

$$-T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} + N(\theta)r\Delta\theta = 0 \quad (2.5)$$

temos ainda que,

$$F_{1,x} - F_{2,x} = 0$$

ou seja,

$$T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \quad (2.6)$$

Agora, dividindo as equações (2.5) e (2.6) por $\Delta\theta$ e passando ao limite quando $\Delta\theta \rightarrow 0$, obtemos da equação (2.5),

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{1}{\Delta\theta}\mu N(\theta)r\Delta\theta\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{\Delta\theta}N(\theta)r\Delta\theta \right] = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} 0$$

$$\implies \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} + N(\theta)r \right] = 0$$

$$\implies \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{T}{\Delta\theta}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\frac{\Delta\theta}{2} + N(\theta)r \right] = 0$$

$$\implies \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{T}{2}\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) - \frac{T}{2}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) - \mu N(\theta)r\frac{\Delta\theta}{2} + N(\theta)r \right] = 0$$

$$\implies \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{T}{2}\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \right] - \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\frac{T}{2}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \right] - \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\mu N(\theta)r\frac{\Delta\theta}{2} \right] + \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[N(\theta)r \right] = 0$$

$$\implies N(\theta)r - \frac{T(\theta)}{2} - \frac{T(\theta)}{2} = 0$$

portanto,

$$N(\theta)r - T(\theta) = 0 \quad (2.7)$$

onde, $\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \simeq \frac{\Delta\theta}{2}$, para $\frac{\Delta\theta}{2}$ pequeno.

Da equação (2.6), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\frac{T}{\Delta\theta} \left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2} \right) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{T}{\Delta\theta} \left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2} \right) \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{\Delta\theta} \mu N(\theta) r \Delta\theta \cos \frac{\Delta\theta}{2} \right] &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} 0 \\ \implies \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\frac{T}{\Delta\theta} \left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2} \right) - \frac{T}{\Delta\theta} \left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2} \right) + \mu N(\theta) r \right] &= 0 \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \mu N(\theta) r = 0 \quad (2.8)$$

onde, $\cos \frac{\Delta\theta}{2} \simeq 1$ quando $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Agora, usando a equação (2.7), obtemos

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \mu T(\theta) = 0,$$

cuja solução é,

$$T(\theta) = ce^{-\mu\theta}.$$

Usando a condição inicial $T(0) = T_0$, temos

$$T(0) = ce^{-\mu\theta} \implies T(0) = c \implies c = T_0$$

logo,

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta}$$

portanto,

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta} \implies T_1 = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

Isso implica que, quanto maior o valor de α , menor será o valor de T_1 . Portanto, quanto maior o número de voltas que a corda fizer no poste, a força T_1 pode ser tão pequena que o próprio peso do resto da corda jogada sobre o solo basta para manter o equilíbrio.

2.4. O Problema da Braquistócrona

Em Julho de 1696, ou seja, no final do século XVI, na revista *Acta Eruditorum*, fundada e mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, o matemático suíço Jean Bernoulli apresentou um problema que logo despertou o interesse de seus colegas. Tratava-se de achar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela

a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. Leibniz espalhou o problema enviando-o por carta aos maiores matemáticos da época. A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive o próprio Leibniz, além de Isaac Newton e os irmãos Jacques e Jean Bernouilli. Todos indicaram que a curva mais rápida, ou braquistócrona (*brakhisto* = *menor*, *chronos* = *tempo*), se refere à curva ou o caminho, que une dois pontos A e B pertencentes a um plano vertical, que toma o mínimo tempo, quando esta partícula está submetida apenas a influência da gravidade, essa curva chama-se cicloide.

No século XVI, vários matemáticos, dentre eles Galileu, estudaram a cicloide, que é a curva traçada por um ponto qualquer da borda de uma roda que rola sem deslizar por um plano horizontal.

Considere uma partícula que se move em um campo que começa (repouso) no ponto A para um outro ponto B . Nosso objetivo é achar a curva que permite a partícula realizar o trajeto do ponto A para o ponto B no menor tempo possível.

Podemos escolher o sistema de coordenadas de forma que o ponto A seja a origem, ou seja, os pontos relacionados ao problema são $A(0, 0)$ e $B(x_1, y_1)$. Conforme figura abaixo:

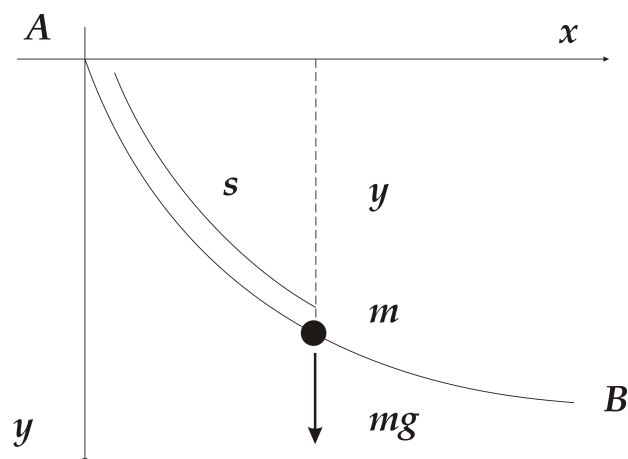


Figura 4.: partícula se movimentando do ponto A para o ponto B sob uma força constante.

Devido ao fato da força atuante sobre a partícula ser constante e sem atrito o campo de força é conservativo, ou seja, $E_m = E_c - E_p = 0$. A energia cinética do sistema é $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ e a energia potencial é $E_p = -mgx$, onde g é a força da gravidade.

Seja v o módulo da velocidade da partícula no ponto B , x o seu deslocamento vertical e m sua massa, assim

$$|-mgx| = \frac{1}{2}mv^2 \implies mgx = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gx}$$

mas, a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido s , pelo tempo t , ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Sabemos que o comprimento do arco entre os pontos $A(0, 0)$ e $B(x_1, y_1)$, representado pelo gráfico da função $y = y(x)$, é dado por:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(\lambda)]^2} d\lambda \quad (2.9)$$

derivando (2.9), obtemos:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

Denotando por t o tempo que a partícula gasta para percorrer esse trajeto, temos:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (2.10)$$

Agora, vamos integrar (2.10) para determinar o tempo total que a partícula gasta para se deslocar de $A(0, 0)$ para $B(x_1, y_1)$. Assim,

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2(s)} ds = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2gx(s)}} \sqrt{1 + y'^2(s)} ds = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{2gx(s)}} ds \quad (2.11)$$

ainda podemos escrever (2.11) da seguinte forma

$$t = \int_0^x \left(\frac{1 + (y')^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (2.12)$$

Como desejamos que a partícula percorra o trajeto do ponto A até o ponto B no menor tempo possível, devemos minimizar o funcional dado pela equação (2.12). Note que a constante $(2g)^{\frac{1}{2}}$ não altera a equação final, desse modo podemos escrever f da seguinte forma.

$$f(x, y(x), y'(x)) = \left(\frac{1 + (y')^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

temos ainda que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, assim, a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

ou seja, a Equação de Euler-Lagrange torna-se

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

isto é, $\frac{\partial f}{\partial y'} = C$, onde C é uma constante o que implica, $\frac{\partial f}{\partial y'} = (2a)^{-\frac{1}{2}}$, a é uma nova constante.

Agora vamos derivar f , então fazendo

$$u = \frac{1 + (y')^2}{x}$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + (y')^2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2y'}{x} = \left(\frac{1 + (y')^2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(y')^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{x}{1 + (y')^2} \frac{(y')^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{(y')^2}{x[1 + (y')^2]} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

o que implica,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \left(\frac{(y')^2}{x[1 + (y')^2]} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \implies \left(\frac{(y')^2}{x[1 + (y')^2]} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\frac{(y')^2}{x[1 + (y')^2]} = \frac{1}{2a} \quad (2.14)$$

fazendo alguns cálculos algébricos em (2.14), temos:

$$\begin{aligned} \frac{(y')^2}{x[1 + (y')^2]} = \frac{1}{2a} &\implies 2a(y')^2 = x(1 + (y')^2) \implies 2a(y')^2 = x + x(y')^2 \\ \implies 2a(y')^2 - x(y')^2 = x &\implies (y')^2(2a - x) = x \implies (y')^2 = \frac{x}{2a - x} \end{aligned}$$

multiplicando o lado direito da última igualdade por x , obtemos:

$$(y')^2 = \frac{x^2}{(2ax - x^2)} \implies y' = \frac{x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.15)$$

integrando a equação (2.15), tem-se:

$$\int y' dx = \int \frac{x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \implies y = \int \frac{x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (2.16)$$

fazendo a mudança de variável, ou seja, fazendo $x = a(1 - \cos \theta)$ temos, $dx = a \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta$.

Dessa forma (2.16) torna-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{a(1 - \cos \theta)a.\text{sen}\theta}{\{2a[a(1 - \cos \theta)] - [a(1 - \cos \theta)]^2\}^{\frac{1}{2}}} d\theta &= \int \frac{a(1 - \cos \theta)a.\text{sen}\theta}{[2a^2 - 2a^2 \cos \theta - (a^2 - 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta)]^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \int \frac{a^2(1 - \cos \theta)\text{sen}\theta}{(a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \int \frac{a^2(1 - \cos \theta)\text{sen}\theta}{[a^2(1 - \cos^2 \theta)]^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \int \frac{a^2(1 - \cos \theta)\text{sen}\theta}{a(\text{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \int \frac{a^2(1 - \cos \theta)\text{sen}\theta}{a.\text{sen}\theta} d\theta \\
&= \int a(1 - \cos \theta) d\theta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$y = \int a(1 - \cos \theta) d\theta. \quad (2.17)$$

Agora, integrando (2.17) obtemos:

$$y = a(\theta - \text{sen}\theta) + C$$

onde C é uma constante.

Como a curva procurada passa pela origem, ou seja, pelo ponto A , então a constante de integração é nula e as equações paramétricas para esta curva são dadas por:

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta) \\ y = a(1 - \text{sen}\theta) \end{cases} \quad (2.18)$$

Esta curva é uma cicloide, ressaltando que a constante a deve ser escolhido de forma que a cicloide passe pelo ponto B .

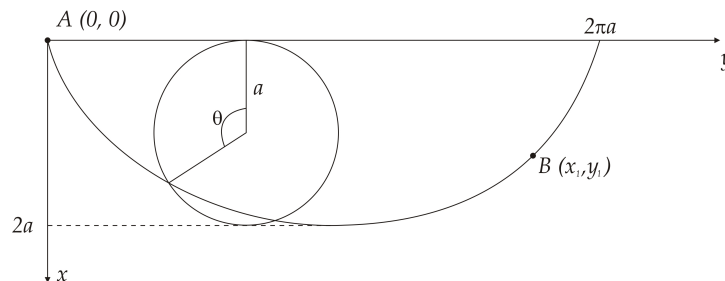


Figura 5.: Cicloide

3 Conclusão

O que apresentamos nesse trabalho foi à grande importância e utilidade da Matemática para o entendimento e a resolução de fenômenos reais. Grande parte da população imagina que a Matemática apenas serve para resolver problemas simples do cotidiano ou mesmo apenas como mero objeto do exercício de raciocínio. Tentamos mostrar que o universo Matemático é muito mais amplo do que se imagina. Com este trabalho tivemos a oportunidade de perceber e aliar a teoria Matemática a problemas reais observados. Vimos também que a partir desse problema, pesquisadores de todo mundo começaram a desenvolver modelos Matemáticos, o qual sua representação chegasse mais próximo do fenômeno real observado, mostrando ainda os avanços obtidos em termos de modelagem Matemática para sistemas dinâmicos biológicos.

Referências Bibliográficas

- BASSANESI R.C e FERREIRA W, Equações Diferenciais com Aplicações, Ed. Harbra, São Paulo - 1988
- FIGUEIREDO D.G e NEVES A. F, Equações Diferenciais Aplicadas, IMPA / Rio de Janeiro - 1997
- BASSANESI R. C, Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática, Ed. Contexto, São Paulo - 2006
- LIMA, ELON LAGES, Análise Real Volume 1, Funções de uma Variável, IMPA / Rio de Janeiro - 2010
- BOYCE, W. E.; DIPRIMAR R. C, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Ed. LTC, Rio de Janeiro - 1998
- KREYSZIG, ERWIN, Matemática Superior Volume 1, Livros Técnicos e Científicos, LTC / Rio de Janeiro - 1976
- SANTOS, REGINALDO J, Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, UFMG / Minas Gerais - 2009
- SILVA, JOSÉ. E, Método Clássico de Equações Diferenciais e Aplicações, Projeto PIBIC UEPB / Campina Grande - 2008/2009

A Apêndice

A.1. Critério de Weierstrass

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

chama-se uniformemente convergente a φ em A se ela é a sucessão de suas somas parciais; isto é, se para cada $\epsilon > 0$ existe um inteiro N , independente de x , tal que

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - \varphi(x)| < \epsilon, \quad x \in A, \quad n \geq N.$$

Se

$$|f_n(x)| \leq b_n, \quad x \in A, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge,}$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

converge uniformemente em A .

Demonstração:

Para cada $x \in A$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

converge absolutamente, por comparação com

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

seja

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in A.$$

Em vista disto, e das hipóteses, temos:

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - \varphi(x)| = |-f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) - \dots| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \dots,$$

mas, por ser convergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, para cada $\epsilon > 0$ existe um inteiro N , que só depende de ϵ , tal que

$$b_{n+1} + b_{n+2} + \dots < \epsilon, \quad n \geq N.$$

portanto,

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - \varphi(x)| < \epsilon, \quad x \in A, \quad n \geq N.$$

■

A.2. Cálculo Variacional e Equação de Euler-Lagrange

O problema básico do Cálculo Variacional é determinar uma função $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ que minimiza ou maximiza o funcional dado por:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx \tag{A.1}$$

isto é, a função $y(x)$ é um valor extremo do funcional J , podendo ser um valor máximo ou um valor mínimo, onde J depende da função $y(x)$ e os limites de integração são fixos, daí podemos variar a função $y(x)$ até que um valor extremo de J seja encontrada. Assim, se uma função $y(x)$ minimiza ou maximiza o funcional J , então qualquer função vizinha de $y(x)$ não importando o quanto esteja próximo de $y(x)$, esta função tem que fazer J variar aumentando ou diminuindo.

Podemos dar uma representação paramétrica para uma vizinhança da função $y(x)$, ou seja, $y = (\alpha, x)$ tal que para $\alpha = 0$, temos $y = y(0, x) = y(x)$ o que implica $y = y(x)$ é a função que faz J assumir um extremo. Dessa forma, podemos escrever

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \quad (\text{A.2})$$

onde $\eta : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ é alguma função de x que possui derivada de primeira ordem contínua, ou seja, de classe C^1 que se anula nos extremos x_1 e x_2 , isto é, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Conforme figura abaixo:

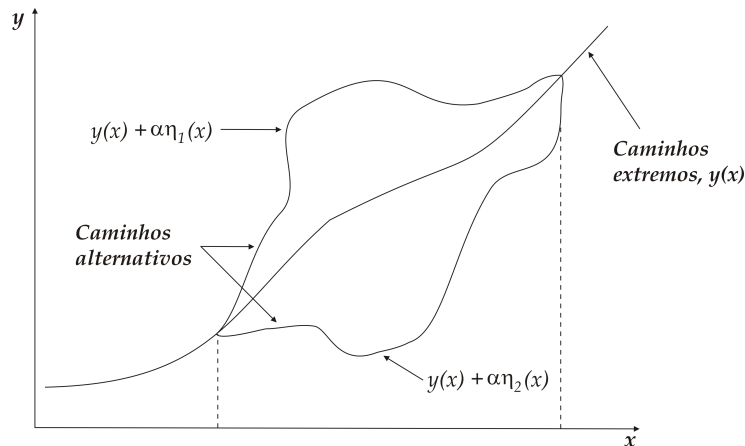


Figura 1.: Extremos

Se funções do tipo dadas pela equação (A.2) são consideradas, a expressão dada pela equação (A.1) se torna um funcional do parâmetro α dado por:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) dx. \quad (\text{A.3})$$

Agora vamos achar um extremo para o funcional J que se reduz a resolver a Equação de Euler-Lagrange associada ao funcional J , a qual deduziremos a seguir, mas antes veremos um lema fundamental para o desenvolvimento da teoria do Cálculo Variacional.

Lema A.1 Se $G : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e se é válida a condição

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0$$

para toda função diferenciável $\eta : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ então $G(x) = 0, \forall x \in (x_1, x_2)$.

Demonstração:

Suponha por absurdo, que $G(x') \neq 0$ para algum $x' \in (x_1, x_2)$. Suponha também que $G(x') > 0$. Pela continuidade de G , existe uma vizinhança de x' , digamos, $c \leq$

$x' \leq d$ na qual $G(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$. Mas com isso a igualdade abaixo não se verifica para toda função diferenciável η ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0.$$

Considerando a função $\eta(x)$ dada por:

$$\begin{cases} 0 & , x_1 \leq x \leq c \\ (x-c)^2(x-d)^2 & , c < x < d \\ 0 & , d \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

da função (A.4) obtemos,

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_c^d (x-c)^2(x-d)^2G(x)dx$$

como $G(x) > 0$ para $c \leq x \leq d$, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx \neq 0$$

o que contradiz a hipótese.

Agora, se $G(x') < 0$ para $c \leq x' \leq d$, considerando a função $-G(x')$, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x')dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-c)^2(x-d)^2(-G(x))dx > 0,$$

novamente contradiz a hipótese.

Portanto,

$$G(x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

■

Observação A.1 *A Condição para que um funcional J tenha um valor extremo é que o funcional $J(\alpha)$ não dependa do parâmetro α em sua derivada de primeira ordem ao longo do caminho que fornece o extremo, ou seja,*

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (\text{A.5})$$

Com o resultado do lema acima e da equação (A.5) podemos deduzir a Equação de Euler-Lagrange associada ao funcional J . Então derivando (A.3), temos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(\alpha, x), y'(\alpha, x)) dx \implies \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

pelo fato dos limites de integração estarem fixo, derivandos apenas o integrando, ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (\text{A.6})$$

pela equação (A.2) tem-se

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

assim, podemos reescrever (A.6) da seguinte forma

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{A.7})$$

Agora, usando a integração por partes e o fato de $\eta(x_1) = \eta(x_2)$, assim (A.7) torna-se

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx \quad (\text{A.8})$$

note que, a equação (A.8) não depende do parâmetro α , mas as funções y e y' dependem do parâmetro α . Dessa forma, como o funcional $J(\alpha)$ assumirá um valor extremo se $\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$, pelo lema acima, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, (A.9) é Equação de Euler-Lagrange.

A.3. Comprimento de Arco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ com derivada contínua em (a, b) . Queremos definir o comprimento de seu gráfico, que é a curva C , entre os pontos $P_0(a, f(a))$ e $P_n(b, f(b))$.

Demonstração:

Seja $P = x_0, \dots, x_n$ uma partição do intervalo $[a, b]$, tal que $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Considere a linha poligonal determinada pelos pontos P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, dados por $(x_i, f(x_i))$.

Assim, o comprimento de C é dado por:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}, P_i|$$

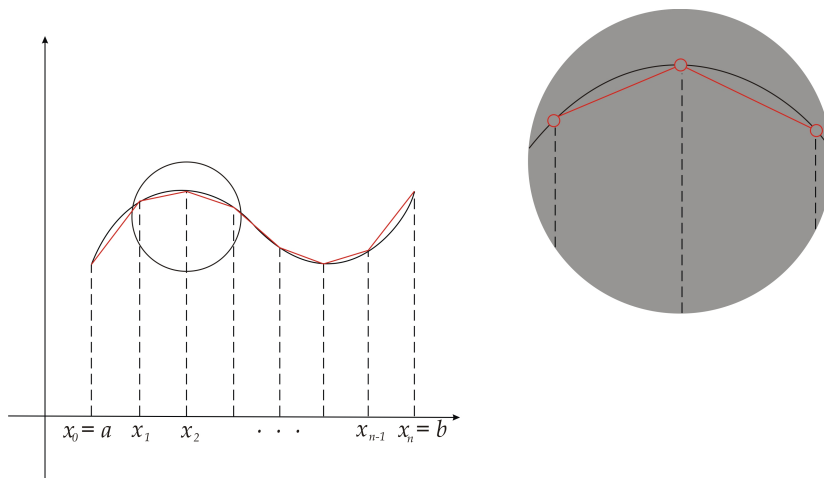


Figura 2.: Partição do Intervalo $[a, b]$

onde,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}, P_i| &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} \end{aligned}$$

como f é de classe C_1 , ou seja, tem derivada contínua em (a, b) , então pelo Teorema do Valor Médio podemos escrever L da seguinte forma.

$$f'(z_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

para algum z_i tal que $x_{i-1} < z_i < x_i$, ou seja,

$$|P_{i-1}, P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta x_i$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Portanto,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}, P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta x_i$$

é uma soma de Riemann para função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ em relação à partição P de $[a,b]$.

Assim, o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

■