Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
Centro de Ciências e Tecnologia - CCT
Departamento de Matemática

A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações

Arthur Gilzeph Farias Almeida

Campina Grande, PB
Junho - 2011

Arthur Gilzeph Farias Almeida

A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como pré-requisito para a obtenção do título de Graduado no curso de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande, PB

Junho - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

Al64f Almeida, Arthur Gilzeph Farias.
A forma canônica de Jordan e algumas aplicações [manuscrito] / Arthur Gilzeph Farias Almeida. – 2011.
53 f.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Equações diferenciais - Aplicações. 2. Aprendizagem – Matemática. 3. Sistemas de Equações. I. Título.

21. ed. CDD 515.35

ARTHUR GILZEPH FARIAS ALMEIDA

A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, como pré-requisito para a obtenção do título de Graduado no curso de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 21 / junho / 2011

Banca Examinadora

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Luciana Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, aos meus pais, Mônica e Gilson, a minha namorada, Samara, e aos meus irmãos, Alfredo, Alisson e Iara, e a todos que sempre acreditaram que eu seria capaz de realizar este sonho.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela minha vida e pelas graças alcançadas ao longo desses anos.

A minha namorada, amiga e companheira de estudos, Samara, que com sua determinação e seu jeito carinhoso, me fez seguir em frente e poder realizar este trabalho.

A todos os meus familiares, aos meus irmãos, Alfredo, Alisson e Iara, que sempre me apoiaram e ajudaram nessa caminhada e em especial, aos meus pais, Mônica e Gilson, por tudo que me ensinaram na vida e todo carinho que me deram.

Aos Professores do Departamento de Matemática, pelos conhecimentos adquiridos, em especial ao Professor Aldo Trajano, por sua orientação e suas observações.

A todos os meus colegas de turma e aos amigos, em especial, a Luanna, Leandro, Janaína, Joselito e Elias, parceiros nos estudos, e amigos verdadeiros.

A todos que fazem a UEPB.

Resumo

A Forma Canônica de Jordan é um dos conceitos mais úteis e importantes na álgebra linear, este conteúdo nos oferece informações de grande valia sobre uma transformação linear, ou matriz. Neste contexto, estudaremos alguns conceitos, tais como: Soma Direta, Subespaços T-invariantes, Polinômio Minimais, Teorema de Cayley-Hamilton, entre outros, todos os resultados apresentados neste trabalho estão demonstrados de forma detalhada. Nosso objetivo é desenvolver a Forma Canônica de Jordan, observando, de modo minucioso, cada passo dessa construção, depois apresentaremos algumas aplicações deste conceito, uma delas, aplicada aos Sistemas de Equações Diferenciais Lineares e outra para obtermos raízes m-ésimas de operadores lineares.

Palavras-Chave: Forma Canônica de Jordan; Aplicações; Sistemas de Equações; raízes m-ésimas.

Abstract

The Jordan Canonical Form is one of the most useful and important concepts in linear algebra, this content provides us with valuable information on a linear transformation or matrix. In this context, we study some concepts, such as: Direct Sum, T-invariant Subspaces, minimal polynomial, Cayley-Hamilton theorem, among others, all results presented in this work are shown in detail. Our goal is to develop the Jordan Canonical Form, noting in minute detail, every step of construction, then present some applications of this concept, one of them applied to systems of Linear Differential Equations and another to obtain m-nth roots of linear operators.

Keywords: Jordan Canonical Form; applications; Systems of Equations; m-nth roots.

Sumário

Introdução

Como sabemos os conceitos de álgebra linear são extremamente úteis em diversas áreas, como por exemplo, no estudo de redes elétricas, criptografia, crescimento populacional por faixa etária, entre outras.

Dentre os conceitos da álgebra linear, podemos destacar o estudo dos operadores lineares $T : V \to V$, com V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, como um dos mais básicos e importantes. No estudo desses, muitas vezes nos deparamos com situações onde não sabemos quase nada sobre estes operadores, porém podemos encontrar a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$, onde $\mathcal{B}$ é uma base de V. Caso essa matriz esteja numa forma simples, obteremos muita informação com relação ao nosso operador, como por exemplo, se essa matriz estiver em sua forma diagonal.

Mas, nem sempre esta matriz estará em formato simples e não é todo operador linear que pode ser diagonalizado, neste caso, este trabalho vem propor uma saída para este problema, saída essa que chamamos de Forma Canônica de Jordan, este nome é uma referência a Marie Ennemond Camille Jordan (Lyon, 5 de janeiro de 1838 - Paris) foi um matemático francês, conhecido pelos seus trabalhos em teoria dos grupos e análise.

A Forma Canônica de Jordan é uma de muitas formas de se representar uma matriz, ou operador linear, através de outra matriz semelhante à original, neste caso a matriz obtida é quase diagonal, em que os únicos elementos não-nulos são aqueles da diagonal principal ou imediatamente abaixo (ou acima) dessa diagonal.

Nessa perspectiva, este trabalho tem por objetivos a construção da Forma Canônica de Jordan, bem como, mostrar sua utilidade no estudo de alguns conceitos matemáticos.

1 Conceitos Preliminares

1.1. Soma Direta

Em certos momentos no estudo dos espaços vetoriais, é conveniente escrevermos estes espaços como soma de dois, ou até mais, elementos de seus subespaços. Esta conveniência nos leva a uma definição importante aos nossos estudos futuros, a de Soma Direta.

Definição 1.1.1 *Sejam $W_1, W_2, ..., W_m$, subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Diremos que a soma $W_1 + W_2 + ... + W_m$ é direta quando*

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m) = \{0\},$$

para cada $i = 1, ..., m$ e indicaremos por $W_1 \oplus ... \oplus W_m$.

Além disso diremos que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é soma direta de $W_1, ..., W_m$ quando V puder ser escrito da forma $V = W_1 \oplus ... \oplus W_m$. Como veremos na proposição a seguir, esta soma é necessariamente escrita de maneira única.

Proposição 1.1.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam $W_1, ..., W_m$ subespaços de V. Então, $V = W_1 \oplus ... \oplus W_m$ se, e somente se, cada $v \in V$ for escrito de maneira única como uma soma $x_1 + x_2 + ... + x_m$ com $x_i \in W_i$ onde $i = 1, ..., m$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que $V = W_1 \oplus ... \oplus W_m$. Daí, cada $v \in V$ se escreve como soma de um elemento de cada W_i com $i = 1, ..., m$.
Suponha agora que $v \in V$, onde v pode ser escrito como

$$v = x_1 + x_2 + ... + x_m = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

com $x_i \in W_i$ e $i = 1, ..., m$.
Reorganizando esta última expressão temos

$$x_i - y_i = y_1 - x_1 + ... + y_{i-1} - x_{i-1} + y_{i+1} - x_{i+1} + ... + y_m - x_m$$

onde

$$(x_i - y_i) \in W_i$$

e

$$(y_1 - x_1 + ... + y_{i-1} - x_{i-1} + y_{i+1} - x_{i+1} + ... + y_m - x_m) \in (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m)$$

por definição de subespaço, para cada $i = 1, ..., m$, segue então que

$$x_i - y_i \in W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m) = \{0\},$$

ou seja, $x_i = y_i\ \forall i$. Como queríamos mostrar.

($\Leftarrow$) Suponha agora que cada elemento de V se escreve como soma de elementos de $W_1, W_2, ..., W_m$, então $V = W_1 + ... + W_m$.
Supondo que $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m) \neq \{0\}$, para algum $i = 1, ..., m$ e seja $w \neq 0 \in W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m)$ consequentemente $w \in V$, neste caso w pode ser escrito como $w = w + 0$, onde $0 \in (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m)$ e $w \in W_i$ e também como $w = 0 + w$, agora com $w \in (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m)$ e $0 \in W_i$.
O que contradiz o fato de unicidade da nossa hipótese.
Logo

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_m) = \{0\}$$

para cada $i = 1, ..., m$ e assim provamos o resultado.

$\blacksquare$

Proposição 1.1.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, não nulo, e W_1 um subespaço vetorial de V. Então existe um subespaço $W_2 \subset V$ tal que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Demonstração: Suponha $W_1 \neq V$. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ uma base de W_1, estendendo $\mathcal{B}$ à uma base de V, obtemos $\mathcal{D} = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$, onde $\mathcal{B}' = \{v_{m+1}, ..., v_n\}$ é uma base geradora de W_2. Mostremos então que W_2 satisfaz as nossas condições. Com efeito, como $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ então $V = W_1 + W_2$. Por outro lado como $\mathcal{D} = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ é l.i., segue que se $w \in W_1$, então $w \notin W_2$, ou seja, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo a proposição é válida.
Agora se $W_1 = V$, não há o que demonstrarmos, pois basta tomarmos $W_2 = 0$.

$\blacksquare$

Teorema 1.1.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Suponha que $W_1, W_2, ..., W_m$ são subespaços vetoriais de V e suponha que $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_m$ são bases de $W_1, W_2, ..., W_m$, respectivamente. Então, V é soma direta dos W_i se, e somente se, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_m$ é base de V.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in_i}\}$ uma base de cada W_i, para $i = 1, ..., m$.

Suponha que V é a soma direta dos W_i. Então, qualquer que seja $v \in V$, teremos $v = v_1 + v_2 + ... + v_m$, com $v_i \in W_i$. Como $\mathcal{B}_i$ é base de W_i, então cada v_i pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}_i$, segue que v é combinação linear de $\mathcal{B}$, pois $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_m$. Neste caso $V = [\mathcal{B}]$. Mostremos, agora, que $\mathcal{B}$ é l.i..

De fato, suponha que

$$a_{11}v_{11} + ... + a_{1n_1}v_{1n_1} + ... + a_{m1}v_{m1} + ... + a_{mn_m}v_{mn_m} = 0.$$

Observe que $a_{i1}v_{i1} + ... + a_{in_i}v_{in_i} \in W_i$ e que $0 = 0 + 0 + ... + 0$, com $0 \in W_i$. Mas, como V é soma direta dos W_i, então a soma é unica para 0, assim temos,

$$a_{i1}v_{i1} + ... + a_{in_i}v_{in_i} = 0 \text{ para cada } i = 1, ..., m.$$

Como cada base $\mathcal{B}_i$ é l.i., segue que cada $a_{ij} = 0$, logo $\mathcal{B}$ é l.i. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base de V.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{B} = \{v_{11}, ..., v_{1n_1}, ..., v_{m1}, ..., v_{mn_m}\}$ é base de V. Então, qualquer que seja $v \in V$, teremos

$$v = \underbrace{a_{11}v_{11} + ... + a_{1n_1}v_{1n_1}}_{v_1,} + \underbrace{...}_{,...,} + \underbrace{a_{m1}v_{m1} + ... + a_{mn_m}v_{mn_m}}_{,v_m}$$

ou seja, $v = v_1 + v_2 + ... + v_m$, onde cada $v_i \in W_i$. Mostremos agora que esta soma é única.

De fato, suponha que $v = v'_1 + v'_2 + ... + v'_m$, onde $v'_i \in W_i$.

Como $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in_i}\}$ é base de W_i, então $v'_i = b_{i1}v_{i1} + ... + b_{in_i}v_{in_i}$, logo

$$v = b_{11}v_{11} + ... + b_{1n_1}v_{1n_1} + ... + b_{m1}v_{m1} + ... + b_{mn_m}v_{mn_m}.$$

Mas como $\mathcal{B}$ é base de V, segue que $a_{ij} = b_{ij}$, para cada i e j. Portanto, podemos concluir que $v_i = v'_i$, para cada $i = 1, ..., m$ donde segue que a soma igual a v acima é única. Logo V é soma direta dos W_i.

■

1.2. Subespaços T-invariantes

Nesta seção trataremos dos subespaços T-invariantes, estes subespaços possuem propriedades importantes para o desenvolvimento deste trabalho, veremos também como se comporta as restrições de uma operador linear T a esses subespaços, assim como o próprio operador e suas propriedades.

Definição 1.2.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, com V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Se $T(w) \in W$, $\forall w \in W$, diremos que W é um subespaço T-invariante de V.*

Proposição 1.2.1 *Seja V um $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam $W \subseteq V$um subespaço de V e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos:*

(1) Os subespaços vetoriais de V, $NucT$ e ImT são T-invariantes.

(2) Se λ for um autovalor de T, então $Aut_T(\lambda)$ é T-invariante de V.

(3) Se W é um subespaço T-invariante, então a restrição de T a W é um operador linear em $\mathfrak{L}(W, W)$.

(4) W é $(\lambda Id - T)$-invariante se e só se W for T-invariante.

Demonstração: (1) Sabemos que $NucT = \{v \in V : T(v) = 0\}$, ou seja, para qualquer que seja $v \in NucT$ temos $T(v) = 0$, mas $0 \in NucT$, pois $NucT$ é um subespaço vetorial de V. Logo $NucT$ é um subespaço T-invariante de V.
Pela definição temos $ImT = \{u \in V : \exists v \in V \ com \ T(v) = u\}$, daí é evidente o resultado acima, pois seja $w \in ImT$ é claro que $w \in V$, segue então que $T(w)$ existe e $T(w) = u$ onde $u \in ImT$.

(2) Como λ é autovalor de T, segue que qualquer que seja $v \in Aut_T(\lambda)$ teremos $T(v) = \lambda v$. Verifiquemos então se $\lambda v \in Aut_T(\lambda)$. De fato, $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v)$, ou seja, $(\lambda v) \in Aut_T(\lambda)$. Logo $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V.

(3) Como W é T-invariante de V, então $T(w) \in W$, $\forall w \in W$. Mostremos que a restrição de T a W, tal sendo $T' : W \to W$, definida como $T'(w) = T(w)$, com $\forall w \in W$ e $T(w) \in W$, é um operador linear em $\mathfrak{L}(W, W)$. Com efeito, considere w_1 e $w_2 \in W$ e $\alpha \in W$. Daí,

$$T'(\alpha w_1 + w_2) = T(\alpha w_1 + w_2) = T(\alpha w_1) + T(w_2) = \alpha T(w_1) + T(w_2) = \alpha T'(w_1) + T'(w_2)$$

e portanto T' é um operador linear em $\mathfrak{L}(W, W)$.

(4) Suponha que W é $(\lambda Id - T)$-invariante, daí $(\lambda Id - T)(w) = w' \in W$, $\forall w \in W$. Temos $(\lambda Id - T)(w) = \lambda Id(w) - T(w) \Rightarrow \lambda w - T(w) = w' \Rightarrow T(w) = \lambda w - w'$. Ora,

$(\lambda w - w') \in W$, por definição de subespaços vetoriais.
Reciprocamente suponha agora que W é T-invariante, daí para todo $w \in W$, temos $T(w) = w' \in W$.
Mas,

$$T(w) = w' \Rightarrow \lambda Id(w) - T(w) = -w' - \lambda w \Rightarrow (\lambda Id - T)(w) = -(w' + \lambda w),$$

onde $-(w' + \lambda w) \in W$, por definição de subespaços vetoriais. O que prova o resultado.

■

Lema 1.2.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial T-invariante de V, com $dimW = m$ e $1 \leq m < n$. Seja $\mathcal{B}'$ uma base de W, se a estendermos para uma base $\mathcal{B}$ de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é escrita da seguinte forma:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T']_{\mathcal{B}'} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $[T']_{\mathcal{B}'}$ é a matriz da restrição de T em relação a W, isto é, a função $T' : W \to W$ dada por $T'(w) = T(w)$, $\forall w \in W$, $A \in \mathbb{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$ e 0 é a matriz nula em $\mathbb{M}_{(n-m)\times m}(\mathbb{K})$.

Demonstração: Seja $\mathcal{B}' = \{v_1, ..., v_m\}$ e $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$. Temos que a matriz da restrição T' é:

$$[T']_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

onde cada coluna i representa as coordenadas de cada vetor $T'(v_i) \in W$ onde $v_i \in \mathcal{B}'$, com $i = 1, ..., m$.
Vamos agora construir a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$, temos:

$$T(v_1) = a_{11}v_1 + ... + a_{m1}v_m + 0v_{m+1} + ... + 0v_n$$

$$T(v_2) = a_{12}v_1 + ... + a_{m2}v_m + 0v_{m+1} + ... + 0v_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$T(v_m) = a_{1m}v_1 + ... + a_{mm}v_m + 0v_{m+1} + ... + 0v_n$$

$$T(v_{m+1}) = a_{1(m+1)}v_1 + ... + a_{m(m+1)}v_m + a_{(m+1)(m+1)}v_{m+1} + ... + a_{n(m+1)}v_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n}v_1 + ... + a_{mn}v_m + a_{(m+1)n}v_{m+1} + ... + a_{nn}v_n.$$

Daí,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \dots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(m+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)_{n\times n}$$

Note que $[T]_{\mathcal{B}}$ é divida em blocos, então substituindo $[T']_{\mathcal{B}'}$ e chamando os blocos restantes de A e B, obtemos:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T']_{\mathcal{B}'} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}_{n\times n},$$

onde não é difícil ver que $0 \in \mathbb{M}_{(n-m)\times m}(\mathbb{K})$, $A \in \mathbb{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$.

■

Observação 1.2.1 *Se $T : V \to V$ é um operador linear e V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, tal que $V = W_1 \oplus W_2$ e W_1, W_2 subespaços T-invariantes, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$, com $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_i$ é uma base de W_i, será da forma:*

$$[T]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$ são referentes às restrições de T a cada W_i.

Neste caso dizemos que o operador T é soma direta dos operadores T_i, com $i = 1, 2.$, e escrevemos $T = T_1 \oplus T_2$.

Esta observação segue imediatamente do Lema 1.2.1.

A generalização da observação anterior nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 1.2.2 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial n-dimensional tal que $V = W_1 \oplus ... \oplus W_r$, onde cada W_i é um subespaço de V T-invariante,* *seja também $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ uma base de V, onde $\mathcal{B}_i$ é uma base de W_i, para cada $i = 1, ..., r$. Então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ se escreve da seguinte maneira:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix},$$

onde cada matriz $[T_i]_{\mathcal{B}i}$ é a matriz da restrição de T a cada subespaço W_i.

Demonstração: Cada $T_i : W_i \to W_i$ é um operador linear, pois são as restrições de T a cada W_i, definidos como $T_i(w) = T(w)\ \forall w \in W_i$, então teremos cada matriz $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$, formada pelas matrizes colunas das coordenadas de cada vetor $T_i(v_j) \in W_i$ onde $v_j \in \mathcal{B}_i$. Escrevendo esses vetores como combinção linear de $\mathcal{B}$, obtemos a matriz desejada.

■

Deste último Teorema temos que o operador linear T é soma direta dos operadores $T_1, ..., T_r$ e denotamos por $T = T_1 \oplus ... \oplus T_r$. Um outro fato que decorre do Teorema acima e que nos utilizaremos dele em demostrações futuras, é o Corolário abaixo.

Corolário 1.2.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se $T = T_1 \oplus ... \oplus T_r$, Então $p_T(x) = p_{T_1}(x)\ ...\ p_{T_r}(x)$.*

Demonstração: De fato, como T é soma direta dos operadores $T_1, ..., T_r$, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ será da forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}.$$

Calculemos agora o polinômio característico de T. Para isso,

$$p_T(x) = det(xId - [T]) = \begin{pmatrix} (xId_1 - [T_1]_{\mathcal{B}_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (xId_r - [T_r]_{\mathcal{B}_r}) \end{pmatrix}$$

onde Id_i representa a matriz identidade de ordem igual a cada matriz $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$. Observe que a matriz acima é separada por blocos, onde apenas os blocos da diagonal são diferentes da matriz nula, então por prorpiedade de determinante segue que

$$p_T(x) = det(xId_1 - [T_1]_{\mathcal{B}_1})\ ...\ det(xId_r - [T_r]_{\mathcal{B}_r}) = p_{T_1}(x)\ ...\ p_{T_r}(x).$$

Como queríamos. ■

1.3. Polinômios Minimais e o Teorema de Cayley-Hamilton

Nesta seção, trataremos dos polinômios minimais de um operador linear T, expressando suas características e mostrando sua relação com o polinômio característico do mesmo operador. Depois, trataremos do teorema de Cayley-Hamilton.

Definição 1.3.1 *Chamamos de polinômio minimal de um operador linear $T \in \mathfrak{L}(V, V)$, o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T) = 0$ $\forall v \in V$.*

Existem algumas relações importantes, entre o polinômio característico $p_T(x)$ e o polinômio minimal $m_T(x)$ de um operador liner T, como veremos a seguir.

Teorema 1.3.1 (Cayley-Hamilton) *Um operador linear $T \in \mathfrak{L}(V, V)$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$, ou seja, $p_T(T) = 0$.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{B}$ uma base de V e escreva $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Considere também $A' = (xId_n - A)$ e portanto $p_T(x) = detA'$. Por fim, seja $B = ad(A') = (b_{ij})$ a matriz adjunta a A. Pela definição de matriz adjunta, os elementos b_{ij} são cofatores da matriz $A' = xId_n - A$ e, portanto, representa polinômios em x de grau no máximo $n-1$, devido a ordem da matriz A'_{ij}. Escreva para cada par i, j, tal polinômio como

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}x + ... + b_{ij}^{(n-1)}x^{n-1} \tag{1.1}$$

Se denotarmos, em (1.1), para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$,

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots & b_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

teremos que $B = B^{(0)} + B^{(1)}x + ... + B^{(n-1)}x^{(n-1)}$.
Agora, escrevendo $p_T(x) = a_0 + a_1x + ... + x^n$ e usando o fato que

$$B.A' = ad(A').A' = (detA')Id_n = p_T(x)Id_n,$$

segue que

$$(B^{(0)} + B^{(1)}x + ... + B^{(n-1)}x^{(n-1)})(xId_n - A) = (a_0 + a_1x + ... + x^n)Id_n$$

Logo, comparando-se os coeficientes destes polinômios, temos que

$$\begin{cases} a_0 Id_n &=& -B_{(0)}A \\ a_1 Id_n &=& B_{(0)} - B_{(1)}A \\ & \vdots & \\ a_{n-1} Id_n &=& B_{(n-2)} - B_{(n-1)}A \\ Id_n &=& B_{(n-1)} \end{cases}$$

Multiplicando as equações acima por $Id_n, A, ..., A^{n-1}, A^n$, respectivamente, teremos

$$\begin{cases} a_0 Id_n &=& -AB_{(0)} \\ a_1 A &=& AB_{(0)} - A^2 B_{(1)} \\ & \vdots & \\ a_{n-1} A^{(n-1)} &=& A^{(n-1)} B_{(n-2)} - A^{(n)} B_{(n-1)} \\ A^{(n)} &=& A^{(n)} B_{(n-1)} \end{cases}$$

Somando agora essas novas equações, obteremos:

$$p_T(x) = a_0 Id_n + a_1 A + ... + A^n = 0$$

Em outras palavras o operador linear T é um zero de seu polinômio característico.

$\blacksquare$

Proposição 1.3.1 *O polinômio minimal $m_T(x)$ de T é um divisor do polinômio característico $p_T(x)$ de T.*

Demonstração: Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que $p_T(T) = 0$. Daí, pelo algoritmo da divisão de polinômios, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$p_T(x) = m_T(x)q(x) + r(x) \tag{1.2}$$

com $r(x) = 0$ ou o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $m_T(x)$.
Substituindo T em (1.2), obtemos: $r(T) = 0$, pois $p_T(T) = m_T(T) = 0$.
Suponha então que $r(x) \neq 0$, então $r(x)$ é um polinômio de grau menor que $m_T(x)$, que tem T como raíz, o que contradiz o fato de $m_T(x)$ ser o polinômio minimal.

Neste caso devemos abandonar a hipótese de $r(x) \neq 0$. Logo $r(x) = 0$ e portanto $m_T(x)$ divide $p_T(x)$.

$\blacksquare$

Teorema 1.3.2 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial n-dimensional, com $n \geq 1$ e $T \in \mathfrak{L}(V, V)$. Então, os polinômios característico e minimal de T têm as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.*

Demonstração: Sejam $p_T(x)$ o polinômio característico, $m_T(x)$ o polinômio minimal de T e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostremos que $p_T(\alpha) = 0$ se e somente se $m_T(\alpha) = 0$.

De fato, primeiramente suponha que α seja um autovalor de T, ou seja, α é raíz de $p_T(x)$, ou ainda, $p_T(\alpha) = 0$. Daí, existe $v \in V$ e $v \neq 0$, tal que $T(v) = \alpha v$. Observe que $T^2(v) = T(T(v)) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha^2 v$, com raciocínio análogo, teremos

$$T^i(v) = \alpha^i v, \tag{1.3}$$

para cada $i \geq 1$.

Escrevendo então $m_T(x)(v) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ e por (1.3), teremos:

$$0 = m_T(T)(v) = (T^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i T^i)(v) = (\alpha^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \alpha^i)v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \alpha^i = 0,$$

pois $v = 0$. Donde segue que, $m_T(\alpha) = 0$, e portanto α é uma raiz de $m_T(x)$.

Reciprocamente, suponha que $m_T(\alpha) = 0$. Então, $m_T(x) = (x - \alpha)q(x)$, onde $q(T) \neq 0$, pois $m_T(x)$ é o polinômio minimal de T. Daí, existe $u \in V$ tal que $q(T)(u) \neq 0$. Fazendo $v = q(T)(u)$, teremos:

$$0 = m_T(T)(u) = (T - \alpha Id)(q(T)(u)) = (T - \alpha Id)(v)$$

donde segue que v é autovetor de T associado ao autovalor α. Portanto, $p_T(\alpha) = 0$.

■

2 Forma Canônica de Jordan

Neste capítulo, veremos uma das formas mais simples de representação matricial de um operador linear T, conhecida como a Forma Canônica de Jordan, tal representação é o objetivo principal deste trabalho.

Para isto, introduziremos primeiramente, mais alguns conceitos importantes.

2.1. Operadores Nilpotentes

Definição 2.1.1 *Um operador linear $T : V \to V$ é chamado de nilpotente, se existir um inteiro positivo m, tal que $T^m = 0$. O menor índice com esta propriedade, será denotado como índice de nilpotência.*

Da mesma forma, uma matriz quadrada A é dita nilpotente quando $A^m = 0$, para algum inteiro positivo m.

Teorema 2.1.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então T pode ser decomposto, de maneira única, em uma soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível.*

Demonstração: Considere T^l, $l \geq 1$, daí teremos as seguintes inclusões, de subespaços de V,

$$NucT \subseteq NucT^2 \subseteq NucT^3 \subseteq ... \subseteq NucT^l \subseteq ... \subseteq V,$$

pois, seja $v \in NucT^n$, então $T^n(v) = 0$ e $T^{n+1}(v) = T(T^n(v)) = T(0) = 0$, o que mostra que $NucT^n \subseteq NucT^{n+1}$.

Porém como a dimensão de V é finita, então a sequência acima estaciona, ou seja, existe um $m > 0$ tal que $NucT^m = NucT^{m+1} = ... = NucT^{m+j}$. Seja m o menor inteiro

com esta propriedade.
Mostremos então que $V = W_1 \oplus W_2$, com $W_1 = NucT^m$ e $W_2 = ImT^m$.

Com efeito, primeiramente note que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, pois se $v \in W_1 \cap W_2$ então $v \in W_1$ teremos $T^m(v) = 0$ e $v \in W_2$ irá existir $w \in V$ tal que $T^m(w) = v$. Logo,

$$0 = T^m(v) = T^m(T^m(w)) = T^{2m}(w) \Rightarrow w \in NucT^{2m} = NucT^m,$$

segue que $v = T^m(w) = 0$.

Agora como $T^m : V \to V$ é um operador linear, então pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$dimV = dimNucT^m + dimImT^m. \tag{2.1}$$

Por outro lado, temos ,

$$dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2), \tag{2.2}$$

e como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, podemos concluir, de (2.1) e (2.2), que

$$dimV = dimW_1 + dimW_2 = dim(W_1 + W_2)$$

e, portanto, $V = W_1 \oplus W_2$.

Considere agora as restrições $T_1 = T|_{W_1}$ e $T_2 = T|_{W_2}$ de T a W_1 e T a W_2, respectivamente. Então, podemos afirmar que $T = T_1 \oplus T_2$. Nos resta agora mostrar que T_1 é nilpotente e que T_2 é invertível.

Como $T_1(w) = T(w) \Rightarrow T_1^m(w) = T^m(w) = 0$, $\forall w \in W_1$, logo T_1 é nilpotente. Agora, se $0 \neq v \in W_2$, então existe $v' \in V$ tal que $v = T^m(v')$.
Se $T_2(v) = 0$, então

$$0 = T_2(v) = T_2(T^m(v')) = T^{m+1}(v')$$

donde segue que, $v' \in W_1$ e $v = T^m(v') = 0$. Logo, T_2 é injetora e como é um operador linear, então T_2 é um isomorfismo e consequentemente invertível. Mostremos agora a unicidade desta soma.

De fato, suponha que $V = U_1 \oplus U_2$, onde U_1 e U_2 são subespaços T-invariantes, $T_1' = T|_{U_1}$ é nilpotente de índice m' e $T_2' = T|_{U_2}$ é invertível. Mostremos então que $U_1 = W_1 = NucT^m$ e que $U_2 = W_2 = ImT^m$.
Sejam $M = max\{m, m'\}$ e $w_1 \in W_1$. Segue que $w_1 = u_1 + u_2$, com $u_i \in U_i$, onde $i = 1, 2$. Então,

$$0 = T^M(w_1) = T^M(u_1 + u_2) = T^M(u_1) + T^M(u_2) = T^M(u_2),$$

pois $T|_{U_1}$ é nilpotente de índice m'.
Como $T|_{U_2}$ é invertível, segue então que $u_2 = 0$, logo $w_1 = u_1$ e, portanto, $W_1 \subseteq U_1$. Da mesma forma, seja $u_1 \in U_1$. Segue que $u_1 = w_1 + w_2$, com $w_i \in W_i$, onde $i = 1, 2$. Então,

$$0 = T^M(u_1) = T^M(w_1 + w_2) = T^M(w_1) + T^M(w_2) = T^M(w_2),$$

pois $T|_{W_1}$ é nilpotente.
Como $T|_{W_2}$ é invertível, temos que $w_2 = 0$ e, portanto, $U_1 \subseteq W_1$. Podemos então concluir que $U_1 = W_1 = NucT^m$.

Seja agora $w_2 \in W_2$. Como $W_2 = ImT^m$, então existe $v \in V$ tal que $T^m(v) = w_2$. Façamos então $v = u_1 + u_2$, onde $u_i \in U_i$. Daí,

$$w_2 = T^m(v) = T^m(u_1 + u_2) = T^m(u_1) + T^m(u_2) = T^m(u_2),$$

pois, $u_1 \in NucT^m = U_1$.
Como U_2 é T-invariante, temos $w_2 \in U_2$ e, portanto, $W_2 \subseteq U_2$.
Seja agora $u_2 \in U_2$ e escreva-o como $u_2 = w_1 + w_2$, onde $w_i \in W_i$, com $i = 1, 2$.
Assim, $w_1 = u_2 - w_2 \in U_1 \cap U_2$, pois w_1 é combinação linear de vetores de U_2.
Como $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, segue então que $u_2 = w_2$ e, portanto, $U_2 \subseteq W_2$.
Logo $U_2 = W_2 = ImT^m$, e assim fica provado a unicidade destes conjuntos.

$\blacksquare$

Os resultados que seguem serão, ainda mais, importantes para que possamos tratar da forma canônica de Jordan.

Proposição 2.1.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente de índice $m \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então:*

(1) $\lambda = 0$ é o único autovalor de T.

(2) O conjunto $\{v, T(v), ..., T^{m-1}(v)\}$ é l.i..

(3) Existe um subespaço T-invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde $U = [v, T(v), ..., T^{m-1}(v)]$.

(4) A restrição $T|_W : W \to W$ é um operador nilpotente, com índice de nilpotência $m' \leq m$.

Demonstração: (1). Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T. Mostremos então que λ é igual a zero. De fato, como λ é autovalor de T, então $T(v) = \lambda v$, com $v \neq 0$.
Daí,

$$0 = T^m(v) = \lambda^m v \Rightarrow \lambda^m v = 0 \Rightarrow \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

(2). Suponha que $\{v, T(v), ..., T^{m-1}(v)\}$ seja l.d.. Então existem $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$, nem todos nulos, tais que

$$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + ... + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0.$$

Seja l o menor índice tal que $\alpha_l \neq 0$, logo

$$\alpha_l T^l(v) + \alpha_{l+1} T^{l+1}(v) + ... + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0, \tag{2.3}$$

pois os α_i, $i < l$, são todos nulos.
Podemos reescrever (2.3) como

$$\begin{aligned} T^l(v) &= -\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_l} T^{l+1}(v) - ... - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_l} T^{m-1}(v) \\ &= T^{l+1}\left(\underbrace{-\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_l} v - ... - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_l} T^{m-l-2(v)}}_{v'} \right) \end{aligned}$$

portanto $T^l(v) = T^{l+1}(v')$. Logo temos,

$$\begin{aligned} T^{m-1}(v) &= T^{m-(l+1)}(T^l(v)) \\ &= T^{m-(l+1)}(T^{l+1}(v')) \\ &= T^m(v') = 0 \end{aligned}$$

pois m é o índice de nilpotência de T.

Portanto $T^{m-1}(v) = 0$, o que contradiz a hipótese de $T^{m-1}(v) \neq 0$.

(3). Note, primeiramente, que $U = [v, T(v), ..., T^{m-1}(v)]$ é T-invariante, pois seja $u \in U$, então $u = \gamma_0 v + \gamma_1 T(v) + ... + \gamma_{m-1} T^{m-1}(v)$, com $\gamma_0, ..., \gamma_{m-1} \in \mathbb{K}$ daí,

$$\begin{aligned} T(u) &= \gamma_0 T(v) + \gamma_1 T^2(v) + ... + \gamma_{m-2} T^{m-1}(v) + \underbrace{\gamma_{m-1} T^m(v)}_{0} \\ &= \gamma_0 T(v) + \gamma_1 T^2(v) + ... + \gamma_{m-2} T^{m-1}(v) \\ &= u' \in U. \end{aligned}$$

Mostremos por indução sobre o índice de nilpotência de T.
Se $m = 1$, então $T = 0$ e segue imediatamente o resultado.
Supondo que para $(m-1)$ o resultado é válido, iremos mostrar que este vale para m. Pela

Proposição 1.2.1(1), temos que ImT é T-invariante, sabemos ainda que a restrição de T a ImT, $T|_{ImT}$ é nilpotente de índice $(m-1)$, pois

$$T^{m-1}(T(v)) = T^m(v) = 0 \quad e \quad T^{m-2}(T(v_0)) = T^{m-1}(v_0) \neq 0$$

daí, pela hipótese de indução temos

$$ImT = U_1 \oplus W_1, \quad com \quad U_1 = [T(v), ..., T^{m-1}(v)] = T(U)$$

onde W_1 é um subespaço T-invariante de V. Para conseguirmos nosso objetivo, que é construímos W como no enunciado, primeiramente vamos considerar

$$W_2 = \{w \in V : T(w) \in W_1\}.$$

Afirmação 1. $V = U + W_2$.
De fato, para $u \in V$, teremos $T(u) \in ImT = U_1 \oplus W_1$. Daí, $T(u) = u' + w'$, onde $u' \in U_1$ e $w' \in W_1$. Segue que $u' = T(u'')$, com $u'' \in U$ e, portanto, $T(u) = T(u'') + w'$ isso implica que $T(u - u'') = w' \in W_1$. Da definição de W_2 temos que $(u - u'') \in W_2$. Logo, $u = u' + (u - u'') \in U + W_2$. E assim fica provado a validade desta afirmação.
Afirmação 2. $U \cap W_1 = \{0\}$.
Considere $u \in U \cap W_1$. Note, inicialmente, que $T(u)$ pertence a U_1 e a W_1, U_1 e W_1 são subespaços T-invariantes de V. Como $ImT = U_1 \oplus W_1$, segue que $T(u) = 0$.
Porém, como $u \in U$, existem escalares $\lambda_0, ..., \lambda_{m-1} \in \mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i T^i(v)$. Logo

$$0 = T(u) = T\left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i T^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i T^{i+1}(v) = \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_i T^{i+1}(v).$$

pois, $T^m(v) = 0$.
Como $\{T(v), ..., T^{m-1}(v)\}$ é um conjunto l.i., segue então que $\lambda_0 = ... = \lambda_{m-2} = 0$ e, portanto, $u = \lambda_{m-1} T^{m-1}(v) \in U_1$. Logo, $u \in U_1 \cap W_1 = \{0\}$ e a afirmação está provada.
Da afirmação 2, temos que $(U \cap W_2) \cap W_1 = \{0\}$ e, como $W_1 \subset W_2$, pois dado $w \in W_1$, como W_1 é T-invariante, temos $T(w) \in W_1$, o que implica, por definição de W_2, que $w \in W_2$, e ainda $(U \cap W_2) \subset W_2$. Segue então que existe um subespaço W_3 tal que

$$W_2 = (U \cap W_2) \oplus W_1 \oplus W_3 \tag{2.4}$$

Afirmamos que $W = W_1 \oplus W_3$ é o subespaço que queríamos. De fato, como $W \subseteq W''$ e $W \cap (U \cap W_2) = \{0\}$, segue que $U \cap W = \{0\}$. Por outro lado, da afirmação 1 e de (2.4), temos que $V = U + W_2$ e $W_2 = (U \cap W_2) \oplus W$, logo $v = u + (h + w)$ com $u \in U$, $h \in (U \cap W_2)$ e $w \in W$, podemos dizer que $v = (u + h) + w$, onde $(u + h) \in U$ e $w \in W$

e, portanto, $V = U + W$. Segue então que $V = U \oplus W$, como queríamos.
Nos resta, apenas, mostrar que $W = W_1 \oplus W_3$ é T-invariante. Com efeito, como $W \subseteq W_2$, teremos que $T(W) \subseteq T(W_2) \subseteq W_1 \subseteq W$, o que completa nossa demonstração.

(4). Sabemos que $T^m(v) = 0\ \forall v \in V$ e que $T|_W(w) = T(w)\ \forall w \in W$. Daí,

$$\begin{aligned} T|_W(w) = T(w) \quad &\Rightarrow \quad T|_W^m(w) = T^m(w) = 0 \\ &\Rightarrow \quad T|_W^m(w) = 0 \end{aligned}$$

Logo $T|_W$ é nilpotente de índice no máximo m, ou seja, de índice $m' \leq m$.

■

Teorema 2.1.2 *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos $t, m_1, m_2, ..., m_t$ e vetores $v_1, ..., v_t \in V$ tais que*

(1) $m = m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_t$.

(2) O conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), ..., T^{m_1-1}(v_1), ..., v_t, T(v_t), ..., T^{m_t-1}(v_t)\}$ é uma base de V.

(3) $T^{m_i}(v_i) = 0$, para cada $i = 1, ..., t$.

Demonstração: Como T é nilpotente de índice m, então $T^{m-1} \neq 0$, daí existe $v_1 \in V$ tal que $T^{m-1}(v_1) \neq 0$. Pela Proposição 2.1.1, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, T(v_1), ..., T^{m-1}(v_1)\}$ é l.i. e $V = W_1 \oplus W_2'$, onde W_1 é gerado por $\mathcal{B}_1$ e W_2' é T-invariante. Escreva $m = m_1$. Note que $T|_{W_2'}$ é também nilpotente, digamos de índice $m_2 \leq m_1$. Daí pelo mesmo argumento acima, existe $v_2 \in W_2'$ tal que $\mathcal{B}_2 = \{v_2, T(v_2), ..., T^{m_2-1}(v_2)\}$ é l.i. e $W_2' = W_2 \oplus W_3'$, onde W_2 é gerado por $\mathcal{B}_2$ e W_3' é T-invariante.

Repetindo-se o argumento acima, como V tem dimensão finita, obtemos então os valores $t, m_1, m_2, ..., m_t$ como enuncia o teorema.

■

2.2. A Forma Canônica de Jordan

Observação 2.2.1 *Suponha que $T : V \to V$ é um operador linear nilpotente de índice m, pela Proposição 2.1.1, sabemos que $\mathcal{B} = \{v, T(v), .., T^{m-1}(v)\}$ é l.i., para algum $v \in V$.*

Se $dimV = m$ então será perfeito, pois o conjunto $\mathcal{B}$ formará uma base de V e a matriz de T com relação a esta base será do tipo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m} .$$

Observação 2.2.2 *Suponha agora que $p_T(x) = (x - \lambda)^n$, daí, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, teremos $p_T(T) = (T - \lambda Id)^n = 0$ e, portanto o operador linear $(T - \lambda Id)$ será nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n então, usando a Observação acima, existirá uma base $\mathcal{B}$ de V, tal que a matriz de $(T - \lambda Id)$ com relação a esta base será da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = [T - \lambda Id]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} - \lambda [Id]_{\mathcal{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} + \lambda [Id]_{\mathcal{B}}$$

daí, a matriz de T na base $\mathcal{B}$ será da seguinte forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Observação 2.2.3 *Para um operador linear nilpotente $T : V \to V$, sejam $t, m_1, ..., m_t$ e $\mathcal{B}$ como no enunciado do Teorema 2.1.2. Então a matriz de T na base $\mathcal{B}$ é formada por blocos de Jordan $m_i \times m_i$ associados ao autovalor 0, do tipo*

$$J_{m_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_i},$$

ou seja, $[T]_{\mathcal{B}}$ será da seguinte forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_t}(0) \end{pmatrix}$$

onde os 0's indicam matrizes nulas.

As Observações 2.2.1 e 2.2.2, nos servem de justificativa para a próxima definição, já que as matrizes mostradas acima servirão como blocos de matrizes de operadores mais gerais.

Definição 2.2.1 *Chamamos de Bloco de Jordan $r \times r$ em λ, a matriz $J_r(\lambda) \in \mathbb{M}_r(\mathbb{K})$ que tem λ na diagonal principal e 1 em toda diagonal abaixo da principal, ou seja, é a matriz do tipo*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

Agora nos utilizaremos dos resultados já enunciados e demonstrados, para construir o principal objetivo deste capítulo, e de nosso trabalho, que é a chamada forma de Jordan.

Teorema 2.2.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, 2, ..., t$, temos*

(1) $dim U_i = m_i$;

(2) o subespaço U_i é T-invariante;

(3) a restrição do operador $(\lambda_i Id - T)$ *a* U_i *é nilpotente.*

Demonstração:

Para cada $i = 1, ..., r$, considere a transformação $T_i = (\lambda_i Id - T) : V \to V$. Pelo Teorema 2.1.1, $V = U_i \oplus W_i'$, com U_i e W_i' são T_i-invariantes e as restrições de T_i a U_i e a W_i' são nilpotentes e invetível, respectivamente. Como U_i e W_i' são T_i-invariantes, então pela Proposição 1.2.1(4), serão também T-invariantes.
Sejam $T|_{U_i} : U_i \to U_i$ e $T|_{W_i'} : W_i' \to W_i'$. Segue, do Corolário 1.2.1 e do Teorema 1.2.2, que $p_T(x) = p_{T|_{U_i}}(x)p_{T|_{W_i'}}(x)$.

(I) Observe que λ_i é o único autovalor de $T|_{U_i}$, pois como $(\lambda_i Id - T|_{U_i})$ é nilpotente, então só possui o zero como autovalor, logo $\lambda_i Id(v) - T|_{U_i}(v) = 0v$, para algum $0 \neq v \in U_i$, ou seja, $T|_{U_i}(v) = \lambda_i v$.

(II) Observe também que λ_i não é autovalor de $T|_{W_i'}$, pois $(\lambda_i Id - T|_{W_i'}) : W_i' \to W_i'$ é invertível, ou seja, $det[\lambda_i Id - T|_{W_i'}] \neq 0$.

De (I) e (II), concluímos que $p_{T|_{U_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. Segue da definição de polinômio característico, que $dimU_i = m_i$ e a intersecção $U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_r) = \{0\}$. Como $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_r)^{m_r}$, segue que

$$dimV = m_1 + ... + m_r = dimU_1 + ... + dimU_r,$$

ainda temos $U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_r) = \{0\}$, daí $dimV = dim(U_1 + ... + U_r)$ e, portanto, $V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$.

■

Com o auxílio do Teorema 2.2.1, podemos construir a Forma de Jordan de um operador linear.

Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_r)^{m_r}$, $r \geq 1$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$. Pelo Teorema 2.2.1, temos $V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$, onde as propriedades (1), (2) e (3) enunciadas no mesmo teorema, são satisfeitas.
Para cada $i = 1, ..., r$, considere $T|_{U_i} : U_i \to U_i$. Mais uma vez pelo Teorema 2.2.1, temos que $(T|_{U_i} - \lambda_i Id_{m_i})$ é nilpotente.
Pelas Observações 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, segue que existe uma base $\mathcal{B}_i$ de U_i e números $t_i, m_{i1} \geq m_{i2} \geq ... \geq m_{it_i}$ tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_{i2}}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_{it_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $i = 1, ..., r$ e $j = 1, ..., t_i$,

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_{ij} \times m_{ij}}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como a soma $U_1 \oplus ... \oplus U_r$ é direta, segue, pelo Teorema 1.1.1, que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ é base de V. Portanto,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}.$$

A matriz acima é chamada de *Forma de Jordan* associada a T.

Ainda nas mesmas considerações sobre T, r_i e m_{ij}, $i = 1, ..., t$ e $j = 1, ..., r_i$. Para cada $i = 1, ..., t$ e $j = 1, ..., r_i$, definamos o polinômio $q_{ij}(x) = (x - \lambda_i)^{m_{ij}}$, tal polinômio é dito *divisor elementar de T de multiplicidade m_{ij} associado a λ_i.*

Considere o bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ com $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que

$$(J_r(\lambda) - \lambda Id_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

é nilpotente de índice r, pois $(J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^r = 0$ e $(J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^{r-1} \neq 0$.

Sejam agora $\lambda \in \mathbb{K}$ e A a matriz $m \times m$ formada por blocos de Jordan $J_{r_1}(\lambda), ...,$ $J_{r_s}(\lambda)$ na diagonal e matrizes nulas no restante das entradas.

Se $r_1 \geq r_i$, $i = 1, ..., s$, teremos $(A - \lambda Id_m)^{r_1} = 0$ e $(A - \lambda Id_m)^{r_1 - 1} \neq 0$, pelas considerações feitas acima. Daí, segue que

$$q_{i1}(T_i) = (T_i - \lambda_i Id_{r_i})^{m_{i1}} = 0, \quad \forall i = 1, ..., t.$$

Como $T = T_1 \oplus ... \oplus T_t$, podemos concluir que o polinômio

$$q_{11}(x)q_{21}(x)...q_{t1}(x) = (x - \lambda_1)^{m_{11}}(x - \lambda_2)^{m_{21}}...(x - \lambda_t)^{m_{t1}},$$

anula T e, ainda que, nenhum outro de grau menor anulará T, portanto, pela Definição 1.3.1,

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_{11}}(x - \lambda_2)^{m_{21}}...(x - \lambda_t)^{m_{t1}},$$

é o polinômio minimal de T. Um fato importante é que os m_{i1} com $i = 1, ..., t$ define a ordem de pelo menos um dos blocos de Jordan associados ao autovalor λ_i.

A quantidade de blocos de Jordan de cada λ_i será determinado pela multiplicidade geométrica de cada λ_i.

Definição 2.2.2 *A dimensão do* $Nuc(T - \lambda_i Id)$ *é chamada de multiplicidade geométrica de* λ_i.

Ainda não sabemos as ordens de todos os blocos de Jordan, para isso, para cada $i = 1, ..., t$ e cada $k_i = 1, ..., m_{i1}$, calculemos a dimensão do $Nuc(T - \lambda_i Id)^{k_i}$. Denotemos cada um desses valores por d_{i,k_i}. Observe que $d_{i,0} = 0$, $\forall i$, pois $dimNuc(T - \lambda_i Id)^0 = dimNucId = 0$.

Seja n_{i,k_i} a quantidade de blocos de Jordan de ordem k_i associado ao autovalor λ_i, isto é, a quantidade de blocos da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i} .$$

temos que,

$$n_{i,m_{i1}} = d_{i,m_{i1}} - d_{i,m_{i1}-1}$$

e ainda que

$$n_{i,k_i} = 2d_{i,k_i} - d_{i,k_i+1} - d_{i,k_i-1}, \quad \forall k_i = 1, ..., m_{i1} - 1.$$

Com essas observações e com a ajuda do Teorema 2.2.1, podemos agora calcular a forma de Jordan de um operador linear $T : V \to V$ onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita.

Exemplo 2.2.1 *Seja* $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ *o operador linear dado por*

$$T(x, y, z, w) = (8x - y, 4x + 12y, 9z + 2w, 2z + 6w).$$

Com relação a base canônica $\mathcal{C}$ temos,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $p_T(x) = (x-10)^3(x-5)$. Podemos então definir o polinômio minimal $m_T(x)$ de T, a partir das seguintes possibilidades: $(x-10)(x-5)$,$(x-10)^2(x-5)$ ou $(x-10)^3(x-5)$. Observe que, $([T]_{\mathcal{C}} - 10Id_4).([T]_{\mathcal{C}} - 5Id_4) \neq 0$ e $([T]_{\mathcal{C}} - 10Id_4)^2([T]_{\mathcal{C}} - 5Id_4) = 0$, logo o polinômio $m_T(x) = (x-10)^2(x-5)$ é minimal. Isso significa que a forma de Jordan de T terá um bloco de Jordan $J_2(10)$ pois a raiz 10 tem multiplicidade 2 em $m_T(x)$. Segue então que

$$J_T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

é a forma de Jordan de T. Note que neste exemplo não necessitamos calcular as ordens dos blocos de Jordan restantes.

Exemplo 2.2.2 *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

vamos encontrar a sua forma de Jordan.

Temos, primeiramente, que $p_A(x) = (x-2)^5$ e $m_A = (x-2)^3$, são os seus polinômios característico e minimal, respectivamente.

Já sabemos que $m_{11} = 3$ e $\lambda_1 = 2$, agora para cada $k_1 = 1, ..., m_{11}$, calculemos a dimensão do $Nuc(A - \lambda_1 Id)^{k_1}$, (ou a nulidade da matriz $(A - \lambda_1 Id)^{k_1}$), descritos a seguir:

$$\begin{aligned} d_{1,0} &= 0 \\ d_{1,1} &= Nuc(A-2Id) &&= 2 \\ d_{1,2} &= Nuc(A-2Id)^2 &&= 4 \\ d_{1,3} &= Nuc(A-2Id)^3 &&= 5 \end{aligned}$$

Daí,

$n_{1,3} = d_{1,3} - d_{1,2} = 5 - 4 = 1$ *(1 bloco de ordem 3 associado a $\lambda_1 = 2$)*

$n_{1,1} = 2d_{1,1} - d_{1,2} - d_{1,0} = 4 - 4 - 0 = 0$ *(0 bloco de ordem 1 associado a $\lambda_1 = 2$)*
$n_{1,2} = 2d_{1,2} - d_{1,3} - d_{1,1} = 8 - 5 - 2 = 1$ *(1 bloco de ordem 2 associado a $\lambda_1 = 2$)*

Logo, a forma de Jordan é do tipo:

$$J_A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & & \\ 1 & 2 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & 2 & & \\ \hline & & & 2 & 0 \\ & 0 & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

3 Aplicações

Neste capítulo, trataremos de apresentar algumas aplicações relativas a Forma de Jordan, tentando assim mostrar como este resultado é de muita utilidade para certos cálculos.

3.1. Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Nossa primeira aplicação, trata de relacionar os conceitos da álgebra linear, mais especificamente, os conceitos sobre a forma de Jordan, com os conteúdos de equações diferenciais, de forma que possamos generalizar um caso de existência e unicidade para sistemas de equações diferenciais lineares.

Como estudamos em nossa formação acadêmica, o tipo mais simples de equação diferencial linear, é a equação de crescimento exponencial, ou seja, as equações do tipo

$$\dot{x}(t) = ax(t) \tag{3.1}$$

onde a é uma constante.

Neste tipo de equação, é muito fácil ver que $x(t) = e^{at}$ é uma solução, assim como qualquer outra do tipo $x(t) = e^{at}c$, onde c é uma constante arbitrária, sabe-se ainda que qualquer solução da equação (3.1) sempre será desta forma.

De fato, dada uma solução qualquer $x(t)$ da equação (3.1), diferenciando a expressão $e^{-at}x(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}x(t)) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t)$$

usando (3.1), temos

$$= -ae^{-at}x(t) + ae^{-at}x(t) = 0 \;\Rightarrow\; e^{-at}x(t) = c,$$

ou seja, $x(t) = e^{at}c$.

Esta solução é dita Solução Geral da equação, porém podemos ter unicidade de solução, para isso basta-nos especificar uma condição inicial, isto é, teremos o chamado *Problema de Valor Inicial*, ou (P.V.I.), que será da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Note que a solução deste (P.V.I.) ainda será do tipo $x(t) = e^{at}c$, como temos uma condição inicial, podemos determinar c e assim termos a unicidade de solução, ou seja, temos:

$$x(0) = e^{at}c \;\Rightarrow\; x(0) = c,$$

dái, a solução de (3.2) será única e dada por:

$$x(t) = e^{at}x(0).$$

Desta forma podemos chegar a um resultado importante nos estudos da equação, o teorema de existência e unicidade para P.V.I., cujo seu enunciado e sua demonstração encontram-se no Apêndice deste trabalho.

Agora, para o problema não-homogênio:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= ax(t) + h(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

com $h(t)$ definida e contínua num intervalo I tal que $t = 0 \in I$.

Neste caso, a solução é dada pela fórmula de variação de constantes, isto é, se $x(t)$ é solução de (3.3), então derivando $e^{-at}x(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-at}x(t)) &= -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) \\ &= -ae^{-at}x(t) + e^{-at}(ax(t) + h(t)) \\ &= e^{-at}h(t) \end{aligned}$$

integrando esta igualdade de 0 a t, teremos:

$$e^{-at}x(t) - e^{-a0}x(0) = \int_0^t e^{-as}h(s)ds$$

e, portanto, a solução é dada por

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-s)}h(s)ds.$$

Esta última expressão é conhecida como Fórmula de Variação das Constantes.

Como $h(t)$ está definida e é contínua no intervalo I tal que $t = 0 \in I$, então a fórmula de variação de constantes nos garante a existência e unicidade desta solução.

A partir daqui, iniciaremos realmente nossa aplicação, tendo como fato motivador, as observações acima citados. Como dito acima queremos generalizar estes conceitos para sistemas de equações diferenciais lineares, ou seja, queremos mostrar que $X(t) = e^{At}X_0$ é a solução do sistema de n-equações

$$\dot{X}(t) = AX(t) \tag{3.4}$$

onde,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

com a seguinte condição inicial

$$X(0) = X_0 \quad \in \quad \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Para isso, definamos inicialmente e^A, tendo como base o caso real, ou seja,

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + ... \tag{3.6}$$

que é convergente.

Daí,

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \tag{3.7}$$

e mostremos que a série (3.7) é convergente no espaço $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos, então, o $\mathbb{R}^n$ com seu produto interno e norma usuais, ou seja,

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n \quad e \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad com \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Observação. Usaremos tanto $x = (x_1, ..., x_n)$, como $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dependendo da ocasião.

Definamos a norma de um operador linear, (ou matriz $n \times n$), $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ por:

$$\|x\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{A(x)}{x} \right\| = \sup_{x \neq 0} \left\| A(\frac{x}{\|x\|}) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{3.8}$$

Para que (3.8) defina uma norma em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, precisamos mostrar, em primeiro lugar, que esse supremo é finito.

Mostremos este fato da seguinte forma.

Seja $a_1 = (a_{11}, ..., a_{1n}), ..., a_n = (a_{n1}, ..., a_{nn}) \in \mathbb{R}^n$ as linhas da matriz A, de modo que:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Daí, multiplicando A pelo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$A = \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_1, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\|Ax\| = \|(\langle a_1, x\rangle, ..., \langle a_n, x\rangle)\| = (\langle a_1, x\rangle^2 + ... + \langle a_n, x\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$.
Usando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver demonstração no Apêndice)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Temos que,

$$\|Ax\| \leq (\|a_1\|^2\|x\|^2 + ... + \|a_n\|^2\|x\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

o que implica

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq (\|a_1\|^2 + ... + \|a_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \neq 0$$

Logo,

$$\|A\| \leq (\|a_1\|^2 + ... + \|a_n\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Agora nos basta, apenas, mostrar as seguintes propriedades:

P1. $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

P2. $\|kA\| = |k|\|A\|$, $k \in \mathbb{R}$

P3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Desigualdade Triângular)

Demonstração: **P1.** Claro que $\|A\| \geq 0$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\|A\| = 0$. Temos

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| = 0$$

o que implica

$$0 \leq \|Ax\| \leq 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x \neq 0$$

Como $T(0) = 0$, então $T \equiv 0$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $A \equiv 0$, logo $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$, o que implica $\|A\| = 0$.

P2. Temos $A,\ B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ e $k \in \mathbb{R}$, então

$$\|kA\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(kA)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|k|\|A(x)\|}{\|x\|} = |k| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |k|\|A\|.$$

P3.

$$\|A + B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x) + B(x)\|}{\|x\|}$$

Aplicando a desigualdade triangular, obtemos

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x) + B(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|B(x)\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|,$$

ou seja,

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

$\blacksquare$

O espaço vetorial $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, pode ser considerado como $\mathbb{R}^{n^2}$, e a norma que definimos em (3.8) é equivalente a norma usual de $\mathbb{R}^{n^2}$. De fato, de (3.9) temos que

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq \sqrt{(a_{11}^2 + ... + a_{1n}^2 + ... + a_{n1}^2 + ... + a_{nn}^2)} \\ &\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|a_{ij}\| \end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora seja $\mathcal{C} = (e_1, ..., e_n)$ a base canônica $\mathbb{R}^n$, daí,

$$\|Ae_i\| = (a_{1i}^2, ..., a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq (a_{1i}^2, ..., a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i$$

ao somarmos todos os $i = 1, ..., n$ e da desigualdade $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (ver Apêndice), obtemos

$$\begin{aligned} n\|A\| &\geq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \|a_{ij}\| \end{aligned} \tag{3.11}$$

Das desigualdades (3.10) e (3.11), segue que a norma que definimos (3.8) é equivalente a norma usual do $\mathbb{R}^{n^2}$, ou seja,

$$\frac{1}{n}\|(a_{ij})\| \leq \|A\| \leq \|(a_{ij})\|.$$

Temos que $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial completo e a vantagem em considerar a norma (3.8) em vez da norma usual é que nesta norma temos a seguinte propriedade:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \tag{3.12}$$

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x = 0$, então $\|Ax\| = 0 = \|A\|\|x\|$.
Agora se $x \neq 0$, então $\|x\| \neq 0$. Daí,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Da desigualdade acima temos, $\|AB\| = \|A\|.\|B\|$.
Com efeito,

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\|.\|Bx\| \Rightarrow \|A(Bx)\| \leq \|A\|.\|B\|.\|x\|$$

como $\|x\| > 0$, segue que

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\| \tag{3.13}$$

Finalmente, temos

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n. \tag{3.14}$$

como resultado imediato de (3.13).

Como dito anteriormente, para que a série (3.7) defina a matriz exponencial e^A, é necessário que a mesma seja convergente. Para isto, façamos uso da desigualdade (3.14), daí teremos

$$\left\| \frac{A^n}{n!} + ... + \frac{A^{n+p}}{(n+p)!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!} + ... + \frac{\|A\|^{n+p}}{(n+p)!} \tag{3.15}$$

Note que, em (3.15), o segundo membro é formado por termos da série da função exponencial (3.6) que é convergente para todo real, em particular para $a = \|A\|$, portanto nossa série é de Cauchy em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, pois $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ é completo.

De modo análogo ao caso real, podemos justificar que a candidata à solução do sistema de equações lineares:

$$X_0 e^{At} = X_0 + AtX_0 + \frac{A^2t^2}{2!}X_0 + ... + \frac{A^nt^n}{n!}X_0 + ... \tag{3.16}$$

como e^{At} converge uniformimente para t em qualquer intervalo, podemos derivar (3.16) termo a termo, para obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}X_0) &= AtX_0 + \frac{A^2t^2}{2!}X_0 + \frac{A^3t^3}{3!}X_0 + ... + \frac{A^nt^n}{n!}X_0 + ... \\ &= \left[X_0 + AtX_0 + \frac{A^2t^2}{2!}X_0 + ... + \frac{A^nt^n}{n!}X_0 + ... \right] A \\ &= Ae^{At}X_0 \end{aligned}$$

Logo, $X(t) = e^{At}X_0$ está bem definida, satisfazendo o sistema (P.V.I.)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{array} \right. \tag{3.17}$$

A fórmula de variação das constantes também é válida, isto é, a solução do sistema não-homogênio

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + h(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{array} \right. , \tag{3.18}$$

é dada por

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}h(s)ds. \tag{3.19}$$

Apesar de $X(t) = e^{At}X(0)$ ser solução do (P.V.I.) (3.17), nossa aplicação não termina aqui pois, temos ainda a dificuldade de calcular as potências de A, para isto façamos uso da teria sobre a forma de Jordan.

Primeiramente, para calcularmos a expressão de e^A, vamos verificar algumas propriedades dessa matriz.

P4. Se M é uma matriz invertível então

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^{A}M$$

P5. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$, $\forall t \Leftrightarrow A$ comuta com B.

Demonstração:

P4. De fato,

$$e^{M^{-1}AM} = Id + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + ... + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + ... \tag{3.20}$$

mas, como $(M^{-1}AM)^i = M^{-1}A^iM$, $i = 1, 2, ..., n, ...$

Daí, podemos reescrever (3.20) como

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IdM + M^{-1}AM + \frac{M^{-1}A^2M}{2!} + ... + \frac{M^{-1}A^nM}{n!} + ... && (3.21)\\ &= M^{-1}\left(Id + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ...\right)M && (3.22)\\ &= M^{-1}(e^A)M. && (3.23)\end{aligned}$$

O que mostra a propriedade.

P5. $(\Rightarrow)$ Suponha que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt}$$

derivando mais uma vez e fazendo $t = 0$, obtemos:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow AB = BA.$$

$(\Leftarrow)$ Se A comuta com B é fácil ver que $X(t) = e^{At}e^{Bt}$, satisfaz a equação diferencial $\dot{X}(t) = (A+B)X(t)$, com a condição inicial $X(0) = Id$. Então pela unicidade de solução devemos ter $X(t) = e^{(A+B)t}$, e, portanto a propriedade está justificada.

$\blacksquare$

Se M é a matriz de mundança de base tal que $M^{-1}AM$ está na forma de Jordan, isto é,

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix}, \quad A_i = \lambda_i Id + R_i$$

onde R_i é do tipo:

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$$

com $i = 1, ..., l$.

Então, como

$$M^{-1}e^{At}M = e^{M^{-1}AMt}$$

temos que

$$e^{At} = Me^{M^{-1}AMt}M^{-1}.$$

Vamos portanto calcular a matriz $e^{M^{-1}AMt}$. Temos que $e^{M^{-1}AMt}$ é diagonal de blocos do tipo:

$$e^{(\lambda Id+R)t}.$$

Como λId comuta com R temos que

$$\begin{aligned} e^{(\lambda Id+R)t} &= e^{\lambda t}e^{Rt} && (3.24) \\ &= e^{\lambda t}\left(Id + Rt + \frac{R^2}{2!}t^2 + ... + \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right) && (3.25) \\ &= e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix} && (3.26) \end{aligned}$$

Observe que $e^{\lambda t}$ está multiplicando a matriz, portanto podemos concluir que:

i. Os autovalores da exponencial e^{At} são todos do tipo $e^{\lambda t}$, com λ autovalor de A;

ii. Os elementos de e^{At} são combinações lineares de termos do tipo $t^i e^{\lambda t}$, com i limitado pelos índices de nilpotência, no caso acima $i \leq k$, logo são do tipo $p(t)e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinômio em t. E nossa aplicação termina aqui. Vamos agora a um exemplo que esclarece melhor nossa aplicação.

Exemplo 3.1.1 *Seja o problema de valor inicial (P.V.I.) abaixo*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= AX(t) \\ X(0) &= B \end{cases} \tag{3.27}$$

onde,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como já visto, sabe-se que $X(t) = e^{At}B$ *é a solução do P.V.I. (3.27). Vamos agora explicitar melhor esta solução.*
A forma de Jordan de A é da forma

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que esta associada a base $\{(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$.
Logo a matriz M*, de mudança de base, tal que* $J_A = M^{-1}AM$*, é igual a*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$e^{At} = Me^{M^{-1}AMt}M^{-1} = Me^{J_A t}M^{-1}.$$

Como

$$e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

daí, temos:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} + te^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Multiplicando (3.28) por B, obtemos a solução do P.V.I., ou seja,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{t} + e^{2t} + 4te^{2t} \\ -2e^{t} + 4e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1.2 *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) \\ X(0) & = & B \end{array} \right. \tag{3.29}$$

onde,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Já sabemos calcular a forma de Jordan de A, dada por

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \textit{logo} \quad e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix},$$

associado a base $(4, 0, -3), (0, 1, -1), (0, 1, 3)$.

Portanto, M sendo a matriz de mudança de base tal que $J_A = M^{-1}AM$, temos

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

logo,

$$e^{At} = Me^{J_A t}M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Portanto, a nossa solução $X(t)$ será dada por:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{te^{3t}}{4} - \frac{3e^{3t}}{16} - \frac{3e^{7t}}{16} & \frac{3e^{3t}}{4} + \frac{e^{7t}}{4} & -\frac{e^{3t}}{4} + \frac{e^{7t}}{4} \\ -\frac{3e^{3t}}{4} - \frac{te^{3t}}{4} + \frac{3e^{3t}}{16} + \frac{9e^{7t}}{16} & -\frac{3e^{3t}}{4} + \frac{3e^{7t}}{4} & \frac{e^{3t}}{4} + \frac{e^{7t}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Raízes m-ésimas

Nesta aplicação, utilizaremos a Forma de Jordan para obter raízes m-ésimas de operadores lineares.

Teorema 3.2.1 *Seja $T \in \mathfrak{L}(V)$ e m um inteiro positivo. Vamos assumir que $x = 0$ é uma raiz de $m_T(x)$ de multiplicidade no máximo 1. Então são vedadeiras as seguintes informações:*

(1) Se todos os autovalores de T pertecem a $\mathbb{K}$ então existe $S \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$;

(2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e m é ímpar então existe $S \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$;

(3) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, m é par e T não possui autovalores reais negativos, então existe $S \in \mathfrak{L}$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$.

Demonstração: Primeiramente, escrevamos $m_T(x) = x^l m(x)$, com $l = 0$ ou $l = 1$. Caso $l = 0$, o operador T é invertível. Caso $l = 1$, pelo Teorema 2.2.1., existe uma decomposição $V = NucT \oplus Z$, com $Z = Nucm(T)$, tal que o polinômio minimal de $T|_Z$ é $m(x)$. Obviamente, $T|_Z$ é invertível e, portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que o próprio operador T é invertível.

Pondo $\alpha = \frac{1}{m}$, consideremos a série binomial

$$(1+x)_\alpha \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n, \tag{3.30}$$

onde $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array} \right) = 1$ e

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!},$$

para $n \geq 1$. A expressão (3.30) é convergente se $|x| < 1$, mas pensando x como uma indeterminada, esta equação corresponde simplesmente a uma infinidade de relações entre números $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right)$, mais diretamente,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n \right)^m = 1 + x.$$

Se $T = \lambda Id + N$ com $\lambda \neq 0$ e N nilpotente, podemos obter, via série binomial, um operador $R \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $R^m = Id + \lambda^{-1}N$. Como N é nilpotente segue que R é, de fato, um polinômio em N. Particularmente, R comuta com N e, escolhendo $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $\mu^m = \lambda$, temos que o operador $S = \mu R$ é tal que $S^m = T$ e $ST = TS$.

Vamos, neste momento, dividir a demonstração em três partes, de acordo com as hipóteses do enunciado do teorema.

(1) Usando a forma de Jordan, obtemos uma decomposição $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ de V tal que cada subespaço é invariante sob T e T é da forma $\lambda Id + N$, $\lambda \neq 0$, em cada um dos W_i, $i = 1, ..., k$. Usando a argumentação do parágrafo anterior e a invariância dos W_i, construímos um operador $S \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $S^m = T$ e $ST = TS$.

(2) Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ os autovalores reais e $\mu_1, \overline{\mu_1}, ..., \mu_l, \overline{\mu_l} \in \mathbb{C}$ os autovalores complexos de T, repetidos de acordo com a multiplicidade. Podemos, obter uma decomposição $V = V_1 \oplus V_2$, onde os operadores $T_1 = T|_{V_1}$ e $T_2 = T|_{V_2}$ têm $\lambda_1, ..., \lambda_k$ e $\mu_1, \overline{\mu_1}, ..., \mu_l, \overline{\mu_l}$ como autovalores, respectivamente. Como os autovalores de T_1 são reais, pelo item (1), existe um operador S_1 em V_1 tal que $S_1^m = T_1$ e $S_1T_1 = T_1S_1$.
Existe uma estrutura complexa $J \in \mathfrak{L}(V_2)$ que comuta com T_2. Denotando por W o espaço complexo (V_2, J), temos que $T_2 \in \mathfrak{L}(W)$ e, portanto, pelo item (1), existe $S_2 \in W$ tal que $S_2^m = T_2$ e $S_2T_2 = T_2S_2$. Definindo S como S_1 em V_1 e S_2 em V_2, e temos o operador procurado.

(3) Agora, basta repertimos a prova do item (2), observando que, como T não possui autovalores reais negativos, o operador S_1 construído em V_1 é bem definido, pois m é par.

$\blacksquare$

Também é possível obter unicidade, basta supor que, tanto T quanto S são operadores auto-adjuntos positivos, ou seja, se $\mathcal{D}$ é uma base ortonormal e fixando um produto interno em V, então os operadores acima são auto-adjuntos positivos se, e somente se, as matrizes de T e S com relação a base $\mathcal{D}$ são matrizes simétricas e ainda $\langle v, T(v)\rangle > 0$ e $\langle v, S(v)\rangle > 0$, para qualquer vetor não nulo $v \in V$.

Conclusão

O que foi apresentado neste trabalho, mostra à ampla e valiosa utilidade do conteúdo exibido nesse estudo, como também, a relação entre os resultados de álgebra linear e os conceitos das equações diferenciais ordinárias, resolvendo, com isso, um grande problema de solução de um sistema de equações diferenciais, mostrando assim que na Matemática tudo está intimamente ligado e que sempre existem estudos para que se possa resolver pequenos, ou grandes, dificuldades.

Referências Bibliográficas

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. - 2. ed. rev. e ampl., 1. reimp. São Paulo: Edusp, 2007.

FIGUEIREDO, Djairo G.; NEVES, Aloisio F.. **Equações Diferenciais Aplicadas**. - Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. - California: Academic Press, INC., 1974.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. - New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

LIMA, Elon L.. **Álgebra Linear, Projeto Euclides**. - Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Algebre Lineaire, Cours et problêmes**. - Paris: McGraw-Hill Paris, 1977.

LOURÊDO, Aldo T.; OLIVEIRA, Alexandro M.; LIMA, Osmundo A.. **Cálculo Avançado**. - Campina Grande: eduepb, 2010.

NEVES, Aloisio Freiria. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ aloisio/documentos /jordan.pdf>. Acesso em Fevereiro de 2011.

SANTOS, Reginaldo J.. **Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias**. - Belo Horizonte, MG: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.

A Apêndice

A.1. Teorema de Existência e Unicidade

Teorema A.1.1 *Considere o sistema de equações diferencial de 1ª ordem*

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{A.1}$$

definida em D, onde D é o conjunto:

$$|t - t_0| \leq a \quad e \quad \|x - x_0\| \leq b$$

com a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Suponhamos que:

i. f *é contínua em D*

ii. $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t, x) \quad e \quad (t, y) \in D \quad e \quad para \quad algum \quad L > 0.$

Então existe uma única solução $\varphi(t)$ *de* (A.1) *satisfazendo* $\varphi(t_0) = x_0$ *definida no intervalo*

$$I : |t - t_0| \leq \delta$$

onde

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad e \quad M = \sup_{(t,x)\in D} \|f(t, x)\|$$

Demonstração:

1. Existência

Consideremos a sequência de funções

$$\begin{cases} \varphi_0(t) &= x_0 \\ \varphi_n(t) &= x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $n \in \mathbb{N}$

Mostremos que (φ_n) é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \;\; e \;\; \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$\varphi_0(t) = x_0 \;\; para \;\; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

então

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds$$

de onde se deduz que φ_1 é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$.
Além do mais,

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b \;\; se \;\; |t - t_0| \leq \delta$$

Suponhamos agora que $\varphi_{n-1}(t)$ seja contínua em

$$|t - t_0| \leq \delta \;\; e \;\; \|\varphi_{n-1}(t) - x_0\| \leq b$$

neste intervalo. De $(A.2)$ deduz-se que $\varphi_n(t)$ é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$ e

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$$

logo, φ_n é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \;\; e \;\; \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

isto é,

$$(t, \varphi_n(t)) \in D \;\; se \;\; |t - t_0| \leq \delta \;\; e \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Agora, mostremos que a sequência (φ_n) converge uniformemente em $|t-t_0| \leq \delta$. temos que

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq M|t-t_0|$$

Para $n = 2$, $(A.2)$ torna-se:

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_1(s)\right) ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_1(s)\right) ds - \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_0(s)\right) ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s, \varphi_1(s)\right) - f\left(s, \varphi_0(s)\right)\right] ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s, \varphi_1(s)\right) - f\left(s, \varphi_0(s)\right)\| ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\| ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ML|s-t_0| ds = ML\frac{|t-t_0|^2}{2!} \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta
\end{aligned}$$

Suponha que,

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| = ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta$$

de $(A.2)$, temos que:

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_n(s)\right) ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_n(s)\right) ds - \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_{n-1}(s)\right) ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s, \varphi_n(s)\right) - f\left(s, \varphi_{n-1}(s)\right)\right] ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s, \varphi_n(s)\right) - f\left(s, \varphi_{n-1}(s)\right)\| ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\| ds\right| \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} ML^{n-1}\frac{|s-t_0|^n}{n!} ds = ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta
\end{aligned}$$

portanto,

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad se \quad |t-t_0| \leq \delta \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

logo,

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad e \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Usando o critério de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\|$$

converge uniformemente em $|t - t_0| \leq \delta$,
logo, a série

$$\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)]$$

converge uniformemente em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$S_n(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + ... + \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) = \varphi_n(t)$$

Consequentemente, a sequência $(\varphi_n(t))$ converge uniformemente para uma função $\varphi(t)$ em $|t - t_0| \leq \delta$.

Usando-se a condição (ii.) pode-se deduzir que:

$$\lim_{n\to\infty} f(t, \varphi_n(t)) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{uniformemente em} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

De fato,

$$\|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))\| \leq L\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Desde que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t) \quad \text{uniformemente em} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

então:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| < \frac{\epsilon}{L} \quad \forall t \quad em \quad |t - t_0| \leq \delta$$

portanto,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\varphi(t)\| < L.\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \quad \forall t \in |t-t_0| \leq \delta$$

Agora, tomando-se o limite em $(A.2)$ quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds\right]$$

ou seja

$$\varphi(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds$$

daí,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, \quad t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \tag{A.3}$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Agora, derivando $(A.3)$ em relação a t, resulta que:

$$\dot{\varphi}(t) = f\left(t,\varphi(t)\right), \quad \forall t \in I$$

Logo $\varphi(t)$ é solução de $(A.1)$, tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

2. Unicidade

Suponhamos que existe uma outra solução $\psi(t)$ de $(A.1)$ com $\psi(t_0) = x_0$. Então

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds, \quad \forall t \in I \tag{A.4}$$

Vamos mostrar que

$$\varphi(t) \equiv \psi(t), \quad \forall t \in I$$

Mostremos por indução que

$$\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq bL^n\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

temos,

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall t \in I$$

suponhamos que

$$\|\psi(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq bL^{n-1}\frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

então

$$\begin{aligned}\|\psi(t)-\varphi_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}\|\psi(s)-\varphi_{n-1}(s)\|ds\right\| \\ &\leq bL^n\int_{t_0}^{t}\frac{|s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!} = bL^n\frac{|s-t_0|^n}{(n-1)!n}\Big|_{t_0}^{t} = bL^n\frac{|t-t_0|^n}{n!}\end{aligned}$$

portanto, pelo Princípio da Indução Finita (P.I.F.)

$$\|\psi(t)-\varphi_n(t)\| \leq bL^n\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \forall t\in I \quad e \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

portanto,

$$\|\psi(t)-\varphi_n(t)\| \leq bL^n\frac{\delta^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad se \quad n\longrightarrow\infty,$$

ou seja,

$$\|\psi(t)-\varphi(t)\| \leq 0 \quad \forall t\in I$$

donde, podemos concluir que

$$\psi(t)\equiv\varphi(t), \quad \forall t\in I$$

■

A.2. Desigualdades Auxiliares

Lema A.2.1 (Desigualdades de Cauchy-Schwarz) *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Demonstração: Partiremos das seguintes identidades,

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\|x\|^2} \quad \text{e} \quad 1=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{\|y\|^2}$$

e somando-as membro a membro, obtemos:

$$2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\|x\|^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{\|y\|^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2}+\frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right)\geq 2\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|\|y\|},$$

pois $a^2+b^2\geq 2|a||b|, \ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Donde,

$$\|x\|\|y\| \geq \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \geq \left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right| = |\langle x,y\rangle|$$

■

Lema A.2.2 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $a, b \geq 0$, temos*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}.$$

Demonstração: É claro que $a + b = a + b$, somando-se $2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ a um dos membros, obtemos

$$\begin{aligned} a + b &\leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &\leq (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \\ &\leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Daí, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$. ■