UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

ALEX FERNANDES MENDES

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA EM ESPAÇOS DE BANACH

Campina Grande - PB
Março- 2014

ALEX FERNANDES MENDES

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA EM ESPAÇOS DE BANACH

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologias - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Especialista na Especialização em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Drª. Luciana Roze de Freitas.

Campina Grande - PB
Março- 2014

M538t Mendes, Alex Fernandes.
O teorema da função implícita em espaços de Banach [manuscrito] / Alex Fernandes Mendes. - 2014.
37 p. : il.

Digitado.
Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Espaços de Banach. 2. Teorema da função implícita. 3. Teorema da função inversa. I. Título.

21. ed. CDD 515.5

ALEX FERNANDES MENDES

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA EM ESPAÇOS DE BANACH

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologias - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Especialista na Especialização em Matemática Pura e Aplicada.

Aprovado pela banca examinadora em 03 de Março de 2014.

Luciana P Freitas

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientadora

Maria Isabelle Silva

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinadora

Natan de Assis Lima

Profº. Ms. Natan de Assis Lima
Departamento de Matemática - CCHE/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a minha esposa Edlange e a minha filha Laura por serem grandes bençãos na minha vida.

Agradecimentos

- A Deus por mais uma conquista realizada;
- A minha família que me apoiou nessa jornada e me incentivou para que alcançasse o meu objetivo, e sempre com palavras de apoio e otimismo;
- Aos meus professores pela força e dedicação que me motivou a seguir em frente e em especial a professora Luciana Roze de Freitas pela compreensão, sempre atenciosa nas orientações do trabalho e generosa no compartilhar dos seus saberes;
- Aos meus colegas pelos momentos de entrosamento e partilha dos conhecimentos;
- A todos de forma geral que contribuiram relevantemente para o término da minha especialização.

"Tudo posso naquele que me fortalece."
"Filipenses 4:13"

Resumo

Este trabalho apresenta uma generalização detalhada do Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e algumas aplicações, por exemplo, o Teorema da Função Inversa. Inicialmente apresentamos alguns conceitos e teoremas, entre eles a Desigualdade do Valor Médio em Espaços de Banach e o Teorema do Ponto Fixo. Em seguida, enunciamos o Teorema da Função Inversa o qual é necessário para o entendimento do Teorema da Função Implícita e finalizamos com uma aplicação envolvendo sistema de equações.

Palavras Chave: Espaços de Banach; Teorema da Função Implícita; Teorema da Função Inversa.

Abstract

This paper presents a detailed generalization of the Implicit Function Theorem in Banach spaces and some applications, for example, the Inverse Function Theorem. First we present some concepts and theorems, including the Mean Value Inequality in Banach Spaces and Fixed Point Theorem.Then we state the Inverse Function Theorem which is necessary for the understanding of the Implicit Function Theorem and finalized with an application involving the system of equations.

Key words: Banach spaces; Implicit Function Theorem, Inverse Function Theorem.

SUMÁRIO

Introdução

A ideia do Teorema da Função Implícita surgiu nos escritos de Isaac Newtom (1642-1727) e no trabalho de Gottfried Leibiniz (1646-1716) citando uma extensão da diferenciação implícita. Mas foi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que, com rigor matemático, aproximou-se do teorema. Primeiramente o teorema foi formulado para funções de duas variáveis reais e uma das hipóteses era que a matriz Jacobiana deveria ser não nula. Logo depois Ulisse Dini (1845-1918) generalizou a versão do Teorema da Função Implícita para um número qualquer de variáveis reais. E ao longo do tempo, vários matemáticos compreenderam o teorema e com as técnicas modernas permitiram a riqueza de generalizações e uma delas é a formulação do teorema nos Espaços de Banach.

O presente trabalho tem por objetivo enunciar e demonstrar o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach que envolve funções definidas em um aberto $A \subset X \times Y$ e assumindo valores em Z, onde X, Y e Z são espaços de Banach. Considerando certas hipóteses sobre f e supondo

$$f(x_0, y_0) = 0, \text{ com } (x_0, y_0) \in A,$$

o teorema garante a existência de uma única aplicação

$$y = y(x) : U \subset X \to V \subset Y$$

sobre vizinhanças U de x_0 e V de y_0, que é solução da equação

$$f(x, y(x)) = 0.$$

Assim, dizemos que $f(x, y(x)) = 0$ define implicitamente y como uma função de x.

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos e resultados fundamentais a respeito da diferenciabilidade em Espaços de Banach, que servirão como ferramentas para o estudo do Teorema.

No Capítulo 2 apresentamos o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e em seguida faremos a demonstração de forma detalhada. O leitor verá que foram usados alguns resultados importantes, como a Desigualdade do Valor Médio e o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

O Capítulo 3 é dedicado a algumas aplicações do Teorema da Função Implícita, a saber, o Teorema da Função Inversa e ainda um exemplo de aplicação envolvendo sistemas de equações.

1 Resultados Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas definições que serão necessárias para alcançar o objetivo central do trabalho que é a demonstração do Teorema da Função Implícita em espaços de Banach.

1.1 Espaços Vetoriais Normados

Definição 1.1.1. Seja X um espaço vetorial sobre K, onde K é um corpo. Uma norma em X é uma função $||.|| : X \longrightarrow K$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $||x|| \geq 0$;

ii) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$;

iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,

para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in K$.

Observação: Um espaço vetorial normado X é um espaço vetorial com a norma definida acima.

Exemplo 1.1.1. A função valor absoluto, $| \cdot | : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, é uma norma em $\mathbb{R}$. Com efeito,

i) $|x| = \sqrt{x^2} > 0$;

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) se $\alpha, x \in \mathbb{R}$, então $|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x)^2} = \sqrt{\alpha^2 x^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x^2} = |\alpha||x|$;

iv) vale a desigualdade triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exemplo 1.1.2. Se A é um espaço vetorial, o conjunto

$$B(A, K) = \{f : A \to K; f \text{ é contínua e limitada } \}$$

é um espaço vetorial normado onde consideramos a norma $||f|| = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$.

De fato, observe que se f é limitada, então possui supremo finito. Mostremos que valem as propriedades de norma.

i) $|f(x)| > 0, \forall x \in A \Rightarrow ||f|| > 0$.

ii) Observe que

$$||f|| = \sup_{x \in A} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0,\ \forall x \in A \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

iii) Seja $\alpha \in K$. Se $\alpha = 0$, então a igualdade é imediata. Seja $\alpha \neq 0$. Observe que,

$$|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| \leq |\alpha| \sup_{x \in A} |f(x)| = |\alpha|||f||.$$

Assim $|\alpha|||f||$ é uma cota superior do conjunto $\{|\alpha f(x)| : x \in A\}$. Então,

$$\sup_{x \in A} |\alpha f(x)| \leq |\alpha|||f||.$$

Ou seja,

$$||\alpha f|| = \sup_{x \in A} |\alpha f(x)| \leq |\alpha|||f||.$$

Como $\alpha \neq 0$, segue que

$$|f(x)| = |\alpha||\alpha^{-1}||f(x)| = |\alpha^{-1}||\alpha||f(x)| = |\alpha^{-1}||\alpha f(x)| \leq |\alpha^{-1}|||\alpha f||.$$

Tomando o supremo, temos que

$$||f|| \leq |\alpha^{-1}|||\alpha f|| \Leftrightarrow |\alpha|||f|| \leq ||\alpha f||.$$

Portanto,

$$|\alpha|||f|| = ||\alpha f||.$$

iv) Sejam $f, g \in B(A, K)$, então para todo $x \in A$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = ||f|| + ||g||.$$

Logo,

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

Definição 1.1.2. Um espaço vetorial normado é um par $(X, ||\cdot||)$, onde X é um espaço vetorial e $||\cdot||$ é uma norma em X. Por simplicidade, quando a norma estiver clara, denotaremos apenas por X.

Definição 1.1.3. Uma sequêcia (x_n) em um espaço vetorial normado X é dita de $Cauchy$, se dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_m - x_n|| < \epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Definição 1.1.4. Sejam X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$ uma sequência. Dizemos que (x_n) converge para $x \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_m - x|| < \epsilon, \ \ \forall n \geq n_0.$$

Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{||h|| \to 0} x_n = x$.

Definição 1.1.5. Um espaço vetorial normado X é dito $completo$ se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento deste espaço.

Definição 1.1.6. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.

Exemplo 1.1.3. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço de Banach, além de ser uma norma, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. (Ver [7], pág. 127).

Exemplo 1.1.4. O espaço $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana

$$||x|| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... x_n^2\right)^{1/2}, \ \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

é um espaço de Banach, pois toda sequência de Cauchy é convergente (Ver [5], pág.33).

Definição 1.1.7. Sejam X e Y espaços normados sobre um corpo K. Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é chamada de $transformaolinear$ se:

a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$;

b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$,

para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in K$.

Representamos $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial das transformações lineares $T : X \to Y$.

Definição 1.1.8. Dizemos que uma transformação linear $T : X \longrightarrow Y$ é $limitada$ se existe uma constante k tal que

$$||T(x)||_Y \leq k||x||_X, \ \forall x \in X.$$

Lema 1.1.1. Uma transformação linear $T : X \longrightarrow Y$ é limitada se e, somente se, é contínua.

Demonstração. Suponha que T é uma transformação linear limitada e seja $x_0 \in X$ fixado, então existe uma constante positiva k tal que

$$||T(x - x_0)||_Y \leq k||x - x_0||_X, \ \forall x \in X.$$

Devemos mostrar que dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se

$$||x - x_0|| < \delta \text{ então } ||T(x) - T(x_0)|| < \epsilon.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$, temos que se $||x - x_0|| < \delta$ então,

$$||T(x) - T(x_0)|| \leq k||x - x_0|| < k \cdot \delta = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponha que T é contínua e fixe um ponto $x_0 \in X$. Logo, dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se

$$||x - x_0|| < \delta \text{ então } ||T(x) - T(x_0)|| < \epsilon.$$

Se $y \in X$, considere $x = x_0 + \dfrac{\delta}{||y||} \cdot y$. Então,

$$x - x_0 = \frac{\delta}{||y||} \cdot y. \tag{1.1}$$

Aplicando a norma na equação (1.1) segue que

$$||x - x_0|| = \left\| \frac{\delta}{||y||} . y \right\| = \left\| \frac{\delta}{||y||} \right\| \cdot ||y|| = \delta.$$

Como T é linear temos

$$||T(x) - T(x_0)|| = ||T(x - x_0)|| = \left\| T(\frac{\delta}{||y||} \cdot y) \right\| = \frac{\delta}{||y||} \cdot ||T(y)||,$$

o que implica,

$$\frac{\delta}{||y||} \cdot ||T(y)|| \leq \epsilon,$$

pois

$$||T(x) - T(x_0)|| \leq \epsilon.$$

Assim

$$||T(y)|| \leq \frac{\epsilon}{\delta}||y||.$$

Tome $\dfrac{\epsilon}{\delta} = k$, segue que
$$||T(y)|| \leq k||y||.$$
Portanto, T é limitada. $\square$

Exemplo 1.1.5. Considere o espaço vetorial

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y \ : \ T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Pelo lema 1.1.1, se $T \in B(X,Y)$ então T é limitada, logo, a aplicação

$$||.|| : B(X,Y) \to [0,\infty)$$

dada por
$$||T|| = \inf\{k \in K\,; ||T(x)||_Y \leq k||x||_X, \ \forall x \in X\}$$
está bem definida. Podemos mostrar que $||.||$ define uma norma no espaço $B(X,Y)$. De fato,

i) Sejam $T \in B(X,Y)$ linear, limitada e $k > 0$, então

$$||T|| = \inf\{k\,;\, ||T(x)||_Y \leq k||x||_X\} \geq 0,$$

ii)

$$\begin{aligned}
||T|| = 0 \ &\Leftrightarrow \ \inf\{k\,;\, ||T(x)|| \leq k||x||_X\} = 0\\
&\Leftrightarrow \ ||T(x)||_Y \leq 0||x||_X, \ \forall x\\
&\Leftrightarrow \ ||T(x)||_Y = 0, \ \forall x\\
&\Leftrightarrow \ T(x) = 0, \ \forall x\\
&\Leftrightarrow \ T = 0.
\end{aligned}$$

iii) Seja α um escalar e $\alpha \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
||\alpha T|| &= \inf\{k\,;\, ||\alpha T(x)||_Y \leq k||x||_X\}\\
&= \inf\{k\,;\, |\alpha|||T(x)||_Y \leq k||x||_X\}\\
&= \inf\{k\,;\, ||T(x)||_Y \leq \frac{k}{|\alpha|}||x||_X\}.
\end{aligned}$$

Tome $d = \dfrac{k}{|\alpha|} \Leftrightarrow k = |\alpha| \cdot d$, segue que

$$||\alpha T|| = \inf\{|\alpha| \cdot d\,;\, ||T(x)||_Y \leq d||x||_X\} = |\alpha| \inf\{d\,;\, ||T(x)||_Y \leq d||T||\} = |\alpha| \cdot ||T||.$$

iv) Sejam $T_1,\, T_2 \in B(X,Y)$, então

$$||T_1+T_2|| = \inf\{k \in K\,;\, ||(T_1+T_2)(x)||_Y \leq k||x||_X\}.$$

Por hipótese T_1 e T_2 são limitadas. Então existem $k_1,\, k_2$ constantes positivas tais que

$$||T_1|| \leq k_1||x||_X \;\text{ e }\; ||T_2|| \leq k_2||x||_X.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$||(T_1+T_2)(x)|| = ||T_1(x)+T_2(x)|| \leq ||T_1(x)||+||T_2(x)|| \leq k_1||x||+k_2||x|| = (k_1+k_2)||x||.$$

Assim,

$$||T_1+T_2|| = \inf\{k\,;\, ||(T_1+T_2)(x)||_Y \leq k||x||\} \leq k_1+k_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||T_1+T_2|| &\leq \inf\{k_1+k_2; ||T_1(x)||_Y \leq k_1||x||_X,\, ||T_2(x)||_Y \leq K_2||x||_X\} \\ &\leq \inf\{k_1\,;\, ||T_1(x)||_Y \leq k_1||x||_X\} + \inf\{k_2\,;\, ||T_2(x)||_Y \leq K_2||x||_X\} \\ &= ||T_1|| + ||T_2||. \end{aligned}$$

1.2 Diferenciabilidade em Espaços Normados

No que segue X e Y denotam espaços vetoriais normados.

Definição 1.2.1. Uma função $f : A \subset X \to Y$ é diferenciável em $x_0 \in A$, onde A é um aberto em X, se existe uma transformação linear limitada $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que

$$f(x_0+h) - f(x_0) - T(h) = \varphi(h),$$

onde $\dfrac{||\varphi(h)||}{||h||} \to 0$ quando $||h|| \to 0$. Ou equivalentemente,

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)||}{||h||} = 0.$$

Observe que isto significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$h \in A, 0 < ||h|| < \delta \;\Rightarrow\; ||f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)|| < \epsilon||h||.$$

Observação: Denotemos T por $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$ se a derivada existir.

Teorema 1.2.1. *Seja A um conjunto aberto em X. Se $f : A \subset X \to Y$ é diferenciável em $x_0 \in A$, então a aplicação linear $Df(x_0)$ é única.*

Demonstração. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ satisfazendo a definição da derivada de f em x_0. Considere $T = T_2 - T_1$. Então,

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_1(h)||}{||h||} = 0$$

e

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_2(h)||}{||h||} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{||T(h)||}{||h||} &= \frac{||(T_2 - T_1)(h)||}{||h||} \\
&= \frac{||T_2(h) - T_1(h)||}{||h||} \\
&= \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_1(h) - [f(x_0+h) - f(x_0) - T_2(h)]||}{||h||} \\
&= \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_1(h)}{||h||} - \frac{[f(x_0+h) - f(x_0) - T_2(h)]}{||h||} \right\| \\
&\leq \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_1(h)||}{||h||} + \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_2(h)||}{||h||}.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $||h|| \to 0$, segue que

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||T(h)||}{||h||} = \lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x_0+h) + f(x_0) - T_1(h)||}{||h||} + \lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - T_2(h)||}{||h||} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||T(h)||}{||h||} = 0.$$

Seja $a \in A \subset X$, $a \neq 0$ e considere $t \to 0$, daí

$$||T(a)|| = \frac{||a|| |t| ||T(a)||}{||a|| |t|} = ||a|| \frac{||T(ta)||}{||ta||}$$

assim,

$$||T(a)|| = ||a|| \lim_{||ta||\to 0} \frac{||T(ta)||}{||ta||} = 0,$$

pois se $t \to 0$ então $||ta|| \to 0$. Portanto,

$$0 = ||T(a)|| = ||T_2(a) - T_1(a)||, \ \forall a \in X \Leftrightarrow T_1(a) = T_2(a), \ \forall a \in X.$$

Se $a = 0$, segue que

$$T(0) = (T_1 - T_2)(0) = T_1(0) - T_2(0) = 0 \Leftrightarrow T_1(0) = T_2(0).$$

□

Teorema 1.2.2. *Seja $f : A \subset X \to Y$, onde X, Y são espaços vetoriais normados e A é um conjunto aberto. Se f é diferenciável em $x_0 \in A$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Por hipótese, f é diferenciável em x_0. Então, pela definição de derivada, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $||u|| < \delta$ então

$$||f(x_0 + u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)|| < \epsilon||u||.$$

Daí,

$$||f(x_0 + u) - f(x_0)|| - ||Df(x_0)(u)|| \leq ||f(x_0 + u) - f(x_0) - Df(x_0)(u)|| < \epsilon||u||,$$

Mas, como $Df(x_0)$ é uma transformação linear e limitada, existe $c > 0$ tal que

$$||Df(x_0)(u)|| \leq c||u||$$

o que implica que,

$$||f(x_0 + u) - f(x_0)|| \leq \epsilon||u|| + ||Df(x_0)(u)|| \leq \epsilon||u|| + c||u|| = (\epsilon + c)||u|| < (\epsilon + c) \cdot \delta.$$

Assim, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{\epsilon + c} > 0$, temos $||u|| < \delta$ implica que

$$||f(x_0 + u) - f(x_0)|| < (\epsilon + c) \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon + c} = \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em x_0. □

Teorema 1.2.3. *Se $f,\ g : A \subset X \to Y$ são diferenciáveis em $x_0 \in A$, então $f + g$ é diferenciável e*

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$

Demonstração. Mostremos que $f + g$ é diferenciável em x_0 e $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$.
Ou seja,

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0) - (Df(x_0) + Dg(x_0))(h)||}{||h||} = 0$$

Temos,

$$\begin{aligned} ||(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0) - \left[Df(x_0) + Dg(x_0)\right](h)|| &= \\ ||f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0) - Df(x_0)(h) - Dg(x_0)(h)|| &\leq \\ ||f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)|| + ||g(x_0 + h) - g(x_0) - Dg(x_0)(h)|| & \end{aligned}$$

Por hipótese, f e g são diferenciáveis em x_0, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $||h|| < \delta$ implica,

$$||f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)|| \leq \frac{\epsilon}{2}||h||$$

e

$$||g(x_0 + h) - g(x_0) - Df(x_0)(h)|| \leq \frac{\epsilon}{2}||h||.$$

Assim,

$$||(f+g)(x_0 + h) - (f+g)(x_0) - [Df(x_0) + Dg(x_0)](h)|| \leq \frac{\epsilon}{2}||h|| + \frac{\epsilon}{2}||h|| = \epsilon||h||.$$

Portanto,

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||(f+g)(x_0 + h) - (f+g)(x_0) - [Df(x_0) + Dg(x_0)](h)||}{||h||} = 0.$$

Ou seja, $D(f+g)(x_0)$ existe e

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$

$\square$

Teorema 1.2.4. *Sejam f, $g : A \subset X \to Y$ diferenciáveis em $x_0 \in A$ e λ pertencente a $\mathbb{R}$, então λf é diferenciável em x_0 e*

$$D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0).$$

Demonstração. Como f é diferenciável em x_0, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\lambda f(x_0 + h) - \lambda f(x_0) - \lambda Df(x_0)(h)||}{||h||} &= \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\lambda[f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)]||}{||h||} \\
&= \lim_{||h|| \to 0} |\lambda| \frac{||f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)||}{||h||} \\
&= |\lambda| \lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)||}{||h||} \\
&= \lambda \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, λf é diferenciável em x_0 e $D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$. $\square$

Teorema 1.2.5. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados, $f : A \subset X \to Y$ diferenciável em $x_0 \in A$ e $g : B \subset Y \to Z$ diferenciável em $f(x_0) \in B$ e sendo A, B abertos e $f(A) \subset B$. Então, a função composta*

$$\begin{array}{rccc}
g \circ f : & A \subset X & \longrightarrow & Z \\
& x & \longmapsto & f(x) = g(f(x))
\end{array}$$

é diferenciável em x_0 e

$$Dg(f(x_0)) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0).$$

Demonstração. Seja f diferenciável em x_0. Então, existe uma aplicação $\varphi(h)$, com h suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)}{||h||} = \varphi(h) \quad \text{onde} \lim_{||h|| \to 0} ||\varphi(h)|| = 0.$$

Seja g diferenciável em $b = f(x_0)$. Então existe uma aplicação $\gamma(k)$, com k suficiente pequeno, tal que

$$\frac{g(b+k) - g(b) - Dg(b)(k)}{||k||} = \gamma(k), \text{ onde} \lim_{||k|| \to 0} ||\gamma(k)|| = 0. \tag{1.2}$$

Fazendo $k = f(x_0+h) - f(x_0)$, segue que

$$k = Df(x_0)(h) + ||h||\varphi(h). \tag{1.3}$$

Por (1.2) e (1.3), temos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0+h) &= g(f(x_0+h)) \\ &= g(k + f(x_0)) \\ &= g(k+b) \\ &= g(b) + Dg(b)(k) + \gamma(k) \cdot ||k|| \\ &= g(f(x_0)) + ||k||\gamma(k) + Dg(b)[Df(x_0)(h) + ||h||\varphi(h)]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0) - Dg(b)(Df(x_0))(h)}{||h||} = Dg(b)(\varphi(h)) + \frac{||k||\gamma(k)}{||h||}. \tag{1.4}$$

Sendo $\lim\limits_{||h|| \to 0} ||\varphi(h)|| = 0$ e sendo $Dg(b)$ linear e contínua, obtemos

$$\lim_{||h|| \to 0} Dg(b)(\varphi(h)) = Dg(b)(0) = 0. \tag{1.5}$$

Além disso, por (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{||k||\gamma(k)}{||h||} &= \frac{||Df(x_0)(h) + ||h||\varphi(h)||\gamma(k)}{||h||} \\ &\leq \gamma(k) \left[\frac{||Df(x_0)||||h||}{||h||} + \frac{||h||||\varphi(h)||}{||h||} \right] \\ &\leq \gamma(k) \left[||Df(x_0)|| + ||\varphi(h)|| \right]. \end{aligned}$$

Note que quando $||h|| \to 0$ temos que $||k|| \to 0$, e dessa forma

$$\lim_{||h|| \to 0} ||\gamma(k)|| = \lim_{||k|| \to 0} ||\gamma(k)|| = 0$$

Assim,

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||k||||\gamma(k)||}{||h||} = 0 \cdot ||Df(x_0)|| = 0 \tag{1.6}$$

De (1.4), (1.5) e (1.6), concluímos que

$$\lim_{||h|| \to 0} \left\| \frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - Dg(b)(Df(x_0))(h)}{||h||} \right\| = 0.$$

Portanto, $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0).$$

□

1.3 Derivadas Parciais

Definição 1.3.1. Sejam X, Y, Z espaços vetoriais normados e A um conjunto aberto de $X \times Y$ e considere

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ A \subset X \times Y & \longrightarrow & Z \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

Seja $(x_0, y_0) \in A$ e defina

$$A_{y_0} = \{x \in X \,;\, (x, y_0) \in A\}.$$

Como A é aberto, então A_{y_0} é aberto em X. Seja

$$\begin{array}{rcl} F \ : \ A_{y_0} \subset X & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & F(x) = f(x, y_0). \end{array}$$

Se F é diferenciável em x_0 então $F'(x_0) : X \to Z$ é uma aplicação linear e contínua chamada derivada parcial de f em (x_0, y_0) com relação a variável x.

Notação: $D_1 f(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. De maneira análoga define-se a derivada parcial de f em (x_0, y_0) em relação a variável y, que denotamos por

$$D_2 f(x_0, y_0) \text{ ou } \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0).$$

Exemplo 1.3.1. De acordo com a definição de diferenciabilidade, podemos calcular a derivada das componentes de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Denotemos

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. As derivadas parciais $D_i f_j(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $x \in A$ são definidas pelo seguinte limite, quando esse limite existir

$$D_i f_j(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h} \right].$$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em A, então as derivadas parciais $D_i f_j(x)$, $x \in A$ existem e a matriz aplicação linear $Df(x) \in A$ com relação a um vetor u é dada por

$$Df(x)(u) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & D_2 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ D_1 f_2(x) & D_2 f_2(x) & \cdots & D_n f_2(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & D_2 f_m(x) & \cdots & D_n f_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é chamada Matriz Jacobiana de f (Ver [8]).

Exemplo 1.3.2. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & se(x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Então, pela definição de derivadas parciais

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

assim, as derivadas parciais existem mas a função f é descontínua em (0,0), pois se considerarmos um vetor $u = (a, b)$, temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + tu) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 ab}{t^3(a^2 + b^2)} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}.$$

Observe que se $ab \neq 0$, então o limite não existe. Se os pontos são da forma (x, x), com $x \neq 0$ então

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

No exemplo acima vimos a existência das derivadas parciais no ponto (0,0) , mas não podemos garantir que f seja contínua nesse ponto.

1.4 Desigualdade do Valor Médio

Iniciamos esta seção com o Teorema do Valor Médio para espaços vetoriais normados. Observe primeiramente que se $x, y \in \mathbb{R}$, então o segmento de reta fechado com extremos em x e y corresponde ao conjunto

$$[x, y] = \{x + t(y - x)\,;\, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Teorema 1.4.1. *Sejam X um espaço vetorial normado e $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um aberto A. Então, se $[x, y] \subset A$, existe $c \in [x, y]$ tal que*

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Demonstração. Seja $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x)).$$

Note que $\varphi(t) = f(g(t))$, onde $g : [0, 1] :\to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(t) = x + t(y - x), t \in [0, 1].$$

A função g assim definida é diferenciável em $(0, 1)$, com derivada $g^{'}(t) = y - x$. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{||h|| \to 0} \frac{||g(t+h) - g(t) - (y-x)(h)||}{||h||} &= \lim_{||h|| \to 0} \frac{||x + (t+h)(y-x) - x - t(y-x) - h(y-x)||}{||h||} \\
&= \lim_{||h|| \to 0} \frac{||(t+h)(y-x) - (t+h)(y-x)||}{||h||} \\
&= \lim_{||h|| \to 0} \frac{||0||}{||h||} = 0.
\end{aligned}$$

Como f e g são diferenciáveis, temos pela regra da cadeia que φ é diferenciável em $(0, 1)$ e

$$\varphi'(t) = Df(x + t(y - x)) \cdot (y - x).$$

Além disso, φ é contínua em $[0,1]$. Então, aplicando o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0)(1-0) = \varphi'(t_0),$$

o que implica,

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x),$$

com $c = g(t_0) = x + t_0(y-x)$ que pertence a $[x,y]$. Isso conclui o teorema. $\square$

Observação 1.4.1. Seja $f : A \subset X \to Y$, com X, Y espaços vetoriais normados. O Teorema do Valor Médio não é válido se dimensão de Y for maior do que 1, mas é válido no geral, a Desigualdade do Valor Médio.

Teorema 1.4.2. *Sejam Y um espaço normado, $U \subset \mathbb{R}$ e $[x,y] \subset U$. Suponha que a aplicação $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow Y$ é diferenciável em $[x,y]$ e existe $M > 0$ tal que $||Df(t)|| \leq M$, para todo $t \in [x,y]$, então*

$$||f(y) - f(x)|| \leq M|y-x|.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e defina $\varphi(t) : [x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(t) = ||f(t) - f(x)|| - (M+\epsilon)(t-x) \tag{1.7}$$

A função φ é contínua com $\varphi(x) = 0 < \epsilon$.

Mostremos que $\varphi(y) \leq \epsilon$. Para isso defina,

$$S = \{t \in [x,y]\,;\, \varphi(t) \leq \epsilon\}$$

e observe que o conjunto S não é vazio, pois $x \in S$. Pela continuidade de φ, existe um número c no intervalo $[x,y]$, tal que $\varphi(t) < \epsilon$, $\forall t \in [x,c]$. Neste caso,

$$\lim_{t \to c} \varphi(t) = \varphi(c) \leq \epsilon,$$

logo, $[x,c] \subset S$.

Considere

$$\alpha = \sup\{c \in [x,y]\,;\, [x,c] \subset S\}.$$

Mostremos que $\alpha = y$ e, assim, $\varphi(t) \leq \epsilon$, para todo $t \in [x,y]$. Ora, suponha $\alpha < y$. Então existe um h tal que

$$\alpha < \alpha + h < y.$$

Daí,

$$||f(\alpha+h) - f(\alpha) - Df(\alpha)h|| \leq \epsilon|h|$$

pela diferenciabilidade de f em α.

Seja $d = \alpha + h$. Note que

$$\begin{aligned} ||f(d) - f(\alpha)|| &\leq ||f(\alpha + h) - f(\alpha) - Df(\alpha)h + Df(\alpha)h|| \\ &\leq ||f(\alpha + h) - f(\alpha) - Df(\alpha)h|| + ||Df(\alpha)h|| \\ &\leq \epsilon|h| + M|h| \; = \; (M + \epsilon)|h|. \end{aligned}$$

Assim,

$$||f(d) - f(\alpha)|| \leq (M + \epsilon)(d - \alpha). \tag{1.8}$$

Usando (1.7), (1.8) e o fato de $\varphi(\alpha) \leq \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} ||f(d) - f(x)|| &\leq ||f(d) - f(\alpha)|| + ||f(\alpha) - f(x)|| \\ &\leq (M + \epsilon)(d - \alpha) + (M + \epsilon)(\alpha - x) + \epsilon \\ &= (M + \epsilon)(d - \alpha + \alpha - x) + \epsilon \; = \; (M + \epsilon)(d - x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Daí,

$$\varphi(d) = ||f(d) - f(x)|| - (M + \epsilon)(d - x) \leq \epsilon$$

o que implica que $d \in S$, o que é uma contradição, já que α é o supremo de S. Logo, $\alpha = y$. Com isso, $\varphi(y) \leq \epsilon$. De onde segue que,

$$||f(y) - f(x)|| \leq (M + \epsilon)(y - x) + \epsilon \; = \; M(y - x) + \epsilon(1 + (y - x)).$$

Como essa desigualdade é válida, para todo $\epsilon > 0$, concluímos que

$$||f(y) - f(x)|| \leq M(y - x).$$

$\square$

Teorema 1.4.3. *(Desigualdade do Valor Médio) Seja $A \subset X$ um subconjunto aberto e S um subconjunto convexo de A. Se a função $f : A \subset X \to Y$, com X, Y espaços vetoriais normados, é diferenciável em todos os pontos de S e $||Df(x)||$ é limitada para $x \in S$, então*

$$||f(y) - f(x)|| \leq \sup_{z \in S} ||Df(z)|| \cdot ||y - x||, \, \forall \, x, y \in S.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in S$ quaisquer e $M = \sup_{z \in [x,y]} ||Df(z)||$, onde $[x, y] \subset S$. Considere a aplicação $g : [0, 1] \longrightarrow Y$ definida por

$$g(t) = f(x + t(y - x)), \; t \in [0, 1]$$

então, pela Regra da Cadeia, temos

$$Dg(t) \; = \; Df(x + t(y - x))(y - x).$$

Aplicando a norma na igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} ||Dg(t)|| = ||Df(x+t(y-x))(y-x)|| &\leq \\ ||Df(x+t(y-x)||y-x| &\leq M||y-x||. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4.2 e pelo Teorema do Valor Médio, segue que,

$$||g(1) - g(0)|| \leq M||y-x||(1-0) = M||y-x||.$$

Sendo $g(1) = f(y)$ e $g(0) = f(x)$ concluímos que

$$||f(y) - f(x)|| \leq M||y-x|| \leq \sup_{z \in S} ||Df(z)|| \cdot ||y-x||.$$

□

Definição 1.4.1. Sejam X, Y espaços normados. Uma aplicação $f : X \to Y$ chama-se uma contração quando existe uma constante β, com $0 \leq \beta < 1$ tal que

$$||f(y) - f(x)|| \leq \beta||y-x||, \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Teorema 1.4.4. *(Teorema do Ponto Fixo) Sejam X um espaço de Banach, A um subconjunto fechado de X e $f : A \longrightarrow A$ uma contração. Então, a equação $x = f(x)$ possui uma única solução em A.*

Demonstração. Seja $x_0 \in A$ fixado e defina a seguinte sequência

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \ldots.$$

Provemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em A. Considere m, $n \in \mathbb{N}$, com $m < n$. Então, usando a desigualdade triangular sucessivas vezes, temos

$$\begin{aligned} ||x_n - x_m|| &\leq ||x_{m+1} - x_m|| + ||x_n - x_{m+1}|| \\ &\leq ||x_{m+1} - x_m|| + ||x_{m+2} - x_{m+1}|| + ||x_n - x_{m+2}|| \\ &\leq \ldots \\ &\leq ||x_{m+1} - x_m|| + ||x_{m+2} - x_{m+1}|| + \ldots + ||x_n - x_{n-1}||. \end{aligned}$$

Pela definição de contração, temos

$$\begin{array}{rcl} ||x_2 - x_1|| & = & ||f(x_1) - f(x_0)|| \leq \beta||x_1 - x_0|| \\ ||x_3 - x_2|| & = & ||f(x_2) - f(x_1)|| \leq \beta||x_2 - x_1|| \leq \beta(\beta||x_1 - x_0||) = \beta^2||x_1 - x_0|| \\ ||x_4 - x_3|| & = & ||f(x_3) - f(x_2)|| \leq \beta||x_3 - x_2|| \leq \beta(\beta^2||x_1 - x_0||) = \beta^3||x_1 - x_0|| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ||x_{n+1} - x_n| & \leq & \beta^n||x_1 - x_0||, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} ||x_n - x_m|| & \leq & ||x_{m+1} - x_m|| + ||x_{m+2} - x_{m+1}|| + \ \ldots \ + ||x_n - x_{n-1}|| \\ & \leq & \beta^m||x_1 - x_0|| \ + \ \beta^{m+1}||x_1 - x_0|| + \ldots + \beta^{n-1}||x_1 - x_0|| \\ & = & \beta^m(1 + \beta + \ \ldots \ + \beta^{n-1-m})||x_1 - x_0|| \leq \dfrac{\beta^n}{1-\beta}||x_1 - x_0||, \end{array}$$

onde na última desigualdade, usamos a fórmula da soma de uma série geométrica. Sendo $0 \leq \beta < 1$, temos que $\lim \beta^m = 0$, logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{\beta^n}{1-\beta}||x_1 - x_0|| < \epsilon, \ \forall\, n, m > n_0.$$

Portanto, $(x_n) \subset A$ é uma sequência de Cauchy e como X é um espaço de Banach, segue que (x_n) converge para algum ponto $x \in X$, mas sendo A é um subconjunto fechado de X, então temos que $x \in A$.

Mostremos agora que $f(x) = x$. De fato, como a aplicação f é uma contração segue-se que f é contínua pois, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \dfrac{\epsilon}{\beta} > 0$, temos que

$$x, y \in X, \ ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \beta||x - y|| \leq \beta \cdot \delta \ = \ \epsilon.$$

Sendo f contínua, temos que

$$f(x) \ = \ f(\lim_{n\to\infty} x_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \ = \ x.$$

Para mostrar a unicidade, suponha que f admite um outro ponto fixo, digamos $y \in A$. Então, pela definição de contração, segue que

$$||x - y|| \ = \ ||f(x) - f(y)|| \leq \ \beta||x - y||, \ \text{ onde } \ 0 \leq \beta < 1,$$

ou seja,

$$||x - y|| - \ \beta||x - y|| \leq 0 \ \Rightarrow \ (1 - \beta)||x - y|| \leq 0.$$

Como $1 - \beta > 0$, segue que

$$||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Portanto, o ponto fixo existe e é único. $\square$

2 Teorema da Função Implícita

Considere $f : U \to \mathbb{R}$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para $c \in \mathbb{R}$ fixado, dizemos que a equação

$$f(x, y) = c$$

define y implicitamente como uma função de x quando existe uma função $\phi : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = c \iff y = \phi(x).$$

Observe que neste caso,

$$f(x, \phi(x)) = c$$

ou equivalentemente, $f^{-1}(c)$ é o gráfico da função ϕ.

Exemplo 2.0.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y$ e considere $c \in \mathbb{R}$. Claramente, a equação $f(x, y) = c$, ou seja, $x^2 + y = c$, define implicitamente a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = -x^2 + c$.

Em muitos casos, uma equação do tipo $f(x, y) = c$ define implicitamente uma função $y = \phi(x)$ apenas localmente. Vejamos o exemplo:

Exemplo 2.0.2. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $c = 1$, temos que a equação $x^2 + y^2 = 1$, não define y como função de x pois, por exemplo, para cada $x \in (-1, 1)$ existe dois valores de y satisfazendo $x^2 + y^2 = 1$. No entanto, se consideramos f definida em $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$ a equação define implicitamente a função $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

O Teorema da Função Implícita nos dá uma condição suficiente para garantir que uma equação define localmente uma função implícita. Uma versão para espaços euclidianos é inicialmente apresentada nos cursos de Análise no $\mathbb{R}^n$, onde considerando uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ sendo um aberto e supondo que $(x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é invertível, então existe uma aplicação $\phi : V \to W$ tal que

$$f(x, \phi(x)) = 0,$$

onde $V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ são abertos contendo x_0 e y_0, respectivamente. Além disso, a regularidade de ϕ é a mesma da aplicação f.

A seguir apresentamos uma versão mais geral deste resultado, a saber, o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach.

Teorema 2.0.5. *(Teorema da Função Implícita) Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados e suponha que Y é um espaço de Banach. Considere $A \subset X \times Y$ um aberto e $f : A \longrightarrow Z$ uma aplicação de classe C^1, satisfazendo as seguintes condições:*

i) $f(x_0, y_0) = 0$ *para algum* $(x_0, y_0) \in A$;

ii) $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1} : Z \to Y$ *existe e é contínua.*

Então, existe uma única a aplicação contínua $y = \phi(x) : U \subset X \longrightarrow V \subset Y$ tal que

$$f(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in U \ \text{e} \ \phi(x_0) = y_0,$$

onde U e V são vizinhanças de x_0 e y_0, respectivamente. Além disso, ϕ é diferenciável em x_0 e

$$D\phi(x_0) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \phi(x_0))\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \phi(x_0)). \tag{2.1}$$

Demonstração. Por simplicidade denotaremos

$$T := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por hipótese T é invertível, logo, podemos definir a aplicação $h : A \longrightarrow Y$ por

$$h(x, y) = y - T^{-1} f(x, y). \tag{2.2}$$

Derivando (2.2) com relação a y, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Logo,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = I - T^{-1} T = 0 \tag{2.3}$$

e

$$h(x_0, y_0) = y_0 - T^{-1} 0 = y_0.$$

Como $\frac{\partial h}{\partial y}$ é contínua em (x_0, y_0) segue-se que existem vizinhanças U_1 de x_0 e V de y_0 tais que se $(x, y) \in U_1 \times V$, então

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)\right\| \leq 1/2$$

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $V = B_r[y_0]$, e segue da última desigualdade e de (2.3) que

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right\| \leq 1/2, \quad \text{para todo } (x,y) \in U_1 \times B_r[y_0].$$

Uma vez que h é contínua, existe uma vizinhança $U \subset U_1$ de x_0 tal que para $x \in U$, tem-se

$$||h(x,y_0) - h(x_0,y_0)|| \leq r/2$$

ou ainda

$$||h(x,y_0) - y_0|| \leq r/2 \text{ para todo } x \in U. \tag{2.4}$$

Usando a Desigualdade do Valor Médio temos que se $y_1, y_2 \in V$

$$||h(x,y_1) - h(x,y_2)|| \leq \sup_{y \in V} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)||||y_1 - y_2|| \leq 1/2||y_1 - y_2||, \quad \text{para todo } x \in U_1. \tag{2.5}$$

Fixemos agora um ponto $x \in U$ e definimos $h_x : V \longrightarrow V$ por

$$h_x(y) = h(x,y).$$

Mostremos inicialmente que a aplicação h_x está bem definida. De fato, usando (2.4) e (2.5), temos que se $y \in V$, então

$$\begin{aligned} ||h_x(y) - y_0|| &= ||h(x,y) - h(x,y_0) + h(x,y_0) - y_0|| \\ &\leq ||h(x,y) - h(x,y_0)|| + ||h(x,y_0) - y_0|| \\ &\leq 1/2||y - y_0|| + r/2 \leq r/2 + r/2 = r. \end{aligned}$$

Portanto, $h_x(V) \subset V$.

Observe que pela desigualdade (2.5) temos

$$||h_x(y_1) - h_x(y_2)|| = ||h(x,y_1) - h(x,y_2)|| \leq 1/2||y_1 - y_2|| \text{ para todo } y_1, y_2 \in V.$$

Portanto, h_x é uma contração e sendo o conjunto V um espaço métrico completo, concluímos pelo Teorema do ponto fixo de Banach que h_x possui um único ponto fixo $y = y(x)$.

Podemos então definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \phi \; : \; U &\longrightarrow \quad V \\ x &\longmapsto \phi(x) = y \end{aligned}$$

onde y é o único ponto fixo da função h_x.

Note que $h_{x_0}(y_0) = h(x_0, y_0) = y_0$ e, assim, $\phi(x_0) = y_0$, ou seja,

$$f(x_0, \phi(x_0)) = f(x_0, y_0) = 0.$$

Mais geralmente, se $x \in U$

$$\phi(x) = h_x(\phi(x)) = h(x, \phi(x)) = \phi(x) - T^{-1} f(x, \phi(x)),$$

de onde segue que

$$T^{-1} f(x, \phi(x)) = 0,$$

ou ainda,

$$f(x, \phi(x)) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in U.$$

Na verdade, todas as soluções de $f(x, y) = 0$ são da forma $(x, \varphi(x)), \forall x \in U$. Pois se $f(x, y) = 0$, então $h_x(y) = h(x, y) = y - T^{-1} f(x, y) = y$, e daí, $y = \phi(x)$.

Vejamos agora que ϕ é uma aplicação contínua em U. De fato, seja $x \in U$ e $\epsilon > 0$. Sendo h contínua, temos que, fixado $y \in V$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in U, \; ||z - x|| < \delta \; \Rightarrow \; ||h(z, y) - h(x, y)|| < \epsilon/2.$$

Em particular, para $y = \phi(x)$ temos

$$z \in U, \; ||z - x|| < \delta \; \Rightarrow \; ||h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))|| < \epsilon/2. \tag{2.6}$$

Note que, usando a Desigualdade Triangular e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} ||\phi(z) - \phi(x)|| &= ||h_z(\phi(z)) - h_x(\phi(x))|| = ||h(z, \phi(z)) - h(x, \phi(x))|| \\ &\leq ||h(z, \phi(z)) - h(z, \phi(x))|| + ||h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))|| \\ &\leq 1/2||\phi(z) - \phi(x)|| + ||h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))||. \end{aligned}$$

Logo

$$1/2||\phi(z) - \phi(x)|| \leq ||h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))||. \tag{2.7}$$

Portanto, seque de (2.6) e (2.7) que, se $z \in U, \; ||z - x|| < \delta$, então

$$||\phi(z) - \phi(x)|| \leq 2||h(z, \phi(x)) - h(x, \phi(x))|| < \epsilon,$$

provando a continuiade de ϕ.

Finalmente, provaremos que ϕ é diferenciável em x_0 e vale (2.1).

Pela diferenciabilidade de f em (x_0, y_0) temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \varphi(h, k),$$

onde $\frac{||\varphi(h,k)||}{||(h,k)||} \to 0$ quando $||h|| \to 0$ e $||k|| \to 0$. Seja $k = \phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ e sendo $y_0 = \phi(x_0)$, temos

$$f(x_0 + h, \phi(x_0 + h)) - f(x_0, \phi(x_0)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \varphi(h, k).$$

Mas, $f(x, \phi(x)) = 0$, daí

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \varphi(h, k).$$

Aplicando T^{-1}, onde $T := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, obtemos

$$-T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h - k = T^{-1}\varphi(h, k).$$

Ou seja,

$$k + T^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h = -T^{-1}\varphi(h, k),$$

ou ainda,

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h = -T^{-1}\varphi(h, k)$$

Portanto para provar (2.1), basta justificar que $\frac{||T^{-1}\varphi(h,k)||}{||h||} \to 0$, quando $||h|| \to 0$. Para isto, note que

$$\frac{||T^{-1}\varphi(h, k)||}{||h||} = \frac{||k||||T^{-1}\varphi(h, k)||}{||k||||h||} \le ||k|| \left\|T^{-1}\right\| \left\|\frac{\varphi(h, k)}{||k||||h||}\right\|$$

Observe que se $||h|| \to 0$, então $||k|| \to 0$ e, consequentemente, $\frac{||\varphi(h,k)||}{||(h,k)||} \to 0$, logo,

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||T^{-1}\varphi(h, k)||}{||h||} = 0,$$

isto justifica a diferenciabilidade e conclui a prova do teorema. $\square$

3 Teorema da Função Inversa

O Teorema da Função Inversa é consequência do Teorema da Função Implícita e vice-versa. Assim, neste capítulo, demonstraremos o Teorema da Função Inversa aplicando o Teorema da Função Implícita. Em seguida, faremos outra aplicação do teorema resolvendo um problema envolvendo sistemas de funções.

Teorema 3.0.6. *(Teorema da Função Inversa): Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X$ aberto, $x_0 \in U$ e $f : U \to Y$ uma função contínua e de classe C^1, com $Df(x_0)$ invertível e com inversa limitada. Então existem $U_0 \subset U$ e $V_0 \subset Y$, vizinhanças abertas de x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, e uma função $g : V_0 \to U_0$ de classe C^1 tal que $g(f(x)) = x; x \in U_0$, e $f(g(y)) = y \in V_0$.*

Demonstração. Considere uma função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \times Y & \longrightarrow & Y \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x) - y \end{array}$$

observe que φ atende todas as hipóteses do Teorema da Função Implícita. Ou seja,

i) Devido o fato de f ser contínua e de classe C^1, φ também é contínua e de classe C^1.

ii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x)$ existe e é contínua em $U \times Y$, para todo $(x, y) \in U \times Y$.

iii) $\varphi(x_0, f(x_0)) = 0$ e $T = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, f(x_0))$ é invertível e tem inversa contínua.

Então, aplicando o Teorema da Função Implícita em φ, existem abertos $x_0 \in U$ e $f(x_0) \in V$ e uma função $g : V \to U$ de classe C^1 tais que $g(f(x_0)) = x_0$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação $\varphi(x, y) = 0$ são da forma $(g(y), y)$, ou seja, $\varphi(g(y), y) = 0, \forall y \in V$. Daí, $f(g(y)) - y = 0$ e portanto, $f(g(y)) = y, \forall y \in V$. □

3.1 Aplicação do Teorema da Função Implícita em sistema de funções não-lineares

Considere o sistema nas variáveis x, y, z, u, v

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases}$$

Mostre que as equações tem uma única solução $u = \varphi_1(x, y, z), v = \varphi_2(x, y, z)$ na vizinhança do ponto $(x, y, z, u, v) = (0, 1, 1, 1, 0)$ e encontre a matriz de $D_\phi(0, 1, 1, 1, 0)$, onde $\phi = (\varphi_1, \varphi_2)$.
Sejam $p = (x, y, z)$ e $q = (u, v)$. Então, a equação pode ser escrita na forma $f(p, q) = 0$. Logo,

$$J_2 f(p, q) = \begin{vmatrix} 5yu^4 & 5zv^4 \\ y^5 & z^5 \end{vmatrix} = 5yz^5u^4 - 5y^5zv^4.$$

Se $p_0 = (0, 1, 1)$ e $q_0 = (1, 0)$ então:

$$J_2 f(p_0, q_0) = 5 \cdot 1 \cdot 1^5 \cdot 1^4 - 0 = 5 \neq 0.$$

Portanto, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 1, 1, 0)$ tal que a equação $f(p, q) = 0$, possui uma única solução $q = \varphi(p)$, isto é,

$$(y, z) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)).$$

Logo $y = \varphi_1(x)$ e $z = \varphi_2(x)$. Assim,

$$D_1 f(p, q) = \begin{vmatrix} y^5 & 5xy^4 + u^5 & v^5 \\ 5x^4y & x^5 + 5y^4u & 5z^4v \end{vmatrix}, D_2 f(p, q) = \begin{vmatrix} 5u^4y & 5zv^4 \\ y^5 & 5z^4v \end{vmatrix}$$

$$D_1 f(p_0, q_{0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}, D_2 f(p_0, q_0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, D_2 f(p_0, q_0)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$D\varphi(p_0, q_0) = -\left[\ D_2 f(p_0, q_0\ \right]^{-1} \cdot D_1 f(p_0, q0) = -\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{24}{5} & 0 \end{vmatrix}.$$

Conclusão

Neste trabalho generalizamos o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e aplicamos na demonstração do Teorema da Função Inversa. Para tal êxito, foram necessários alguns conceitos visto em análise matemática, e em particular, em Espaços de Banach. O trabalho foi estruturado para que o leitor acompanhe passo a passo da demonstração e observasse que o Teorema da Função Implícita em Espaço de Banach está associado ao Teorema da Função Inversa. E que para encontrar uma única aplicação que satisfaça a equação

$$f(x, y(x)) = 0,$$

é necessário trabalharmos com vizinhanças de subconjuntos de Espaços Vetoriais Normados Completos, e claro, atender as condições da hipótese. Enfim, a proposta do trabalho foi apresentá-lo de forma clara e objetiva para que possa ajudar o leitor na pesquisa do teorema e de suas aplicações ou, simplesmente, conhecê-lo na sua forma generalizada.

Referências Bibliográficas

[1] DRIVER, Bruce K. Analysis Tools With Applications. University of California, San Diego, 2003.

[2] GROETSCH. C. W. Elements of Applicable Functional Analysis. Marcel Dek- ker, New York. 1980.

[3] KANTOROVICH, L. V., Akilov, G. P. - Functional Analysis in Normed Spaces. Pergamon Press, Oxford, 1982.

[4] KRANTZ, S. G. PARKS, H. R., The Implicit Function Theorem: History, Theory,and Applications, Birkhäuser Boston, 2th printing, 2003.

[5] KREYSZIG, E. - Introductory Functional Analysis With Application.New York, John Wiley e Sons, 1978.

[6] LANG, Serge. Real and Functional Analysis. New York, Springer, 1993.

[7] LIMA, E. L. Curso de Análise, volume 1, 11ª edição, Projeto Euclides, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 2006.

[8] LIMA, E. L. Curso de Análise, volume 2, 4ª edição, Projeto Euclides, Instituto Nacional de Matemàtica Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1981.

[9] LOURÊDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, Alexandro Marinho. LIMA, Osmundo Alves. Calculo Avançado. 1ª edição. Eduepb, Campina Grande, 2010.

[10] TESCHI.Gerald, Analysis Funcional não-Linear, (Notas). Endereço Eetrônico: http://www.mat.univie.ac.at/ gerald/ftp/book-nlfa/ nlfa.pdf

A Apêndice - Stefan Banach

Figura A.1: Stefan Banach

Stefan Banach (1892-1945)

O Matemático polonês Stefan Banach nasceu no dia 30 de março de 1892 em Cracóvia na Polônia e morreu 31 de agosto de 1945, na cidade de Lviv no mesmo país. introduziu, por volta de 1920, o conceito de espaços vetoriais normados completos. Estudou no Instituto Politécnico de Lviv, onde se doutorou em 1922. Foi nomeado professor da Universidade de Lviv em 1927. Dois anos depois, fundou, em colaboração com seu amigo e também matemático Hugo Steinhaus, a revista Studia Mathematica (Estudos matemáticos), em que se divulgaram as originais teorias de Banach e seus discípulos. Também introduziu os Espaços de Banach, que o matemático francês Maurice Fréchet denominaria, em 1928, de fato, Espaços de Banach. São espaços vetoriais em que se introduz uma norma, isto é, uma aplicação dos elementos do espaço nos (ou sobre os) reais, ou complexos, satisfazendo certos postulados. A essa norma fica associada uma distância, que permite falar em convergência. Caso as sequências de Cauchy convirjam para um elemento do próprio espaço, tem-se a completude, chegando-se, pois, aos espaços vetoriais normados completos. Um dos resultados mais conhecidos, obtidos por Banach, refere-se às aplicações lineares, contínuas e sobrejetivas de E sobre F, sendo E e F espaços de Banach. O teorema de Banach assegura que a imagem de um aberto, em E, é um aberto, em F. Igualmente importantes, embora menos divulgados, são os estudos de Banach a propósito de divergência de séries ortogonais. O tratado Teoria das Operações Lineares, de 1932, é a primeira obra em que se estudam, de maneira geral, os espaços vetoriais normados. Banach é considerado um dos maiores matemáticos do século 20, fundador da análise funcional moderna. Criou o grupo de Lviv que, ao lado do grupo de Varsóvia, colocou a matemática polonesa em posição de grande destaque no mundo moderno.