



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**KATIANA MARIA DA SILVA**

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS POR ALUNOS SOBRE OS  
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO APOIADAS PELO ORIGAMI  
INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO E O GEOGEBRA**

Campina Grande/PB  
2013

KATIANA MARIA DA SILVA

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS POR ALUNOS SOBRE OS  
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO APOIADAS PELO ORIGAMI  
INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO E O GEOGEBRA**

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática.

Campina Grande/PB  
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S586i

Silva, Katiana Maria da.

Investigações geométricas por alunos sobre os pontos notáveis do triângulo apoiadas pelo origami instrumentos de desenho geométrico e o geogebra [manuscrito] / Katiana Maria da Silva. – 2013.

81 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

“Orientação: Prof. Dr. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de Geometria. 2. GeoGebra. 3. Figuras geométricas. I. Título.

21. ed. CDD 516

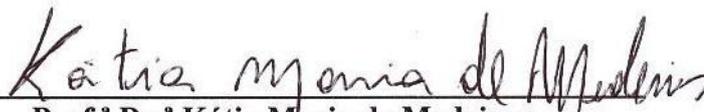
KATIANA MARIA DA SILVA

**INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS POR ALUNOS SOBRE OS  
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO APOIADAS PELO ORIGAMI  
INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO E O GEOGEBRA**

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 11/08/2013

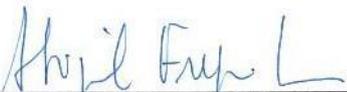
**BANCA EXAMINADORA**



**Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros**  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Orientadora



**Prof.ª Msc Maria da Conceição Vieira Fernandes**  
Departamento de Matemática – CCT/UEPB



**Prof.ª Dr.ª Abigail Fregni Lins**  
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

*Dedico este Trabalho ao Divino Espírito Santo, fonte de toda Sabedoria e a minha mãe Desilda Maria, com amor, carinho e gratidão por todo apoio, incentivo e exemplo de fé.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e porque n'Ele sou mais que vencedora.

Aos meus pais, em especial minha querida mãe e meus irmãos.

Ao meu namorado Rodrigo Cavalcanti, por toda compreensão e incentivo e a minha amiga Ina, pelas palavras de vitória nos momentos mais ásperos desta pesquisa.

À Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Kátia Maria de Medeiros, que foi mais do que orientadora: foi paciente, compreensiva, amiga e incentivadora, além de ser um exemplo de excelente profissional e as professoras Maria da Conceição e Abigail por terem aceitado o convite para fazer parte da Banca Examinadora.

À todos os meus amigos e amigas do Curso de Matemática da UEPB em especial a minha grande amiga Rosilda, por toda ajuda.

Aos professores Ney, Severino Bezerra, Alexandra Alves, Eronildo, Enoque e minha amiga Isaedja Ferreira, que abriram as portas da Escola Salvino para que fosse possível a realização desta pesquisa.

A toda a equipe da Secretaria Municipal de Educação de Juripiranga, a qual faço parte, em especial a Petronila Beatriz, Zélia e Fafá por toda ajuda.

Às minhas queridas amigas de trabalho Madalena e Fernanda pela amizade e por toda sincera ajuda para realização desta pesquisa, que é uma vitória em minha vida.

A todos os professores que são capazes de enxergar mais do que lhes é mostrado.

A todos aqueles que incentivaram e desejaram a conclusão desta etapa em minha vida.

Muito Obrigada!

“O principal objetivo da educação é criar pessoas capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que outras gerações fizeram.”  
(Jean Piaget)

## RESUMO

A Matemática no ambiente escolar é considerada uma disciplina muito difícil pelos alunos. O ensino da Geometria também faz parte desta realidade, isso porque, muitas vezes, existe uma grande dificuldade dos alunos na compreensão de conceitos. No entanto, quando utilizamos recursos didáticos diversos no ensino-aprendizagem é possível alcançar uma melhor compreensão. O objetivo geral de nossa pesquisa foi analisar como os alunos desenvolvem Investigações Geométricas sobre Pontos Notáveis do triângulo, utilizando Dobraduras, o aplicativo GeoGebra e os Instrumentos de Desenho Geométrico numa turma do 8º ano do Ensino Fundamental. Esta pesquisa teve como objetivos específicos: investigar as propriedades de cada Ponto Notável do Triângulo, através das construções feitas com o auxílio do Origami (dobraduras); investigar as propriedades de cada Ponto Notável do Triângulo, através das construções feitas com o auxílio do aplicativo GeoGebra; sendo uma Investigação Geométrica para cada um dos Pontos Notáveis – Incentro, Circuncentro, Ortocentro e Baricentro e Investigar as propriedades de cada Ponto Notável do Triângulo, através das construções feitas com o auxílio dos Instrumentos. A metodologia deste trabalho foi desenvolvida levando em consideração o aspecto qualitativo. Neste sentido, desenvolvemos a aplicação de um questionário sobre as concepções dos alunos em relação à geometria plana, atividades investigativas com o uso de Origamis, apresentação do aplicativo Geogebra no Laboratório de Informática, as Investigações Geométricas sobre cada Ponto Notável usando o Geogebra e com os Materiais de Desenho Geométrico. Esta pesquisa foi realizada nos meses de novembro e dezembro de 2012, numa turma do 8º ano do Ensino Fundamental II, composta por 15 alunos, da Escola Municipal de Ensino I. F. Salvino João Pereira, localizada em Juripiranga no Estado da Paraíba. Os resultados apontam avanços consideráveis em relação ao entendimento das propriedades das figuras geométricas através de Investigações utilizando recursos didáticos que favorecem a reflexão da atividade feita, principalmente quanto ao uso do aplicativo GeoGebra que se mostra um recurso inovador e eficaz na compreensão de propriedades.

**Palavras-chave:** Investigações Geométricas; GeoGebra; Origami; Instrumentos de Desenho Geométrico; Pontos Notáveis do Triângulo.

## ABSTRACT

School Mathematics is considered for students very difficult discipline. The geometry teaching is also part of this reality, because, often, there is great difficulty in students' understanding of concepts. However, when we use different teaching resources the teaching and learning can achieve a better understanding. The overall goal of our research was to analyze how students develop Geometric Investigations on Notable points of the triangle, using origami (paper folding), and the application GeoGebra Instruments Geometric Design a class of 8th grade of elementary school. This research had the following objectives: To investigate the properties of each Point Outstanding Triangle, through the constructions made with the aid of Origami (paper folding); to investigate the properties of each Point Outstanding Triangle, through the constructions made with the aid of GeoGebra application, being an Investigation Geometric points for each of the Notables - Incentro, Circumcenter and Orthocenter Baricentro and investigate the properties of each Point Outstanding Triangle, through the constructions made with the aid of the instruments. The methodology of this work has been developed taking into account the qualitative aspect. In this sense, we developed a questionnaire on students' conceptions in relation to plane geometry, Investigative Activities using Origamis, presentation application in Geogebra Computer Laboratory, Geometric Investigations on every point Remarkable using GeoGebra and the materials Geometric Design. This research was conducted in the months of November and December 2012, a group of 8th grade of Elementary School II, composed of 15 students, the Municipal School I. F. Salvino João Pereira, Juripiranga located in the state of Paraíba. The results show considerable progress in relation to the understanding of the properties of geometric figures through investigations by using educational resources that promote reflection activity done, particularly regarding the use of GeoGebra application that shows an innovative and effective in understanding properties.

**Key-Words:** Geometric Investigations; GeoGebra; Origami; Instruments Geometrical Drawing; Remarkable Points of the Triangle.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Estrutura de uma ponte em forma de triângulo.....	22
<b>Figura 2:</b> Triângulo ABC.....	22
<b>Figura 3:</b> O ponto <b>I</b> é o incentro do triângulo <b>ABC</b> .....	23
<b>Figura 4:</b> Em cada caso, o ponto <b>O</b> é o circuncentro do triângulo <b>ABC</b> .....	23
<b>Figura 5:</b> Em cada caso, o ponto <b>H</b> é o circuncentro do triângulo <b>ABC</b> .....	23
<b>Figura 6:</b> O ponto <b>I</b> é o incentro do triângulo <b>ABC</b> .....	24
<b>Figura 7:</b> Uma dobragem e dois cortes.....	29
<b>Figura 8:</b> Mais dobragens e um corte.....	29
<b>Figura 9:</b> O aplicativo GSP (Geometer's Sketchpad).....	31
<b>Figura 10:</b> Uma das dobraduras mais populares, <i>tsuru</i> ou cegonha.....	32
<b>Figura 11:</b> Construção do Baricentro, através de Origami.....	34
<b>Figura 12:</b> Ponto médio de um segmento usando régua e compasso.....	36
<b>Figura 13:</b> Uso do esquadro na construção de retas paralelas.....	36
<b>Figura 14:</b> Nomes dados aos ângulos, exemplo com transferidor.....	37
<b>Figura 15:</b> Janela inicial do GeoGebra.....	40
<b>Figura 16:</b> Criação de pontos através de ferramentas e campo de entrada no GeoGebra.....	50
<b>Figura 17:</b> Criação de retas através de ferramentas e campo de entrada no GeoGebra.....	50
<b>Figura 18:</b> Construção de figuras geométricas no GeoGebra.....	51
<b>Figura 19:</b> Construção de um barco no GeoGebra.....	51
<b>Figura 20:</b> Construções da Atividade 1 no GeoGebra.....	52
<b>Figura 21:</b> Construções da Atividade 2 no GeoGebra.....	53
<b>Figura 22:</b> Construções da Atividade 3 no GeoGebra.....	53
<b>Figura 23:</b> Construção do Incentro.....	54
<b>Figura 24:</b> Construção do Circuncentro.....	58
<b>Figura 25:</b> Construção do Ortocentro.....	62
<b>Figura 26:</b> Construção do Baricentro.....	64
<b>Figura 27:</b> Encontrar o Ortocentro com Instrumentos de Desenho Geométrico.....	67
<b>Figura 28:</b> Encontrar o Ortocentro com Instrumentos de Desenho Geométrico.....	68
<b>Figura 29:</b> Encontrar o Baricentro com Instrumentos de Desenho Geométrico.....	68
<b>Figura 30:</b> Encontrar o Ortocentro com Instrumentos de Desenho Geométrico.....	69

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Avaliação das questões do questionário sobre as concepções dos alunos em relação à Geometria plana.....	<b>45</b>
--	-----------

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>13</b>
<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>14</b>
<b>CAPÍTULO I.....</b>	<b>16</b>
<b>REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>16</b>
<b>1.1 A Origem das Geometrias.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2 Os Elementos de Euclides.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3. Múltiplas Perspectivas no Ensino da Geometria.....</b>	<b>20</b>
<b>1.4. O Triângulo e Seus Pontos Notáveis.....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO II.....</b>	<b>25</b>
<b>2. A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AS INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS.....</b>	<b>25</b>
<b>2.1 A Aprendizagem Matemática com Tarefas de Investigações.....</b>	<b>25</b>
<b>2.2 Processos de Uma Investigação Matemática.....</b>	<b>27</b>
<b>2.3 Os Papéis do Professor numa Aula de Investigação Matemática.....</b>	<b>28</b>
<b>2.4. Investigações Geométricas.....</b>	<b>29</b>
<b>CAPÍTULO III.....</b>	<b>32</b>
<b>3. DOBRADURAS, INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO E O APLICATIVO GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICOS NAS AULAS DE GEOMETRIA.....</b>	<b>32</b>
<b>3.1 Dobraduras: Origem e Usos didáticos .....</b>	<b>32</b>
<b>3.2 Instrumentos de Desenho Geométrico.....</b>	<b>35</b>
<b>3.3 O Uso de Aplicativos no Ensino/Aprendizagem da Matemática.....</b>	<b>38</b>
<b>3.3.1 O GeoGebra.....</b>	<b>39</b>
<b>3.4 Relacionando Origami Instrumento de Desenho Geométrico e Geogebra na Aula de Matemática.....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO IV.....</b>	<b>44</b>
<b>4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....</b>	<b>44</b>
<b>4.1 Questionários Sobre as Concepções dos Alunos em Relação à Geometria Plana.....</b>	<b>44</b>
<b>4.1.1 Análise do Questionário.....</b>	<b>45</b>
<b>4.2 Atividades com Dobraduras Sobre os Pontos Notáveis de um Triângulo.....</b>	<b>46</b>
<b>4.2.1 ORTOCENTRO/ALTURA.....</b>	<b>47</b>

4.2.2 CIRCUNCENTRO/MEDIATRIZES.....	47
4.2.3 BARICENTRO/MEDIANAS.....	47
4.2.4 INCENTRO/BISSETRIZES INTERNAS.....	48
<b>4.3 Aulas de Apresentação do Aplicativo GeoGebra e Investigação Geométricas no Laboratório de Informática da Escola Salvino.....</b>	<b>48</b>
4.3.1 Descrição das duas primeiras aulas - Realizadas dia 21 de Novembro de 2012.....	49
<b>4.4 A Investigação Geométrica com o Incentro.....</b>	<b>54</b>
<b>4.5 A Investigação Geométrica com o Circuncentro.....</b>	<b>58</b>
<b>4.6 A Investigação Geométrica com o Ortocentro.....</b>	<b>62</b>
<b>4.7 A Investigação Geométrica com o Baricentro.....</b>	<b>64</b>
<b>4.8 Atividades de Investigações Geométricas sobre os Pontos Notáveis utilizando Instrumentos de Desenhos Geométrico.....</b>	<b>66</b>
<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>70</b>
<b>Referências.....</b>	<b>73</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>75</b>

## INTRODUÇÃO

É possível notar que, as práticas de ensino na área da matemática especificamente no ensino da geometria necessitam de bastante atenção.

Segundo Barreto (2005, p.1) “Um dos problemas mais comuns observados nas aulas de matemática é que os alunos são expostos a situações padrão acarretando uma aprendizagem de memorização e mecanizada.”.

Nesta pesquisa apresentamos algumas Investigações Geométricas sobre pontos notáveis de um triângulo, onde é possível que o aluno investigue a construção de conceitos, argumentando e concluindo suas ideias.

Associamos às investigações, o uso de alguns recursos didáticos, tais como o uso do instrumento de Desenho Geométrico, que nesta construção é atribuída grande importância a ação motora, e o uso de Origami (dobraduras), que desempenham no aluno a percepção espacial-temporal, onde através do tato e da visão o aluno vai construindo, percebendo e vivendo a experiência.

Outro recurso didático e inovador a ser usado nesta pesquisa, foi o aplicativo GeoGebra, já que a necessidade do uso da tecnologia faz parte da realidade escolar. Além disso, o uso desta ferramenta proporciona ao aluno uma aplicação prática do conhecimento por meio de testes, onde ele pode verificar a construção feita a partir da ação e reflexão, permitindo uma visão mais dinâmica e interessante da geometria.

Em nossa pesquisa fizemos o uso desses três recursos acima citado na seguinte ordem: Origami(Dobraduras), o Aplicativo GeoGebra e Instrumento de Desenho Geométrico. Poderíamos ter feito na Ordem em que se encontra o título deste trabalho, mas quando pensamos em inserir os Instrumentos de Desenho Geométrico já não era mais possível fazer tal mudança.

Descreveremos a seguir, a organização deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Inicialmente, definimos o nosso objetivo geral e específico, a seguir apresentamos a revisão da literatura, onde mostramos historicamente a origem das Geometrias, assim como seus fundadores. Discutimos um pouco a respeito da Obra de Euclides de Alexandria “Os Elementos” através da introdução e tradução de Irineu Bicudo (2009) e fizemos uma breve explanação sobre o Triângulo e seus Pontos Notáveis; em seguida tratamos das Investigações Geométricas e a Aprendizagem Matemática; das Dobraduras e a Geometria assim como do uso de Instrumentos de Desenho Geométrico; logo após, tratamos do uso de Aplicativos no Ensino da Matemática dando atenção especial ao Aplicativo GeoGebra; e dando continuidade,

explicitamos as aulas de Investigações Geométricas sobre os Pontos Notáveis do Triângulo ( no Laboratório de Informática ) com a utilização do Origami (dobraduras), do Aplicativo GeoGebra e dos Instrumentos de Desenho Geométricos ; posteriormente, temos a análise dos dados e, finalmente apresentamos a conclusão.

## OBJETIVOS

### Objetivo Geral

Analisar como os alunos desenvolvem Investigações Geométricas sobre Pontos Notáveis do triângulo, utilizando Origami (dobraduras), o aplicativo GeoGebra e os Instrumentos de Desenho Geométrico numa turma do 8º ano do Ensino Fundamental.

### Objetivos Específicos:

- Identificar as concepções dos alunos sobre a Geometria Plana;
- Investigar as propriedades de cada Ponto Notável do triângulo, através das construções feitas com o auxílio do Origami (dobraduras).
- Investigar as propriedades de cada Ponto Notável do triângulo, através das construções feitas com o auxílio do aplicativo GeoGebra;
- Investigar as propriedades de cada Ponto Notável do triângulo, através das construções feitas com o auxílio dos Instrumentos de Desenho Geométrico.

## METODOLOGIA

Considerando os objetivos da nossa pesquisa, verificamos que o estudo apresenta as características de uma pesquisa qualitativa e quantitativa.

Para coleta de informações, foi escolhida uma turma do 8º ano (7ª série) do Ensino Fundamental II da Escola Estadual de Ensino Infantil e Fundamental Salvino João Pereira composta por 15 alunos, localizada em Juripiranga, no Estado da Paraíba.

A pesquisa foi realizada nos meses de Novembro e Dezembro de 2012, planejada para ser desenvolvida num total de quinze aulas de 45 minutos cada, em quatro momentos distintos:

- Uma aula, para aplicação de um questionário, visando saber as concepções dos alunos sobre a Geometria e os tipos de tarefas que os mesmos vivenciam em sala de aula;
- Duas aulas, sobre atividades com os Pontos Notáveis de um triângulo, feitas através de *Dobraduras* na sala de aula;
- Dez aulas no Laboratório de Informática da escola, sendo duas aulas para apresentação do aplicativo GeoGebra, suas ferramentas e comandos e oito aulas para desenvolvermos as Investigações Geométricas sobre os Pontos Notáveis do Triângulo;
- Duas aulas, com atividades sobre Pontos Notáveis de um triângulo, desenvolvidas com Instrumento de Desenho Geométrico.

No primeiro encontro de nossa pesquisa foi proposto aos alunos um questionário, onde tivemos por objetivo obter deles, respostas a respeito das tarefas vivenciadas por eles em sala de aula e de suas concepções sobre a geometria. Este questionário foi respondido por eles individualmente e tiveram 45 minutos para finalizar suas respostas.

No segundo momento os alunos foram divididos em grupos de três. Foi entregue a eles alguns materiais tais como papéis, tesoura, compasso, cola e transferidor, para auxiliá-los na tarefa sobre os Pontos Notáveis do Triângulo que seriam realizadas através de dobraduras.

Este trabalho foi concluído num tempo total de 90 minutos, equivalentes a duas aulas de Matemática.

O terceiro momento de nosso trabalho, diz respeito a 10 aulas, realizadas no Laboratório de Informática. Duas delas foram dedicadas a apresentação do aplicativo GeoGebra, assim como suas ferramentas e o campo de entrada. Aqui propomos a eles, três

atividades, duas dessas foram sobre a criação de pontos e retas através de ferramentas e do campo de entrada.

A terceira atividade foi sobre a construção de um barco, onde visamos a familiarização do aplicativo por eles, através da exploração do GeoGebra de forma lúdica e prazerosa.

Nas outras aulas no Laboratório de Informática propomos aos alunos que investigassem as propriedades de cada Ponto Notável do Triângulo. Neste momento, os alunos individualmente utilizavam o computador para através do aplicativo realizarem as tarefas propostas a eles.

É importante ressaltar que apesar de estarem cada um utilizando seu próprio computador, à medida que iam realizando os processos da Investigação discutiam entre si, além de ajudarem o colega ao lado na utilização do aplicativo, trocando uns com os outros ideias e assim iam construindo em grupo seus conhecimentos.

O quarto e último momento de nossa pesquisa se deu no dia 05 de Dezembro de 2012. Neste encontro, foi proposto aos alunos que, inicialmente, fossem divididos em pequenos grupos e utilizassem de Instrumentos de Desenho Geométricos, tais como, régua, compasso, transferidor e esquadro para realizarem as tarefas propostas com os pontos notáveis.

Ao realizarem essas tarefas tivemos por objetivo fazer com que os alunos observassem e entendessem as propriedades de cada ponto notável do triângulo construindo.

## CAPÍTULO I

Neste primeiro capítulo faremos uma abordagem a respeito da revisão de literatura, mostrando um pouco sobre a origem das Geometrias onde iremos descrever a respeito dos tipos de geometrias e seus criadores. Destacamos aqui a obra “Os Elementos de Euclides” introduzida e traduzida por Irineu Bicudo. Assim como as múltiplas perspectivas no Ensino da Geometria e o triângulo e seus pontos notáveis.

### REVISÃO DE LITERATURA

#### 1.1 A Origem das Geometrias

Antes das linguagens escritas existem indícios de que o homem tinha entrado em contato com as formas dos seres e objetos que existem no mundo. De acordo com Ernesto (2012), através da história sabe-se que as civilizações antigas da Mesopotâmia, durante o período de 2.00 a 600 a. C., desenvolveram um conhecimento de Geometria considerável, principalmente na construção de grandes obras, na tentativa de controlar as enchentes, formadas pelos rios Tigre e Eufrates. Neste período, os egípcios, também contribuíram no desenvolvimento da Geometria, principalmente pela necessidade de remarcarem os limites de propriedades agrícolas, após as cheias do rio Nilo, podemos observar também que através das pirâmides construídas por eles percebemos um razoável conhecimento sobre construção civil.

No entanto, o autor destaca que o declínio das culturas mesopotâmias e egípcias, a Grécia foi se tornando, aos poucos, a capital do conhecimento científico. Neste momento, destacaram-se os gregos, Tales (624-548 a. C. aproximadamente) nascido em Mileto e Pitágoras (580-500 a.C aproximadamente) nascido na ilha de Samos, que desenvolveram na época conhecimentos sobre Astronomia e Matemática por frequentarem os grandes centros de conhecimentos da época. De acordo com a história, Tales foi o primeiro a formular e demonstrar propriedades gerais sobre as figuras geométricas sobre as quais os egípcios conheciam apenas por experiência. Iniciava-se, assim, com Tales, a Geometria Dedutiva.

Ernesto (2012) ressalta aqui que, a partir deste momento, a Geometria deixava de ser apenas um instrumento de medição e passava a ter um sentido mais amplo, que se revestia de caráter científico. A partir daí, novos avanços foram feitos por Platão, Perseu e Eudoxo, os quais foram importantes, mas coube a Euclides de Alexandrina (320-270 a. C.) coordenar e sistematizar todo o conhecimento geométrico adquirido até sua época na obra Os Elementos.

Novas contribuições, porém, foram dadas por Arquimedes(287-212 a.C) e Diocles. Entre os Gregos, no final do século III a.C., os escritos de Apolônio de Perga (262-190?

A.C.) marcam então o auge da Geometria. Pouco depois, Hiparco cria a Trigonometria, porém, foi com o matemático grego, Euclides de Alexandrina que a Geometria se desenvolveu e fez da cidade egípcia de Alexandria o grande centro mundial da Geometria.

Iezzi, Dolce e Machado (2005), salientam que a importância do trabalho de Euclides para a Geometria foi tanta que os conhecimentos reunidos em *Os Elementos*, e depois somados aos que derivaram dele, passaram a ser conhecidos como Geometria Euclidiana.

É muito comum ouvirmos falar em Geometria Euclidiana (plana e espacial) e em Geometria Analítica, porém é possível observar que, durante o decorrer dos séculos, a Geometria passou por diversos tratamentos. Conforme Ernesto (2012) afirma, é possível fazermos diversas classificações mais detalhadas desta área da Matemática. Segundo os autores, há diversas Geometrias que se classificam em:

- GEOMETRIA EUCLIDIANA

Para o desenvolvimento desta Geometria além de Euclides (300 a 200 a. C.) c contribuíram para também Arquimedes, Eratóstenes e Ptolomeu. Euclides de Alexandria reuniu em sua obra “*Os Elementos*”, os trabalhos de Tales e Pitágoras, assim como contribuições à Geometria dos egípcios e babilônios. Obra está composta por 13 livros (10 sobre Geometria e 3 sobre Teoria dos Números). Conforme o autor, esta obra tornou-se um best-seller da época e, até finais do século XIX, foi utilizada como manual em muitos países. Reforça ainda o autor que, provavelmente, nenhuma obra, além da Bíblia, tenha tido número maior de edições, e que nenhuma obra matemática teve tanta influência quanto a de Euclides.

- GEOMETRIA PROJETIVA

Derivada dos trabalhos dos grandes mestres de pintura Renascentista, Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Durer (1471-1528), além de ter tido importantes contribuições de Blaise Pascal (1623-1662) e Gérard Desargues (1593-1662). Esta Geometria baseou-se na resolução de problemas ligados à representação gráfica de objetos, pessoas e paisagens.

- GEOMETRIA ANALÍTICA

Assim como com a projetiva, houve a necessidade de se tratar algebricamente diversos problemas que a Geometria Euclidiana não conseguia abordar. Através de René Descartes concretiza entre a aproximação da álgebra e a Geometria.

- GEOMETRIA DESCRITIVA

Também denominada, muitas vezes, de Geometria Mongeana. Esta entre a Euclidiana e a projetiva, atribuída a Gaspard Monge (1746-1823) e Jean Poncelet (1788-1867). Surgiu como forma de descrever o comportamento das curvas e das figuras em duas ou três dimensões, sem recorrer a álgebra, considerando, pois suas projeções planas e suas características métricas.

- GEOMETRIA DIFERENCIAL

Esta é constituída pela associação das conquistas algébricas do cálculo diferencial àquelas da Geometria Analítica. Um dos seus principais criadores são Leonhard Euler (1707-1783) e Karl F. Gaus (1777-1855).

- GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

Este tipo de Geometria surge dos questionamentos de alguns axiomas contidos em Os Elementos de Euclides. Basicamente a suposição de que “por um ponto fora de uma reta” poderiam “passar duas retas paralelas a reta dada” fez com que Girolamo Saccheri (1667-1733), Gauss, Nicolas Lobatcheviski (1792-1856) e Janos Bolyai (1802-1860), propusessem uma nova Geometria: a Gaussiana. Partindo da alternativa de que pelo ponto não passa nenhuma paralela, George Riemann (1802-1860), propôs uma segunda Geometria não-Euclidiana.

- GEOMETRIA IMAGINÁRIA

Nikolay Ivanivich Lobatchevsky (1792-1856) firmou as Geometrias não-Euclidianas, baseadas na negação do postulado de Euclides sobre as paralelas e afirmou que, por um ponto

fora de uma reta, pode ser traçada mais de uma reta paralela à reta dada. Esta Geometria, por parecer tão contrária ao senso comum foi chamada assim de Geometria Imaginária.

## 1.2 Os Elementos de Euclides

Euclides constituiu nesta obra uma estrutura geométrica da Geometria Euclidiana, partindo de definições e postulados. Segundo Ernesto (2012), essa obra foi impressa pela primeira vez no ano de 1484, na cidade de Veneza e, depois disso, teve mais de mil edições.

Neste momento, iremos destacar uma destas tantas edições. A qual foi traduzida e introduzida por Irineu Bicudo em 2009, sendo esta a primeira tradução moderna e completa em português, feita diretamente do grego.

Segundo Bicudo (2009), a obra de Euclides frequentemente contempla a concisão, autor cita como exemplo o seguinte trecho:

Em lugar de “o quadrado sobre a AB (isto é, de lado AB)” diz, na maioria das vezes, “o sobre a AB”; e, “o pelas AB, CD”, em lugar de “o retângulo contido pelas AB, CD (ou seja, de lados AB,CD)”; Cortar em duas partes iguais (isto é, bissectar)” etc. (BICUDO, 2009, p. 12).

O autor destaca ainda que, se com Homero a língua grega alcançou a *perfeição*, atinge com Euclides a *precisão*. No decorrer da leitura deste livro podemos realmente perceber esta concisão, através do encurtamento de expressões, que o autor fez questão de manter em sua tradução.

Prosseguindo a leitura deste livro, podemos perceber que o autor exalta as muitíssimas demonstrações e cita-nos outras obras matemáticas escritas por Euclides, como por exemplo: *Ótica e Catóptrica*, *Elementos de Música* e ainda *O livro das divisões (de figuras)*.

A obra é composta por treze livros, dentre os quais, pegamos como referência o Livro I e IV, pois se tratam de **Geometria plana elementar**. Partindo de propriedades simples de retas e ângulos conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras entre outras. O Livro I assim como o Livro IV e a maioria dos treze livros, começa com uma lista de definições, a título de exemplo temos, do Livro I algumas definições de pontos e triângulos que se faz relevante ao nosso trabalho:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte
2. E linha é comprimento sem largura
3. Extremidades de uma linha são pontos
- (...)

20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.

(BICUDO, 2009, p. 97 -98).

A partir desse exemplo de definições, encontrado no Livro I da obra *Os Elementos*, podemos perceber que as definições aparecem sem nenhum comentário. Após as definições, vem as proposições, aparecem os Postulados e as Noções Comuns, e assim o livro discorre praticamente nesta ordem.

### 1.3. Múltiplas Perspectivas no Ensino da Geometria

A Geometria Euclidiana sintética descreve de forma apropriada muitos aspectos do nosso mundo. Segundo (COXFORD Jr. et.al., 1993), pode-se ter como amostras das utilizações práticas da Geometria Euclidiana, alguns objetos manufaturados presentes no mundo à nossa volta. Muitos desses objetos são formados por elementos com forma linear ou circular. Sendo, assim, baseia-se na Geometria de Euclides, tendo, pois origem em segmentos, ângulos, triângulos, quadriláteros, circunferências, reta, conjunto de pontos e assim por diante.

Como exemplo da presença destes instrumentos de construção euclidianos, cita-nos os autores, em vários segmentos presentes em nosso cotidiano, como na linha de montagem, onde se podem fazer cópias precisas de aparelhos, de peças e de veículos, em escritórios e lojas, onde, fazem modelos em escala e projetos com base nesta Geometria, em cruzamentos de estradas etc. No entanto, salienta os autores que, à medida que nossa sociedade progride, sobrevém outras utilizações de noções de Geometria, dentro e fora da Matemática.

René Descartes reconheceu o poder da utilização de coordenadas para representar *pontos* e o poder da utilização de expressões algébricas na representação de outras figuras geométricas. Essas contribuições foram bastante significativas embora haja evidências de que no período antes de 1637, os egípcios e gregos já utilizavam a noção de coordenadas.

Conforme Coxford jr, et. al.(1993), nos dias de hoje é possível perceber que esta interação entre a álgebra e Geometria é ainda maior. Visto que, por um lado, na Matemática através da Geometria é possível descrever conceitos em “espaços” abstratos, por outro lado, nos laboratórios e fábricas do mundo “real”, no computador o desenho utiliza-se de coordenadas e representações algébricas para descrever formas geométricas que não são lineares ou circulares. Utilizando desses recursos é possível fazer coisas que antes só era

possível na imaginação de engenheiros e arquitetos. Atesta os autores, que essa ideia é simples e, ao mesmo tempo, poderosa.

Nesta perspectiva, o autor declara que com desenvolvimento da tecnologia computacional aumentou-se a importância da capacidade de representar-se formas em qualquer uma das abordagens e acrescentaram-se outras, os vetores.

Contudo, os autores afirmam que as perspectivas apresentadas através de técnicas sintéticas e sob a descrição por meio de coordenadas são, no entanto, complementares e não conflituais, visto que na representação de um mesmo triângulo, por exemplo, de forma sintética e, por meio de coordenadas, respectivamente, teremos que, triângulo é a união de segmentos de reta que se interceptam nos extremos e na outra representação, para isto, seria necessário três equações do primeiro grau, definidas em intervalos específicos. Sendo então mais fácil compreender conceitos através da descrição por meio de coordenadas. No entanto, algumas vezes a descrição algébrica é mais conveniente e em outras vezes é preferível à sintética. Cabendo, portanto ao aluno reconhecer as duas para um melhor desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. No entanto, nos dias atuais o uso dessas duas perspectivas não são suficientes para abranger as utilizações variadas da Geometria, levando em consideração a disponibilidade de métodos de transformações, através dos quais, se torna mais fácil representar e analisar algumas situações na Geometria.

Com isto, Coxford Jr. et.al. (1993), ressalta que a Geometria Euclidiana, a introdução de coordenadas e representações algébricas e as abordagens por meio de transformações, modelam apenas uma pequena parte dos objetos que ocorrem na natureza, pois além desses argumentos que consideram múltiplas perspectivas na Geometria escolar do ponto de vista das necessidades atuais, existe mais uma que tem a ver com as necessidades do futuro é o caso da Geometria Fractal, que se entende por um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, onde cada uma é semelhante ao objeto original.

#### **1.4. O Triângulo e Seus Pontos Notáveis**

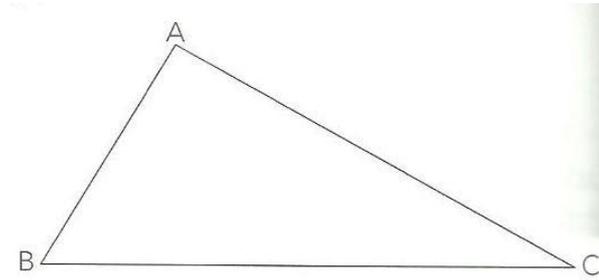
Segundo Coxford Jr. et.al. (1993), o triângulo tem uma característica especial que não se encontra em mais nenhuma figura geométrica e que o torna vital na indústria, isso porque se trata de uma forma rígida e, por isso, muito usada como unidade básica em armações de telhado, torres e estruturas de pontes (ver Figura 1) entre outras construções.



**Figura 1:** Estrutura de uma ponte em forma de triângulo.

Conforme Dante (2010), o triângulo é uma forma geométrica usada desde a antiguidade e até hoje faz parte do nosso cotidiano. Devido às suas propriedades o triângulo garante funcionalidade, segurança e praticidade.

O autor acrescenta que, o triângulo é um polígono de três lados, que não tem diagonal e é o único polígono rígido.



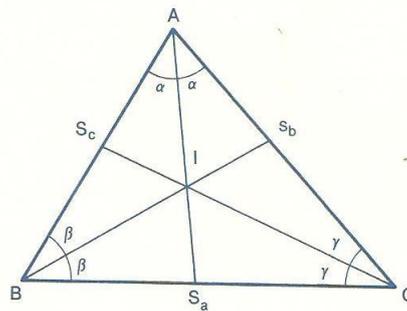
**Figura 2:** Triângulo ABC.

Todo triângulo tem pontos conhecidos por pontos notáveis são eles: o *Incentro*, o *Circuncentro*, o *Ortocentro* e o *Baricentro*.

Jota (1991), descreve as propriedades de cada ponto notável do triângulo das seguintes formas a seguir

- Incentro (I)

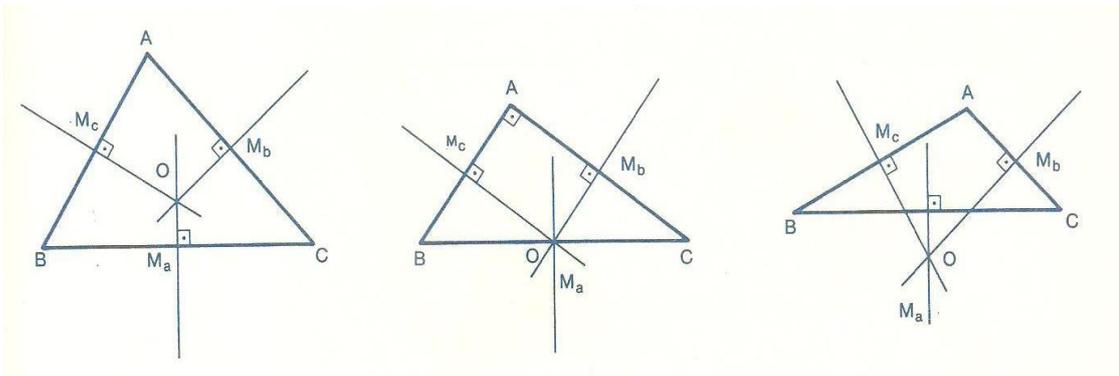
**Propriedade:** Em todo triângulo as três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto, que chamamos *Incentro* do triângulo.



**Figura 3:** O ponto **I** é o incentro do triângulo **ABC**.

- Circuncentro (**O**)

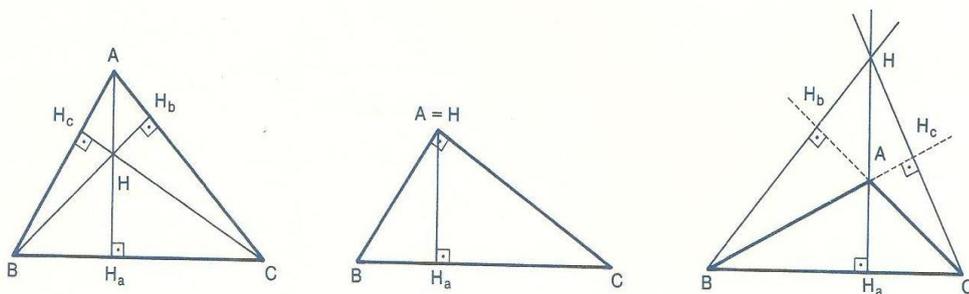
**Propriedade:** Em todo triângulo as três mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto, que chamamos de *Circuncentro* triângulo.



**Figura 4:** Em cada caso, o ponto **O** é o circuncentro do triângulo **ABC**.

- Ortocentro (**H**)

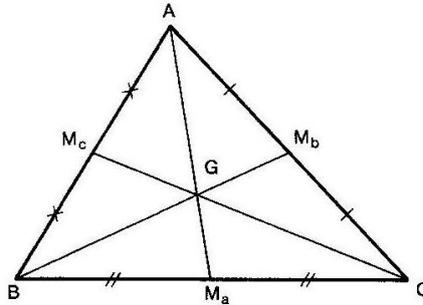
**Propriedade:** Em todo triângulo as retas suportes das alturas concorrem num mesmo ponto, que chamamos de *Ortocentro* do triângulo.



**Figura 5:** Em cada caso, o ponto **H** é o circuncentro do triângulo **ABC**.

- Baricentro (G)

**Propriedade:** Em todo triângulo as três medianas concorrem num mesmo ponto, que chamamos de *Baricentro* do triângulo.



**Figura 6:** O ponto I é o incentro do triângulo ABC.

Como vimos o triângulo possui propriedades especiais que o tornam um polígono rígido. Podemos notar de acordo com as descrições feitas por Jota (1991) que os pontos notáveis são pontos em que se interceptam as bissetrizes, mediatrizes, alturas e medianas de um triângulo.

## CAPÍTULO II

### 2. A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA E AS INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste segundo capítulo é possível observar a Aprendizagem Matemática com Tarefas de Investigações. Os processos de uma Investigação Matemática e os papéis do professor numa aula de Investigação Matemática e exemplos de Investigações Geométricas.

#### 2.1 A Aprendizagem Matemática com Tarefas de Investigações

As atividades trabalhadas em sala de aula devem ser apropriadas de modo que proporcionem aos alunos experiências Matemáticas significativas. Rocha e Ponte (2006) afirmam que a Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM) destaca a importância das tarefas a propor, referindo em especial, a resolução de problemas, os projetos e as atividades de exploração e descoberta.

Ainda, conforme os autores, o ato de investigar envolve a formulação de questões, insinuações de conjecturas, realização de testes que validarão ou rejeitarão tais conjecturas, encontrar provas da sua correção e levantar novas questões para investigar. As atividades de Investigação Matemática podem assumir um lugar de destaque na aprendizagem dos alunos, trazendo para dentro da sala de aula o espírito do trabalho do matemático profissional, assim consideram Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

As realizações de Investigações Matemáticas pelos alunos comprovam Rocha e Ponte (2006), podem contribuir para o seu desenvolvimento em vários níveis, tais como:

- Na aprendizagem do que são e como se fazem Investigações;
- Na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos;
- Na aprendizagem de objetivos curriculares transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo;
- Na formação de novas concepções e atitudes em relação à Matemática.

O ato de investigar indicam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), é formular questões e procurar uma resposta tanto quanto possível fundamentada e rigorosa. Para os autores, o que mais caracteriza uma Investigação Matemática é o estilo de conjectura-teste-demonstração.

De modo geral, ao realizar uma Investigação Matemática na sala de aula, o professor poderá observar a capacidade de investigação dos alunos, de acordo com o ritmo das tarefas e, assim, perceber o desempenho dos alunos em relação ao desenvolvimento e construção da capacidade de observar, estabelecer relações, conjecturar, testar, justificar e argumentar.

De acordo com Rocha e Ponte (2006), é importante ressaltar que, no primeiro momento, o aluno enxerga a Investigação como uma atividade linear, onde recolhem os dados, organiza-os, analisa e tiram conclusões. No entanto, afirmam que, progressivamente, à medida que fazem mais tarefas de Investigação, os alunos vão compreendendo que não há linearidade neste processo de Investigação, além de perceberem também a importância e o significado da prova dos resultados.

No entanto, esta evolução processa-se mais *rapidamente* em alunos com maior gosto na realização de tarefas abertas, e mais *lentamente* em alunos que possuem uma visão mecânica da atividade Matemática, sem considerar seu significado e implicações.

Sustentam os autores que, nas Investigações Matemáticas os conhecimentos mais básicos podem ser desenvolvidos e o fato dos alunos dominarem apenas parcialmente o assunto, não será empecilho para o desenvolvimento da atividade.

Ainda segundo os autores, o uso de Investigações oportunizam os alunos a usarem e consolidarem seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem as suas capacidades e atingir novas aprendizagens no contexto dos objetivos curriculares gerais e específicos desta disciplina.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003):

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (p.19)

Nesta passagem, o autor destaca a importância da Investigação Matemática para o ensino aprendizagem do aluno. Em Rocha e Ponte (2006), uma atividade Investigativa apresentada como exemplo, refere-se a “*Conhecer melhor os números*” - é a primeira unidade temática do Programa de Matemática do 7º ano - onde a professora e investigadora é a primeira autora citada à cima.

Nesta atividade, foram apresentadas cinco tarefas, uma por mês, as quais forneceram muitas oportunidades para a exploração matemática, em uma turma do 7º ano com inicialmente 20 alunos, de uma escola (rural) do interior do país (Portugal). Os alunos trabalharam em grupo, individualmente e como turma, algumas vezes. Desde a primeira aula,

a professora pedia-lhes, que explicassem sempre o seu raciocínio e questionassem os resultados entre si. Todas as atividades de Investigação foram realizadas na sequência: introdução, desenvolvimento do trabalho e reflexão- discussão.

A professora apresentou as tarefas por escrito e fez algumas considerações sobre os conteúdos matemáticos, a mesma assumindo papel de orientadora e moderadora, procurou não interferir nas discussões dos alunos. Por fim, após a aula de resultados os alunos através de relatórios individuais, descreveram os seus pensamentos e ações, em relação ao problema, definindo processos utilizados - levando em consideração as tentativas realizadas e as dificuldades enfrentadas - e suas conclusões.

Diante disso, podemos perceber que o trabalho investigativo faz com que o aluno se sinta confiante em sua capacidade, mudando suas atitudes e opiniões, uma vez que passa a perceber que o processo de aprendizagem Matemática é construído por ele, assim os conhecimentos adquiridos até o momento tomam valor para o aluno.

Desse modo, os autores concluem que a realização deste tipo de tarefas, favorece aos alunos de diferentes níveis de desempenho, um novo tipo de experiência matemática, capaz de: estimular a sua capacidade de raciocínio, sua desenvoltura em lidar com situações de natureza aberta na Matemática e de modificar sua visão nesta disciplina. Além disso, as tarefas levam os alunos a aprenderem, mas também ajuda a criar um ambiente de aprendizagem estimulante, percebendo-se que há outros modos de aprender Matemática com ênfase no processo de descoberta.

## **2.2 Processos de Uma Investigação Matemática**

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), trabalhar com as Investigações Matemáticas não significa, necessariamente, trabalhar com problemas difíceis, pelo contrário, são questões que nos inquietam, apresentam-se confusas no início, porém, ao estudarmos procuramos facilitar, organizar ideias e conhecer o que ainda não se sabe. Conjectura-teste-demonstração, este é o estilo das Investigações Matemáticas.

Podemos perceber que, para os autores, investigar significa conhecer o desconhecido. Sabemos que existem vários tipos de Investigações, há aquela que podemos chamar a “grande Investigação”, que se realiza nas universidades e nos laboratórios do estado que tem certa função social, há também as científicas, as jornalísticas e as criminais. Porém, o que nos interessa é a Investigação em termos de procura de informação, ou seja, a pesquisa.

Ainda segundo os autores, podemos dizer que os processos que envolvem as Investigações Matemáticas são simultâneos, podem incluir várias atividades, além de poder haver interações entre vários matemáticos interessados nas mesmas questões, que, sendo aceitas, tornam-se teoremas, antes disso, temos apenas conjecturas e hipóteses. O processo citado envolve quatro momentos principais:

- I) *Exploração e formulação de questões* – neste momento faz-se necessário reconhecer uma situação-problema para explorar e formular questões;
- II) *Conjecturas* – este é o momento de organização dos dados e formulação de conjecturas (fazendo-se afirmações sobre uma conjectura);
- III) *Testes e reformulação* – refere-se à realização de testes e ao eventual refinamento das conjecturas;
- IV) *Justificação e avaliação* – diz respeito a justificar uma conjectura, demonstrando e argumentando, avaliando assim o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

### **2.3 Os Papéis do Professor numa Aula de Investigação Matemática**

Sobre o papel do professor numa aula de Investigação Matemática, afirmam Ponte Brocardo e Oliveira (2003), que é determinante e sua interação com os alunos é bem diferente de outros tipos de aula. O professor, ao acompanhar os alunos no processo de investigação, deve dar-lhes autonomia e, ao mesmo tempo, toma o devido cuidado assegurando-se que os mesmos não fujam dos objetivos principais da disciplina de Matemática. Assim, o professor é convidado a desempenhar os seguintes papéis no decorrer de uma Investigação:

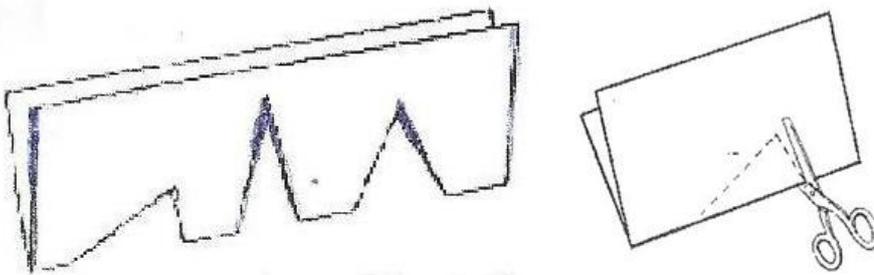
- a) Desafiar os alunos;
- b) Avaliar o progresso dos alunos;
- c) Raciocinar matematicamente;
- d) Apoiar o trabalho dos alunos.

Sabemos, contudo, que existem outros vários tipos de Investigações, a exemplo disso, temos a Numérica e a Estatística, apresentadas pelos autores. No entanto, o nosso interesse, neste Trabalho de Conclusão de Curso está relacionado às Investigações Geométricas.

## 2.4. Investigações Geométricas

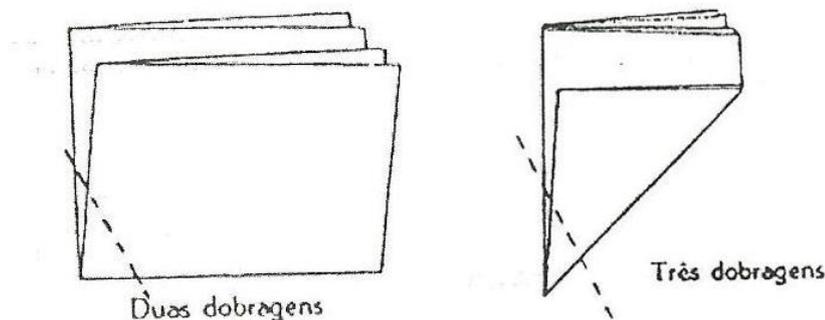
Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), o ensino da Geometria é de extrema importância desde os primeiros anos de escolaridade dos alunos, apresentando-se em si mesma um caráter investigativo e de natureza exploratória. Como exemplo de uma Atividade Investigativa apresentada pelos autores, temos a “*Dobragens e Cortes*”, esta atividade foi proposta aos alunos, 17 alunos de uma turma do 9º ano, explorada em grupos de 3 a 4 alunos. Utilizando tesoura e muito papel, foi proposto aos mesmos que, através de dobraduras e cortes feitos no papel, investigassem os tipos de triângulos: equiláteros, isósceles e escalenos. A tarefa foi dividida em duas partes:

- Parte A: Uma dobragem e dois cortes



**Figura 7:** Uma dobragem e dois cortes.

- Parte B: Mais dobragens e um corte



**Figura 8:** Mais dobragens e um corte.

Tal tarefa salienta os autores, que possibilitou a análise de aspectos em que os alunos tinham ainda dificuldades, como por exemplos: olhar para uma tarefa de investigação como um todo, não retirar conclusões a partir de um número reduzido de experiências, ser capaz de

organizar os dados coletados e de procurar argumentos que validem as suas conjecturas. No entanto, com a realização desta tarefa, essas dificuldades foram superadas pela maioria da turma.

Para os autores, as Investigações Geométricas, contribuem para perceber aspectos essenciais da Atividade Matemática, como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. Neste sentido, a exploração de vários tipos de Investigação Geométrica, pode contribuir para a concretização e relação entre situações matemáticas, além de desenvolver capacidades como visualização espacial, conexões matemáticas e representações e ilustrações de aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática.

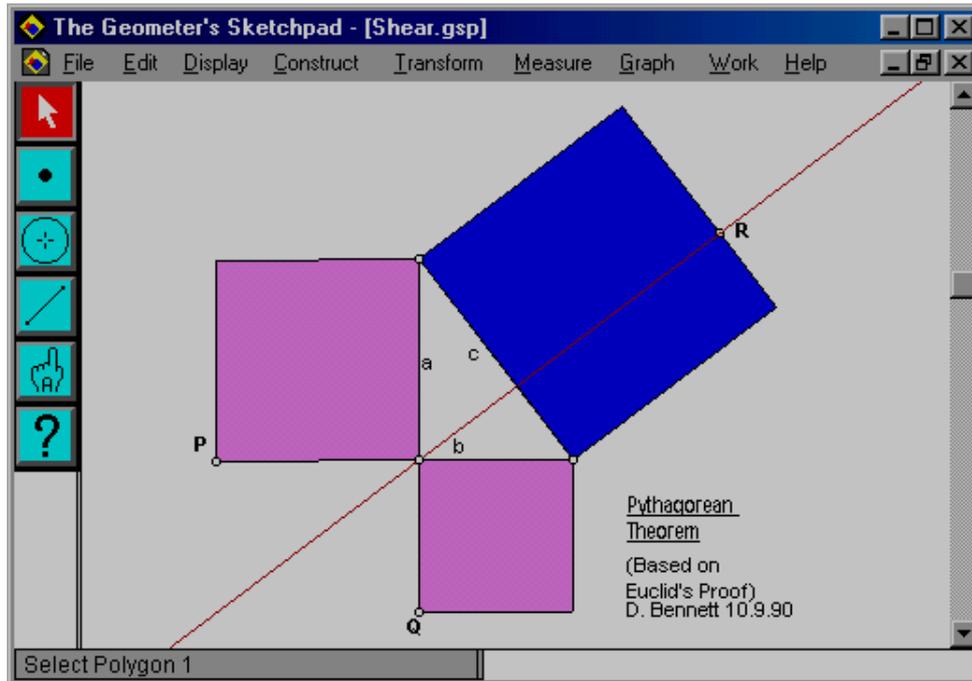
As tendências curriculares atuais consideram que a Geometria é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber a matemática presente num contexto. Nessa área da matemática salienta-se, por exemplo, de acordo com estes autores, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria em situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção da concepção da Geometria.

Em relação às investigações realizadas pelos alunos, de acordo com Scheffer (2009), através dela é possível vivenciar experiências de aprendizagem importantes para prosseguir as explorações e o estudo de vários conceitos e relações Geométricas. Por isso ela se revela ser tão importante.

É o que declara Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) ao escrever que as Investigações Geométricas constituem experiências de aprendizagem muito importantes. Como exemplo disso, podemos utilizar os programas de Geometria Dinâmica, pois estes possibilitam a manipulação e a construção de objetos geométricos, bem como a visualização dos mesmos na tela do computador, permitindo que o aluno observe, use e estabeleça relações espaciais que irão facilitar na exploração de conjecturas e na investigação de relações que merecem o uso do raciocínio formal. É importante ressaltar também aqui, o fato de serem bastante úteis na coleta de dados e no teste de conjecturas.

Como exemplos concretos, os autores propuseram duas Atividades Investigativas, utilizando programas de Geometria Dinâmica.

- D) Investigar possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras, com o auxílio de Geometer's Sketchpad (Figura 9);



**Figura 9:** O aplicativo GSP (Geometer's Sketchpad).

II) Uma Investigação de Quadriláteros e pontos Médios utilizando os programas (Geometer's Skethpad, Cabri-Géomètre ou Geometricks).

Os autores afirmam que recomenda-se que, além do uso de programas de Geometria Dinâmica, utilizem-se materiais manipuláveis diversos (por exemplo, cubos, escalas, compassos, régua, transferidores, papel etc) que sejam adequados ao estudo de vários conceitos e relações geométricas como simetrias, pavimentações ou cortes em poliedros. Essas foram sem dúvida, uma ótima alternativa na qual, à medida que o aluno aprende trabalhando ele também se diverte.

Outro exemplo de atividade proposto nesta seção, foi o “*Quadriláteros e diagonais*” onde, por meio de traçados de segmentos verticais e diagonais de um quadrado foi possível trabalhar elementos essenciais da Geometria, à medida que na discussão final do trabalho realizado pelos alunos o professor teve a oportunidade de desafiar-los a organizar uma sistematização de suas conclusões.

Estes foram alguns exemplos de maneiras distintas que o professor educador tem em mãos para trabalhar em sua sala de aula as Investigações Geométricas. Em todos os exemplos citados de Investigação Geométrica é importante que o professor dê tempo e oportunidade ao aluno de organizar as suas experiências espaciais.

## CAPÍTULO III

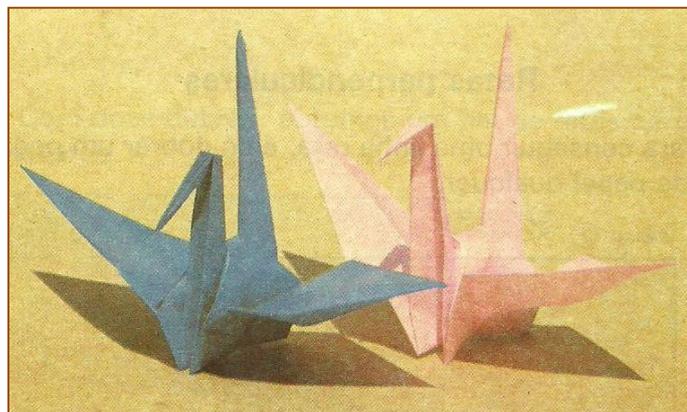
### 3. DOBRADURAS, INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO E O APLICATIVO GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICOS NAS AULAS DE GEOMETRIA.

Neste capítulo apresentaremos o uso de três recursos didáticos distintos como apoio nas aulas de Geometria. Será realizada uma abordagem com as Dobraduras, sua origem e uso didático. Assim como os instrumentos de Desenho Geométrico e exemplos de atividades indicadas por livros didáticos e o uso de aplicativos no ensino/aprendizagem da Matemática, com ênfase no GeoGebra. Por fim relacionaremos o Origami (dobradura), Instrumentos de Desenho Geométrico e o GeoGebra na aula de Matemática.

#### 3.1. Dobraduras: Origem e Usos didáticos

Segundo Imenes (1991), o termo *Origami* advém de Oro (dobrar) e Kami (papel), sendo assim caracterizado como dobraduras de papel. É provável que tenha surgido na China. O autor relata que a origem do *Origami* é tão remota quanto à história do papel. Tendo em vista que se estendeu no Japão em época anterior ao século XV, simultaneamente à introdução do método da fabricação de papel no país, no qual foi utilizado também em rituais religiosos.

Entretanto, da forma como é conhecido hoje, esse trabalho desenvolveu-se em meados do século XIX. Uma das dobraduras mais populares é o *tsuru*, ou *cegonha*, ilustrada na figura abaixo.



**Figura 10:** Uma das dobraduras mais populares, *tsuru* ou *cegonha*.

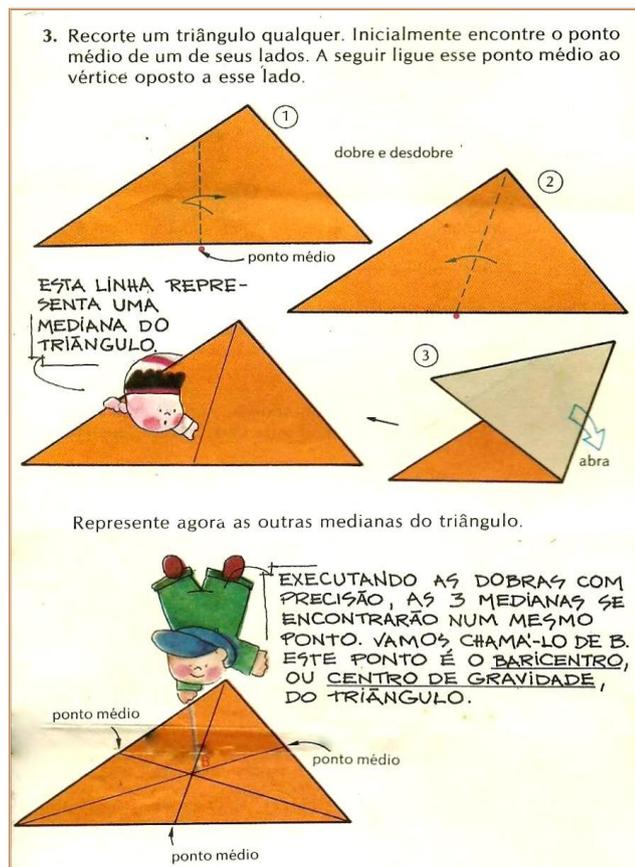
No entanto, no decorrer do livro, o autor questiona-se sobre o sentido dessa prática das dobraduras na Matemática. De acordo com Imenes (1991), tradicionalmente, os *Origamis* são confeccionados com papel de forma quadrada, sem que se utilizem cortes ou recortes. Porém, muitas vezes, as dobraduras, são feitas com a utilização de papéis quadrados, retangulares ou mesmo em tiras, além de tesoura e cola.

O uso de dobraduras como recurso didático, esta se tornando cada vez mais conhecido no ensino da Geometria. Esse instrumento pedagógico é bastante interessante, tendo em vista que, se aplicado no processo de ensino aprendizagem, direcionado ao estudo de conceitos geométricos, além de seu caráter lúdico, pode estabelecer uma relação entre teoria e prática, na qual os alunos, através da visualização de formas presentes no *Origami*, compreendem conceitos geométricos da Geometria Plana numa perspectiva contextualizada, lúdica e prazerosa.

Imenes (1991) comenta a construção divertida das dobraduras no meio social, questionando: Quem não já brincou de aviãozinho ou se divertiu construindo barcos, chapéus de soldado e balões de papel. De acordo com o autor, essa “brincadeira” muito comum com o papel é muito difundida entre os japoneses, que fazem dela uma arte construindo várias formas como: pássaros, peixes, flores, aviões entre outras.

Ainda de acordo como autor, no ato da construção do *Origami* é possível analisar matematicamente cada passo da construção. Podemos observar isto em um dos exemplos de construção.

Podemos observar isto em um dos exemplos de Construção Geométrica feito através de *Origami*, descrito no livro “Geometria das Dobraduras” de Imenes (1991), que trata-se da construção de um dos pontos notáveis do triângulo, neste caso o *Baricentro*, assunto abordado em nosso trabalho, ( Figura 11).



**Figura 11:** Construção do Baricentro através de Origami.

Assim como Imenes (1991), Scheffer (2009) também apresenta uma discussão interessante a respeito do uso de dobraduras na abordagem de aspectos da Geometria Plana, além de citar também a importância do aplicativo de Geometria Dinâmica, Geometrix, nesta mesma perspectiva.

A autora salienta ainda que, essa maneira de abordar os conceitos de Geometria, além de outros aspectos pode ser importante também na organização das experiências investigativas dos alunos.

De acordo com a autora, desde a Idade Média, o estudo da Matemática, tende a estabelecer relações de comunicação entre os seres. Nesta perspectiva, na escola as experiências estão, paulatinamente, ultrapassando os limites da sala de aula, embora de maneira lenta, e interligando os alunos, os conhecimentos, os valores, os costumes e as culturas.

O uso da *dobradura* na sala de aula nada mais é que um recurso pedagógico a somar aos diferentes materiais didáticos que podem ser utilizados na sala de aula, enfatizando a importância do lúdico na construção, comparação, estabelecimento de relações e

visualizações. De modo que este tipo de atividade desempenha um papel primordial na percepção espacial-temporal, (SCHEFFER, 2009).

Em outra perspectiva, a dobradura como material concreto e manipulável, permite ao aluno aprender fazendo (PASSOS, 2009). Nesta visão, o uso do *Origami* é caracterizado pelo envolvimento físico dos alunos, numa situação de aprendizagem ativa, através do sentir, tocar, manipular e movimentar, permitindo ao aluno a sensação de descobertas.

Destaca Passos (2009) que, quando um material apresenta aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas, ele pode ser considerado um bom material didático. No entanto, sabemos que o uso de qualquer material didático não é válido por si só. Em todos os casos é primordial que o professor assuma uma postura de orientador da aprendizagem, mantendo uma intenção didática durante toda a atividade, fazendo questionamentos e incentivando os alunos a discutirem entre si e registrar seus feitos.

### **3.2 Instrumentos de Desenho Geométrico**

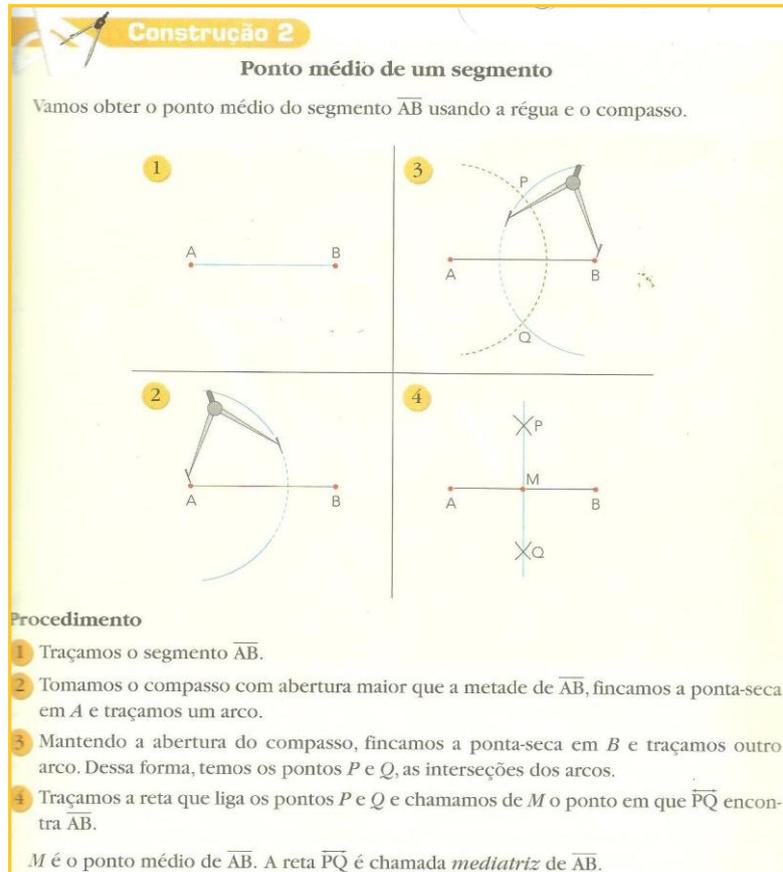
De acordo com Jota (1990), do grego Geometria significa geo= terra metria= medida. Desde muito tempo atrás o homem se interessava por problemas de medidas de comprimento, área etc. Os egípcios tiveram que desenvolver métodos que permitissem realizar medidas na terras, isto é eles realizavam a Geometria ( JOTA, 1990).

Sabemos historicamente que no início o homem usava seu próprio corpo, como por exemplo o pé, o palmo o polegar, na comparação de medidas, até alcançar a invenção do metro. No entanto, para medir e traçar com exatidão o homem criou instrumentos próprios e com características específicas como por exemplo: a régua e o compasso que segundo Jota (1991), estes materiais de desenho geométrico mantêm uma tradição de 2.000 anos na história da educação. Tendo em vista que por volta do ano 300 a. C. os geômetras gregos utilizavam da régua e do compasso para resolver problemas geométricos, além desses temos também o esquadro e o transferidor.

Segundo Maziero (2011), as construções geométricas possibilitam questionamentos entre os matemáticos, tais como: Que construções são possíveis quando se utilizam apenas de régua e compasso? E que construções são possíveis se acrescentamos à régua e compasso o transferidor?

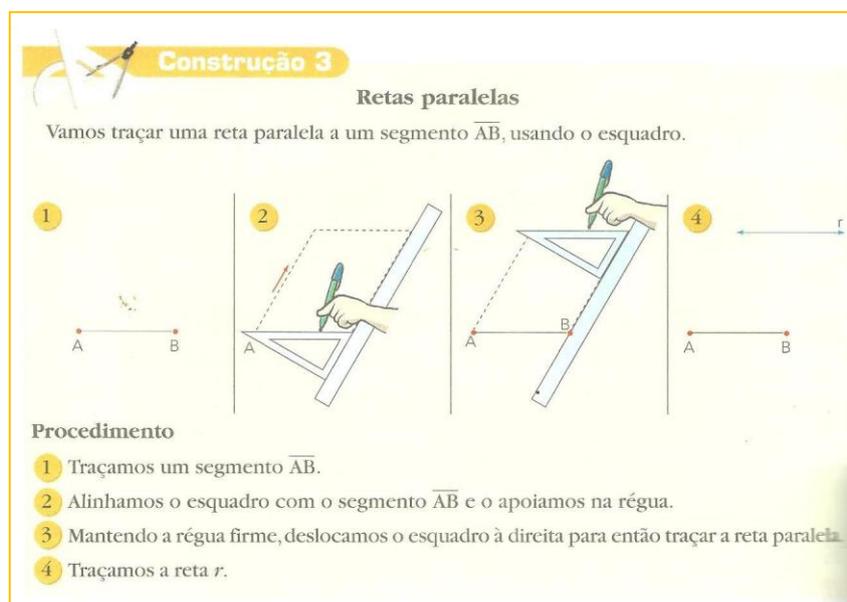
A partir desses questionamentos, podemos apresentar aqui alguns exemplos de atividades indicadas por livros didáticos, exemplos estes que mostram a utilização de tais Instrumentos de Desenho Geométrico.

- Exemplo I: Ponto médio de um segmento (Ver figura 12).



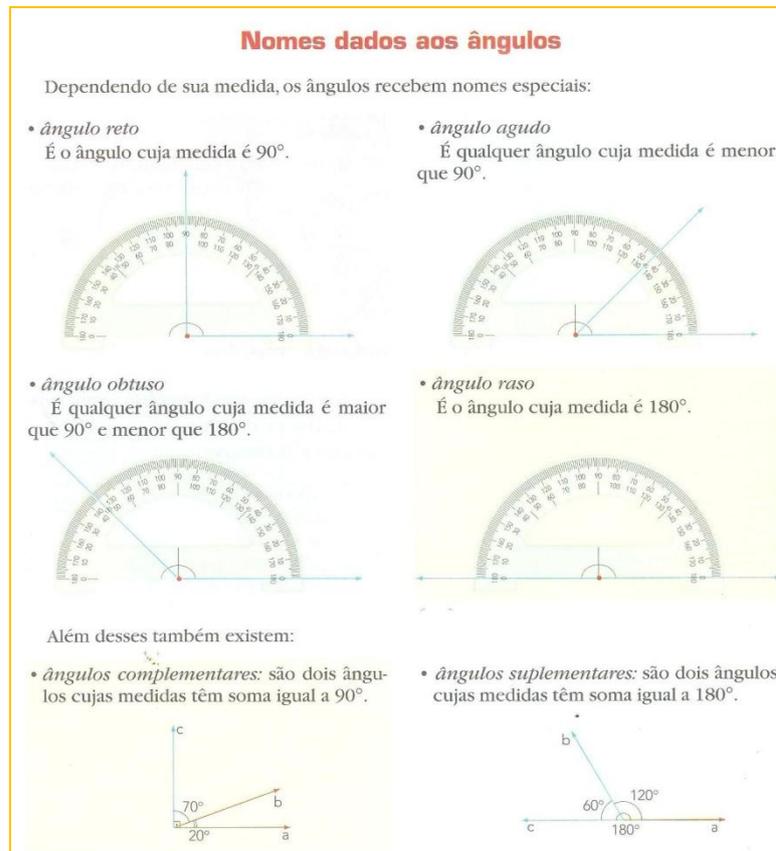
**Figura 12:** Ponto médio de um segmento usando régua e compasso.

- Exemplo II: Uso do esquadro na construção de retas paralelas (Ver Figura13).



**Figura 13:** Uso do esquadro na construção de retas paralelas.

- Exemplo III: explicação dos nomes dos ângulos através de exemplos práticos. (Ver Figura 14).



**Figura 14:** Nomes dados aos ângulos, exemplo com transferidor.

Os PCNs do Brasil recomendam construções geométricas, utilizando alguns instrumentos de Desenho Geométrico:

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. (BRASIL, 1998, p.51)

Através do desenho geométrico feitos pelo alunos com de Instrumentos de Desenho Geométrico, é possível desenvolver a comunicação oral, além da coordenação motora. E, através desses, compreender as relações entre as propriedades e as definições.

### 3.3 O Uso de Aplicativos no Ensino/Aprendizagem da Matemática

Nos dias atuais, a utilização de recursos tecnológicos no ensino da Matemática está se destacando nas instituições de ensino em geral. Segundo Oliveira e Domingos (2008), isso se dá pelo fato de ser parte integrante de novas perspectivas sobre a natureza da Matemática escolar e da aprendizagem da disciplina.

Sobre a presença dos ambientes de aprendizagem, baseados nas tecnologias educativas na escola, Scheffer (2009), afirma que os mesmos podem mudar a forma pela qual os estudantes se relacionam com a Matemática. Salienta que, esses ambientes oferecem novas perspectivas de uso da linguagem matemática. No entanto, atesta a autora que, é necessário uma orientação pedagógica de métodos, currículo e práticas, levando em consideração os impactos da tecnologia neste sentido.

Portanto, ao professor fica o grande desafio em redimensionar o uso desses recursos no ensino. Desse modo, à medida que o professor em sua prática docente adota as TIC, precisa ter disposição para investir no próprio conhecimento sobre o uso de novas tecnologias em sala de aula, mantendo, contudo, uma postura crítica e construtiva do uso da mesma. Com o avanço da educação, podemos perceber que o aluno não é mais aquele ser “passivo”, que somente recebe informações e muito menos um ser desassociado aos avanços do mundo moderno.

Computadores, internet, jogos, aplicativos e celulares são ferramentas comuns ao dia a dia e, o fato das pessoas em geral, inclusive os alunos, assimilarem tão rapidamente essas inovações tecnológicas, exige que, ao mesmo tempo, a educação também acelere no sentido de tornar o ensino mais atraente ao aluno de maneira a estimular a aprendizagem. E o que podemos perceber é que a própria tecnologia pode ser uma ferramenta eficaz no alcance desta meta.

Conforme os PCNs (BRASIL, 1998, p. 43): *“As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem em um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. Os PCNs valorizam assim, as tecnologias como um dos principais agentes de transformação da sociedade. Diante disso, esperamos da escola uma importante contribuição no sentido de ajudar crianças e jovens a viver nesta “era tecnologia”. No entanto, apesar desta realidade é importante ressaltar que, em meio a muitos estudos realizados nesta área, é perceptível a necessidade de continuar a investir.*

Oliveira e Domingos (2008) salientam suas concepções acerca do ensino com o auxílio de aplicativos em sala de aula:

A utilização de *software* na matemática escolar constitui também uma recomendação curricular importante, nacional e internacionalmente, sendo encarada como uma contribuição significativa no sentido de promover a compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de as relacionar, a investigação de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização e os processos argumentativos e a modelação, entre outros. (OLIVEIRA & DOMINGOS, 2008, p.280).

Neste sentido, apesar de ser o software (aplicativo) uma recomendação curricular, ele deve ser visto e usado pelo professor em sua prática docente, como um instrumento no processo de aprendizagem e jamais ser utilizado como uma finalidade em si mesmo.

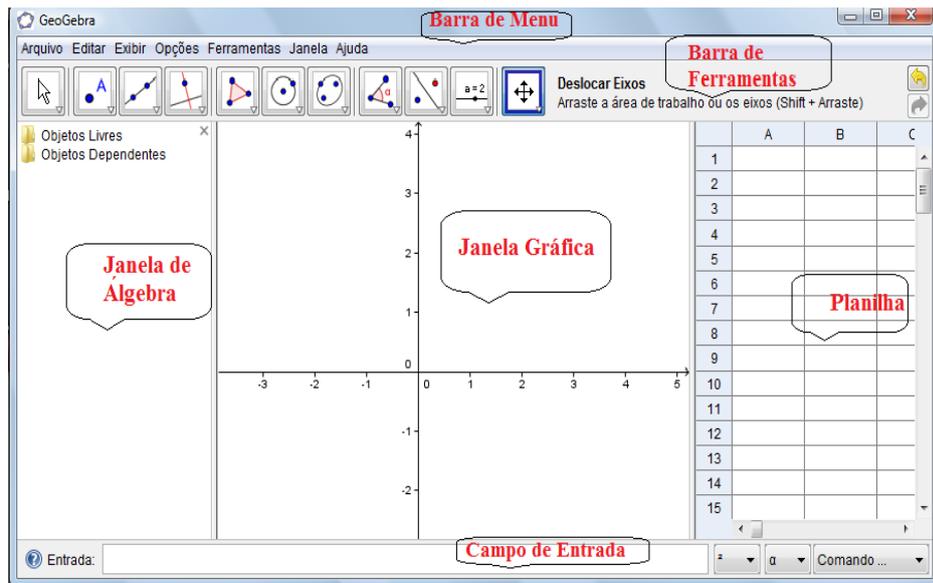
Existe hoje uma diversidade de aplicativos para se trabalhar os conteúdos matemáticos. Entretanto, segundo os autores, a avaliação do aplicativo é também entre outras, uma das questões a considerar quando se pretende alcançar o seu papel no ensino aprendizagem da Matemática.

Dentre os vários exemplos de aplicativos de Geometria Dinâmica, como: o Geometricricks, o Geometrix, o Cabri- Géomètre II e o Geometer's Sketchpad conhecidos veio, mais recentemente, juntar-se o GeoGebra, que possibilita o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico, além de ser de utilização livre (OLIVEIRA & DOMINGOS, 2008).

### 3.3.1 O GeoGebra

Conforme Oliveira e Lopes (2011) o GeoGebra é um aplicativo dinâmico para ser utilizado em ambiente de sala de aula, que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística. Foi desenvolvido por Markus Horenwarter Judith Preiner, da Universidade de Salzburg na Áustria. Ele reúne as características de um aplicativo de Geometria Dinâmica, admite construir vários objetos como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem, depois, serem modificados dinamicamente. Permite, ainda, a introdução de equações e coordenadas, digitando-se diretamente na sua caixa de entrada. O aplicativo apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo, (Ver Figura 15) elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo (Excel).

Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em quaisquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente construídos. Uma marcante característica deste aplicativo é a sua fácil utilização, totalmente gratuito, disponível em: <http://www.geogebra.org/cms>.



**Figura 15:** Janela inicial do GeoGebra.

Em relação ao uso do computador na sala de aula, os Parâmetros Curriculares Nacionais evidenciam que:

Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala e curto prazo. Isso traz como necessidade a incorporação de estudos nessa área, tanto na formação inicial como na formação continuada do professor do ensino fundamental, seja para poder usar amplamente suas possibilidades ou para conhecer e analisar *softwares* educacionais. (BRASIL, 1997, p.35)

Neste sentido, é fundamental que os professores se adaptem a este novo cenário, mas para isso, é preciso ser assegurado ao mesmo uma formação afim, para que se sintam seguros ao utilizar essas novas ferramentas que, aos poucos, vai se fazendo realidade na sala de aula.

Quanto aos aplicativos educacionais é necessário que o professor educador aprenda a escolhê-lo em função dos objetivos que pretende atingir. Muitos estudos na área de Educação

Matemática evidenciam o bom uso do computador em sala de aula, a título de exemplo temos os aplicativos livres.

O Geogebra é uma boa opção de aplicativo livre. Através do mesmo é possível trabalhar com a Geometria, funções entre outros tópicos, além de ser de fácil manuseio e em língua portuguesa do Brasil. Segundo Araújo (2008), o computador tem virtudes, mas devemos tomar cuidados. Hoje em dia o seu uso esta sendo cada vez mais frequente por nossos alunos, até mesmo em sala de aula. Com o recurso da visualização é comum os alunos se convencerem ou não, de certos resultados, apenas baseados no que se vê na tela. Este artigo aborda alguns exemplos de atividades que podem ser trabalhadas com o aplicativo GeoGebra.

Como exemplo, temos o gráfico  $y = e^{(-x)} + x$  intercepta a reta  $y=x$ ? Uma aluna que procurava assíntotas da função  $y=e^{9-x}+x$  encontrou o resultado correto,  $y=x$ . A resposta da pergunta feita é *não*, porém ela respondeu que o Geogebra dava resposta *afirmativa*. De acordo com o GeoGebra, essas curvas se interceptam no pontos (34,7739;34,7739). Na realidade, o aplicativo, esta programado para trabalhar com 15 casas após a virgula e, como a função  $e^{(-x)}$  tende a zero rapidamente, o número de casas com o valor nulo ultrapassa as 15 casas com as quais está trabalhando assim, ele processa que as curvas se encontram.

Um outro exemplo, citado pelo autor neste artigo, refere-se à visualização da soma dos termos de uma PG, aqui o autor utiliza outro aplicativo. Nesta situação, verifica-se que o computador, mais uma vez, leva a conclusões falsas. Assim, segundo o autor, comprova-se que o problema não é de um aplicativo em particular, mas sim do próprio computador, que usa um número finito de casas decimais. Por isto, apesar das inúmeras vantagens apresentadas pelo computador, é preciso ter senso crítico, além de muita atenção aos resultados oferecidos por ele. Devemos considerar ser importante também que o professor tenha o domínio do conteúdo e dos aspectos operacionais do aplicativo que se pretende utilizar.

De maneira geral em sala de aula o professor dispõe de um leque de opções que podem fazer com que o ensino da Matemática se torne mais atraente ao aluno, permitindo ao mesmo construir seu saber matemático.

### **3.4 Relacionando Origami Instrumento de Desenho Geométrico e Geogebra na Aula de Matemática**

Em nosso trabalho com Investigações Geométricas por alunos sobre pontos notáveis de um triângulo, visamos utilizar alguns recursos didáticos recomendados em quase todas as propostas curriculares, levando principalmente em consideração o 4ª ciclo (7º e 8ºs), onde se

espera dos alunos algumas atitudes em relação aos conhecimentos matemáticos, tais como o desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados. (BRASIL, 1998).

Em relação ao estudo dos conteúdos do bloco *Espaço e Forma* (4º Ciclo), os PCNs destacam que:

O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras planas pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em outra. (BRASIL, 1998, p.86)

Ainda segundo os PCNs os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

Portanto, neste contexto, as atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos visuais por meio de trabalhos com Origamis, dobraduras em papel, visando o dinamismo e a coordenação motora, além da redescoberta, proporcionando a comunicação oral.

Pressupõe também que o professor de Matemática, conforme os Parâmetros Curriculares explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, através de visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações o Material de Desenho Geométrico contribui também para o desenvolvimento de propriedades métricas das figuras e, ainda através do manuseio do mesmo, é possível desenvolver a coordenação motora de quem o utiliza.

Por fim, temos também como outro recurso didático e inovador o uso de aplicativos *Dinâmicos* na aula de matemática, onde o uso do mesmo em atividades geométricas tende a favorecer a exploração de propriedades permitindo o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, onde num caráter dinâmico, promove movimentos dos objetos através da visualização pelo aluno na tela do computador favorecendo a reflexão sobre as contribuições feitas, se revelando assim como uma nova maneira de compreender e dar significado aos conceitos.

De modo especial destacamos aqui o uso do aplicativo GeoGebra, por ser de livre acesso, linguagem simples e gratuito. E ainda, conforme Vichessi (2011), permitir cópias

(desde que feitas para uso não comercial) os estudantes podem tê-lo no computador pessoal. Isso permite que se proponha lição de casa para ser feita com o aplicativo através de suas ferramentas e depois é só salvar a tarefa para corrigi-las na escola (NOVA ESCOLA, 2011).

## CAPÍTULO IV

Neste capítulo abordaremos aspectos sobre a descrição e análise dos dados colhidos numa turma do 8º Ano do Ensino Fundamental. Fatos como o questionário sobre a concepção dos alunos em relação à geometria e em seguida sua análise; algumas atividades com o Origami sobre os pontos notáveis de um triângulo. Abordaremos também as aulas de apresentação do aplicativo GeoGebra assim como, anotações das Investigações feita por alguns alunos com este aplicativo sobre os pontos notáveis do triângulo na sala de informática e por fim apresentaremos também algumas atividades Investigativas com a utilização de Instrumentos de Desenho Geométrico.

### 4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Todas as aulas na sala de aula e no Laboratório de Informática foram realizadas na Escola Municipal de Ensino Infantil e Fundamental Salvino João Pereira, em Juripiranga-PB, com o auxílio de: dobraduras, computador, aplicativo GeoGebra e Materiais de Desenho Geométrico, tais como régua, compasso, esquadro e transferidor.

#### 4.1 Questionários Sobre as Concepções dos Alunos em Relação à Geometria Plana

Iniciamos esta aula dialogando com os alunos sobre o termo “Geometria”, qual o seu significado e qual a sua importância em nosso cotidiano.

Em seguida, partimos para um questionário composto por cinco questões, tendo por objetivo, diagnosticar as concepções dos alunos tanto em relação ao conceito geométrico, quanto a respeito de atividades vivenciadas dia a dia em sala de aula. Tais questões serão descritas a seguir.

**1ª questão:** Você gosta de estudar Matemática. Por quê?

**2ª questão:** O que você entende sobre Geometria? Explique.

**3ª questão:** O que você se lembra de ter estudado em Geometria?

**4ª questão:** Você imagina onde no seu dia a dia pode ser útil a Geometria? Dê exemplos e explique.

**5ª questão:** O seu professor de Matemática, utiliza materiais para o ensino de Geometria? Se sim, quais?

#### 4.1.1 Análise do Questionário

Este item destina-se a apresentar algumas respostas coletadas, junto aos alunos da escola em estudo. Um total de quinze alunos participaram desta pesquisa e tiveram 45 minutos para responder ao questionário, o mesmo composto por 5 questões, das quais de forma sucinta apresentaremos a seguir.

A *primeira* questão teve por objetivo colher do aluno informações sobre o gosto pela Matemática e o porquê de gostar ou não da disciplina. Percebemos, de maneira geral, um grande interesse pela Matemática, sendo ela bastante significativa na vida desses alunos.

A *segunda* questão versava sobre a Geometria, teve por objetivo sondar do aluno seu entendimento sobre a Geometria em geral. Nesta questão, ficou claro que, a maioria dos alunos já havia estudado sobre a matéria em questão, mas percebemos aqui por uma parte da turma, dificuldade em defini-la.

A *terceira* questão foi a seguinte: O que você lembra de ter estudado em Geometria? Nesta questão percebemos que as formas geométricas como: triângulo, quadrado, retângulo, etc. Estão muito presentes na lembrança dos alunos em relação ao estudo da Geometria.

A *quarta* questão, versava sobre a utilização da Geometria no dia a dia dos alunos. Aqui, pedimos também que eles explicassem e quando possível citassem exemplos. Percebemos, mais uma vez, as formas geométricas, agora, presente em seu cotidiano. E deram como exemplos o formato das casas, da parede da escola, quadro, carteiras telhados, etc.

A *quinta* questão versava sobre o professor de Matemática, a respeito de quais materiais o mesmo, utiliza em sala de aula para ministrar as aulas de Geometria.

Nesta questão percebemos que, por unanimidade, a resposta foi negativa, exceto apenas por um aluno que comentou sobre o uso de um Instrumento de Desenho Geométrico a régua, mas não pelo professor, e sim pelo próprio aluno.

**Tabela 1:** Avaliação das questões do questionário sobre as concepções dos alunos em relação à Geometria plana.

QUESTÕES	RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
1 <sup>a</sup>	Gostam de matemática e a acham significativa no seu dia.	12	80
2 <sup>a</sup>	Conceituaram a Geometria	12	80

3 <sup>a</sup>	Responderam que as formas geométricas (triângulo, quadrado, retângulo), foi o conteúdo mais significativo na Geometria em geral.	13	86
4 <sup>a</sup>	Responderam que as formas geométricas estão presentes em seu dia a dia, através das construções e formato das coisas em geral.	14	93
5 <sup>a</sup>	Responderam que o professor de Matemática não utiliza Instrumentos de Desenho Geométrico em suas aulas.	15	100

Com a utilização da tabela podemos notar que no geral a turma gosta e acha significativa a matemática no seu dia a dia. Além de uma boa parte da turma conceituar bem a geometria e destacar as formas geométricas como o conteúdo geométrico mais lembrado em sua trajetória escolar. No entanto podemos observar que cem por cento da turma responderam que o professor não utiliza Instrumentos de Desenho Geométrico nas aulas de Geometria.

#### **4.2 Atividades com Dobraduras Sobre os Pontos Notáveis de um Triângulo**

Depois da aplicação do questionário e, assim já identificado os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da Geometria e o tipo de tarefa que eles vivenciaram em sala de aula, damos continuidade, apresentando aos alunos de forma lúdica, dinâmica e objetiva, como trabalhar a Geometria através de dobraduras feitas com papel, o Origami.

Antes fizemos brevemente uma abordagem histórica, sobre a Geometria e suas principais formas: quadrado, círculo, retângulo, triângulo, etc. focando é claro no triângulo, visto que era nossa principal fonte de observação.

Debatemos a respeito de sua classificação quanto às medidas dos lados (escaleno, isósceles, equilátero) e quanto às medidas dos ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo).

Em seguida, falamos a respeito de quatro principais Pontos Notáveis que poderíamos encontrar num triângulo. E, a partir deste momento, partimos, enfim, às dobraduras.

Nosso objetivo era introduzir o conceito de Pontos Notáveis de um triângulo qualquer, através de dobraduras. Assim fizemos. Para isto, utilizamos de um material cedido pela orientadora deste TCC, CDCC-USP Experimentoteca, pertencente ao Laboratório de Matemática da UEPB. Além de materiais como lápis, papel ofício, régua, tesoura, cola compasso e transferidor. Seguimos então para o primeiro ponto.

#### 4.2.1 ORTOCENTRO/ALTURA

Pedimos que os alunos recortassem um triângulo qualquer e, por dobradura, encontrassem suas três alturas e, em seguida, medissem os ângulos que cada altura iria formar com o lado que contém seu pé, ou seja, seu lado oposto.

Eles perceberam que o ângulo era de  $90^\circ$  graus. Em seguida, pedimos que marcassem o ponto H onde as três alturas se encontraram.

Como o Ortocentro é o ponto que une o encontro destas alturas, logo eles perceberam que o ponto H é o *Ortocentro* do triângulo.

#### 4.2.2 CIRCUNCENTRO/MEDIATRIZES

Com o recorte de um triângulo em mãos, pedimos aos alunos que encontrassem o ponto médio de cada lado do triângulo, por dobraduras no papel. Fazendo assim, os alunos perceberam que a mediatriz é uma reta que incide, perpendicularmente no ponto médio de cada lado do triângulo. Em seguida os eles marcaram o ponto C onde elas se encontraram.

Neste momento, encontramos o *Circuncentro* do triângulo. Tendo em vista que o Circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a este triângulo. Por fim, os alunos colaram o triângulo no caderno e, com a ajuda de um compasso, traçaram uma circunferência, esta circunscrita ao triângulo.

#### 4.2.3 BARICENTRO/MEDIANAS

Com o triângulo já recortado pelos próprios alunos, pedimos que por dobraduras, obtivessem as três medianas. Para obter as três medianas, foi necessário encontrar o ponto médio de cada lado. Sabendo que a mediana é um seguimento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto, pedi que os alunos, marcassem o ponto G onde elas se encontravam. A esse ponto de encontro das medianas chamamos de *Baricentro*.

Em seguida, os alunos mediram as distâncias do ponto médio do lado ao *Baricentro*, e do *Baricentro* ao vértice. Neste momento, os mesmos registraram suas investigações em seu roteiro (ANEXOS 1-2) que a razão entre essas distâncias eram dois para um. E, assim, constataram que o Baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

#### 4.2.4 INCENTRO/BISSETRIZES INTERNAS

Com o triângulo já em mãos, os alunos encontraram através de dobraduras as três bissetrizes do triângulo. Sabendo que bissetriz é um seguimento de reta que divide o ângulo, em dois ângulos de mesma medida, eles marcaram o ponto **I** no encontro dessas bissetrizes. Este ponto **I** é o *Incentro*.

Neste momento, os alunos realizaram um processo semelhante ao que foi feito ao encontrar o Circuncentro. Colaram o triângulo no caderno e com a ajuda de um compasso, traçaram a circunferência, percebendo assim que ela tocou cada lado do triângulo em um só ponto. E que o ponto **I** era o centro da circunferência inscrita a este triângulo.

### 4.3 Aulas de Apresentação do Aplicativo GeoGebra e Investigação Geométricas no Laboratório de Informática da Escola Salvino

As aulas de Apresentação do Aplicativo GeoGebra e de Investigações Geométricas, com a utilização do mesmo no estudo dos Pontos Notáveis de um triângulo, foram realizadas em 5 dias (21,23,28,29 e 30 de Novembro de 2012) num total de dez aulas de 45 minutos cada. O Laboratório dispunha de 18 computadores.

Organizamos as aulas no Laboratório de Informática da escola referida, da seguinte forma:

- No dia 21 de Novembro de 2012 - Realizamos duas aulas. Estas aulas serviram para apresentação do aplicativo e seus respectivos ícones e ferramentas.
- No dia 23 de Novembro de 2012 - Realizamos duas aulas de Investigações. Investigamos neste dia, o primeiro Ponto Notável, o **Incentro**.
- No dia 28 de Novembro de 2012 - Foram realizadas duas aulas de investigações, agora sobre o 2º Ponto Notável do triângulo, o **Circuncentro**.
- No dia 29 de Novembro de 2012 - Em duas aulas, investigamos o terceiro Ponto Notável do triângulo o **Baricentro**.

- No dia 30 de Novembro de 2012 - Fizemos nossa última investigação, agora do quarto Ponto Notável, o **Ortocentro**.

É importante ressaltar que nestas aulas de Geometria, realizadas no Laboratório de Informática da Escola Salvino, utilizamos também como recurso didático o livro “Aprendendo Matemática com o Geogebra” dos autores, Luís Claudio de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga onde os próprios afirmam que existem outros Pontos Notáveis, estes (Incentro, Circuncentro, Baricentro e Ortocentro) são apenas os mais comuns do triângulo.

#### 4.3.1 Descrição das duas primeiras aulas - Realizadas dia 21 de Novembro de 2012.

As aulas do dia 21 de Novembro no laboratório de informática, foram de apresentação do aplicativo GeoGebra 3.2.

Apresentamos de forma detalhada a barra de ferramentas, priorizando as ferramentas mais necessárias para o conteúdo estudado, janela a janela do menu.

Foram apresentadas também, as funções do botão direito do mouse, que no nosso caso se tornou necessário, tendo em vista que através desta função podemos além de outras coisas, exibir todos os objetos escondidos, esconder eixos e até mesmo, obter o zoom da tela. Com o botão direito do mouse, podemos também renomear, apagar, exibir nome e até mesmo editar a propriedade de um ponto.

Por fim, apresentamos de forma sucinta o campo de entrada que fica no rodapé da janela do GeoGebra; mostramos que através deste campo é possível operar com o GeoGebra, usando comandos escritos, pois praticamente todas as ferramentas da barra de ferramentas podem ser acessadas usando comandos escritos.

Após estas explicações, já que iríamos posteriormente estudar investigações sobre os principais Pontos Notáveis de um triângulo, partimos então para as noções básicas, que poderiam tornar possível tais investigações aqui citadas.

Assim propomos aos alunos algumas atividades.

### Atividade 1: Criar pontos e retas através de ferramentas e do campo de entrada.

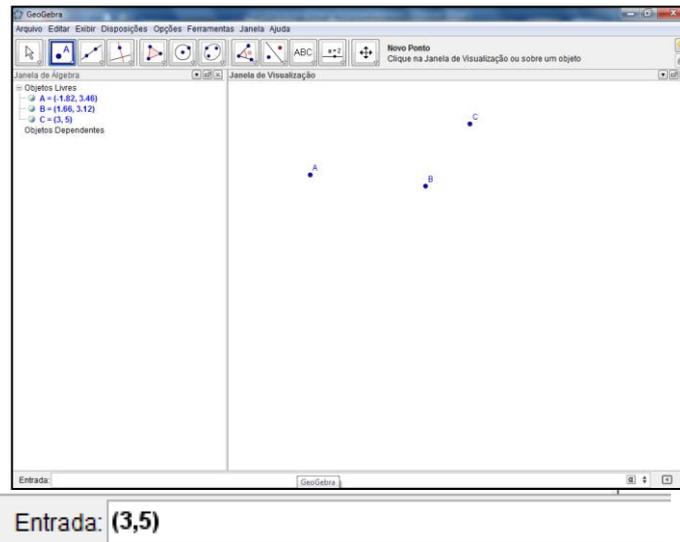


Figura 16: Criação de pontos através de ferramentas e campo de entrada no GeoGebra

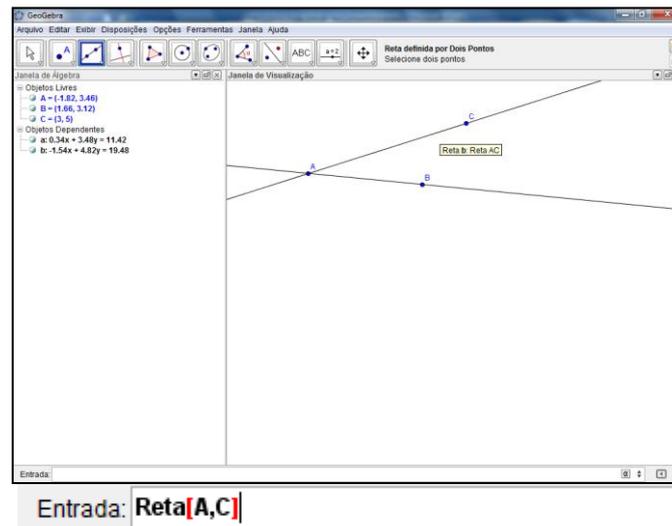


Figura 17: Criação de retas através de ferramentas e campo de entrada no GeoGebra

**Preparação:** Abra uma nova janela. Para tal no menu Principal, clique em JANELA e, após isto, em nova JANELA. No menu exibir desmarque a opção eixos.

**Construção:** Tente reproduzir as figuras expostas nas janelas de visualização.

Usando as ferramentas Novo ponto (janela 2) e o campo de entrada, para criar o ponto. E as ferramentas reta definida por dois pontos (janela 3) e o campo de entrada, para criar as retas.

## Atividade 2: Construir Figuras geométricas

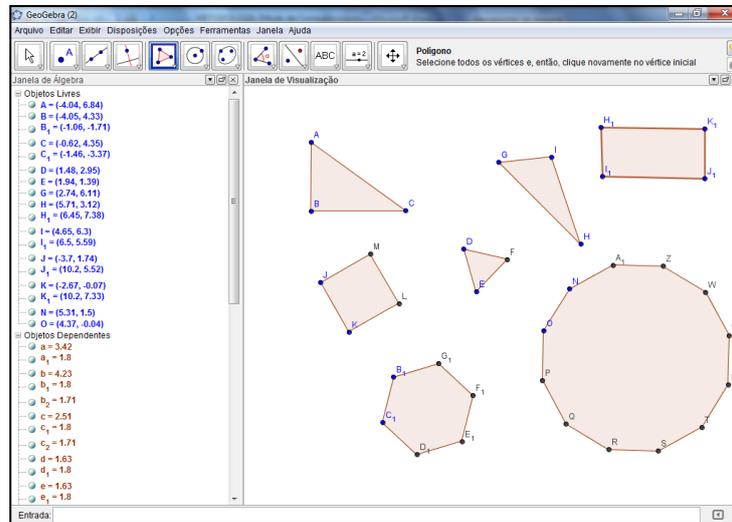


Figura 18: Construção de figuras geométricas no GeoGebra

**Preparação :** Abra uma nova janela, seguindo os comandos da atividade anterior.

**Construção:** Tente reproduzir desenhos geométricos utilizando a ferramenta polígonos

(Janela 5). Em seguida mova-os, apertando a tecla ESC e clicando sobre um dos vértices (Objetos livres).

## Atividade 3: Construir um barco

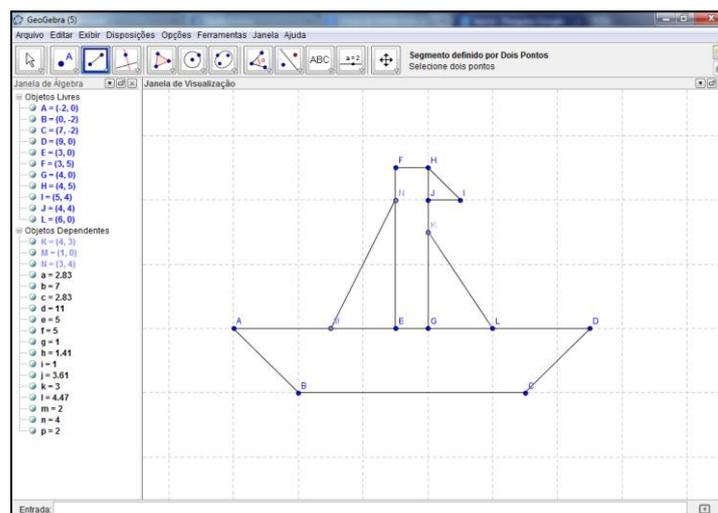
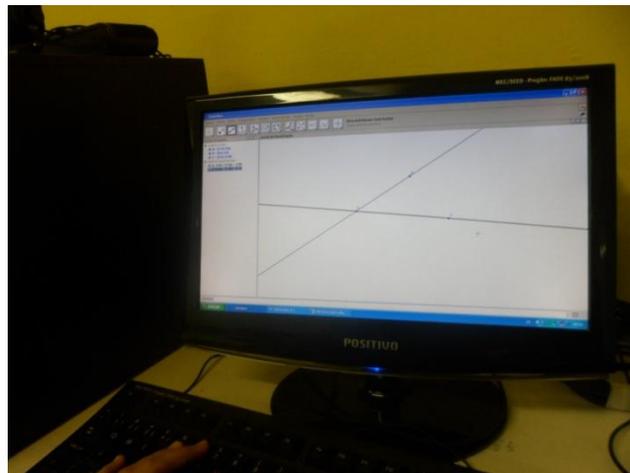


Figura 19: Construção de um barco no GeoGebra

**Preparação:** Abra uma nova janela. Para tal no menu Principal, clique em JANELA e após isto, em nova JANELA. No menu exibir desmarque a opção EIXOS e marque a opção MALHA.

**Construção:** Tente reproduzir o desenho usando a ferramenta segmento definido por dois pontos (Janela 3).

Na Atividade 1- Criar pontos e retas através de ferramentas e do campo de entrada, tivemos por objetivo, por em prática o que foi explicado anteriormente, quando falamos de duas formas diferente de se trabalhar com o aplicativo GeoGebra, através das ferramentas e através do campo de entrada. Nosso objetivo também aqui, foi reforçar a base de identificação de qualquer Ponto Notável e um triângulo. Alguns alunos diante da proposta atividade surpreenderam-nos usando outras que não foram mencionadas, para chegarem ao mesmo resultado, um exemplo foi terem usado a ferramenta Arquivo- Nova Janela para abrir uma nova janela outros ainda utilizaram o atalho como ctrl+N. Percebemos aqui de primeira o interesse dos alunos frente as atividades propostas. (Ver Figura 20):

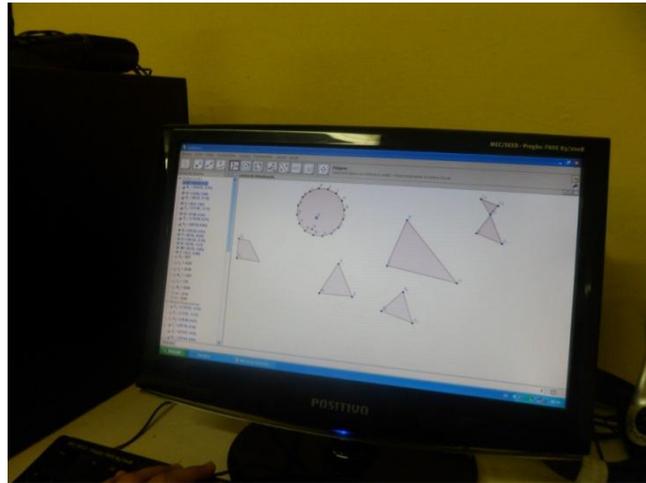


**Figura 20:** Construções da Atividade 1 no GeoGebra

Na Atividade 2- Construir figuras geométricas, nosso objetivo foi primeiramente fazer com que os alunos explorassem uma ferramenta que seria de muito valia nas investigações geométricas e mostrar que alguns conteúdos geométricos podem ser ensinados de forma diferente do ensino direto, onde se baseia em uma aula tradicional utilizando de recursos didáticos pouco variados, limitando-se muitas vezes ao livro e quadro de gis ou branco. Ao contrário disso, pode ser muito dinâmico, além de reflexivo e motivador.

Foi o que os alunos puderam perceber no decorrer das atividades. Nesta atividade, por exemplo, eles dispuseram da possibilidade de criar as figuras geométricas e com o auxílio do

mouse e da tecla ESC ao mesmo tempo movimentá-las, movendo-as, aumentando ou diminuindo seu tamanho, sem deixar, porém de conservar as características de origem. Percebemos assim, o valor da tecnologia na aprendizagem do aluno em sala de aula, pois com o uso do aplicativo GeoGebra no computador, foi possível que os alunos realizassem movimentos similares aos da realidade, o que seria impossível apenas com lápis e papel. (Ver Figura 21):

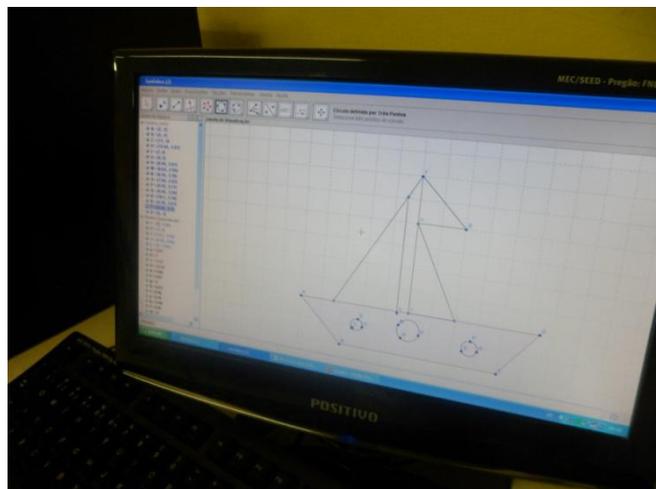


**Figura 21:** Construções da Atividade 2 no GeoGebra

Na Atividade 3 - Construir um barco, tivemos por objetivo deixar que os alunos “brincassem” com o GeoGebra. O propósito foi fazer com que eles explorassem de forma lúdica e prazerosa e assim se familiarizassem ainda mais com o aplicativo.

Deixamos esta atividade por último pra que eles aplicassem aqui todo o conhecimento absorvido nas atividades anteriores.

E de fato o objetivo foi alcançado. Os alunos construíram o barco de forma bem mais completa e outras figuras como uma casa e um caminhão, utilizando até mesmo outras ferramentas além das que foram solicitadas nas etapas desta atividade (Ver Figura 22):



**Figura 22:** Construções da Atividade 3 no GeoGebra

É possível observar que as atividades foram realizadas com sucesso. Assim passamos a próxima fase de nossa pesquisa que foram as Investigações Geométricas.

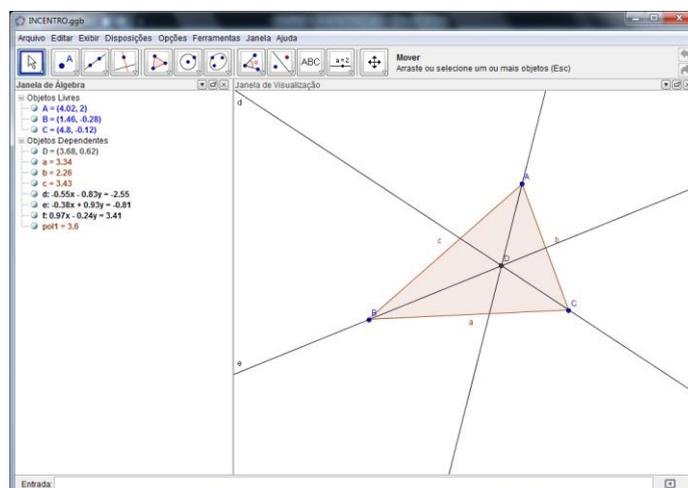
Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a principal característica na realização de uma Investigação Matemática se dá em quatro momentos e na intenção de atingirmos os objetivos desta pesquisa procuraremos descrever de forma clara e objetiva essas aulas que se seguem obedecendo a estes quatro momentos principais citados logo a seguir:

- a) Exploração e formulação de questões;
- b) Formulação de conjecturas;
- c) Teste e reformulação de conjecturas;
- d) Argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

No processo de descrição e análise das aulas de Investigações Matemáticas realizadas no Laboratório de Informática, escolhemos dois registros que alguns alunos realizaram durante as tarefas com o aplicativo GeoGebra e os Pontos Notáveis de Um Triângulo.

#### 4.4 A Investigação Geométrica com o Incentro

Neste primeiro momento de Investigação Geométrica, foi proposto aos alunos que usando os conhecimentos adquiridos sobre o aplicativo nas primeiras aulas no laboratório de informática, aulas estas que foram de conhecimento do aplicativo GeoGebra, construísem um triângulo qualquer e em seguida, encontrassem neste triângulo o *Incentro* (Ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo) e depois investigassem suas propriedades. (Ver Figura 23):



**Figura 23:** Construção do Incentro

Diante do que foi proposto, entre os alunos surgiram algumas questões a analisar, as quais por organização de tempo dividimos em 1º e 2º momentos:

### 1º MOMENTO:

- Como criar a bissetriz correspondente a cada ângulo do triângulo formado?
- Será que as bissetrizes de cada ângulo se encontram sempre no mesmo ponto?

Neste primeiro momento, as questões que surgiram, provocaram os alunos de tal forma que os mesmos se sentiram desafiados, passando então para a fase da formulação das conjecturas. Num primeiro momento dois alunos conjecturaram que era só utilizar a ferramenta, seguimento definido por dois pontos e assim traçar as bissetrizes que são segmentos de retas que dividem o ângulo em dois ângulos de mesma medida. A priori parecia-se estar certo tal conjectura, mas ao testar isto no GeoGebra, verificaram que não seria possível, pois a medida que movimentaram um dos pontos do triângulo foi possível observar que a reta definida por dois pontos não dividia o ângulo em dois ângulos iguais. Sendo assim, não se tratava de uma bissetriz. Além disso, perceberam também que ao movimentar o triângulo as retas formadas não se encontravam no mesmo ponto.

A fim de solucionar estas questões os alunos lançaram mão dos seguintes passos:

- a) Ativar a ferramenta BISSETRIZ e clicar sobre os vértices: A, C, B. Posteriormente sobre os vértices C, B e A. O que você observa? Registre o que aconteceu.

no A, B e B foi criado uma reta, no C, B e A foi criado uma segunda reta chamada Bissetriz.  
Foi criado primeiramente uma reta depois uma segunda reta chamada bissetriz

- b) Ativar a ferramenta Interseção de dois objetos e criar o ponto D de interseção das retas *d* e *e*.
- c) Utilizar ferramenta Bissetriz e clicar nos pontos B, A e C. O que você observou?

Uma terceira reta chamada bissetriz.  
Porque divide o ângulo em dois iguais.  
uma terceira reta chamada Bissetriz. Elas passam pelo o mesmo ponto.

- d) Com o auxílio da tecla ESC e o mouse. Arraste qualquer um dos vértices, investigando a construção feita. Ao movimentar os pontos nas mais diferentes posições o que você observou? Registre o que acontecia.

Vários triângulos foram formados e as bissetrizes se encontraram no mesmo ponto. Então não interessa qual o triângulo, divide o ângulo em dois iguais e passa sempre pelo mesmo ponto.

Foram criados vários triângulos mas as bissetrizes se encontraram no mesmo ponto.

## 2º MOMENTO:

- O Incentro tem alguma propriedade especial?
- Há algo que possamos fazer usando o Incentro?

Neste segundo momento os alunos lançaram mão dos passos a seguir:

- e) Sobre as retas  $d$  e  $f$ , usar a ferramenta Exibir/Esconder objeto e posteriormente usar a tecla ESC.
- f) O ponto D é um elemento em destaque no triângulo. Investigue o por que. (Depois de investigar renomeie este ponto).

O ponto D é o elemento em destaque por que é o incentro deste triângulo. É a onde se encontram as bissetrizes.

O ponto D é um elemento em destaque porque é o ponto de interseção das bissetrizes chamado INCENTRO.

- g) Sobre o ponto que você acabou de renomear (Incentro) e o lado  $c$  do triângulo Use a ferramenta Reta perpendicular. Em seguida ative também a ferramenta Interseção de dois pontos sobre a reta  $g$  e posteriormente no lado  $c$  que liga os pontos A e B. Registre o que acontecia:

Foi criada uma reta  $g$  e um ponto D.

Fei criado uma reta qe e um ponto B.

- h) Ocultar a reta g (pois o interesse aqui é no pé da perpendicular). Em seguida usar a tecla ESC.
- i) Registrar em suas anotações o que aconteceu ao usar a ferramenta Círculo definido pelo centro e um de seus pontos, clicando no ponto Incentro e em seguida no ponto D.

Fei criada uma circunferência dentro do triângulo.  
feei criado uma circulo dentro do triângulo

- j) E se o triângulo fosse diferente, isso poderia não acontecer? Movimente, arrastando qualquer um dos vértices do triângulo e investigue se a circunferência continua inscrita. Escreva o que acontece.

Independente do triângulo seria criado a mesma circunferência. Porque o ponto Incentro é o centro da circunferência

Não independente do triângulo seria criado a mesma circunferência

- k) De acordo com suas construções, observações e análises. Escreva o que você entende por Incentro.

É um ponto de interseção das Bissetrizes e com eles podemos criar uma circunferência dentro do triângulo.

É um ponto interseção das Bissetrizes e com ele podemos criar circunferências

Os alunos iam realizando os passos propostos e registrando em suas anotações o que foi pedido em cada item acima. Descrevendo suas dúvidas e como conseguiram saná-las através dos passos propostos e com a utilização da ferramenta certa do aplicativo.

De acordo com as respostas acima, podemos observar que após a construção do triângulo, os alunos foram incentivados a realizar a primeira investigação sozinhos. Após a tentativa de alguns alunos em encontrar as bissetrizes que correspondia a cada ângulo do

triângulo formado onde, ao fim da investigação perceberam que não seria possível pelo simples fato de estarem utilizando a ferramenta incorreta, toda a turma passou a seguir alguns passos prescritos. Sendo assim, ao utilizarem a ferramenta *bissetriz*, viram que foi possível a criação de retas que dividiam o ângulo ao meio e a partir daí puderam encontrar o ponto de interseção dessas retas. Os alunos dinamizaram este processo, movendo o triângulo e alterando seu tamanho, onde passaram a entender melhor algumas propriedades, dentre elas a do ponto em questão, pois, perceberam que mesmo com toda esta movimentação, as retas (bissetrizes) passaram pelo mesmo ponto. Perceberam também que este mesmo ponto era o centro de uma circunferência inscrita ao triângulo, assim passaram a compreender e conceituar melhor o Incentro.

Nesta Investigação Depois dos testes fizemos um breve momento de discussão em grupo, onde os alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre a investigação realizada.

#### 4.5 A Investigação Geométrica com o Circuncentro

Nesta segunda Investigação Geométrica propomos aos alunos que após construir um triângulo qualquer utilizando as ferramentas do Aplicativo Geogebra encontrassem e investigassem as propriedades do *Circuncentro* (ponto onde as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram). (Ver Figura 24):

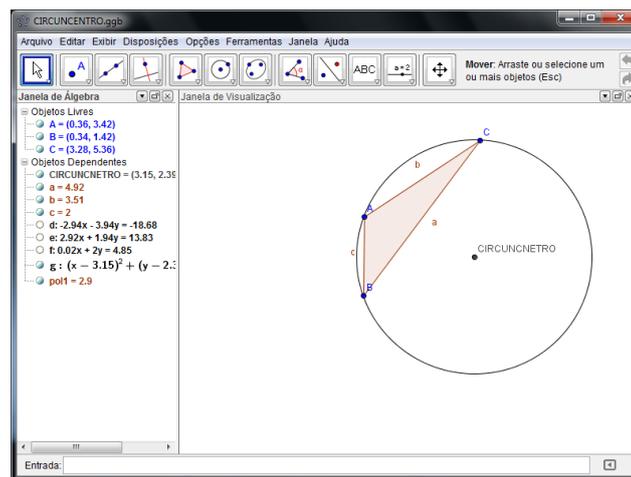


Figura 24: Construção do Circuncentro

Nesta etapa do trabalho, os alunos já estavam familiarizados com as ferramentas do aplicativo GeoGebra e com as tarefas de Investigações Geométricas.

Do mesmo modo que nas Investigações Geométricas com o Incentro, na construção do *Circuncentro*, através dos questionamentos dos alunos formulamos algumas questões, as quais por organização dividimos em 1º e 2º momento durante a aula de investigação.

1º MOMENTO:

- Será que as mediatrizes de qualquer triângulo se encontrarão sempre no mesmo ponto?

As conjecturas levavam os alunos à busca de soluções, investigando e testando eles iam aprendendo ainda mais sobre a definição de cada Ponto Notável. Alguns alunos ainda não conseguiam visualizar e utilizamos alguns passos para a realização da Investigação Geométrica proposta a cima:

- a) Ativar a ferramenta mediatriz e clicar sobre o lado **c**, fazer o mesmo processo com o lado **b**. O que aconteceu?

Foi criada duas retas chamada mediatriz.

Foi criado um segmento de reta que formou com o lado AB um ângulo reto.

- b) Use a ferramenta interseção de dois objetos e clique sobre as retas **d** e **e**. Neste momento o que você observa?

Foi criado um ponto D. Esse ponto intercepta as retas que foram criadas.

Neste momento foi criado um ponto D.

- c) Usando a ferramenta mediatriz, clique sobre o lado **a** do triângulo. Observe que uma reta **f** será criada. Investigue a criação desta reta e registre sua observação.

Foi criada outra reta chamada mediatriz, pois incide no ponto médio do lado do triângulo e todas estas retas se encontram no mesmo ponto.

Essa nova reta é outra mediatriz. São três retas e elas se encontram no mesmo ponto.

- d) O que acontece se deslocarmos qualquer um dos vértices do triângulo. Experimente colocar um dos vértices nas mais diferentes posições. O que você percebe? Registre suas observações.

Quando a gente aperta o ESC e move o triângulo a gente cria outros triângulos mas as mediatrizes se encontram no mesmo ponto sempre.

Quando a gente desloca os vértices para cima, para baixo, para a esquerda a gente modifica o triângulo. Mas mesmo assim as retas mediatrizes se encontram no mesmo ponto, não sei.

## 2º MOMENTO:

- O circuncentro tem alguma propriedade especial?
- Há algo que possamos fazer usando o circuncentro?

Diante dessas questões, partimos às investigações, seguindo os passos:

- e) Esconda as teclas **d**, **e** e **f**. Para isso utilize a ferramenta exibir/esconder objeto.
- f) Modifique o nome do ponto encontrado por você para Circuncentro
- g) Escreva o que acontece ao ativar a ferramenta círculo definido pelo centro e um de seus pontos, e clique no ponto e posteriormente em um dos vértices do triângulo. E se o triângulo fosse diferente, isso poderia acontecer?

Quando a gente ativa a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO, as mediatrizes se escondem e a gente vê só o ponto, que nomeamos de circuncentro. Quando a gente ativa o CÍRCULO aparece uma circunferência que toca nos vértices do triângulo.

Por mais que a gente mova o triângulo ele continua inscrito na circunferência.