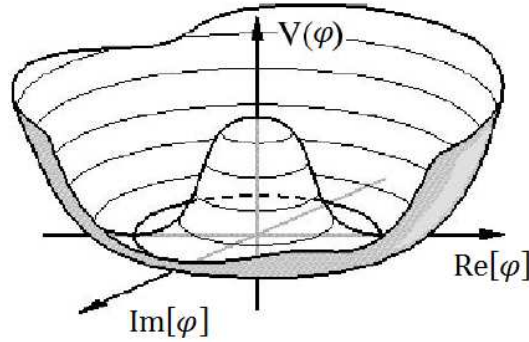


Figura 3: Potencial da teoria do campo complexo  $\varphi$ .  $V(|\varphi|)$  apresenta uma infinidade de mínimos no círculo  $|\varphi| = a$ .

Vamos analisar a física deste sistema nas vizinhanças de um estado fundamental, por exemplo  $\varphi_0 = a$ ,  $\Lambda = 0$ . Escrevendo-se  $\varphi$  como,

$$\varphi = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}, \quad (3.11)$$

com  $\phi_0 = \chi_0 = 0$  e substituindo a equação (3.11) na expressão (3.9), temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - 2\lambda^2 a^2 \phi^2 - \sqrt{2}\lambda^2 a \phi(\phi^2 + \chi^2) - \frac{\mu^2}{4}(\phi^2 + \chi^2)^2 \quad (3.12)$$

Da expressão acima podemos ver que o campo  $\phi$  adquire uma massa dada por  $m_\phi^2 = 4\lambda^2 a^2$  e o campo  $\chi$  não tem massa, e assim representa um bóson de Goldstone. Por outro lado, a lagrangiana (3.12) não é mais invariante frente à transformação de gauge global  $U(1)$ , e novamente a simetria foi espontaneamente quebrada. Obtivemos assim um caso particular de um resultado geral: quando uma simetria contínua é quebrada espontaneamente, sempre aparecem bósons escalares sem massa na teoria. Este resultado é conhecido como teorema de Goldstone (GOLDSTONE, 1961).

### 3.3 MECANISMO DE HIGGS

O mecanismo de Higgs é um processo que gera espontaneamente massa para os campos de gauge. Ilustraremos este fenômeno no caso da teoria de um campo escalar complexo  $\varphi$ , acoplado a um campo vetorial  $A_\mu$ , chamado campo de gauge. Considere a seguinte lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu\varphi}D^\mu\varphi - \mu\overline{\varphi}\varphi - \lambda(\overline{\varphi}\varphi)^2, \quad (3.13)$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  é a derivada covariante e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade do campo de gauge. Note que a lagrangiana acima é invariante frente às transformações de gauge local

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda(x)}\varphi \quad (3.14)$$

$$\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\varphi}' = e^{-i\Lambda(x)}\overline{\varphi} \quad (3.15)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \quad (3.16)$$

Consideremos o caso em que esta teoria apresenta quebra espontânea de simetria, isto é,  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 < 0$ . Vimos na seção anterior que esta teoria apresenta um círculo de estados fundamentais infinitamente degenerados. Procedendo de maneira análoga, estudaremos o comportamento desta teoria na vizinhança de um estado de vácuo específico,

$$\varphi_0 = a = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (3.17)$$

$$\varphi(x) = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}. \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.13), obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{4}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4\lambda^2\phi^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi + \dots \quad (3.19)$$

O segundo termo da lagrangiana é proporcional a  $A_\mu^2$ , o que indica que o campo vetorial  $A_\mu$  é massivo. O campo escalar  $\phi$  também é massivo, porém o campo  $\chi$  aparece sem massa. Este campo pode ser eliminado da teoria, redefinindo o campo de gauge de forma conveniente. Note que,

$$\frac{e^2a^2}{4}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi = \frac{e^2a^2}{2}\left[A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi\right]^2. \quad (3.20)$$

Assim, definindo um novo campo,

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi, \quad (3.21)$$

reescrevemos (3.20) como,

$$\frac{e^2a^2}{4}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi = \frac{e^2a^2}{2}B_\mu B^\mu. \quad (3.22)$$

Por outro lado, o tensor de intensidade do campo de gauge pode ser reescrito como,

$$M_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.19), resulta

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{2}B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - 4\lambda^2\phi^2 + \dots \quad (3.24)$$

E o campo de Goldstone  $\chi$  foi eliminado da teoria.

Portanto, concluímos que o fenômeno da quebra espontânea de simetria de gauge, resulta não na presença de um bóson de Goldstone (assim como ocorreu na teoria do um campo escalar complexo, onde uma simetria contínua foi quebrada), mas no seu desaparecimento, dando lugar a um campo de gauge massivo. Uma propriedade importante é que nesse processo, o número de graus de liberdade é preservado, ou seja, os campos originais  $B_\mu$  e  $\phi$  possuem o mesmo número de graus de liberdade que os campos originais  $A_\mu$  e  $\varphi$  (SILVA, 1996).

## 4 DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Defeitos topológicos são soluções das equações de movimento para os campos, as quais apresentam comportamento não-trivial assintoticamente, e surgem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria (ALMEIDA, 2004). Esse comportamento aparece em certos tipos de sistemas físicos que são descritos por potenciais que apresentam certas características específicas, e são caracterizados pela presença de uma carga topológica conservada.

Diferentes tipos de defeitos topológicos surgem, de acordo com o tipo de simetria que o potencial apresenta. Por exemplo, à quebra da simetria discreta de reflexão do grupo  $Z_2$ , está associado o defeito tipo *kink* em  $(1 + 1)D$  e o defeito *domain wall* (parede de domínio) em  $(3 + 1)D$ . Em sistemas de  $(2 + 1)D$  que apresentam simetria de gauge do grupo  $U(1)$ , podem surgir os defeitos chamados vórtices e em  $(3 + 1)D$ , cordas. Em certas teorias que apresentam quebras de simetrias de gauge não abelianas, podem aparecer defeitos tipo monopólos magnéticos (RYDER, 1996, p.424).

Soluções topológicas aparecem em teorias que apresentam mais de um estado de vácuo. Além disso, o potencial precisa ser limitado inferiormente, para que o sistema possua um estado de mínima energia bem definido. Essas duas condições sobre o potencial – ser limitado inferiormente e possuir mais de um mínimo – fazem com que as equações de movimento para os campos sejam necessariamente não-lineares (SILVA, 1996).

### 4.1 CARGA TOPOLÓGICA

Em  $(1 + 1)D$  podemos definir uma corrente topológica  $J_T^\mu$  para a teoria do campo escalar real descrita pela lagrangiana (2.18),

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (4.1)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o símbolo de Levi-Civita,  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$  e  $\epsilon^{00} = -\epsilon^{11} = 1$ . Note que a corrente  $J_T^\mu$  obedece à equação de continuidade,

$$\partial_\mu J_T^\mu = 0, \quad (4.2)$$

pois,

$$\partial_\mu J_T^\mu = \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0$$

tendo em vista que  $\epsilon^{\mu\nu}$  é anti-simétrico e  $\partial_\mu \partial_\nu$  é simétrico (INÁCIO, 2003).

A identidade (4.2) é válida independentemente de qualquer lagrangiana que possamos ter escolhido, isto é, de qualquer dinâmica. Este tipo de conservação precede a dinâmica, se tratando de algo ainda mais fundamental (ALDROVANDI; PEREIRA, 2008, p. 98).

A carga  $Q_T$  correspondente à corrente  $J^\mu$  é dada por,

$$Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$Q_T = \phi(+\infty) - \phi(-\infty). \quad (4.3)$$

Tomando a derivada no tempo de  $Q_T$ , temos

$$\frac{dQ_T}{dt} = \dot{\phi}|_{+\infty} - \dot{\phi}|_{-\infty} = 0. \quad (4.4)$$

Ou seja, a carga  $Q_T$  é conservada. Note ainda pela (4.3), que  $Q_T$  só depende do comportamento assintótico do campo  $\phi$ , por isso ela é chamada de carga topológica.

## 4.2 *KINKS E DOMAIN WALLS*

Estudaremos agora a teoria do campo escalar real em  $(1 + 1)D$  com o potencial dado pela equação (3.2), com  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 < 0$ . A equação de movimento, para configurações estáticas, é obtida substituindo  $V(\phi)$  na equação (2.20),

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\lambda^2\phi(\phi^2 - a^2). \quad (4.5)$$

Usando o método de Bogomol'nyi, podemos achar as soluções dessa equação de 2ª ordem por meio das seguintes equações de 1ª ordem,

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \lambda(\phi^2 - a^2) = 0, \quad (4.6)$$

as quais são facilmente solúveis, obtendo-se

$$\phi_{\pm}(x) = \pm a \tanh(\lambda ax). \quad (4.7)$$

A solução positiva é chamada *kink* – do inglês dobra – e a negativa é chamada *antikink*. Essa denominação se deve à forma do gráfico desta solução, conforme mostrado na figura 4.

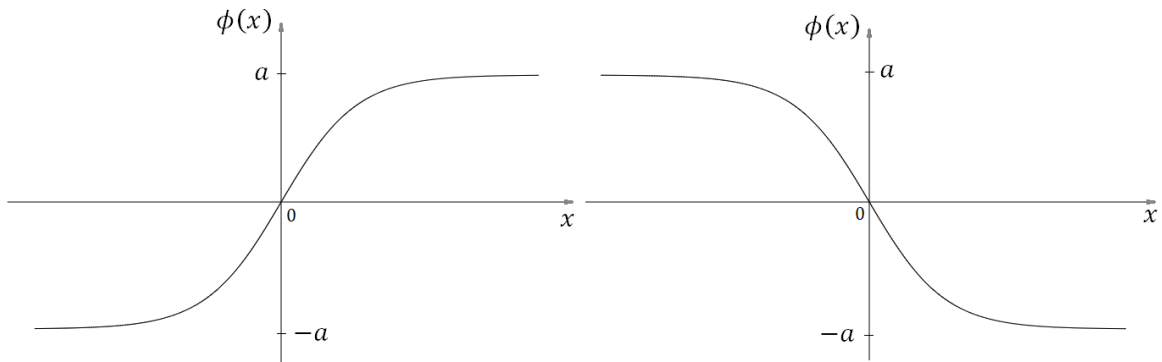


Figura 4: Soluções tipo defeito da teoria do campo escalar real em  $(1 + 1)D$ . O gráfico da esquerda representa um *kink*, e o da direita um *antikink*.

Note que, assintoticamente, os campos tendem para os mínimos do potencial  $\pm a$ . Por isso diz-se que o *kink* é um defeito topológico que conecta os dois estados de vácuo da teoria.

O defeito só assume valores apreciavelmente distintos dos valores assintóticos em uma região de certo comprimento característico  $l$ , chamado de largura do defeito, a qual é inversamente proporcional a  $\lambda a$ ,

$$l \sim \frac{1}{\lambda a}. \quad (4.8)$$

#### 4.2.1 ENERGIA DO *KINK*

A densidade de energia é calculada usando a equação (2.14), com  $\phi$  dado em (4.7) e o potencial  $V(\phi)$  dado na (3.2),

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^4(\lambda a x). \quad (4.9)$$

A figura 5 mostra a densidade de energia. Ela se concentra em uma pequena região do espaço, decaindo rapidamente.

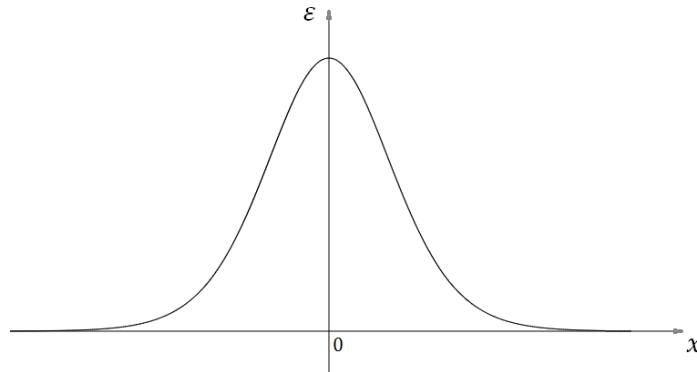


Figura 5: Densidade de energia do *kink* da teoria  $\phi^4$ .

A energia do *kink* é calculada integrando a densidade em todo o espaço,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx$$

$$E = \frac{4}{3} \lambda a^3. \quad (4.10)$$



Vemos, portanto, que a energia é finita e assume o mesmo valor tanto para o *kink*, quanto para o *antikink*. Podemos ainda escrevê-la como,

$$E = \frac{4}{3}(\lambda a)a^2.$$

E como  $\lambda a$  é inversamente proporcional a  $l$ , temos

$$E \sim \frac{a^2}{l}. \quad (4.11)$$

Concluimos que a largura do defeito está diretamente relacionada à sua energia. Um *kink* “largo” possui baixa energia, enquanto que um *kink* “estrito” possui alta energia.

Quando imergimos o *kink* no espaço de  $(3 + 1)D$ , aparece o defeito chamado *domain wall* (parede de domínio). Nesse caso, a energia do defeito não é mais finita, mas apenas a energia por unidade de área permanece finita. Esta energia por unidade de área é o que se chama de tensão superficial da parede, a qual é exatamente a energia do *kink* dada na (4.10).

#### 4.2.2 DINÂMICA DO *KINK*

A solução encontrada em (4.7) é válida apenas para configurações estáticas. Podemos obter soluções dinâmicas fazendo uma mudança de referencial, dado que a teoria é relativisticamente invariante. Nesse novo referencial inercial, veremos o *kink* transladar com uma velocidade não nula, e como referenciais inerciais estão conectados por transformações de Lorentz (nesse contexto chamadas de *Boosts*), do tipo

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases} \quad (4.12)$$

onde  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  é o fator de Lorentz, a solução para um *kink* (e *antikink*) propagando-se com uma velocidade  $v$  é

$$\phi'_{\pm}(x, t) = \pm a \tanh[\lambda a \gamma(x - vt)]. \quad (4.13)$$

Esta é uma das soluções da equação de movimento da teoria dependente do tempo,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

O *kink* dinâmico dado em (4.13) se propaga como um pacote de ondas, com energia localizada no espaço. Ele é uma onda solitária, ou seja, uma solução viajante que se propaga com velocidade constante sem mudar a sua forma (LEMOS, 2007, p.340). Calculando a densidade de energia e energia total do *kink* viajante, temos

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 a^4}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech}^4[\lambda a \gamma(x - vt)]. \quad (4.14)$$

Integrando em todo o espaço,

$$E' = \frac{4}{3} \frac{\lambda a^3}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$E' = \frac{E}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.15)$$

Esta relação entre a energia do *kink* estático e a energia do *kink* vista no novo referencial mostra que esta onda solitária se comporta como uma partícula relativística (LEMOS, 2007, p.341).

Em teorias com mais de um campo escalar, podem aparecer várias soluções tipo *kink*, e eles podem interagir por meio de colisões. O *kink* descrito em (4.13) não preserva a sua forma depois de uma colisão e, em particular, no caso do choque entre um *kink* e um *antikink*, há a aniquilação mútua de ambos. Ondas solitárias que sempre se recompõem após colidirem entre si são conhecidas como sólitons, os quais surgem como soluções de vários tipos de equações não lineares. Exemplos de equações que admitem soluções solitônicas são a equação de sine-Gordon, equação KdV e equação mKdV (SILVA, 2008).

### 4.3 VÓRTICES E CORDAS

Os vórtices são caracterizados por uma densidade de energia localizada, por uma correspondente massa finita e por uma carga topológica. As propriedades dos vórtices estáticos são determinadas a partir de equações diferenciais ordinárias acopladas que não permitem soluções analíticas exatas, exceto assintoticamente (SILVA, 1996).

Estudaremos os vórtices a partir de uma teoria de campos onde a topologia, à semelhança do que foi feito para os *kinks*, também é introduzida via a presença de uma corrente do tipo,

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda. \quad (4.12)$$

onde  $A_\lambda$  é o campo de gauge. Para elucidar a natureza dos vórtices, considere a seguinte lagrangiana para o modelo de Higgs abeliano,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \varphi} D^\mu \varphi - \frac{1}{4} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (4.13)$$

Esta teoria apresenta invariância de gauge local de um campo escalar complexo  $\varphi$  interagindo com o campo de gauge  $A_\mu$ . As equações de movimento para esta teoria são: para o campo de gauge,

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu = -ie(\bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \bar{\varphi}) + e^2 A_\mu |\varphi|^2, \quad (4.14)$$

e para o campo  $\varphi$ ,

$$D_\mu D^\mu \varphi = -\lambda^2 \varphi (|\varphi|^2 - a^2). \quad (4.15)$$

Para vórtices o fluxo do campo magnético  $B = F_{12}$  pode ser escrito como,

$$\Phi = \int B da = \oint_c A_i(x) dx^i. \quad (4.16)$$

Escrevendo o campo de Higgs na forma polar  $\varphi = |\varphi|e^{i\chi}$  e substituindo na equação (4.14) podemos escrever  $A_\mu$  como,

$$A_\mu = \frac{1}{e^2} \frac{J_\mu}{|\varphi|^2} - \frac{1}{e} \partial_\mu \chi. \quad (4.17)$$

Fazendo  $J_\mu$  ao longo do contorno  $C$ , e substituindo a equação (4.17) na equação do fluxo escrita já em termos das componentes, produz

$$\Phi = \int dx dy F_{12} = \oint_C dx^i A_i = -\frac{1}{e} \oint_C dx^i \partial_i \chi. \quad (4.18)$$

Requerendo que  $\varphi$  tenha um único valor sobre a fase, implica que  $\chi$  varie por  $2\pi n$  ( $n = \text{inteiro}$ ) para cada volta completa em torno da superfície fechada. Então podemos escrever,

$$\Phi = \frac{1}{e} [\chi(2\pi) - \chi(0)] = \frac{2\pi}{e} n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (4.19)$$

O que mostra que o fluxo do campo magnético é quantizado. Este fluxo magnético quantizado é a carga topológica total do vórtice. Para ilustrar a natureza topológica do fluxo, note que o vácuo desta teoria é determinado a partir da condição,

$$|\varphi| = a$$

Então  $\varphi$  é somente especificado pela fase  $\chi$ . Por outro lado, existe um círculo de vácuo degenerado no plano complexo  $\varphi$  parametrizado por  $\chi$ . Vamos supor que  $C$  seja um círculo no plano  $(x, y)$ , visto que a fase  $\chi(x, y) = \chi(\theta)$  se move em torno deste círculo, então ela pode transformar para um fator  $2\pi n$  ao longo do círculo  $C$ . Portanto,  $\chi(\theta)$  proporciona um mapeamento de um círculo real no plano  $(x, y)$ , para um círculo no espaço interno do campo complexo  $\varphi$ .

O número inteiro  $n$  é chamado de número de volta. Ele indica o número de voltas completas no plano  $\varphi$ , que corresponde a uma única volta de  $2\pi$ , no plano  $(x, y)$ . Então o fluxo do campo magnético de vórtices é proporcional ao número de voltas que a fase do campo complexo realiza.

Por outro lado, as cordas surgem quando fazemos uma imersão deste espaço dos vórtices tridimensional no espaço quadridimensional. Como paredes de domínio, cordas não apresentam energia finita, mas mesmo assim podemos ter energia localizada por unidade de comprimento (SILVA, 1996).

## 5 MÉTODO DE DEFORMAÇÃO

Nesta seção apresentamos o método de deformação, proposto originalmente por Bazeia e Losano (BAZEIA; LOSANO, et al. 2002). Este método gera novos defeitos a partir de modelos conhecidos e solúveis, chamados de defeitos deformados. As soluções para as teorias deformadas são expressas analiticamente em termos das soluções da teoria inicial. O método é geral e pode ser aplicado também a teorias que suportam defeitos não-topológicos (ALMEIDA, 2004).

Recordemos da seção 2.4 que a equação de movimento da teoria do campo escalar real em  $(1 + 1)D$  para configurações estáticas é dada pela (2.24),

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V(\phi)}.$$

Suponhamos que tenhamos resolvido esta equação para um potencial  $V(\phi)$  em particular, de modo que conheçamos a solução para  $\phi(x)$ . Queremos investigar a solução  $\tilde{\phi}(x)$  para outra teoria, cujo potencial é  $V(\tilde{\phi})$ . Do mesmo modo que  $\phi$  satisfaz a equação (2.24) correspondente a  $V(\phi)$ ,  $\tilde{\phi}$  vai satisfazer a equação correspondente a  $V(\tilde{\phi})$ ,

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = \pm\sqrt{2V(\tilde{\phi})}. \quad (5.1)$$

Definimos a função deformadora  $g$ , que associa a solução desconhecida  $\tilde{\phi}$  à solução conhecida  $\phi$ , do seguinte modo

$$\phi(x) = g(\tilde{\phi}). \quad (5.2)$$

Derivando ambos os lados dessa equação em relação a  $x$ , e usando as equações (2.24) e (5.1), temos

$$\pm\sqrt{2V(\phi)} = \frac{dg}{d\tilde{\phi}}\left(\pm\sqrt{2V(\tilde{\phi})}\right)$$

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{V(\phi)}{\left(\frac{dg}{d\tilde{\phi}}\right)^2}. \quad (5.3)$$

E, como  $\phi(x) = g(\tilde{\phi})$ ,

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{V(g(\tilde{\phi}))}{\left[\frac{dg(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}}\right]^2}. \quad (5.4)$$

Vemos então que se um potencial qualquer  $V(\tilde{\phi})$  puder ser escrito em termos do potencial conhecido  $V(\phi)$  e de uma função deformadora  $g$  na forma da equação acima, temos que a solução  $\tilde{\phi}(x)$  será dada automaticamente pela inversão da equação (5.2), ou seja,

$$\tilde{\phi}(x) = g^{-1}(\phi(x)). \quad (5.5)$$

O modelo que tem o potencial dado por (5.4) é chamado de modelo deformado pela função  $g(\tilde{\phi})$ .

## 5.1 MODELO $\phi^4$ DEFORMADO PELA FUNÇÃO SENH( $x$ )

A fim de tornar mais clara a idéia do método de deformação, vamos aplicá-lo ao modelo  $\phi^4$ , usando como função deformadora

$$g(\tilde{\phi}) = \sinh \tilde{\phi}. \quad (5.6)$$

Por simplicidade, fazemos  $\lambda = a = 1$  na expressão do potencial (3.2),

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (5.7)$$

O potencial da teoria deformada será, pela (5.4),

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \sinh^2 \tilde{\phi})^2}{\left[ \frac{d(\sinh \tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} \right]^2}$$

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \tilde{\phi} [1 - \sinh^2 \tilde{\phi}]^2, \quad (5.8)$$

de modo que a lagrangiana desta teoria toma a forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \tilde{\phi} [1 - \sinh^2 \tilde{\phi}]^2, \quad (5.9)$$

a qual conduz à equação de movimento,

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = \pm \operatorname{sech} \tilde{\phi} [1 - \sinh^2 \tilde{\phi}], \quad (5.10)$$

que notadamente não é uma equação de fácil solução por métodos usuais. Entretanto, obtém-se a solução para essa teoria facilmente, pois, por construção,  $\tilde{\phi}$  satisfaz (5.5). Portanto, temos

$$\tilde{\phi}(x) = g^{-1}(\phi(x))$$

$$\tilde{\phi}(x) = \operatorname{arcsenh}(\phi(x)), \quad (5.11)$$



com  $\phi(x)$  dado pela (5.2). Então,

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = \pm \operatorname{arcsenh}(\tanh x). \quad (5.12)$$

que é uma solução topológica do modelo deformado.

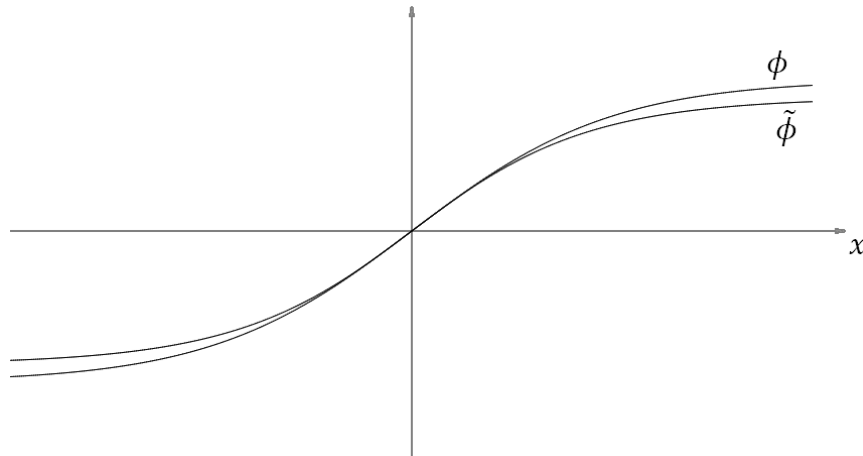


Figura 6: Defeito original  $\phi(x)$  e defeito deformado  $\tilde{\phi}(x)$ .

O defeito deformado apresenta uma leve variação em relação ao defeito da teoria original. Na figura 5 é mostrada a solução da teoria  $\phi^4$  original, e a solução da teoria deformada.

Em resumo, o que fizemos foi construir um modelo deformado, descrito pela lagrangiana (5.9), e obter sua solução (aparentemente muito complicada) de forma trivial, por uma simples inversão da função deformadora, partindo de um modelo de solução conhecida. Ele permite, portanto, a obtenção de uma infinidade de novas teorias, as quais terão suas soluções determinadas automaticamente. Esta é a essência do método de deformação.

## 6 APLICAÇÕES EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

As idéias principais das teorias clássicas de campos encontram muitas aplicações em física da matéria condensada. Em uma vasta gama de sistemas, pode-se utilizar a chamada teoria de campo médio, a qual consiste em uma aproximação para as propriedades termodinâmicas de um sistema baseado na hipótese simplificadora de que parâmetro de ordem é espacialmente constante. Esta aproximação é uma descrição útil quando as flutuações espaciais não são importantes e se torna uma teoria exata quando o alcance das interações se torna infinito. Ela faz previsões qualitativa e quantitativamente corretas sobre alguns aspectos das transições de fase e tem ainda a vantagem de ser relativamente simples matematicamente. Por isso ela é quase invariavelmente a primeira abordagem para as propriedades de novos sistemas experimentais (CHAIKIN,1995, p. 144).

O mecanismo de quebra espontânea de simetria desempenha um papel importante na física da matéria condensada, sendo essencial para a descrição de transições de fase. Além disso, defeitos topológicos aparecem naturalmente em vários tipos de sistemas, dos quais abordaremos os *kinks* no modelo de Ising e os vórtices em sistemas superfluidos.

### 6.1 QES E TRANSIÇÕES DE FASE

Ao longo do século passado, descobriu-se uma importante conexão entre os diferentes estados físicos das substâncias e as simetrias que estas apresentam. O mecanismo da quebra espontânea de simetria passou então a desempenhar um papel essencial na explicação de fenômenos de transição de fase. Descobriu-se que, em geral, as diferentes fases podem ser caracterizadas pelas suas simetrias, e uma transição ocorre quando um sistema inicialmente desordenado (possuindo um grau de simetria maior) passa para um estado mais ordenado (de simetria menor), quebrando assim a simetria

original. Naturalmente, a transição pode ocorrer também no sentido oposto, da fase mais ordenada para a menos ordenada.

Podemos tomar como exemplo um fluido como a água. Em seu estado líquido, ela é invariante por rotações e translações. Isto significa dizer que se nos detivermos por um momento a examinar uma pequena porção de uma amostra macroscópica de água, e analisarmos sua estrutura molecular microscópica, veremos amontoados de moléculas dispostas de forma essencialmente aleatória, de modo que não se observa nenhum tipo de organização molecular de grande escala. Se observarmos em seguida uma outra pequena porção localizada em uma posição diferente no fluido (o que equivale a fazermos uma translação) veremos que esta se parecerá inteiramente com a primeira; da mesma forma, se mudarmos o nosso ângulo de visão (ou equivalentemente girarmos a amostra), o sistema parecerá o mesmo sob todos os aspectos. Constatamos, portanto, que ele é invariante quando o submetemos a essas operações e, nesse sentido, dizemos que ele apresenta simetria contínua de translação e rotação.

Se observarmos agora o gelo, veremos que ele não se apresenta homogêneo e isotrópico como um líquido. Moléculas em um sólido estão situadas em um conjunto de pontos periodicamente arranjados, denominado rede cristalina. Em vez de ser invariante por rotações e translações arbitrárias, o gelo é invariante apenas por operações como uma translação de uma distância igual ao espaçamento entre dois pontos da rede. Ele possui, portanto, um grau de simetria menor em relação ao estado líquido. Dizemos então que a transição do estado líquido para o sólido quebra a simetria original do estado líquido. Diz-se ainda que o gelo é uma fase de simetria quebrada.

No exemplo que acabamos de dar, a simetria quebrada era contínua. Há, entretanto, transições de fase associadas a quebras de simetrias discretas. Um exemplo, o qual será discutido adiante em mais detalhes, é a transição de um sólido no estado paramagnético para o estado ferromagnético.

## 6.2 DESCRIÇÃO TERMODINÂMICA DE SISTEMAS ORDENADOS

O estado termodinâmico de sistemas como gases e líquidos isotrópicos pode ser descrito por meio de variáveis macroscópicas como pressão, temperatura, volume e número de partículas. Entretanto, sistemas condensados exibem vários tipos de ordenamento rotacional e posicional, os quais modificam a energia do sistema e, no

entanto, não podem ser descritos usando somente aquelas variáveis. Por isso, uma descrição completa de fases ordenadas requer a introdução de novas variáveis que quantifiquem o grau de ordem e a modificação termodinâmica nas energias e entropias (CHAIKIN, 1995, p.127).

Para sistemas que se encontram em contato com um reservatório térmico a uma temperatura  $T$ , o estado de equilíbrio é aquele para o qual a energia livre de Helmholtz  $F$  é mínima, sendo

$$F = E - TS, \quad (6.1)$$

onde  $E$  é a energia interna e  $S$  é a entropia do sistema (CALLEN, 1985, p.155).

Imagine um sólido cristalino, onde os átomos ou moléculas possuem elétrons em camadas não preenchidas e spins desemparelhados. No caso de metais de transição, por exemplo, os elétrons são fortemente ligados ao núcleo e podem ser considerados como estando localizados juntos aos átomos da rede com pouca sobreposição com os elétrons em átomos vizinhos, como mostra a figura 7.

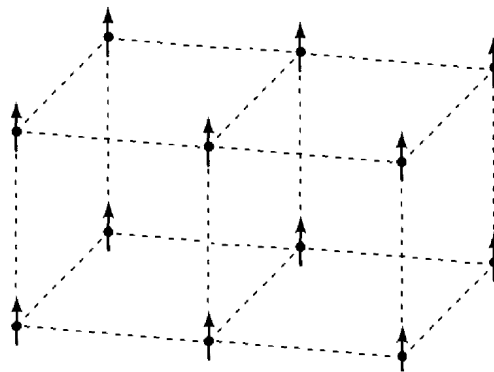


Figura 7: Modelo de elétrons localizados em uma rede cristalina.

Em um sistema magnético como este – conhecido como modelo de Heisenberg – os graus de liberdade estão associados ao spin. Em temperaturas altas,  $F$  é minimizado pela maximização da entropia. O estado de desordem máxima tem a maior entropia, implicando que o estado de equilíbrio a altas temperaturas é o estado paramagnético, no qual não há alinhamento líquido de spins. A aplicação de um campo magnético externo  $H$  leva a um alinhamento parcial dos spins e ao aparecimento de uma magnetização  $m$  (momento magnético por unidade de volume). A magnetização está relacionada ao campo magnético por uma equação de estado, sendo proporcional e paralela a  $H$

(CALLEN, 1985, p.82). Quando o campo é retirado, os spins voltam a ficar desorientados.

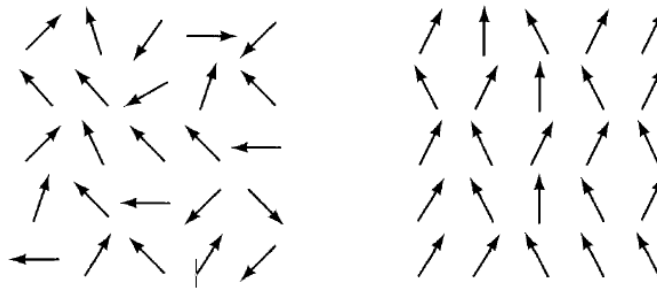


Figura 8: Sólido no estado paramagnético e no estado ferromagnético. No estado paramagnético os spins apontam em direções aleatórias. No estado ferromagnético, spins alinham-se gradativamente na direção de um eixo, gerando uma magnetização espontânea.

Em baixas temperaturas, entretanto, a energia interna  $E$  domina sobre o termo  $TS$  na expressão da energia livre, e o estado de equilíbrio é aquele que minimiza  $E$ . Os estados de mais baixa energia interna são aqueles nos quais a maioria dos spins está alinhada ao longo de um eixo comum. Por isso, esses estados levam a um momento magnético médio não nulo, e a fase de equilíbrio a baixa temperatura é a fase ferromagnética, que apresenta uma magnetização espontânea. A transição de fase do estado paramagnético dominado pela entropia, para o estado ferromagnético dominado pela energia interna, ocorre em uma temperatura característica bem definida, chamada temperatura crítica  $T_c$ . O aparecimento de uma magnetização não-nula abaixo de  $T_c$  pode ser visto como sendo o aparecimento de uma ordenação no sistema, devido ao fato de os spins irem alinhando-se gradativamente. Por esse motivo, nesse tipo de sistema, a magnetização é chamada de parâmetro de ordem, e simbolizada genericamente por  $\phi$ .

### 6.3 TEORIA DE LANDAU

A relação entre quebra espontânea de simetria e transições de fase, juntamente com a introdução de parâmetros de ordem se devem a Lev Landau (LANDAU, 1959). Ele propôs uma teoria fenomenológica para a determinação das características termodinâmicas, baseado em propriedades gerais das transições de fase.

Em geral, a altas temperaturas não há nenhum ordenamento no sistema e o parâmetro de ordem  $\phi$  é nulo. A uma temperatura crítica  $T_c$ , a ordem começa a

aparecer, de modo que a abaixo dela  $\phi$  é diferente de zero. Se  $\phi$  cresce continuamente a partir de zero, a transição é de segunda ordem. Se  $\phi$  varia de forma descontínua desde zero (acima de  $T_c$ ) a um valor não nulo (abaixo de  $T_c$ ), a transição é de primeira ordem. Do mesmo modo, a entropia é contínua em transições de segunda ordem e descontínua em transições de primeira ordem (CHAIKIN, 1995, p.144).

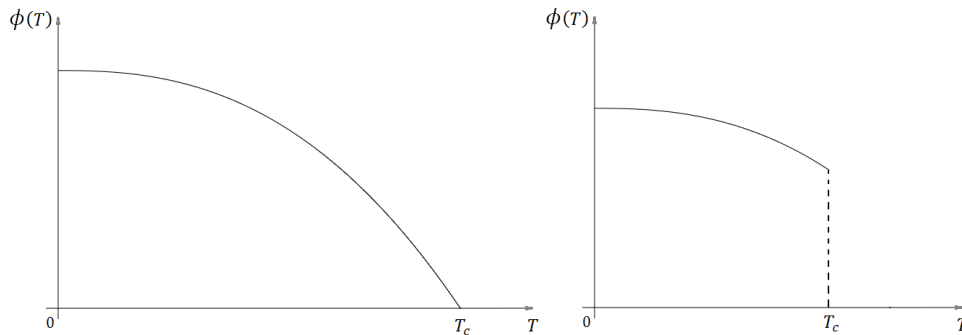


Figura 9: Parâmetro de ordem em função da temperatura. Em transições de segunda ordem,  $\phi$  varia continuamente. Já em transições de primeira ordem,  $\phi$  apresenta uma descontinuidade em  $T = T_c$ .

A teoria de Landau baseia-se em uma expansão em série de potências da energia livre em termos do parâmetro de ordem associado à transição de interesse (SALINAS, 1997, p.309). Ela assume que o parâmetro de ordem é "pequeno" nas proximidades do ponto crítico, de modo que apenas os primeiros termos da expansão são mantidos. A forma dessa energia livre é determinada inteiramente pela natureza da quebra de simetria da fase ordenada, de modo que apenas combinações do parâmetro de ordem que sejam invariantes pelas operações de simetria do sistema são permitidas. Esta teoria é mais útil quando aplicada na vizinhança de transições de fase de segunda ordem, onde  $\phi$  é garantidamente pequeno, dada a sua continuidade. Ela, no entanto, pode ser usada com certo cuidado para tratar transições de primeira ordem, ou para determinar as propriedades de fases ordenadas, em vez das propriedades da transição em si (CHAIKIN, 1995, p.145).

É possível, em praticamente todos os casos, definir um parâmetro de ordem que seja espacialmente uniforme na fase ordenada. Isto sugere que  $F$  seja expressa em termos de uma densidade de energia livre local  $F$ , que é uma função do campo  $\phi$  no ponto  $\mathbf{x}$  e de um termo que reflete o custo energético devido a desvios da uniformidade espacial. Assim,  $F$  assume a seguinte forma

$$F = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} c [\nabla\phi(\mathbf{x})]^2 + f(T, \phi(\mathbf{x})) \right], \quad (6.2)$$

onde  $c$  é um coeficiente fenomenológico, cujo valor é ajustado de acordo com as observações experimentais.  $f$  é então expandida em potências de  $\phi$ ,

$$f(T, \phi) = f_1\phi + f_2\phi^2 + f_3\phi^3 + \dots \quad (6.3)$$

Vamos aplicar a teoria de Landau ao caso do sólido magnético discutido na seção anterior, com a restrição de que a magnetização possa apontar apenas em uma direção, ou seja, podemos ter apenas spins *up* ou *down*. Este é o chamado modelo de Ising (SALINAS, 1997, p.316). Neste caso, o sistema apresenta simetria discreta de reflexão  $\phi \rightarrow -\phi$ , a qual reflete o fato de que se invertermos as orientações de todos os spins do sólido, inverteremos o sinal da magnetização, porém a energia do sistema permanecerá a mesma. Logo, a inversão de todos os spins (equivalentemente, a troca  $\phi \rightarrow -\phi$ ) deixa o sistema inalterado.

Por causa dessa simetria,  $\phi$  deve ser uma função par e então somente termos de expoentes pares podem entrar na expansão da densidade de energia livre. Além disso, se  $f$  é truncada em uma determinada potência de  $\phi$ , o termo de mais alta ordem deve ser par com seu coeficiente positivo para assegurar que o estado de equilíbrio tenha um valor limitado de  $\phi$ . Todos os coeficientes da expansão podem, em princípio, depender da temperatura.

Levando em conta estas condições e truncando a expansão até o termo de quarta ordem, temos

$$f(T, \phi) = f_2\phi^2 + f_4\phi^4. \quad (6.4)$$

O coeficiente  $f_4$ , como dito acima, deve ser sempre positivo, e por isso assumiremos que ele é independente da temperatura,  $f_4 = b$ . Em altas temperaturas,  $\phi$  deve ser zero quando não houver campos magnéticos externos. Isto significa que  $f$  deve ter um mínimo em  $\phi = 0$  para  $T$  grande. Em baixas temperaturas, esperamos que o sistema esteja na fase ferromagnética e que  $f$  tenha pelo menos um mínimo para  $\phi \neq 0$ . Para isto, basta que  $f_2$  seja positivo em altas temperaturas (pois assim  $f$  terá um mínimo em

$\phi = 0$ ) e troque de sinal com diminuição da temperatura, anulando-se em  $T = T_c$ . A forma mais simples de  $f_2$  que atende a esses requisitos é

$$f_2 = \alpha(T - T_c). \quad (6.5)$$

Temos, portanto, que a forma da densidade de energia livre é

$$f(T, \phi) = \alpha(T - T_c)\phi^2 + \beta\phi^4, \quad (6.6)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes fenomenológicos. Para  $T > T_c$ ,  $f(T, \phi)$  apresenta apenas um mínimo, e este respeita a simetria de reflexão. Já para  $T < T_c$ , aparecem dois mínimos, de modo que o sistema pode ser encontrado em qualquer um deles quando atinge o equilíbrio. Neste caso, o estado de mínimo não é mais simétrico, e quando o sistema “escolhe” um desses dois estados, a simetria é espontaneamente quebrada.

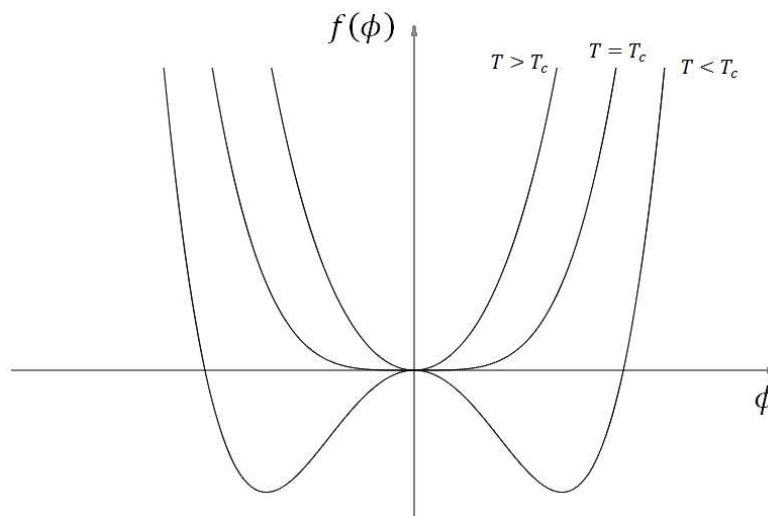


Figura 10: Densidade de energia livre  $f(\phi, T)$ . Acima de  $T_c$ ,  $f$  apresenta um único mínimo em  $\phi = 0$ . Abaixo de  $T_c$ ,  $f$  apresenta mínimos para  $\phi \neq 0$ .

De posse da energia livre, podemos calcular as grandezas termodinâmicas de interesse, tais como susceptibilidades, expoentes críticos, energia interna, entropia e suas derivadas (CALLEN, 1985, p.258).



### 6.3.1 QUEBRA EXPLÍCITA DE SIMETRIA

Na presença de um campo magnético externo  $H$ , a magnetização  $\phi$  e o campo estão relacionados pela equação de estado (CHAIKIN, 1995, p.132),

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = H. \quad (6.7)$$

Quando  $H$  é zero – caso tratado na seção anterior – vemos que o estado de equilíbrio é tal que minimiza a densidade de energia livre. No caso de  $H$  não ser zero, a função que é minimizada é  $f' = f - H\phi$ , pois

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - H = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \phi}(H\phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(f - H\phi) = 0. \quad (6.8)$$

Neste caso, a simetria do sistema é quebrada, pois o campo irá determinar uma direção preferencial no espaço para o alinhamento dos spins, e o sistema na fase paramagnética, não apresentará mais a simetria  $\phi \rightarrow -\phi$ . Note que esta não é uma quebra espontânea de simetria, pois ela é forçada pela presença do campo magnético externo. Dizemos que ela é uma quebra explícita de simetria.

Matematicamente, essa quebra explícita se deve ao aparecimento do termo linear na expressão da densidade de energia livre,

$$f'(T, \phi) = -H\phi + \alpha(T - T_c)\phi^2 + \beta\phi^4. \quad (6.9)$$

A figura 11 mostra o comportamento da densidade de energia livre em função da magnetização para diferentes valores de temperatura.

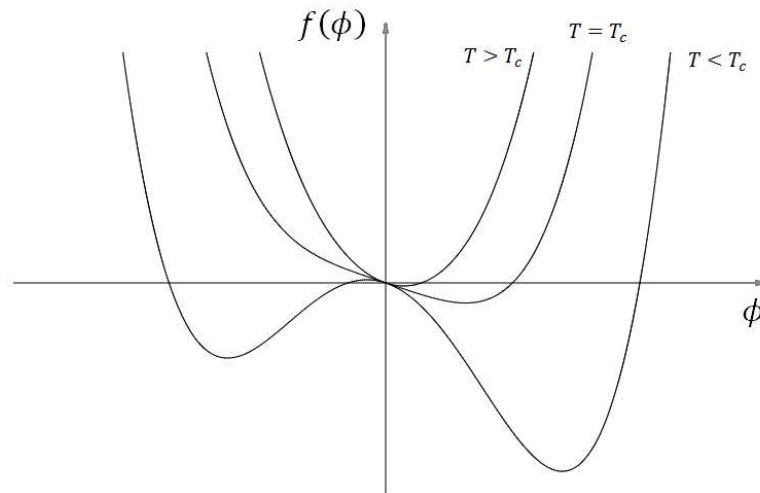


Figura 11: Densidade de energia livre com a presença de um campo magnético  $H$ . A presença de  $H$  quebra explicitamente a simetria do sistema.

Se este mesmo sistema sofresse uma quebra espontânea de simetria, abaixo da temperatura crítica sempre apareceriam dois mínimos degenerados. Já no caso de uma quebra explícita, ao invés de aparecerem dois mínimos de valores iguais, aparecem um mínimo local (chamado de falso vácuo no contexto da teoria de campos) e um mínimo global. Se o sistema se encontrar no estado do mínimo local, dizemos que ele se encontra em um estado de equilíbrio metaestável. Transcorrido um tempo suficiente, o sistema tenderá a ocupar o mínimo global, que é um estado de equilíbrio estável.

## 6.4 KINKS NO MODELO DE ISING

Em física da matéria condensada um defeito topológico é caracterizado em geral por uma região chamada núcleo, onde não há ordenamento, e uma região de campo distante, onde há uma variável do sistema que varia lentamente no espaço. Análogo ao caso de uma carga elétrica pontual, o defeito tem a propriedade de que sua presença pode ser determinada por medidas de um campo apropriado em qualquer superfície delimitando seu núcleo. Defeitos topológicos podem ter diferentes nomes dependendo da simetria que é quebrada e do particular sistema em questão. No hélio superfluido e em modelos- $xy$ , eles são chamados vórtices; em cristais periódicos, deslocamentos; e em cristais líquidos nemáticos, disclinações; todos estes relacionados a quebras de simetrias contínuas (CHAIKIN, 1995, p. 495). Em sistemas que apresentam quebra de simetria discreta, os defeitos separam regiões de energia livre iguais, mas de valores

diferentes do parâmetro de ordem (CHAIKIN, 1995, p. 590). Nesta seção tratamos o defeito tipo *kink* no modelo de Ising, o qual surge da quebra de simetria do grupo  $Z_2$ .

Em uma cadeia de Ising unidimensional existem dois estados fundamentais equivalentes, um com todos os spins *up* e outro com todos os spins *down*, os quais apresentam um comportamento topológico trivial, como mostrado na figura 12. Se uma condição de contorno é imposta especificando que os spins em uma extremidade estão para cima, e na outra extremidade estão para baixo, implica que em algum lugar na cadeia tem de haver uma inversão de spins. Esta inversão é um defeito topológico do tipo *kink*, que não pode ser destruído desde que as condições de contorno não se alterem. Esta estabilidade está diretamente relacionada à conservação de sua carga topológica (vide seção 4.1).

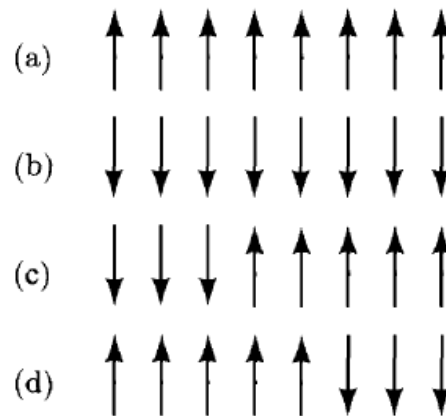


Figura 12: Estados topologicamente distintos em uma cadeia de Ising unidimensional. (a) Estado fundamental de spins *up*. (b) Estado fundamental de spins *down*. (c) *Kink*. (d) *Antikink*.

Podemos descrever esse sistema escrevendo a energia livre de Landau em termos do parâmetro de ordem  $\phi$  (magnetização). Temos,

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} c \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + f(\phi) \right]. \quad (6.10)$$

No equilíbrio  $F$  é mínimo e, portanto,  $\phi$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange (CHAIKIN, 1995, p.597),

$$-c \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{df}{d\phi} = 0. \quad (6.11)$$

No caso da teoria  $\phi^4$ ,  $f(\phi)$  é dada por,

$$f(\phi) = -\frac{r^2}{2}\phi^2 + u\phi^4, \quad (6.12)$$

com  $r$  e  $u$  constantes positivas. A equação de movimento fica,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{4u}{c}\phi\left(\phi^2 - \frac{r^2}{4u}\right). \quad (6.13)$$

Note que ela é a idêntica à equação (4.5), feitas as seguintes correspondências,

$$\lambda^2 \leftrightarrow \frac{2u}{c} \quad (6.14)$$

$$a^2 \leftrightarrow \frac{r^2}{4u}. \quad (6.15)$$

Logo, todos os resultados das seções 4.1 e 4.2 se aplicam diretamente a este caso. Em especial, lembremos da seção 4.2.1 que a densidade de energia do *kink* se concentrará em torno da origem, região central do defeito. Interpretando este resultado no caso desse sistema específico, podemos concluir que a inversão dos spins dá lugar ao aparecimento de gradientes de energia, o que gera uma tensão (chamada de tensão de parede). Apesar dessa tensão, a configuração se mantém estável, devido à conservação da carga topológica.

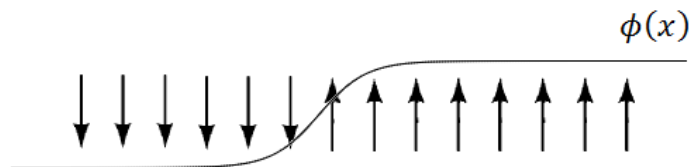


Figura 13: Magnetização  $\phi(x)$  ao longo da cadeia de spins.

Na figura 13 é mostrada a magnetização ao longo da cadeia de spins. Note que assintoticamente, os spins se encontram nos dois estados de energia mínima. Em uma determinada região ocorre a inversão dos spins (núcleo do defeito), caracterizando assim o *kink*, o qual conecta os dois estados de mínimo do sistema.

## 6.5 VÓRTICES EM SUPERFLUIDOS

A superfluidez é um fenômeno que ocorre em certos sistemas fluidos que, quando resfriados abaixo da temperatura crítica, passam a se comportar como se não tivessem viscosidade, podendo fluir sem dissipação. Este fenômeno foi observado pela primeira vez no hélio líquido e posteriormente em vários outros sistemas. Ele está relacionado ao fenômeno de condensação de Bose-Einstein, embora a ocorrência de um não implique necessariamente a ocorrência do outro.

Em um gás ideal de bósons, uma fração finita das partículas ocupa o mesmo “macroestado” quântico abaixo de  $T_C$ , formando um condensado de Bose-Einstein, que pode ser descrito por uma função de onda  $\psi(\mathbf{x})$ . Quando as partículas interagem entre si, embora não se possa mais falar em um único “macroestado” quântico, ainda é possível definir uma função de onda do condensado  $\psi(\mathbf{x})$ , como sendo a amplitude de probabilidade para a remoção de uma partícula na posição  $\mathbf{x}$ , e seu complexo conjugado  $\bar{\psi}(\mathbf{x})$ , sendo a amplitude de probabilidade para a criação de uma partícula no condensado (HUANG, 2001,p.205).

O número total de partículas no condensado é,

$$\int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^2 = N_0. \quad (6.16)$$

$\psi(\mathbf{x})$  satisfaz uma equação de Schrödinger não-linear, e difere de uma função de onda comum em relação à normalização, a qual não pode ser alterada arbitrariamente. A função  $\psi(\mathbf{x})$  é o parâmetro de ordem de sistemas superfluidos.

A energia livre de Landau, em termos do parâmetro de ordem  $\psi(\mathbf{x})$ , pode ser escrita da seguinte forma<sup>3</sup>,

$$F = \int d^3x \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \right], \quad (6.17)$$

onde  $|\nabla\psi|^2 = \nabla\bar{\psi} \cdot \nabla\psi$ ,  $m$  representa a massa das partículas,  $a = \alpha(T - T_C)$  e  $b > 0$ .

---

<sup>3</sup> Nesta seção não estamos o sistema natural de unidades.

Na filosofia da teoria de Landau,  $F$  deve ser usada na vizinhança da temperatura crítica  $T_C$ , onde  $\psi \rightarrow 0$ . Por outro lado, pode-se mostrar a partir de um ponto de vista microscópico, que  $F$  é válida também em baixas temperaturas, próximas ao zero absoluto (HUANG, 1987). Por isso, podemos usar (6.17) na vizinhança de  $T = T_C$  ou  $T = 0$ .

A energia livre de Landau é invariante sob a transformação de gauge global  $\psi \rightarrow e^{i\chi}\psi$ , a qual implica a conservação do número de partículas. Abaixo da temperatura crítica esta simetria é quebrada, e o sistema passa a ter uma fase definida (HUANG, 2001,p.206). A minimização da energia livre de Landau (6.17) leva a uma equação de Schrödinger não-linear,

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + a + b|\psi|^2 \right] \psi = 0, \quad (6.18)$$

que é conhecida, neste contexto, como a equação de Gross-Pitaevsky. Ela pode ser generalizada para uma equação dependente do tempo, a qual conserva o número de partículas no condensado, implicando uma equação de continuidade,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (6.19)$$

onde  $n = |\psi|^2$  é a densidade da partículas, e  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente,

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar^2}{2mi} (\bar{\psi} \nabla \psi + \psi \nabla \bar{\psi}). \quad (6.20)$$

Escrevendo  $\psi$  na forma polar,  $\psi = \sqrt{n}e^{i\varphi}$  e substituindo na (6.20), temos

$$\mathbf{j} = \frac{n\hbar}{m} (\nabla\varphi). \quad (6.21)$$

Podemos então, por meio da densidade de corrente (6.21), identificar a velocidade das partículas no condensado, chamada de velocidade superfluida  $\mathbf{v}_S$ ,

$$\mathbf{v}_S = \frac{\hbar}{m} (\nabla\varphi), \quad (6.22)$$

a qual descreve o escoamento do condensado sem dissipação. A circulação do campo de velocidade superfluida ao redor de um caminho fechado  $C$  é,

$$\oint_C d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_S = \frac{\hbar}{m} \oint_C d\mathbf{s} \cdot \nabla\varphi = \frac{\hbar}{m} [\varphi(2\pi) - \varphi(0)]$$

Dada a continuidade da função de onda do condensado,  $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2\pi k$ , e temos então que a circulação é quantizada,

$$\oint_C d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_S = \frac{\hbar k}{m}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6.23)$$

Um vórtice, nesse caso, é um padrão de escoamento com uma circulação não nula, concentrada ao longo de uma linha direcionada, chamada de núcleo do vórtice. Esta circulação não nula é a carga topológica do vórtice (vide seção 4.3). Na figura 14 são mostrados dois tipos de núcleos, um linear e outro em anel. A circulação é zero em torno de qualquer circuito fechado que não envolve o núcleo, e diferente de zero caso contrário.

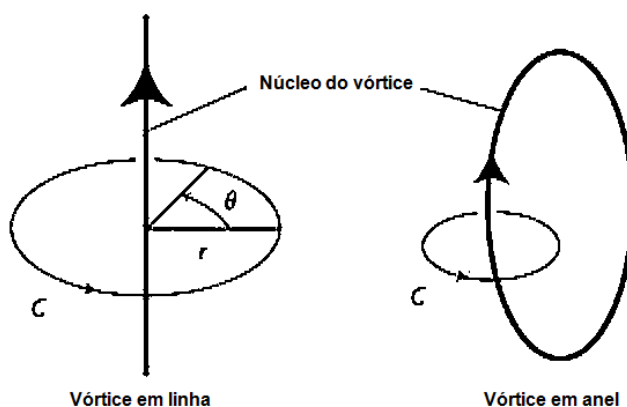


Figura 14: Vórtices linear e em anel.

Para o vórtice com núcleo linear, a simetria cilíndrica determina que o campo de velocidade  $\mathbf{v}_S$  dependa apenas da distância  $r$  ao núcleo. Usando (6.23), temos,

$$\int_0^{2\pi} d\theta r v_s(r) = \frac{\hbar k}{mr}$$

Assim,

$$v_s(r) = \frac{\hbar k}{mr}, \quad (6.24)$$

e, de acordo com (6.22), temos ainda

$$\varphi = k\theta, \quad (6.25)$$

onde  $\theta$  é o ângulo à volta do núcleo do vórtice e  $k$  é o chamado de número de volta. Obtemos que a velocidade superfluida é proporcional ao número de volta e, portanto, depende das propriedades topológicas do sistema.

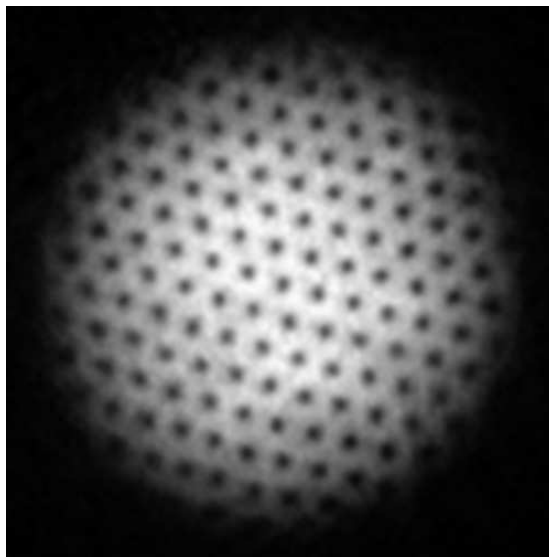


Figura 15: Vórtices em um sistema superfluido formado por átomos de sódio.

A figura 15 mostra uma realização experimental que confirma a presença de vórtices em um condensado de Bose-Einstein formado por átomos de sódio. As áreas brilhantes são átomos no estado condensado, e as áreas escuras são os núcleos dos vórtices.



## 6.6 SUPERCONDUTIVIDADE

A supercondutividade é um fenômeno que consiste na queda abrupta a zero da resistividade de um material, abaixo de uma temperatura característica. Tais materiais são então capazes de transportar correntes persistentes, as quais tendem a se manter circulando por tempos idealmente infinitos<sup>4</sup>. Estas correntes repelem o fluxo magnético, de modo que no interior do supercondutor, o campo magnético é zero e o material se comporta como um diamagneto perfeito (efeito Meissner).

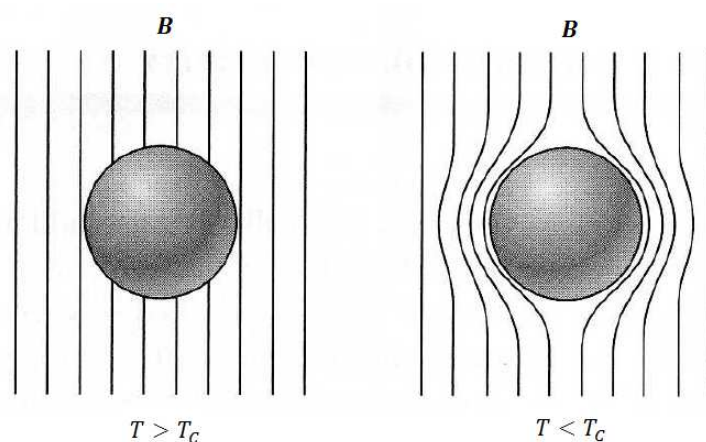


Figura 16: Efeito Meissner. Abaixo da temperatura crítica, as linhas do campo magnético são repelidas do interior do supercondutor.

A transição para o estado supercondutor é decorrente da condensação de elétrons para o estado fundamental. Elétrons individuais não poderiam formar um condensado por serem férmions – partículas de spin semi-inteiro que obedecem ao princípio da exclusão de Pauli. Entretanto, conforme mostrado na teoria BCS (iniciais de Bardeen, Cooper e Schrieffer, autores da teoria), os elétrons podem formar estados ligados em pares (chamados pares de Cooper) os quais se comportam como bósons de spin zero, possibilitando assim a condensação.

Desta forma, podemos usar o mesmo parâmetro de ordem da seção anterior para descrever este sistema, com  $\bar{\psi}\psi = n_s$  sendo a densidade local de elétrons supercondutores. Neste caso, a energia livre proposta por Ginzburg e Landau (GINZBURG; LANDAU, 1950), tem a seguinte forma

<sup>4</sup> Em experimentos realizados com supercorrentes em solenóides, conclui-se que o tempo de decaimento das supercorrentes não é menor que 100 mil anos!

$$F = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + |(\nabla - ie\mathbf{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \right], \quad (6.26)$$

onde  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor magnético,  $a$  e  $b$  são as constantes fenomenológicas, com  $a = \alpha(T - T_C)$  e  $b > 0$ . A minimização de  $F$  faz com que o parâmetro de ordem satisfaça uma equação de Schrödinger não linear, conhecida como equação de Ginzburg-Landau,

$$[(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 + a + b|\psi|^2]\psi = 0. \quad (6.27)$$

$F$  é invariante pela transformação de gauge local dada nas equações (3.14) – (3.16), e a corrente conservada associada é,

$$\mathbf{j} = -i(\bar{\psi}\nabla\psi + \psi\nabla\bar{\psi}) - 2e|\psi|^2\mathbf{A}. \quad (6.28)$$

Quando  $T < T_C$ , a energia livre é mínima em

$$|\psi|^2 = -\frac{a}{2b} > 0, \quad (6.29)$$

e, portanto, a simetria de gauge original é espontaneamente quebrada.

Em um campo magnético externo uniforme, o parâmetro de ordem é também uniforme (HUANG, 2001,p.214), e a densidade de corrente da equação (6.28) fica,

$$\mathbf{j} = -2e|\psi|^2\mathbf{A} = \frac{ea}{b}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{j} = -k^2\mathbf{A}, \quad (6.30)$$

que é chamada de equação de London. A resistividade  $\rho$  do material se relaciona com  $\mathbf{j}$  através da lei de Ohm,

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}. \quad (6.31)$$

Porém, o campo elétrico se anula, dado que  $\mathbf{E} = -d\mathbf{A}/dt = 0$ , e como  $\mathbf{j}$  é não nulo em geral (equação de London), obtemos

$$\rho = 0, \quad (6.32)$$

e então o material se encontra em um estado supercondutor, para temperaturas abaixo de  $T_C$ . Além disso, nesse regime de temperatura, a validade da equação de London implica o aparecimento do efeito Meissner. De fato, pela lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}. \quad (6.33)$$

Tomando o rotacional dos dois lados da equação, lembrando que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , e usando a equação de London, temos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = k^2 \mathbf{B}. \quad (6.34)$$

Limitando-nos, por simplicidade, a uma dimensão espacial, a equação (6.34) tem a solução da forma,

$$B_x = B_0 e^{-kx}. \quad (6.35)$$

$B_x$  decai exponencialmente dentro do material, penetrando apenas a uma profundidade característica  $\lambda_L = 1/k$  na amostra.  $\lambda_L$  é conhecida como profundidade de penetração de London (KITTEL, 2005,p.275). Quando os fatores numéricos são calculados com valores típicos, obtém-se  $\lambda_L \approx 10^{-6} \text{cm}$ . Na linguagem de teoria de campos, pode-se dizer que o alcance finito do campo magnético no interior do supercondutor se deve ao aparecimento de uma massa efetiva para os fótons via mecanismo de Higgs, o que ocorre após a quebra espontânea da simetria de gauge (vide seção 3.3).

Nos chamados supercondutores tipo II – os quais apresentam resistividade nula abaixo de  $T_C$ , porém apresentam efeito Meissner de forma distinta da que ocorre nos chamados supercondutores tipo I – pode ocorrer a presença de vórtices, chamados de vórtices de Abrikosov. Eles estão associados a uma penetração parcial do campo

magnético no interior do material supercondutor, para distâncias além da profundidade de penetração de London  $\lambda_L$ .

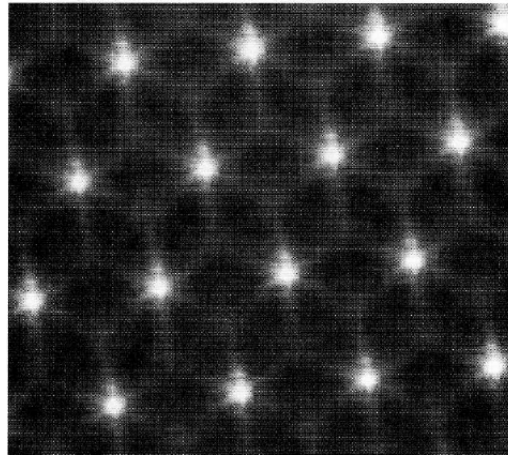


Figura 17: Vórtices em um supercondutor tipo II, formado de  $\text{NbSe}_2$ .

Na figura 17 está mostrada a presença de vórtices em um supercondutor tipo II. As áreas claras são os núcleos dos vórtices, enquanto que as áreas escuras são regiões supercondutoras do material.

## 7 METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho é do tipo descritiva, pretendendo atingir nossos objetivos seguindo a devida ordem citada abaixo.

Inicialmente fizemos uma revisão bibliográfica sobre Teoria de Campos para a compreensão e o entendimento necessário para o desenvolvimento deste trabalho.

A partir destes conhecimentos revisamos os conceitos relacionados aos campos escalares reais, complexo e ao campo vetorial.

Em seguida, após a revisão sobre os conceitos de não-linearidade, aprofundamos nossos estudos sobre a resolução de problemas não lineares a partir do trabalho de Bogomol'nyi.

Aprofundamos também nossos estudos sobre o método de deformação utilizando uma revisão bibliográfica em artigos e teses para um melhor entendimento da teoria.

Por fim, unimos os conceitos de campos, método de deformação, para encontrarmos soluções das equações de movimento a partir de teorias conhecidas e finalizamos com algumas aplicações que julgamos importantes.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscamos mostrar o potencial de aplicabilidade e versatilidade das diversas teorias clássicas de campos. Do capítulo 2 ao capítulo 5, apresentamos resultados importantes em teorias de campos, como o método de Bogomol'nyi, método de deformação, quebra de simetria e defeitos topológicos. Nesta primeira parte do trabalho, sempre que oportuno, apontamos possíveis aplicações principalmente em física de partículas, embora que de forma pontual. No capítulo 6, dedicado inteiramente a aplicações em física da matéria condensada, pudemos visualizar o papel desempenhado pela quebra espontânea de simetria na explicação de fenômenos de transição de fase, além de constatar a presença de defeitos topológicos em sistemas magnéticos, superfluidos e supercondutores.

Ainda no capítulo 6, buscamos deixar claro como modelos já estudados nos capítulos anteriores de forma genérica, poderiam ser aplicados a sistemas físicos específicos, podendo ser estabelecidas analogias entre diversas grandezas. Observando com atenção, a forma da energia livre de Ginzburg-Landau na equação (6.26) se assemelha bastante à forma da lagrangiana da teoria do campo escalar complexo acoplado ao campo de gauge dada em (3.13). De fato, escrevendo-a no caso de configurações estáticas, ela se reduz a

$$L = \int d^3x \left[ -\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - (\nabla - ie\mathbf{A})\psi \cdot (\nabla + ie\mathbf{A})\bar{\psi} - \mu\bar{\psi}\psi - \lambda(\bar{\psi}\psi)^2 \right]$$

$$-L = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + |(\nabla - ie\mathbf{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \right].$$

Comparando com (6.26), vemos que  $-L = F$ . Uma vez feita esta identificação, podemos ver também que  $-V = f$ , como comprovam as equações (6.12) e (3.4), no caso do campo escalar real, por exemplo. Poderíamos então obter todos os resultados da seção 6.6 *postulando* a lagrangiana acima e explorando suas propriedades pelos métodos desenvolvidos nos primeiros capítulos. Como exemplo, poderíamos ter obtido a equação de Ginzburg-Landau (6.27) calculando a equação de movimento da

lagrangiana acima para o campo  $\psi$ . O mesmo raciocínio vale para os outros sistemas mostrados no capítulo 6, os quais podem ser identificados com teorias clássicas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

Por isso enfatizamos que é extremamente eficaz o desenvolvimento de teorias de campos de forma genérica, buscando-se refinar a compreensão de sua estrutura matemática por meio do desenvolvimento de novas técnicas, sem se preocupar, *a priori*, com nenhum sistema físico em particular. Pois, uma vez que identificamos o modelo de um sistema com uma determinada teoria de campos, por meio de uma lagrangiana adequada, podemos lançar mão de todas as ferramentas teóricas que as teorias de campos oferecem, como por exemplo, os métodos de Bogomol'nyi e de deformação, abrindo então a possibilidade de compreender características novas do sistema, as quais por vezes não estão claras por métodos usuais.

## BIBLIOGRAFIA

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Notes for a Course on Classical Fields**. Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2008.

ALMEIDA, C. A. G. **Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares**. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2004.

ARAUJO, T. R.; ZLATEV S. I. Correções Quânticas à Massa do Kink Deformado. **Scientia Plena**, São Cristóvão, v. 5, n. 11, 2009.

CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T.C. **Principles of Condensed Matter Physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. Microscopic derivation of the theory of superconductivity. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**. v. 76, n. 1024, p. 20-36, 1950.

GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Nuovo Cimento. **Physical Review Letters**. v. 127, n. 965, p. 65-69, 1961.

GUÉRON, E. **Defeitos Topológicos: Texturas**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 1996.

HUANG, K. **Intoduction to Statistical Physics**. New York: John Wiley & Sons, 2001.

HUANG, K. **Statistical Mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1987.

INÁCIO, A. S. **Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares**. Dissertação (Mestrado em Física)- Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2003.

JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. 2 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2003.

KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics**. 8 ed. New York: John Wiley & Sons, 2005.

LANDAU, L. D. **Statistical Physics: part 1**. 3 ed. Oxford: Pergamon Press, 1959.

LANDAU, L. D. **The Classical Theory of Fields**. 4 ed. Amsterdam: Butterworth Heinemann, 1987.



LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Eletromagnetismo**. 1 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1997.

SILVA, A. **Método para Gerar Soluções do Tipo Onda Viajantes em Equações Diferenciais**. Tese (Doutorado em Física) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.

SILVA, A. **Vórtices em Sistemas Planares**. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 1996.

TONG, D. **Lectures on Quantum Field Theory**. University of Cambridge. Disponível em: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/one.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2013.