



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

GILVANIA RAMOS BORGES

O TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB

Dezembro/2011

GILVANIA RAMOS BORGES

O TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande/PB

Dezembro/2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

B644t Borges, Gilvania Ramos.
 O teorema de Green e aplicações [manuscrito] /
 Gilvania Ramos Borges. – 2011.
 37 f.: il. color.

 Digitado.
 Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
 Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, 2011.

 “Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas”.

 1. Matemática - Teoremas. 2. Teorema de Green. 3.
 Cálculo de Áreas. I. Título.

21. ed. CDD 516

GILVANIA RAMOS BORGES

O TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Departamento de Matemática e Estatística

Orientadora

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profa. Ms. KÁTIA SUZANA MEDEIROS GRACIANO

Departamento de Matemática e Estatística

Examinadora

Maria Isabelle Silva

Profa. Ms. MARIA ISABELLE SILVA

Departamento de Matemática e Estatística

Examinadora

Campina Grande, 02 de dezembro de 2011

Dedicatória

Dedico esta monografia a minha mãe, **Maria Cristina Ramos Borges**, a meu pai, **Antônio José Borges Ramos** e ao meu noivo **Cícero Rodrigues de Moraes**.

Agradecimentos

A Deus, motivo maior de minha existência.

Aos meus pais, que me incentivaram e ajudaram nessa conquista.

A meu noivo, que sempre esteve ao meu lado, mesmo distante, me apoiando na realização deste sonho.

A minha família, irmãos, primas, tias, amigos, enfim, todos àqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para esta conquista.

Aos meus colegas, com quem compartilhei momentos bons e difíceis durante o curso.

A todos os professores da UEPB, que fizeram parte da minha trajetória. Em especial, minha orientadora, Luciana Roze de Freitas, pela paciência e dedicação.

Resumo

O Teorema de Green é um resultado importante do Cálculo Vetorial. É assim chamado, em homenagem ao matemático inglês George Green, que o desenvolveu. Este teorema relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples parcialmente suave com a integral dupla sobre a região delimitada por esta curva. Este trabalho tem como objetivo estudar o Teorema de Green e apresentar algumas de suas aplicações. Mostramos sua aplicação no cálculo de área de regiões determinadas por curvas simples e fechadas e estabelecemos a relação existente entre o Teorema de Green e o Planímetro, um importante instrumento criado em 1854 pelo matemático Jacob Amsler, capaz de medir área de figuras planas movendo-se apenas no contorno da região.

Palavras-chaves: Teorema de Green, Cálculo de Áreas, Planímetro.

Abstract

The Green's Theorem is an important result of Vector Calculus. It is so named in honor of the English mathematician George Green, who developed. This theorem relates the line integral along a simple closed curve partially smooth and the double integral over a region bounded by this curve. This work aims to study the Green's Theorem and present some of its applications. We show its application in calculating the area of regions determined by curves simple closed and we establish the relationship between the Green's theorem and Planimeter, an important instrument created in 1854 by mathematician Jacob Amsler, capable of measuring area of plane figures moving only at the boundary of the region.

Key-words: Green's theorem, Calculation of Areas, Planimeter.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Preliminares	4
2 Teorema de Green	8
2.1 Extensões do Teorema de Green	12
2.2 Observações	17
3 Aplicações	19
3.1 Planímetro	19
3.2 O Teorema de Green no Cálculo de Áreas	25
Referências Bibliográficas	30

Introdução

A abordagem sobre *O Teorema de Green e Aplicações*, encaminha-nos a realizar estudos a partir da biografia do matemático e físico George Green, que nasceu em Nothighan em 13 de julho de 1793. Aos oito anos, ingressou na escola Robert Goodacre's Academy onde recebeu aulas do professor de mesmo nome, que ensinava Ciência Entusiástica. A necessidade de auxiliar o pai em seu trabalho fez com que George abandonasse a escola no quarto período, mesmo assim, esse tempo, unido ao incentivo do professor Robert foi suficiente para que despertasse nele o gosto pela ciência.

Aos quatorze anos, George passou a operar com um moinho de vento que seu pai construiu na aldeia Sneinton. Lá ele tinha uma longa jornada de trabalho e, provavelmente, usou o chão do moinho como local de estudo.

Aos trinta e cinco anos, George publicou seu primeiro documento intitulado "Um ensaio na aplicação de Análise Matemática para as Teorias da Eletricidade e Magnetismo". Ele inventou novas técnicas matemáticas que teriam um efeito imediato e profundo se chegasse a ser lido por outros estudiosos da área, mas a falta de treinamento formal e a modesta posição social impossibilitavam o envio de seu documento a um jornal científico. Apesar do não reconhecimento do trabalho, Green fora encorajado pelo matemático Edward Bromhead a iniciar seu segundo documento. Através de Edward, Green começou a publicar documentos em jornais científicos e entrou em Cambridge como estudante universitário, onde recebeu o diploma em Matemática. Logo após, foi eleito por companheirismo à Faculdade Gonville e Caus, onde permaneceu por dois anos. Devido á problemas de saúde, o fez retornar a Nothighan. Green faleceu em 1841, sem que seu trabalho tivesse recebido o seu devido valor. Mas não se sabe ao certo as causas de sua morte.

A matemática de Green era toda desenvolvida para resolver problemas físicos muito

gerais. Portanto, seu principal interesse estava em eletrostática, fazendo grande uso do potencial elétrico que ficou conhecido como o Teorema de Green.

Dentre os principais trabalhos desenvolvidos por Green estão: Um ensaio na aplicação de análise matemática para as teorias de eletricidade e magnetismo; Aplicação dos resultados preliminares na teoria de magnetismo; Na reflexão e refração do som; Na propagação de luz em meio cristalizadas.

Apesar de sua importante contribuição para a matemática, George Green recebeu pequeno reconhecimento popular, mesmo depois de sua morte. Alguns cientistas reconheceram suas contribuições para a ciência e as desenvolveram durante o século *XIX*, como por exemplo, do cientista William Thomson e George Gabriel Stokes.

A partir de muitas tentativas esses cientistas conseguiram mostrar que os trabalhos de Green poderiam ser usados em diferentes situações, como a exemplo das funções de Green que poderiam ser usadas efetivamente em mecânica quântica e poderiam ser aplicadas para eletrodinâmica quântica. Assim, o reconhecimento foi acontecendo, até que em 1972 houve a formação do Fundo Comemorativo de George Green, na Universidade de Nottingham, em 1985 foi promovida a restauração do moinho de Green em Nottingham e em julho de 1993, aconteceram às celebrações de Bicentenário de nascimento de Green nas cidades de Nottingham, Cambrigde e Londres.

Os estudos desenvolvidos por Green, expressos em sua biografia nos serviram de estímulo para compreender, a relação cálculo vetorial e Teorema de Green, suas implicações no cálculo de áreas de regiões planas e integrais curvilíneas. Bem como , suas contribuições na generalização do Teorema de Stokes e o Teorema de Gauss. Para tanto, buscamos aporte teórico em [4], [2], [5], entre outros.

No Capítulo I, apresentamos alguns conceitos importantes relacionados ao tema, necessários para a compreensão de resultados posteriores.

No Capítulo II, o Teorema de Green, demonstrando-o para o caso de regiões especiais, justificando sua extensão para outros tipos de regiões mais gerais.

No Capítulo III, abordamos algumas aplicações, como o uso do Teorema de Green no cálculo de áreas de regiões fechadas e simples e a relação Teorema de Green e Planímetro, instrumento criado em 1854 por Jacob Amsler, para medir área de regiões planas.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Iniciamos esta seção apresentando algumas definições necessárias para compreensão de alguns resultados no decorrer do trabalho.

Definição 1.1. *Uma curva **plana** é um conjunto de pares ordenados da forma*

$$R(t) = (f(t), g(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad t \in I,$$

onde as funções f e g são contínuas em um intervalo I .

No que segue, representaremos uma curva plana C pela equação

$$R(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad t \in I.$$

E consideremos, $x = f(t)$ e $y = g(t)$, as equações paramétricas.

Definição 1.2. *Uma curva plana é chamada **suave** se f' e g' existem, são contínuas e não se anulam simultaneamente em I .*

Definição 1.3. *Uma curva C é chamada de **simples**, caso não se intercepte, isto é, se*

$$R(t_1) \neq R(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I.$$

Definição 1.4. *Uma curva C definida em um intervalo $I = [a, b]$ é dita **fechada** se o ponto inicial $(f(a), g(a))$ e o ponto final $(f(b), g(b))$ coincidem.*

Dois exemplos de figuras fechadas e simples são a circunferência e a elipse.

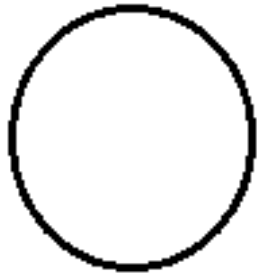


Figura 1.1: Circunferência



Figura 1.2: Elipse

Definição 1.5. *Uma curva fechada simples parcialmente suave é uma curva fechada formada pela união finita de curvas C_k tais que, essas curvas são simples e suaves.*

Definição 1.6. *Um campo vetorial F em duas dimensões é uma função cujo domínio D é um subconjunto de \mathbb{R}^2 e cujo contradomínio é um subconjunto do espaço dos vetores bidimensionais. Se (x, y) está em D , então*

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j,$$

onde M e N são funções escalares.

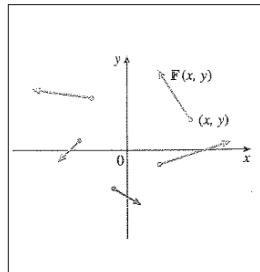


Figura 1.3: Campo vetorial no Plano

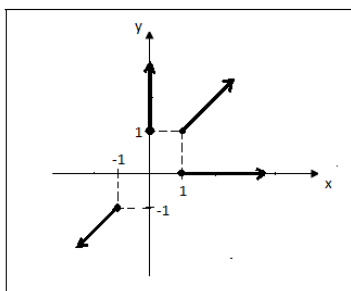
Exemplo 1.1. *Considere um campo definido por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$. Esboçando alguns vetores deste campo, temos:*

$$F(-1, -1) = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

$$F(1, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$F(0, 1) = 3\mathbf{j}$$

Logo, o gráfico representado pelos vetores acima é dado por

Figura 1.4: Campo vetorial de F

A seguir apresentaremos a definição de integral curvilínea de uma função vetorial bidimensional de uma curva plana.

Definição 1.7. *Seja C uma curva contida em um disco aberto B em \mathbb{R}^2 e tendo a equação vetorial*

$$R(t) = f(t)i + g(t)j, \quad a \leq t \leq b$$

tal que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja \mathbf{F} um campo vetorial em B definido por

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j,$$

*onde M e N são contínuas em B . Então, a **integral curvilínea** de $F(x, y)$ sobre C é dada por*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt.$$

Exemplo 1.2. *Calcule a integral curvilínea*

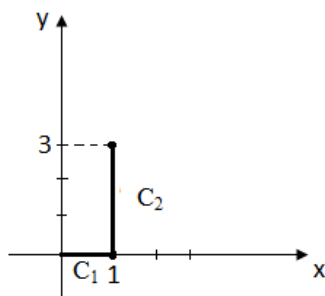
$$\int_C xy dx + (x + y) dy;$$

ao longo de C dada pelos segmentos de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ e de $(1, 0)$ a $(1, 3)$.

Solução: A curva C é dada pelos segmentos $(0, 0)$ a $(1, 0)$ e $(1, 0)$ a $(1, 3)$. Assim, $C = C_1 \cup C_2$, conforme o esboço do gráfico abaixo.

Logo, as curvas C_1 e C_2 podem ser escritas da seguinte forma:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e} \quad C_2 : \begin{cases} y = t \\ x = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3.$$



Para tanto, usaremos a definição para calcular a integral curvilínea. Note que

$$\int_C xy \, dx + (x + y) \, dy = \int_{C_1} xy \, dx + (x + y) \, dy + \int_{C_2} xy \, dx + (x + y) \, dy.$$

No entanto,

$$\int_C xy \, dx + (x + y) \, dy = \int_0^1 t \cdot 0 \, dt + (1 + 0) \cdot 0 + \int_0^3 1 \cdot t \cdot 0 + (1 + t) \, dt.$$

Ou seja,

$$\int_C xy \, dx + (x + y) \, dy = \int_0^3 1 \cdot t \cdot 0 + (1 + t) \, dt = t + \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{15}{2}.$$

As integrais curvilíneas partilham de propriedades análogas às obtidas para integrais definidas. As principais propriedades são:

1. Propriedade de Linearidade.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = \int_C M(x, y) \, dx + \int_C N(x, y) \, dy,$$

onde M e N são funções escalares e C uma curva no plano.

E

$$\int_C a\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = a \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. Propriedade da Aditividade.

Se C é uma curva tal que $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, ($n \in \mathbb{N}$), então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

3. Propriedade da Inversão.

Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , os pontos da curva C . Então,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(a_2, b_2)}^{(a_1, b_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Capítulo 2

Teorema de Green

No que se segue, iremos representar por C uma curva fechada que limita uma região R . Além disso, usaremos o símbolo \oint para denotar o sentido positivo de uma integral curvilínea ao longo de uma curva C , tal que a região R estará sempre à esquerda da curva.

Teorema 2.1 (Teorema de Green). *Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e R a região que consiste de C e seu interior. Se M e N são funções reais de duas variáveis contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região aberta D contendo R , então*

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (2.1)$$

Demonstração.

Demonstraremos inicialmente o Teorema para uma região simples R que é simultaneamente do tipo:

$$R = \{(x, y); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad (I)$$

$$R = \{(x, y); c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \quad (II)$$

onde as funções g_1 , g_2 , h_1 e h_2 são suaves.

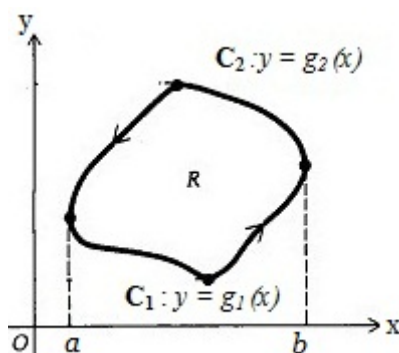
Basta provarmos as seguintes igualdades

$$\oint_C M(x, y) dx = - \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (2.2)$$

$$\oint_C N(x, y) dx = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) dA \quad (2.3)$$

e somá-las membro a membro de modo a obtermos (2.1).

Para provar a equação (2.2), considere C uma curva fechada simples no plano xy e R a região limitada por C e suponha que M , N e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em todos os pontos de uma região aberta que contenha C e R , tal que R é definida por (I).



Note que, a curva C consiste em duas curvas C_1 e C_2 de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente.

A integral curvilínea $\oint_C M(x, y) dx$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \oint_C M(x, y) dx &= \oint_{C_1} M(x, y) dx + \oint_{C_2} M(x, y) dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x)) dx + \int_b^a M(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx. \end{aligned}$$

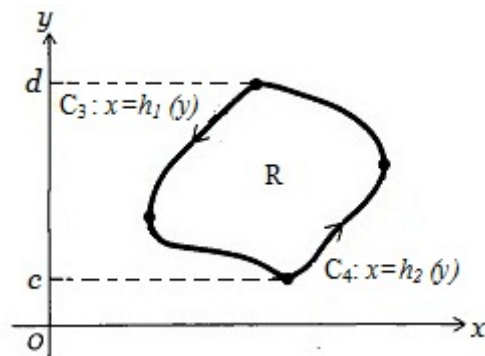
Por outro lado, considerando a integral dupla $\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$, obtemos:

$$\begin{aligned} - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dA &= - \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int_a^b M(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= - \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx. \end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas em $\oint_C M(x, y) dx$ e $-\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$, temos (2.2).

Provemos a seguir a veracidade da equação (2.3).

De modo similar, consideramos a curva C decomposta em duas curvas orientadas $C_3 : x = h_1(y)$ e $C_4 : x = h_2(y)$.



Sabemos que $C = C_3 \cup C_4$. Então, podemos escrever a integral $\oint_C N(x, y) dx$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \oint_C N(x, y) dx &= \oint_{C_3} N(x, y) dy + \oint_{C_4} N(x, y) dy \\ &= \int_d^c N(h_1(y), y) dy + \int_c^d N(h_2(y), y) dy. \\ &= \int_c^d [N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Vamos considerar agora a integral dupla $\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$, onde R é definida por (II). Então,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= \int_c^d N(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy \\ &= \int_c^d [N(h_2(y), y) - N(h_1(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Comparando a última expressão com a obtida para $\oint_C N(x, y) dx$, segue que a igualdade (2.3) é válida.

Adicionando os termos correspondentes das igualdades (2.2) e (2.3), obtemos

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Como queríamos demonstrar. □

Vejamos a seguir um exemplo do Teorema de Green aplicado ao cálculo de integrais curvilineas.

Exemplo 2.1. Por meio do Teorema de Green, calcule a integral curvilinea

$$\oint_C xy \, dx + (y + x) \, dy,$$

onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Sabemos que $C : x^2 + y^2 = 1$.

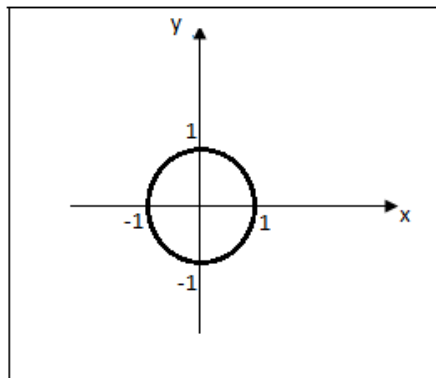


Figura 2.1: Círculo

Usando coordenadas polares, obtemos

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para tanto, aplicando a fórmula (2.1) com $M(x, y) = xy$ e $N(x, y) = y + x$, à integral curvilinea, temos

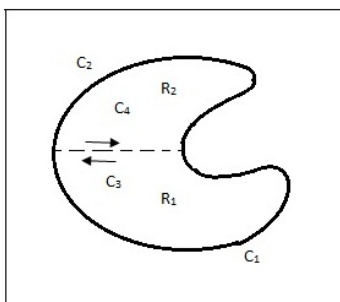
$$\oint_C xy \, dx + (y + x) \, dy = \iint_R [1 - x] \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [1 - r \cos \theta] r \, dr \, d\theta.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \oint_C xy \, dx + (y + x) \, dy &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left. \frac{1}{2} \theta - \frac{\operatorname{sen} \theta}{3} \right|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

2.1 Extensões do Teorema de Green

O Teorema de Green é válido para regiões mais gerais que possam ser subdivididas em um número finito de regiões R_1, R_2, \dots, R_n , cada uma com uma fronteira constituída de uma curva suave por partes C_i , com $i = 1, \dots, n$, onde parte da fronteira consiste de segmentos retílineos horizontais ou verticais. Para tanto, considere uma região R como na figura abaixo, decomposta em duas regiões simples R_1 e R_2 , pelos arcos C_1 e C_2 .



Aplicando o Teorema de Green em R_1 e R_2 , separadamente, temos:

$$\oint_{C_1 \cup C_3} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

e

$$\oint_{C_2 \cup C_4} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Somando as duas igualdades membro a membro, observamos que as integrais da direita formam a integral sobre a região R , enquanto na esquerda, as integrais sobre C_3 e C_4 se anulam mutuamente, pois são a mesma curva traçada em sentidos opostos. Portanto, ficamos com

$$\oint_{C_1 \cup C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA,$$

que é o Teorema de Green para a região R .

De maneira semelhante podemos observar que o Teorema de Green também é válido para regiões retangulares. Para isso, Consideremos R uma região retangular, como no esboço da figura (2.2).

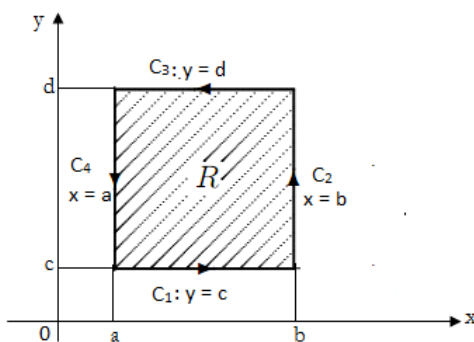


Figura 2.2: Região retangular

Observando a figura (2.2), notemos que a fronteira C está dividida em quatro segmentos de reta orientados. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_c^d (N(b, y) - N(a, y)) dy \\ &= \int_c^d N(b, y) dy + \int_d^c N(a, y) dy \\ &= \int_{C_2} N(x, y) dy + \int_{C_4} N(x, y) dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como y é constante ao longo de C_1 e C_3 , então $\int_{C_1} N(x, y) dy = \int_{C_3} N(x, y) dy = 0$. Adicionando $\int_{C_1} N(x, y) dy = \int_{C_3} N(x, y) dy$ em (2.4) sem alterar a igualdade, ficamos com

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy = \oint_C N(x, y) dy. \quad (2.5)$$

Analogamente, mostramos que

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy dx = - \oint_C M(x, y) dx. \quad (2.6)$$

Subtraindo a equação (2.6) da equação (2.5), obtemos

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Como queríamos.

A seguir, vejamos um exemplo que ilustra o Teorema de Green para uma região retangular.

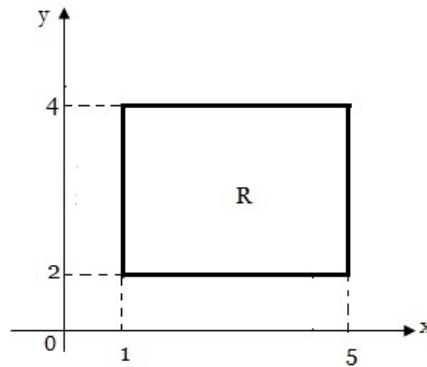
Exemplo 2.2. Aplique o Teorema de Green ao cálculo da integral curvilínea

$$\oint_C \arctan x dx + 3x dy,$$

onde C é o retângulo de vértices $(1, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(1, 4)$.

Solução:

Seja R a região retangular obtida através dos vértices acima.



Temos que,

$$M(x, y) = \arctan x \quad \text{e} \quad N(x, y) = 3x.$$

Além disso,

$$M_y(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = 3.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos,

$$\begin{aligned} \oint_C \arctan x \, dx + 3x \, dy &= \iint_R (3 - 0) \, dA \\ &= \int_2^4 \int_1^5 3 \, dx \, dy \\ &= \int_2^4 3x \Big|_1^5 \, dy \\ &= \int_2^4 12 \, dy \\ &= 12x \Big|_2^4 \, dy = 24. \end{aligned}$$

O Teorema de Green também pode ser estendido para regiões que contenham *buracos*. Verifiquemos sua extensão para este tipo de região.

Note que, na figura (2.3), a fronteira C da região é constituída de duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 . Admitiremos que essas fronteiras são orientadas, de modo que a região R esteja sempre à esquerda quando percorrermos a curva C .

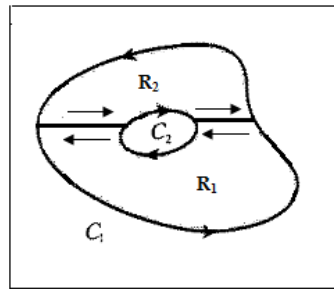


Figura 2.3: Região com um buraco

Aplicando o Teorema de Green a cada uma das regiões R_1 e R_2 , obteremos

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy + \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy \\ &= \oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy, \end{aligned}$$

que é o Teorema de Green para a região R .

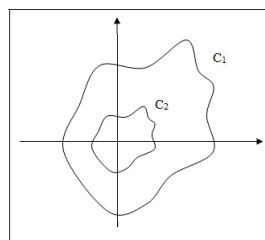
Exemplo 2.3. *Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo a origem como ponto interior. Se $M(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ e $N(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, prove que*

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Em seguida, mostre que

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = 2\pi.$$

Solução: Denote por R a região entre C_1 e C_2 , onde a origem é interior a C_1 e C_2 .



Observe que $C = C_1 + C_2$. Pelo Teorema de Green a integral curvilinear ao longo de C é igual a integral dupla sobre a região R . Logo,

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy + \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

As funções M e N e suas derivadas são contínuas em R . Além disso,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)1 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Assim,

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Consequentemente,

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = - \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Como o sentido positivo ao longo de C_2 , em relação à região R_2 no interior C_2 é oposto ao indicado na última integral, então

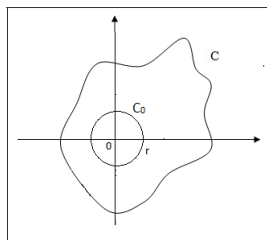
$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \oint_{C_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy. \quad (2.7)$$

Como queríamos provar.

Por fim, mostremos que

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = 2\pi.$$

Considere a curva C_0 dada pelo círculo de raio r e centrado na origem.



Pela equação (2.7), segue que

$$\oint_{C_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \oint_{C_0} M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

As equações paramétricas de C_0 são:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A integral sobre C_0 é dada por:

$$\oint_{C_0} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \oint_{C_0} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Porém, substituindo as equações paramétricas, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin^2 t r (-\sin^2 t)}{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} + \frac{r \cos^2 t r \cos^2 t}{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)}{r^2} dt.$$

Mas, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Assim,

$$\oint_{C_0} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Como queríamos mostrar.

A seguir apresentaremos algumas observações importantes referentes ao Teorema de Green.

2.2 Observações

1. O Teorema de Green é um caso particular do Teorema de Stokes e Gauss. Ou seja, o Teorema de Stokes generaliza a forma tangencial do Teorema de Green de uma região plana para uma superfície tridimensional no espaço. Assim como, o Teorema de Gauss, generaliza a forma normal do Teorema de Green de uma região bidimensional no plano para uma superfície tridimensional no espaço.
2. Uma outra forma do Teorema de Green diz o seguinte:

Teorema de Green (fluxo-divergência ou forma normal): O fluxo exterior de um campo $F = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ através de uma curva fechada simples C é igual à integral dupla do divergente de \mathbf{F} sobre a região R limitada sobre C .

$$\oint_C M(x, y) dy - N(x, y) dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA. \quad (2.8)$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.4. Calcule o fluxo exterior do campo $F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ através do quadrado limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

Temos que, $M(x, y) = x - y$ e $N(x, y) = y - x$.

Derivando $M(x, y)$ em relação a x e $N(x, y)$ em relação a y , teremos

$$M_x(x, y) = 1 \quad e \quad N_y(x, y) = 1.$$

Aplicando a forma normal do Teorema de Green, obtemos

$$\oint_C M(x, y) dy - N(x, y) dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (1 + 1) dx dy.$$

Logo,

$$\oint_C M(x, y) dy - N(x, y) dx = \int_0^1 2x \Big|_0^1 dy = \int_0^1 2 dy = 2.$$

É importante observar que as duas formas do Teorema de Green são equivalentes. Aplicando na equação da forma normal o campo $G_1 = N(x, y)\mathbf{i} - M(x, y)\mathbf{j}$, teremos a forma tangencial do teorema e aplicando na equação da forma tangencial o campo vetorial $G_2 = -N(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j}$, teremos a equação da forma normal do Teorema de Green.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Planímetro

O Planímetro é um instrumento criado em 1854 pelo matemático Jacob Amsler, capaz de medir a área de regiões planas limitadas. É composto de dois braços de tamanhos iguais ou diferentes, capaz de variar o ângulo entre si, desde 0° a 180° .



Figura 3.1: Planímetro

Analizando a figura, notemos que na articulação desses braços existe uma pequena roda que gira enquanto é feito o contorno da curva na superfície. Nesta roda existe um contador que marca o número de voltas dada por ela. Quando esta roda se move de forma perpendicular ao seu eixo, ela gira e seu movimento é registrado pelo contador.

Para entendermos como o Teorema de Green contribui para o funcionamento do Planímetro, descrevemos o campo de direções definido pelo instrumento. Inicialmente,

determinemos as coordenadas X e Y . Considere a origem dos eixos como sendo a ponta do planímetro que está fixa, a partir daí, dois eixos perpendiculares X e Y são traçados. Como a rodinha gira perpendicularmente ao braço no qual está fixada, o campo $F(x, y)$ definido pelo planímetro é perpendicular ao braço móvel e suponhamos que ele tenha módulo 1.

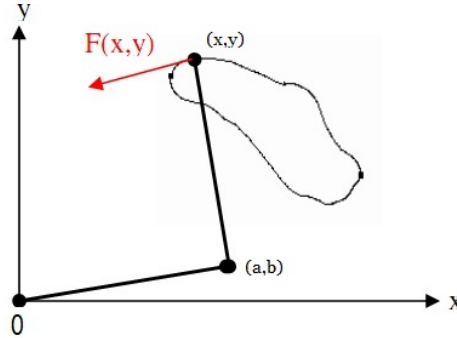


Figura 3.2: Região medida por um planímetro

Chamemos de \vec{v} o vetor que representa o braço móvel do Planímetro. Assim, $\vec{v} = (x - a, y - b)$ e um vetor perpendicular é $\vec{w} = (-(y - b), x - a)$.

Por hipótese, os braços do Planímetro tem comprimento r . Logo,

$$|\vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{(y - b)^2 + (x - a)^2} = r.$$

Portanto, o campo é dado por:

$$F(x, y) = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-(y - b)}{r}, \frac{(x - a)}{r} \right). \quad (3.1)$$

No entanto, determinemos os valores de a e de b . Para isto, considere a equação dos círculos que podem ser descritos por cada um dos braços do Planímetro.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 & (1) \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & (2) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 \\ &= x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Uma vez que, $a^2 + b^2 = r^2$, ficamos com,

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + r^2.$$

Ou ainda,

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb = 0,$$

o que implica

$$b = \frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y}.$$

Agora, substituiremos o valor de b na equação (1). Logo,

$$r^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y} \right)^2.$$

Ou melhor,

$$\begin{aligned} 4y^2r^2 &= 4y^2a^2 + (x^2 + y^2 - 2xa)^2 \\ &= 4y^2a^2 + 4x^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)a. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$4(x^2 + y^2)a^2 - 4x(x^2 + y^2)a + (x^2 + y^2)^2 - 4y^2r^2 = 0.$$

Façamos $R^2 = (x^2 + y^2)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} 4R^2a^2 - 4xR^2a + R^4 - 4y^2r^2 &= 0 \\ a^2 - xa + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} &= 0 \\ a^2 - xa + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2},$$

o que implica

$$\begin{aligned} a - \frac{x}{2} &= \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2}} \\ a &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2R^2 - R^4 + 4y^2r^2}{4R^2}}. \end{aligned}$$

Voltando para $R^2 = (x^2 + y^2)$, teremos

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)x^2 - (x^2 + y^2)^2 + 4y^2r^2}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{y^2(-x^2 - y^2 + 4r^2)}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$a = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}.$$

Escrevendo a de uma forma mais simplificada, ficamos com

$$a = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.$$

Com o valor de a definido, podemos encontrar o valor de b . Recorde que

$$b = \frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y}. \quad (3.2)$$

Substituindo o valor de a em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} b &= \frac{x^2 + y^2 - 2x \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right)}{2y} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x^2 - xy \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}}{2y}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$b = \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.$$

Os valores de a e de b encontrados nos permitirá calcular o campo do planímetro.

Seja $F(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$. De (3.1), segue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{r}(y - b) \\ &= -\frac{1}{r} \left(y - \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(-\frac{y}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Do mesmo modo, encontremos $g(x, y)$. Usando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{r}(x - a) \\ &= \frac{1}{r} \left(x - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Derivando as equações (3.3) e (3.4) em relação a y e a x , respectivamente, teremos que

$$\begin{aligned} r \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-4r^2 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{y}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \frac{4r^2 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \frac{2xyr^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-4r^2 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \frac{r^2 2y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Subtraindo as respectivas derivadas acima, chegamos ao seguinte resultado:

$$r \frac{\partial g}{\partial x} - r \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \frac{2xyr^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}} \frac{2xyr^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1.$$

Portanto,

$$r \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1,$$

o que implica

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{r}.$$

Aplicando o Teorema de Green ao Planímetro, ficamos com

$$\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_R \frac{1}{r} dA \\
&= \frac{1}{r} \iint_R dA \\
&= \frac{1}{r} * A(R).
\end{aligned}$$

Onde $A(R)$ é a área de R e a constante que multiplica a área depende somente do comprimento dos braços do Planímetro.

Tendo especificado que, para o campo gerado pelo planímetro, e de acordo com o Teorema de Green, a integral de linha $\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$ é igual ao múltiplo da área da região delimitada pela curva C , é necessário definir o que exatamente calcula a integral de linha e a relação desta com a medição realizada pelo planímetro.

Seja $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ o campo de vetores gerado pelo planímetro. Como observamos, $F(x, y)$ é tangente a curva C . Neste caso uma parametrização de C dada pelas equações $(x(s), y(s))$, tais que:

$$x'(s) = f(x(s), y(s))$$

e

$$y'(s) = g(x(s), y(s))$$

Como $|F| = 1$, temos

$$1 = |F|^2 = f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = f(x, y)x'(s) + g(x, y)y'(s)$$

Logo,

$$\int_0^s ds = \int_0^s [f(x(s), y(s))x'(s) + g(x(s), y(s))y'(s)] ds$$

e, portanto,

$$L(C) = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

onde $L(C)$ é o comprimento de C .

Note que, o comprimento da curva é a integral curvilinear sobre C . Dessa forma, consideremos k como sendo o número de voltas dada pela roda e d o seu diâmetro, temos

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = L(C) = k \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2} = k\pi d.$$

Dessa forma, a área cercada pela curva C é dada por

$$k\pi d = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \frac{1}{r} \cdot A_c(C).$$

Ou seja,

$$A_c(C) = k \pi dr.$$

Contudo, podemos ver o quanto o Planímetro é importante para a medição de áreas. Sendo assim, o mesmo desempenha um importante papel no dia a dia de alguns profissionais, a exemplo, do engenheiro, do físico, geólogo, entre outros.

3.2 O Teorema de Green no Cálculo de Áreas

Uma aplicação importante do Teorema de Green é o cálculo de área de regiões delimitadas por curvas fechadas simples.

A seguir determinemos uma fórmula para o cálculo da área. Para isso, consideremos uma região R de curvas simples e fechada gerada pelo gráfico abaixo.

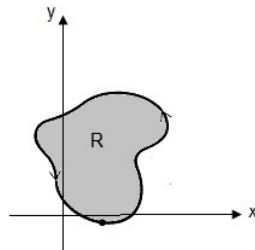


Figura 3.3: Região de curva simples e fechada

O Teorema de Green diz que

$$\oint M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (3.5)$$

Então, suponhamos $M(x, y) = 0$ e $N(x, y) = x$. Calculando a derivada de $M(x, y)$ em relação a y e $N(x, y)$ em relação a x , obtemos

$$M_y = 0 \quad \text{e} \quad N_x = 1.$$

Substituindo $M_y = 0$ e $N_x = 1$ em (3.5), ficamos com

$$\begin{aligned} \oint_C 0 dx + x dy &= \iint_R (1 - 0) dA \\ &= \iint_R dA. \end{aligned}$$

Logo,

$$\iint_R dA = \oint_C x dy. \quad (3.6)$$

Agora, seja $M(x, y) = -y$ e $N(x, y) = 0$. Derivando $M(x, y)$ em relação a y e $N(x, y)$ em relação a x , segue que

$$M_y = -1 \text{ e } N_x = 0.$$

Substituindo em (3.5), teremos

$$\begin{aligned} \oint_C (-y) dx - 0 dy &= \iint_R (0 - (-1)) dA \\ &= \iint_R dA. \end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_R dA = - \oint_C y dx. \quad (3.7)$$

Adicionando as equações (3.6) e (3.7), obtemos

$$2 \iint_R dA = \oint_C x dy + \left(- \oint_C y dx \right).$$

Ou ainda,

$$2 \iint_R dA = \oint_C x dy - \oint_C y dx.$$

Uma vez que $\iint_R dA = A(R)$ da região, a fórmula usada para determinar a área de uma região é dada por

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \quad (3.8)$$

Vejam os a seguir um exemplo.

Exemplo 3.1. Calcule a área da região limitada pela curva $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução:

Temos que $x = a \cos^3 t$ e $y = a \operatorname{sen}^3 t$. Além disso, derivando x e y , obtemos

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \operatorname{sen} t dt \quad (3.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t dt. \quad (3.10)$$

Usando a fórmula (3.8), segue que

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos^3 t \, 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t \, dt - a \operatorname{sen}^3 t (-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t) \, dt.$$

E mais,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 3a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t \, dt.$$

Ou ainda,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \, dt.$$

Pela identidade trigonométrica $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, segue que

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \, dt.$$

Então,

$$A = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \, dt. \quad (3.11)$$

Observe que,

$$\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t = \operatorname{sen} t \cos t \operatorname{sen} t \cos t.$$

Além disso,

$$\operatorname{sen} t \cos t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t.$$

O que implica,

$$\operatorname{sen} t \cos t \operatorname{sen} t \cos t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t.$$

No entanto, reescrevendo a fórmula (3.11), segue que

$$\begin{aligned} A &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \, dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \, dt \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} \right) \, dt \\ &= \frac{3a^2}{8} \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{8} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3a^2}{8} \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 8\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ u.a.}$$

Contudo, podemos concluir que o Teorema de Green no cálculo de área desempenha um importante papel, pois, por meio deste foi possível determinarmos uma fórmula que será usada para encontrar as áreas das regiões limitadas, como visto no exemplo (3.1).

Apêndice

Teorema 3.1 (Teorema da Divergência de Gauss). *Seja Ω um sólido limitado por uma superfície fechada S , formada por um número finito de superfícies suaves e seja $\vec{\eta}$ a normal externa unitária. Se as componentes de $\vec{V}(x, y, z)$ tem derivadas parciais contínuas num aberto contendo Ω , então:*

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{\eta} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dA$$

Teorema 3.2 (Teorema de Stokes). *Sejam as funções M e N , a curva C e a região R . Se $F = (x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $T(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento de arco de C medida a partir de um ponto P_0 até P , então:*

$$\oint_C F \cdot T \, dS = \iint_R \operatorname{rot} F \cdot k \, dA$$

Conclusão

No decorrer deste trabalho podemos observar que no Cálculo Vetorial, o Teorema de Green desencadeia um importante papel tanto na resolução de integrais curvilíneas ao longo de uma curva C de maneira mais prática, como no cálculo de área de regiões determinadas por curvas fechadas simples. Além disso, vimos a relação Teorema de Green e o Planímetro, enfatizando sua contribuição para o funcionamento deste instrumento, inventado para medir a área de regiões limitadas. A compreensão de que o Teorema de Green abrange várias aplicações leva-nos, neste trabalho, a enfatizar a utilidade deste teorema, juntamente com o Planímetro, para o dia a dia dos profissionais da Física, da Engenharia, entre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, Tom M. *Cálculo*. Trad. Joaquim Ferreira Marques. Rio de Janeiro: REVERTÉ Ltda. 1981. Vol. 2.
- [2] LOUIS, Leithold. *O Cálculo com geometria analítica*. 3 ed. São Paulo: HARBRA Ltda. 1994. Vol. 2.
- [3] MUSTAFA, A. Munem, FOULIS, David J. *Cálculo*. Tradução de André Lima Cordeiro. Rio de Janeiro: LTC. 2008. V. 2.
- [4] SWOKOWSKI, Earl Willian. *Cálculo com geometria analítica*. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983. V. 2.
- [5] THOMAS, George B. *Cálculo*. Tradução de Luciana do Amaral Texeira; Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. V. 2.
- [6] BRAGA, Alcimar de Souza. **Teorema de Green e Aplicação**. Disponível em <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AlcimardeSouzaBraga.pdf>. Junho 2011.
- [7] <http://www.mathematik.com/Planimeter/explanation.html>