UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

PEDRO HENRIQUE ALMEIDA OURIQUES

TEOREMA DE THALES

Campina Grande/PB
Dezembro/2010

PEDRO HENRIQUE ALMEIDA OURIQUES

TEOREMAS DE THALES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. JUAREZ DANTAS DE SOUZA

Campina Grande/PB
Dezembro/2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

O939t Ouriques, Pedro Henrique Almeida.

Teorema de Thales [manuscrito] / Pedro Henrique Almeida Ouriques. – 2010.

50 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2010.

"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Sousa".

1. Teorema de Tales. 2. Geometria. 3. Ensino de Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516

PEDRTO HENRIQUE ALMEIDA OURIQUES

TEOREMA DE THALES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB (10)
Orientador

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

Prof. Esp. Roberto Aroldo Pimentel
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, dezembro de 2010

Dedico este trabalho inteiramente à minha família. Ao meu pai, Flávio Ramos Ouriques, professor de matemática, com quem dialogo sobre os dilemas do educar e do aprender; a minha mãe, Maria Aparecida Almeida Ouriques, enfermeira, que salva muitas vidas no seu trabalho cotidiano; ao meu irmão, André Luis Almeida Ouriques também professor na área de história, que compartilha comigo da mesma forma, as incursões no mundo do compartilhar o saber; e também a minha namorada Adriana Mairá Santos Dantas, que sempre esteve comigo compartilhando com as minhas opiniões.

AGRADECIMENTOS

Depois de vários anos, chegou ao fim o longo caminho do meu curso de licenciatura em matemática. No caminho que percorri foram muitas as pessoas que sem duvida alguma, contribuíram para minha formação acadêmica, sejam eles professores, os grandes amigos e os colegas tão preciosos, que marcam esta passagem em nossa vida.

Primeiramente e especialmente aos professores, só tenho a agradecer os vários anos de conhecimento que fui proporcionado diante de várias pessoas especializadas, que fizeram da minha vida de estudante, uma fase de conquista, de dedicações, de esforços e de muitas noites sem dormir, com o objetivo de buscar sempre o melhor. Quero aqui engrandecer o meu orientador Juarez, que foi de a pessoa que mais deu atenção a minha vida estudantil, onde durante um ano criamos uma relação de amigo, tivemos vários diálogos onde retratamos o Teorema de Thales de uma forma diferente. Pude perceber a cada encontro, que eu estava diante de uma pessoa totalmente capacitada, que sempre me abriu os olhos com sua experiência e sabedoria. Através dele consegui ter mais experiências em sala de aula e mais oportunidades, na minha carreira como professor, que me fez perceber que diante de uma sala de aula o professor está sempre forçado a adquirir mais e mais conhecimentos.

No período que passei na faculdade conheci vários professores importantes na relação de educar e do saber. Primeiramente quero aqui retratar a grande relação professor-aluno que tive com o professor Wálber, que foi sem dúvida um grande amigo e educador, onde foi pessoa de conversar vários assuntos acerca de sala de aula e principalmente o futebol, que é uma grande paixão na minha vida. Guardo no meu coração a grande pessoa que Wálber foi à minha vida de estudante, porque sempre esteve nas horas vagas conversando e dando conselhos. Quero também mostrar a minha admiração a Aroldo, que foi importante professor em uma fase que eu estava com dificuldades no curso, onde na sua forma de apresentar a didática, ele me surpreendeu com sua simpatia e atenção com as dificuldades obtidas por mim durante a cadeira lecionada. Assim só tenho a dizer que ele foi de grande importância para que eu ficasse sempre dedicado aos meus objetivos.

Ao falar de Vandenberg, poderia escolher várias palavras pra mencionar a pessoa que ele foi à minha vida acadêmica, onde além de tudo foi sempre rigoroso em sala de aula com sua autoridade, mais ao mesmo tempo é uma pessoa de um grande carisma, tanto em sala de aula, como principalmente fora de sala, onde sempre ficamos até mais tarde com outros amigos, dialogando diversos assuntos de diferentes áreas. Sempre quando eu o encontrava na coordenação, sempre me recebia com respeito e simpatia pra juntos resolvermos os problemas que apareciam nas cadeiras lecionadas. Sem esquecer, e é bom lembrar-se de alguns professores que apesar do pouco tempo de convívio, tiveram grandes importâncias na vida acadêmica, Elizabeth foi uma professora da alta competência, que onde pude aprender muito na área de didática, que é a área que estou simpatizando cada vez mais e com o auxilio dela pude ter uma maior visão acerca do ensino em sala de aula. Por fim não posso esquecer-me do professor Ernesto, que é um especialista na área do conhecimento, onde é admirável ver, como uma pessoa pode ser especializado em várias áreas e competente em todas elas da mesma forma, só tenho a dizer que essa pessoa é de grande competência e sabedoria. Portanto, só tenho a agradecer os professores mencionados e aos demais professores, pois sem eles não teria a capacidade de lecionar a matemática diante de uma sala de aula.

Agora vou destacar as grandes amizades que construí durante a minha vida acadêmica na UEPB, onde por vários anos foram responsáveis por alegrias e tristezas . Ao falar de Jackson, só tenho a dizer que sem sombras de dúvidas ele foi o meu melhor amigo de curso, pois durante a vida em que estudamos juntos, só tive a ganhar com a união, em que se estabeleceu nos planos de estudos, nas conversas intimas, nas festas onde podíamos estabelecer relação de companheirismo e principalmente na confiança que eu tinha nele em todas as horas, apesar de ele ter desistido do curso, só tenho agradecer as relações de amizade e confiança. Também quero destacar amizades que construir fora do curso, que foram os amigos Edmael e Neto que se formaram em física na UEPB, que foram grandes pessoas que contribuíram para que eu pudesse sempre estar contando com suas ajudas e suas parcerias em torno de várias situações que envolvem uma grande amizade.

Não posso em nenhum momento deixar de mencionar também os amigos de estudos, que foram importantes durantes as várias horas que dedicávamos aos estudos, com objetivo de ter êxitos nas provas e nas cadeiras lecionadas na UEPB, tais como Ginaldo, Elionaldo, Ricardo e Cícero. Essas pessoas sempre foram companheiras, ao ponto de estarem quase todas às vezes estudando e dando apoio a um e a outro; é bom frisar que sempre contei com o apoio para todas as oportunidades na minha carreira acadêmica, como também pude fornecer a minha contribuição com os meus conhecimentos das cadeiras envolvidas. Agradeço a todos essa união, que teve uma grande missão em torno de um bom êxito nos estudos.

Destacando a relação Família-amigo, quero retratar as grandes pessoas que sempre estiveram comigo, desde quando eu recebi o resultado do vestibular, onde passei para o curso de Licenciatura Plena em Matemática na UEPB, e hoje estão vendo e observando eu concluir o curso. André Luis, Silvio de Almeida e Paulo Victor, sendo o primeiro irmão e os outros dois meus primos, estiveram sempre ao meu lado na alegria e na tristeza, pois sempre pude contar com eles em toda minha vida, no caminho acadêmico sempre tive ajuda acerca das opiniões que eles me proporcionaram, com dicas pra que eu concluísse bem o meu curso. A grande união que tenho com os três, é importante, pois sempre a gente se reúne para debater vários assuntos acadêmicos, políticos, da vida social, e de globalização. Posso afirmar que hoje eles são o meu passado, presente e futuro, onde não se basta ser família e sim ter sempre pessoas que possam lhe ajudar e compreender.

É bom ressaltar a grande e especial importância dos meus pais Flavio Ramos e Maria Aparecida que sempre me deram amor, atenção, carinho, conselhos e bastantes reclamações em torno de que eu sempre tivesse foco nos meus estudos, como pais, eles querem sempre o melhor para um filho. E dizer ao meu pai que é professor de matemática, que hoje estou concluindo matemática por causa dele, pois aprendi a amar a matemática com a ajuda dele. Quero também deixar o meu carinho e meu amor a minha namorada Adriana Mairá, que em menos de um ano me deu força pra eu trabalhar e sempre se dedicar a esse trabalho acadêmico, com o objetivo de encerrar o ciclo de estudante universitário com bastante clareza e responsabilidade.

Por fim quero dizer a todos que foram mencionados e os que não chegarem a ser, que só tenho agradecer pela contribuição que me propuseram ao longo da minha vida acadêmica. Pois sem as ajudas de vocês professores, amigos e Família não estariam chegando a esse ponto da minha vida, onde realizo o sonho de concluir o curso de Licenciatura Plena em Matemática na UEPB.

RESUMO:

O presente estudo visa discutir, num âmbito mais geral, as aplicações no Teorema de Thales do cotidiano do aluno, onde durante muito tempo de pesquisa feito em torno da sala de aula e análises realizadas sobre os livros didáticos mais adotados nas escolas brasileiras, podemos constatar a falta de mais aplicações no ensino do Teorema de Thales. Em visão mais específica, o trabalho acadêmico tem seu objetivo em mostrar aplicações, abordadas e feitas em sala de aula, mostrando a importância da interpretação geométrica que os alunos fizeram acerca de evidenciar o conhecimento abordado em sala de aula. Foi relatado com grande êxito, o maior dialogo entre professor e aluno acerca das aplicações inovadoras que visualizaram o meio em que vive o aluno, acarretando assim na melhor forma de realizar o ensino do Teorema de Thales. Neste trabalho também feito um estudo histórico, relatando a vida e obra de Thales de Mileto, como também foi feito um contexto histórico relatando a evolução acerca das demonstrações do Teorema de Thales, desde a sua época até os dias de hoje. É mostrado também como se realiza hoje em dia o ensino do Teorema de Thales.

.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O foco deste trabalho acadêmico é mostrar e abordar, aplicações no conteúdo do Teorema de Thales, onde se tem o objetivo de mostrar aplicações que foram abordadas em sala de aula. Depois de várias análises feitas dos livros didáticos e no ensino em sala de aula, podemos retratar que as aplicações em torno do cotidiano do aluno, realizadas e trabalhadas em cima de um dos principais teoremas da geometria, tiveram um grande acolhimento na parte do seu aprendizado, onde culminou no êxito da proposta implantada.

É importante nos frisarmos, que a aplicação mostrada nesse trabalho tem como foco de obter um melhor aprendizado no Teorema de Thales, onde buscamos aplicações que envolveram o meio em que vive o aluno. Sendo proposta ao aluno uma visão em que ele fosse levado a interpretar uma aplicação, e notar que está trabalhando com um exemplo do Teorema de Thales. Portanto o aluno realiza uma interpretação geométrica em cima da aplicação, e resolve o exemplo em cima do que é ensinado sobre o Teorema de Thales. Assim ficou notório que as análises feitas em cima do ensino do, mostraram que a didática que era adotada em sala de aula e nos principais livros didáticos ficou defasado ao longo dos anos, e foi preciso realizar uma nova proposta de ensino e mostrar as aplicações do cotidiano nesse trabalho.

Diante das menções em torno das aplicações, podemos mostrar ao aluno que o aprendizado do conteúdo do Teorema de Thales, não se trata somente ao geométrico, e sim proporcionar uma visão que antes não era fornecida, onde propôs ao aluno outras aplicações que ocasionou uma interpretação geométrica do Teorema de Thales, fazendo assim o aluno utilizar o que aprendeu no conteúdo.

O objetivo se posicionou em forçar o aluno a observar nas aplicações os elementos que formam o Teorema de Thales e assim pode-lo ser interpretado. Foi trabalhada a forma de enxergar retas paralelas, como também as retas transversais e vendo se nelas existia a relação de proporção nos segmentos, fazendo com que se realizasse a interpretação geométrica. Portanto foi possível trabalhar com noções de paralelismo e com proporcionalidade, resultando assim com essas aplicações, uma forma de aluno sempre está trabalhando com Teorema de Thales.

Foram pegos para ênfase de trabalho, os principais livros didáticos adotados nas principais escolas brasileiras, onde foram escolhidos os mais renomeados autores na área da educação matemática. Ao analisar os livros escritos por Luis Roberto Dante, Antonio Machado e Gelson Iezzi, podemos ver que a falta de ilustrações em torno das aplicações do Teorema de Thales, e como também a falta quase que total de exemplos em torno de aplicações, foi as críticas mais relevantes. Foi relatado também que os autores não explicam o assunto por etapas, onde era necessário explicar cada passo do Teorema de Thales e seus elementos. Também foi preciso mostrar que os livros não mostraram um pouco da história do Teorema de Thales, onde teve sua origem e sua aplicação. Por fim ficou concluído, que os livros hoje adotados, trabalham Teorema de Thales basicamente em cima do ensino do geométrico.

No primeiro capitulo será abordada a vida e obra de tales de mileto, onde foi feita um levantamento histórico acerca da existência de Thales de mileto, de como surgiu Thales, da sua vida, suas profissões, das suas grandes descobertas, das suas diversificasses como astrônomo, matemático, filósofo e comerciante. É destacada também a importância que Thales teve quando foi considerado um dos setes sábios da Grécia antiga e fundador da escola jônica, e mostraremos a importância que teve o convívio de Thales com os povos egípcios, onde gerou troca de conhecimentos importantes para matemática naquela época.

No segundo capítulo veremos com que argumentos Thales de Mileto demonstrou o Teorema, onde hoje é mais conhecido como Teorema de Thales, e qual eventuais problemas apareceriam ao passar dos anos. Mostraremos a evolução das demonstrações com vários tipos, onde se mostrou demonstrações no tempo dos pitagóticos, de Eudoxo, de Euclides (onde mostrou a questão dos segmentos incomensuráveis) e por fim serão trazidas as demonstrações mais adotadas hoje nos principais livros didáticos.

No terceiro e último capítulo, estaremos retratando o ensino do Teorema de Thales, onde vamos abordar as dificuldades encontradas hoje no ensino da proporcionalidade. Primeiramente vamos mostrar como é trabalhada a didática do conteúdo do Teorema de Thales em sala de aula, onde mostraremos o ensino em sala de aula nos dias atuais. Subseqüente Vai fazer a análise dos principais livros didáticos trabalhados nas escolas brasileiras e focar principalmente a falha que ainda existe em abordar o conteúdo do Teorema de Thales, onde praticamente é trabalhado de forma geometricamente e sem quase nenhuma aplicação ou ilustração. Por fim serão mostradas e trabalhadas as aplicações que serão trazidas por esse trabalho acadêmico em torno de focar uma nova didática, voltada para uma melhor forma de aprender o teorema de Thales, com objetivo de fazer com que o aluno possa aplicar o seu conhecimento do Teorema de Thales nos exemplos propostos e assim pode-lo aplicar uma introdução geométrica.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo aborda-se a vida e obra de Thales de Mileto. Levantando-se um estudo sobre o surgimento do nome Teorema de Thales conhecido por *Teorema da Proporcionalidade de Segmento*[1]. Mostra-se como era a vida de Thales e onde passou a maior parte da sua vida, relata-se feitos matemáticos atribuídos a Thales, onde lhe foi atribuído a descoberta da altura de uma pirâmide. Vão ser mostradas as várias profissões que ele exercia e entender como o aprendizado com os povos egípcios, teve influencia na escola jônica onde ele foi o fundador e considerado um dos sete sábios da Grécia.

1.1 O PRINCÍPIO DO TEOREMA DE THALES

A grande maioria dos autores de livros sobre a história da matemática não delatam com certeza a evidência histórica de quando surgiu o teorema de Thales (*Um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais*), pois ao longo do tempo documentos que comprovassem a existência de um dos teoremas chaves da geometria elementar acabaram sumindo ao passar dos anos. Durante séculos muitas fontes sofreram alterações devido a várias versões de interpretações.

Alguns autores como Cajori (2007), Howard Eves (2004) e Carl Boyer (1998) atribui à origem a solução de problemas de natureza prática, principalmente na arquitetura e agrimensura grega, envolvendo paralelismo e proporcionalidade, relacionados diretamente ao geométrico e ao numérico. Mas segundo Eves (2004) o Teorema de Thales poder ter sua origem no Egito, pois talhes no tempo que ficou por lá, adquiriu conhecimentos e foi desafiado a medir a altura de uma pirâmide. Eves (2004) relata as seguintes versões:

[1] Será mencionado se referindo ao Teorema de Thales.

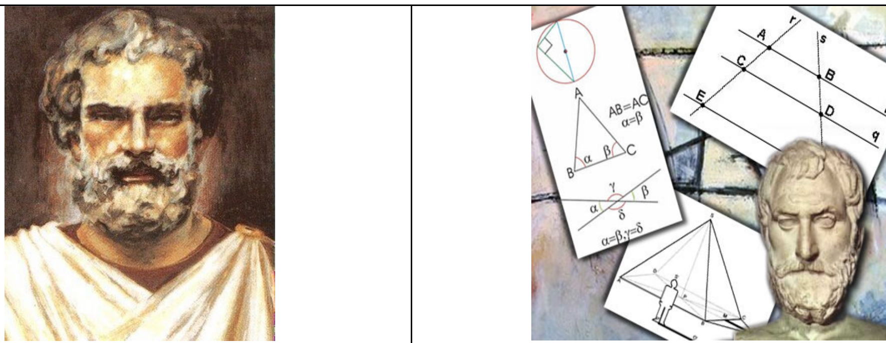
Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide – isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (EVES, 2004: 115).

As versões mencionadas no livro história da matemática de Eves (2004), onde Thales mediu a altura da pirâmide, podem fornecer dúvidas com relação ao feito. Na primeira versão hierônimos relatou que Thales teria medido a altura da pirâmide pela observação de sua sombra com a sombra da pirâmide, porém só com esses detalhes não conseguimos ter a precisão da medida da altura, pois ele deveria ter levado em conta a posição, o horário do dia, a época do ano e a latitude, o que em nenhum momento foi mencionado na descrição. Esse fato também aconteceu na versão de Plutarco onde ele não mencionou os mesmos fatores. Portanto é importante referimos a esses fatos históricos levando em conta todas as possíveis condições de realização dos feitos.

Perreira (2005) relata que no Brasil, o aparecimento do nome teorema de Thales relacionado ao teorema da proporcionalidade surgiu na segunda metade do século XX, principalmente nos livros-textos que caracterizam o movimento da matemática moderna, como o livro do autor Osvaldo sangiorgi. A partir desse momento começou a surgir uma variedade de enunciados referentes ao Teorema de Thales e nos dias atual mais conhecido um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais que determinam segmentos proporcionais.

1.2 VIDA E OBRA DE THALES DE MILETO

Meio homem meio lenda, Thales (Figura 1.2.1 e Figura 1.2.2) era filho de pais ricos e nobres, Esamio e Cleobulina teriam nascido aproximadamente na metade do século VII a.C (640-546 a.C). O grande historiador grego Heródoto afirma que sua nacionalidade não era conhecida, ele relata que era fenício. Os estudos de Zeller historiador de filosofia levam a crer que ele fosse originário da Ásia menor, não sendo confirmado que tenha vindo ao mundo em mileto, onde por mais de cem anos se destacou a escola jônica, primeira a tratar de filosofia e geometria demonstrativa na Grécia., Segundo Cajori (2007).



a) b)

Figura1.2. a) Thales de Mileto, b) Thales e suas obras .

Tales em sua vida de adulto foi comerciante de bom prestígio, demonstrando talento excepcional para o comércio. No Egito desenvolveu vários conhecimentos na área da matemática, do comércio, da astronomia, e da geometria, onde era bastante evolutiva. Durante o período de meia-idade, foi ao Egito e passou vários anos lá com os sacerdotes egípcios estudando ciências físicas e matemáticas. Tales em seu aprendizado com a cultura egípcia estudou também a teoria dos eclipses do sol e da lua. Durante o longo convívio Thales logo superou os seus mestres e agradou o Rei Amasis ao ter sido capaz de medir a altura da pirâmide de Queops, segundo Plutarco sem precisar subir na pirâmide. De acordo como Plutarco, Thales observou que numa determinada hora do dia a altura de um bastão era igual ao comprimento da sombra, assim a razão das duas medidas seria igual a 1. Sabendo que os raios do sol podem ser considerados paralelos, ele concluiu que a razão da pirâmide era igual a razão do bastão, assim ele determinou a altura da pirâmide, como ilustra-se na Figura 1.2.3.

Figura 1.2.1: Altura da pirâmide

Com os seus estudos obtidos na área de astronomia junto aos egípcios, Thales tinha previsto com exatidão a hora do dia e o dia em que ocorreria o eclipse solar de maio de 585 a.C, que deu muito credibilidade a Thales (Cajori 2004). É também dessa época a história das azeitonas onde Thales se vangloriava de ser um profundo conhecedor de meteorologia entre outras coisas, recolhendo dados sobre mudanças de tempo, observou a partir de indícios meteorológicos colhidos numa estação do ano que era possível prever as características das seguintes estações que viriam posteriormente, assim ele conseguiu dinheiro para alugar todas as prensas de azeite de oliva da região , quando chegou o verão, os produtores de azeite tiveram que pagar a ele pelo uso das prensas, o que levou a ganhar uma grande fortuna com esse negócio.

Thales é considerado o primeiro filósofo pré-socrático, onde deixou vários discípulos como Anaxímenes e Anaximandro que deram continuidade a escola jônica que ainda durou por mais de cem anos. Thales foi desde a antiguidade visto como o iniciador da visão de mundo e do estilo de pensamentos que passamos a entender como filosofia. Ele formulou a doutrina onde diz que o princípio de todas as coisas é a água, sendo talvez levado a formar essa opinião por ter observado que o alimento de todas as coisas é úmido e que o próprio calor é gerado e alimentado pela umidade, ora aquilo de que se originam todas as coisas é o princípio delas. Daí lhe veio a conclusão de que as sementes e todas as coisas são naturalmente úmidas e de ter origem na água, vários filósofos posteriormente deram continuidade aos seus conhecimentos filosóficos. Levaram mais tarde ao reconhecimento do sol como centro do universo. Filósofos como Sócrates, Platão e Aristóteles sofreram grandes influencias com as citações de Thales.

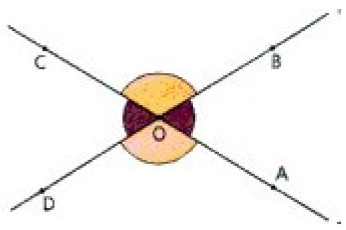
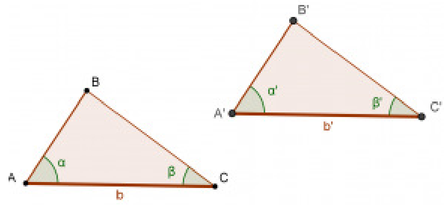
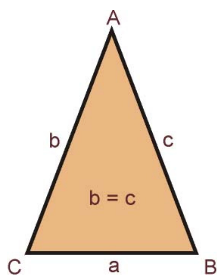
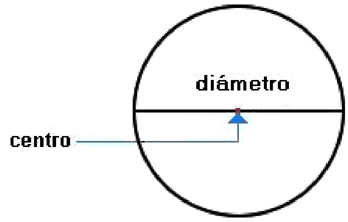
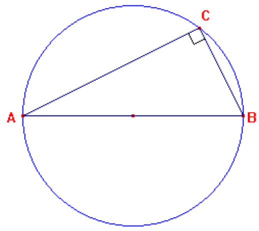
Considerado um dos sete sábios da Grécia antiga e fundador da escola jônica que durou cem anos e focaram tanto pensamentos filosóficos e a geometria demonstrativa, ao passar do tempo a escola jônica veio a terminar com a invasão persa. A grande obra de Thales está na transformação da geometria de um aglomerado de noções esparsas em um sistema lógico e coerente, assim ele introduziu na Grécia o estudo da geometria, com sua troca de conhecimentos durante o tempo que passou no Egito, pode-se dizer que Thales criou a geometria de retas, essencialmente abstrata, enquanto os egípcios estudaram somente a geometria de superfícies e os rudimentos da geometria dos sólidos onde era bastante evidente como obras grandiosas, com formas quadrangulares, e triangulares, ou seja, aspectos empíricos do seu caráter.

Ao longo da história Thales de mileto é conhecido por ter desenvolvido o célebre teorema das retas paralelas. Mas a outros fatos geométricos cuja descoberta é atribuída a ele. Muitos livros de história da matemática tais como Boyer (1998), Eves (2004) e dicionários biográficos de matemática creditam a Thales cinco teoremas da geometria elementar, são eles;

- Os pares de ângulos opostos pelo vértice formado por duas retas que se cortam são iguais, Figura 1.2.4.a
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais, respectivamente, a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes, Figura 1.2.4.b
- Um círculo é cortado por um diâmetro formar dois semicírculos, Figura 1.2.4.d
- Seja um triângulo isóscele, onde têm dois lados iguais os ângulos da base são iguais, Figura 1.2.4.c
- Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, Figura 1.2.4.e

Ressalta-se, entretanto, que alguns historiadores matemáticos, não comprovam que ele tenha realizado esses feitos, Pereira (2005).

Depois dos feitos de Thales de mileto, outros geômetras e matemáticos gregos seguiram seus passos, construindo um sistema matemático e geométrico que permaneceu como a expressão máxima da ciência da antiguidade, só superada na época do Renascimento

a) 	b) 
c) 	d) 
e) 	Figura 1.2.4. a) Ângulos opostos pelo vértice: b) Semelhança de triângulos caso ALA c) Triângulos isósceles: d) Diâmetro de um circulo: e) Um ângulo reto inscrito num semicírculo:

2. TEOREMA DE THALES

Para a demonstração do teorema de Thales, é importante observar alguns fatos da época da descoberta do problema. Thales se baseou em conceitos, definições e postulados já adquiridos naquela época, tais como os elementos de Euclides

Neste trabalho apresentou-se a demonstração do teorema da proporcionalidade na época de Thales no período pré-Eudoxiano, a partir do conceito de número exposto na época de Thales e dos pitagóricos. Apresenta-se a demonstrações do livro V, escrito por Euclides, onde na obra dos *Elementos* se mostrou a solução dos segmentos incomensuráveis[2]. Analisam-se algumas demonstrações encontradas em livros didáticos do ensino fundamental. Ao observa cada demonstração, veremos a evolução do teorema ao decorrer dos séculos citados por historiadores matemáticos e também fazendo uma observação nos segmentos incomensuráveis na unidade de medição, pois esses segmentos viriam a destruir a generalidade da teoria da proporção, sendo que só com grandezas comensuráveis teria êxito.

É de grande importância observar e analisar as demonstrações em livros didáticos do ensino fundamental e relatar as diferenças de um autor para o outro, caso exista à diferença e constatar as dificuldades encontradas pelos alunos em observar a clareza de um dos teoremas fundamental da geometria elementar, (*Um feixe de retas paralelas e cortadas por duas transversais e que geram segmentos proporcionais*). A análise das demonstrações serve para observar as diferenças que existem ao longo do tempo, até chegar aos dias de hoje.

O Teorema de Thales está ligado às condições de proporcionalidade de segmentos, esses segmentos podem ser comensuráveis ou incomensuráveis como unidade de medição. Na época de Thales, quando o teorema foi demonstrado pela primeira vez, a proporcionalidade foi tratada com segmentos comensuráveis[3]. Nos dias atuais, muitos livros didáticos do Ensino fundamental e médio demonstram a proporcionalidade, trabalhando apenas com o caso em que os segmentos são comensuráveis (grandezas). Alguns autores de livros do nível superior trabalham com segmentos comensuráveis. A escola pitagórica provavelmente trabalhava esses segmentos associando a um número inteiro ou uma razão entre dois números inteiros. Na época de Thales a idéia de proporção já era bem definida, como também o paralelismo e congruência de triângulos, vários autores de história da matemática relatam a descoberta do teorema da proporcionalidade à ida de Thales ao Egito, pois lá ele aprendeu conhecimentos de geometria de sólidos com os egípcios. Segundo a maioria dos autores de livro didáticos na demonstração da proporcionalidade (onde três paralelas com duas transversais geram seguimentos

[2] São segmentos incomensuráveis, quando a medida for um número irracional
[3] São segmentos comensuráveis, quando a medidas for um número racional

proporcionais), Thales se baseou em alguns fatos geométricos bem definidos na sua época, em que;

- Retas paralelas: duas retas **r** e **s** são paralelas no plano quando se, e somente se, elas não têm nenhum ponto em comum.
- Feixe de retas paralelas: São o conjunto de três ou mais retas paralelas.
- Retas transversais: são duas retas que têm direções diferentes (ou seja: não são paralelas) e que, portanto, têm um único ponto em comum.
- Os pares de ângulos opostos pelo vértice formado por duas retas que se cortam são iguais.
- Congruência de triângulo (ALA): É dito que dois triângulos são congruentes, quando possuem um lado e os dois ângulos a ele adjacentes respectivamente congruentes, então os triângulos são iguais.

Esses fatos geométricos são mencionados na obra de Euclides em os *Elementos* nos livros VII, VIII e IX, onde esses livros é a fonte mais próxima da época de Thales.

Contudo, o teorema é baseado em cima de proporção. Para os gregos o conceito de proporção estava ligado à idéia de subtração mútua, Boyer (1998)

Aparentemente os gregos usaram a idéia de que quatro quantidades estão em proporção a:b = c:d, se as duas razões a:b e c:d têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes, e assim por diante. (BOYER, 1998: 61).

Nesse comentário de Boyer, a razão **a/b**, **a** é um múltiplo de **b,** pois para a razão ser um número inteiro tem que acontecer a multiplicidade, por exemplo; a = 6 e b = 2, isso significa que **b** caberá exatamente três vezes em **a,** então**,** a outra razão c/d só será igual a a/b, se apresentar a mesma propriedade, ou seja, **d** couber exatamente três vezes em **c.** Portanto, após subtraímos b três vezes de a ou d de c, os restos, em cada caso, seriam igual a zero.

Mas durante o tempo em que Pitágoras viveu um grande problema botou em questão o êxito do Teorema de Thales, foi a questão sobre a razão dos segmentos, quando a divisão não fosse exata, assim, à medida que a matemática se desenvolvia, as grandezas incomensuráveis se tornaram um problema, gerando o que se costuma a chamar de a crise dos incomensuráveis.

O principal perigo da teoria dos incomensuráveis é que ela destruiria a generalidade da teoria das proporções, que só continuaria válida para grandezas comensuráveis. Segundo Pereira(2004), não há referências claras das tentativas feitas pelos pitagóricos para resolver o problema dos incomensuráveis. A descoberta forçou os pitagóricos a abandonar a sua filosofia básica de que todas as coisas eram números, e permitiu que os matemáticos gregos desenvolvessem novas teorias. Até anos da época de os Elementos de Euclides, o problema não tinha sido resolvido. Na descoberta da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408.C.- 355ª.C.)

A discussão sobre os incomensuráveis durou vários anos e deixou para vários matemáticos o desafio de solucionar o problema dos incomensuráveis, mas só na obra dos livros de Euclides os “Elementos”, os livros V, VI e X, abordaram com mais precisão a questão do problema da razão irracional. No livro V relata a teoria da proporção de Eudoxo. Ele define a igualdade de razões, que se aplica a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis e contém a idéia de proporcionalidade.

Pela Definição 5 do livro V de os Elementos Euclides, diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondente. Interpretando a definição em linguagem atual, consideramos como grandezas os segmentos AD, DE, AE e EC (comensuráveis ou não), é dizer que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

Concluindo a definição vejamos que para todo m e n inteiros positivos, as seguintes condições se verificam:

Se mxDB < nxAD, então mxEC < nxAE

Se mxDB > nxAD, então mxEC > nxAE

Se mxDB = nxAD, então mxEC = nxAE.

No livro VI é trabalhado o estudo de semelhança entre figuras, onde relata a proporcionalidade de segmentos, onde a razão dos lados de uma figura é igual a razão dos lados da figura semelhante, no seguinte livro a proposição fundamental relaciona, à proporcionalidade de segmentos determinados em duas retas cortadas por um feixe de retas paralelas, cuja demonstração abordada pela escola pitagórica e jônica era incompleta, porque dependia da comensurabilidade das grandezas envolvidas. Por fim o livro de mais difícil compreensão de Euclides, o livro X é conhecido pela tradição de ser o mais perfeito e bem acabado de todos eles, nele está exposta a teoria geral das grandezas incomensuráveis e discussões sobre comensurabilidade de grandezas. O livro inicia-se com quatro definições, desencadeando 115 proposições relacionadas à teoria dos incomensuráveis.

Entretanto nesse tópico, o propósito dessa abordagem é relatar a evolução histórica e comentar, relatando as falhas de algumas das demonstrações do teorema Thales ao longo do tempo. Primeiramente o Teorema de Thales teve uma grande ênfase no período pré-Eudoxiano (na época de Thales), onde foi realizada a primeira demonstração, anos depois a escola pitagórica mostrou outra demonstração do Teorema de Thales, onde até hoje é usado pelos livros didáticos. Temos os estudos de Eudoxo na teoria da proporção onde proporcionaram importantes contribuições, onde Euclides no seu Livro V Demonstrou o Teorema de Thales, onde na versão demonstrada poderia ser utilizado, tanto segmento comensurável como também segmento incomensurável, colaborando com uma maior compreensão do processo de desenvolvimento desse conceito e botando fim no problema dos segmentos incomensuráveis. Para fechar serão mostradas as demonstrações utilizadas nos principais livros didáticos de ensino fundamental que são adotados nas escolas brasileiras.

É certo que na época de Eudoxo e Pitágoras já era bem difundidas e abordadas as principais propriedades dos triângulos e a teoria da proporção que se baseia no resultado conhecido como: (se duas retas r e s são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em r e s são proporcionais, ou seja (Eves 2004);

$$\frac{AB}{A`B`} = \frac{BC}{B`C`} = \ldots..\text{”}$$

2.1. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE THALES NO PERÍDO PRÉ-EUDOXIANO

Proposição: Se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais, isto é $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots..$, como se ilustra as Figuras 2.1.a e 2.1.b

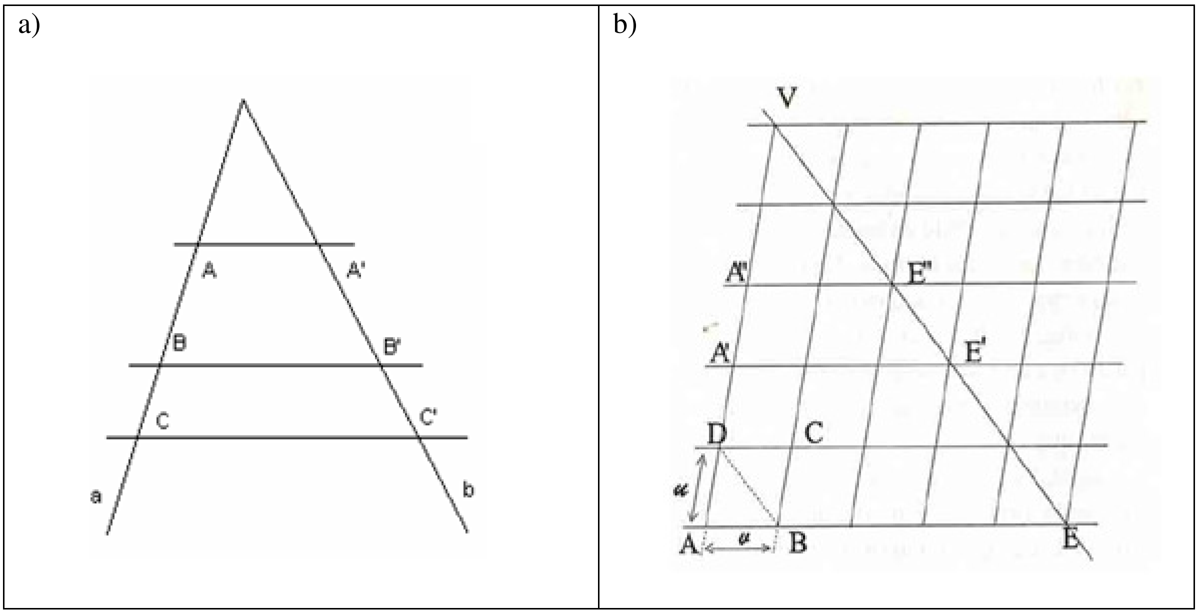


Figura 2.1. a) Retas a e b cortadas por três retas paralelas, b) Retas VA e VE projetadas sobre um reticulado.

Demonstração: Tomemos um segmento u como unidade e construamos o reticulado da Figura 2.1.b, formado de dois feixes de retas paralelas, definindo o quadrilátero ABCD, de lados u e v. Consideremos as duas retas VA e VE transversais e as retas AE, A’E’, A”E” paralelas. Então, diretamente da Figura 2.1.b.

$$VA''=2u \quad VE''=2w \text{ e } VA' = 3u \quad VE' = 3w \tag{1}$$

Onde w é o segmento DB tomado como unidade de medida das retas paralelas a DB. (...)

Das Relações (I), $\frac{VA''}{VA'} = \frac{2}{3} = \frac{VE''}{VE'}$. O resultado facilmente se generaliza para a situação da Figura 2.1.a, desde que os segmentos determinados nas retas a e b sejam múltipols, respectivamente, de unidades u e v pré-estabelecidas. Esta hipótese da existência de unidade comum para medir segmentos está ligada à questão da comensurabilidade de segmentos de grande profundidade e importância para a geometria e que vai culminar com a crise da escola pitagórica.

Nessa demonstração através das Figuras 2.1.a e 2.1.b, temos que, as medidas de unidades **u** e **v** no reticulado da Figura 1.2.b que realizou a interpretação da Figura 1.2.a, foram utilizados para demonstrar a proporcionalidade dos segmentos das retas VA e VE onde foram utilizados dois feixes de retas paralelas definindo um quadrilátero, portanto ficou perceptível a demonstração do teorema da proporcionalidade. Nesta demonstração tem uma grande falha em torno da sugestão dos segmentos, pois ela só teria êxito no caso em quê os segmentos fossem congruentes[4], mas se levar em conta que o Teorema de Thales também utiliza segmentos não congruentes, a demonstração não terá precisão, por isso anos mais tarde a escola pitagórica veio a demonstrar o Teorema de Thales, trabalhando com segmentos não congruentes.

2.2 DEMONSTRAÇÃO NA ÉPOCA DA ESCOLA PITAGÓRICA

Essa demonstração realizada no tempo dos pitagóricos é encontrada até hoje nos principais livros didáticos, tanto do ensino fundamental como médio. Os autores como

[4] Segmentos de mesmas medidas.

Luis Roberto Dante, como Giovanni Junior e como Antonio machado abordam o Teorema da Thales com essa demonstração. Autores de livros didáticos na área da geometria elementar como Osvaldo Doce, como Gelson Iezzi e como Elon Lages também trabalham com esse feito. Se notar que tais demonstrações realizadas na época de Pitágoras e trabalhadas até hoje, não abordam o problema dos incomensuráveis.

A demonstração é a seguinte: considere as retas **a**, **b** e **c** paralelas entre se formando um feixe de retas paralelas, sendo interceptadas por duas retas transversais **r** e **r’**, gerando os pontos A, B, C, A’, B’, C’, conforme a Figura 2.2.1.

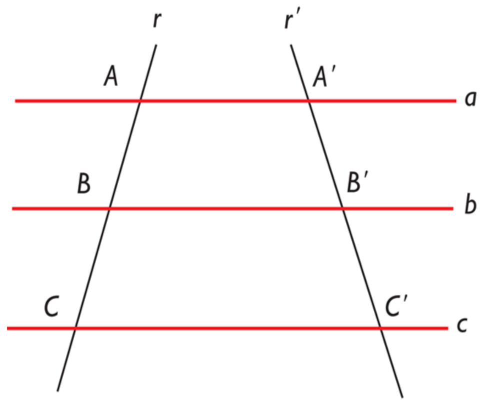


Figura 2.2.1. a//b//c cortadas pelas transversais r e r’

Seja x um segmento que cabe p vezes em AB e q vezes em BC, onde p e q são números inteiros. Temos então: AB = p.x e BC = q.x. Marcando os pontos de divisão nos segmentos AB e BC e conduzindo por eles outras retas paralelas ao feixe, determinaremos p segmentos x’ em A’B’ e q segmentos x’ em B’C’. Estabelecendo a razão $\frac{AB}{BC}$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p.x}{q.x} \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}. \tag{2}$$

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p.x}{q.x} \rightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

Logo, comparando as igualdades e Estabelecendo a razão $\frac{A'B'}{B'C'}$, temos: (2) e (3), vem:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}\,, \tag{4}$$

E assim o teorema ficou demonstrado para os pitágoricos e muito usado até hoje. O grande problema desse feito foi o grande desafio em solucionar a razão de dois números inteiros. Comparar duas grandezas para as quais não havia uma razão entre dois inteiros que pudesse representá-las, ou seja, duas grandezas incomensuráveis, quando só se dispunha do conhecimento dos números inteiros (positivos). O problema precisava ser resolvido, caso contrário a matemática não avançaria, e não apenas isso, tudo o que já se tinha feito em termos de grandezas proporcionais teria sido apagado pelos problemas das grandezas incomensuráveis. Século depois a teoria de Eudoxo, volta a ser abordada no livro *Os Elementos de Euclides* solucionaria esse problema.

2.3 DEMONSTRAÇÃO DE EUDOXO (TEORIA DA PROPORÇÃO) ABORDADA NO LIVRO V DE OS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Agora se mostra como utilizar a definição de proporção de Eudoxo para demonstrar o teorema de Thales, onde os segmentos envolvidos sejam comensuráveis ou incomensuráveis.

Para provar o Teorema de Thales utilizando a teoria das proporções devemos considerar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ (comensuráveis ou não) em que, $\rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ é válida se as três condições abaixo, para todo m e n naturais qualquer forem satisfeitas.

$$\text{Se } n\overline{AB} < m\overline{BC} \ \rightarrow n\overline{A'B'} < m\overline{B'C'}. \tag{5}$$

$$\text{Se } n\overline{AB} = m\overline{BC} \ \rightarrow n\overline{A'B'} = m\overline{B'C'}. \tag{6}$$

$$\text{Se } n\overline{AB} > m\overline{BC} \ \rightarrow n\overline{A'B'} > m\overline{B'C'}. \tag{7}$$

Teorema: Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais.

.

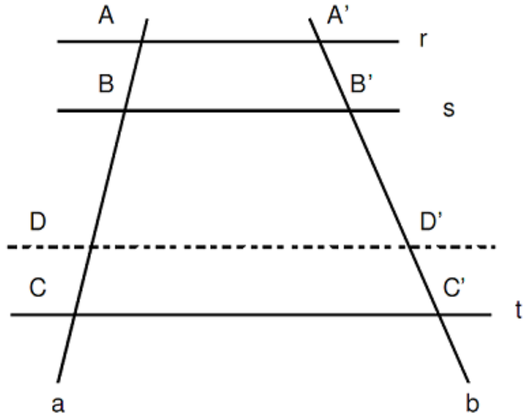


Figura 2.3. Um feixe de retas paralelas cortadas pelas retas transversais a e b

Demonstração: Assim, tomaremos m e n dois números naturais quaisquer, iremos dividir o segmento $\overline{AB}$ em **m** partes iguais cada uma determinando um segmento U, então teremos $\overline{AB}$ = mU e traçando-se paralelas dividiremos $\overline{A'B'}$ em **m** partes iguais de um certo U', de modo que $\overline{A'B'}$ = mU'. Na reta **a**, partindo de B para C, marcaremos **n** segmentos U ($\overline{BC}$ = nU'). Do mesmo modo na reta **b**, partindo de B' para C', marcaremos n segmentos U'($\overline{B'C'}$= nU'). Sendo D a ultima extremidade do último segmento contido em $\overline{BC}$ podemos ter três casos possíveis:

1ºcaso: D está entre B e C (provar $n\overline{AB} < m\overline{BC} \rightarrow n\overline{A'B'} < m\overline{B'C'}$.);

2°caso: D coincide com C ($n\overline{AB} = m\overline{BC} \rightarrow n\overline{A'B'} = m\overline{B'C'}$.);

3°caso: D está além de C ($n\overline{AB} > m\overline{BC} \rightarrow n\overline{A'B'} > m\overline{B'C'}$.).

Analisando o **1ºcaso** em que D está entre B e C

De $\overline{AB}$ = mU temos que n$\overline{AB}$ = nmU e de $\overline{BD}$= nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo, n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

Como $\overline{BD} < \overline{BC}$ então n $\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$ < m$\overline{BC}$. Portanto n$\overline{AB}$ < m$\overline{BC}$.

Por outro lado, de $\overline{A'B'}$= mU' temos que n$\overline{A'B'}$ = nmU' e de$\overline{B'D'}$= nU' temos que m$\overline{B'D'}$ = mnU". Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$

Como$\overline{B'D'} < \overline{B'C'}$então n$\overline{A'B'}$= m'$\overline{B'D'}$ < m$\overline{B'C'}$. Portanto n $A'B'$< m$\overline{B'C'}$

Concluímos que n$\overline{AB}$< m$\overline{BC}$ $\rightarrow$ n$\overline{A'B'}$< m$\overline{B'C'}$.

Analisando o **2º caso** em que D coincide com C

De $\overline{AB}$ = mU temos que n$\overline{AB}$ = nmU e de $\overline{BD}$= nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo, n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

De $\overline{A'B'}$ = mU' vem que n$\overline{A'B'}$ = nmU' e de $\overline{B'C'}$= nU' vem que m$\overline{B'C'}$ = mnU'. Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$

Concluímos que n$\overline{AB}$= m$\overline{BC}$ $\rightarrow$ n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'C'}$.

Analisando o **3ºcaso** em que D está além de C.

De $\overline{AB}$ = mU temos que n $\overline{AB}$= nmU e de BD = nU temos que m$\overline{BD}$ = mnU. Logo n$\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$.

Como $\overline{BD} > \overline{BC}$ então n $\overline{AB}$ = m$\overline{BD}$ > mBC. Logo n $\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$.

De $\overline{A'B'}$ = mU' temos que n $\overline{A'B'}$ = nmU' e de $\overline{B'D'}$ = nU' então m$\overline{B'D'}$= mnU'. Logo n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$.

Como $\overline{B'D'}$> $\overline{B'C'}$então n$\overline{A'B'}$ = m$\overline{B'D'}$ > m$\overline{B'C'}$. Logo n $\overline{A'B'}$> m$\overline{B'C'}$.

Concluímos que n$\overline{AB}$ > m$\overline{BC}$ $\rightarrow$ n$\overline{A'B'}$> m$\overline{B'C'}$.

Portanto, as três condições estão satisfeitas, provando que.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Esta demonstração por Eudoxo foi retratada no livro V de Euclides na obra *Os Elementos* e fechou um ciclo de incógnitas que havia em cima do teorema da proporcionalidade, onde a grande questão seria a utilidade de segmentos incomensuráveis, onde na época de Thales e dos Pitágoras não ficou provocado se a demonstração valia para medidas irracionais. Mas ao passar de vários anos a teoria da proporção de Eudoxo acabou com a incógnita que havia no teorema de Thales. No entanto essa demonstração não é utilizada nos livros didáticos que são adotados nas escolas brasileiras por dois motivos, primeiramente ela é de difícil compreensão para o aluno quando trata-se de segmentos incomensuráveis e segundo, é muito difícil trabalhar com medidas irracionais ao ponto de elaborar aplicações

2.4 DEMONSTRAÇÕES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Agora se mostra as demonstrações mais utilizadas nos principais livros didáticos que são adotados hoje nas escolas brasileiras. Ao analisar os seguintes autores Antônio Machado, Gelson Iezzi e Roberto Dante, vimos que eles adotam as mesmas demonstrações. A primeira demonstração tem por base que, os segmentos determinados pelo cruzamento das retas transversais com o feixe de retas paralelas, sejam congruentes. Na segunda, a mais utilizada nos livros didáticos, chamada de demonstração clássica, os segmentos determinados através das interseções das retas transversais e paralelas não são congruentes, mas têm como medidas números racionais.

Primeira demonstração: Sejam os segmentos determinados com o cruzamento das retas transversais com as retas paralelas congruentes. Como na Figura 2.4.1

Observe a figura abaixo, onde **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas, **r** e **s** são duas transversais e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, ou seja, a razão.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1. \qquad (1)$$

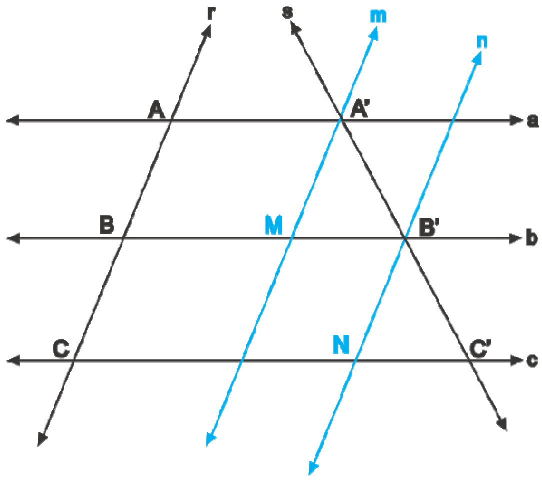


Figura 2.4.1. As retas r e s cortadas pelas retas paralelas a,b e c

Vamos provar que a razão $\frac{A'B'}{B'C'}$ também vale 1 e, assim, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. Para isso traçamos mais duas transversais, ambas paralelas a **r, m** passando por **A’** e **n** passando por **B’**. Formamos assim dois paralelogramos: ABMA’ e BCNB’. Como todo paralelogramo tem os lados opostos congruentes, $\overline{A'M} \cong \overline{AB}$ e $\overline{B'N} \cong \overline{BC}$ e sendo

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$, podemos afirmar que $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$.

Consideremos agora Δ A’MB’ e Δ B’NC’. Usando o caso ALA, podemos garantir que eles são congruentes, pois $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$, MÂ’B’ $\cong$ $N'\hat{B}C'$ (ângulos correspondentes com **m** // **n** e **s** transversal) e $A'\hat{M}B'$ $\cong$ $B'\hat{N}C'$ (ângulos correspondentes formados por paralelas: **m** // **n** e **b** // **c**).

Se Δ A’MB’ $\cong$ Δ B’NC’ , então A’B’ $\cong$ B’C’, ou seja, a razão

$$\frac{A'B'}{B'C'} = 1 \ . \qquad \text{(II)}$$

De I e II chegamos ao que queríamos provar: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

A primeira demonstração deixou bem claro que a proporcionalidade de segmentos entre as retas transversais **r** e **s.** Onde se foi trabalho com segmentos congruentes e comensuráveis. Vimos que essa demonstração utilizou-se de proposições tipo, semelhança de triângulos e ângulos correspondentes para ter êxito na demonstração.

Segunda demonstração: Os segmentos determinados no cruzamento das retas transversais com as retas paralelas não são congruentes, mas têm como medidas números racionais, conforme a Figura 2.5.1

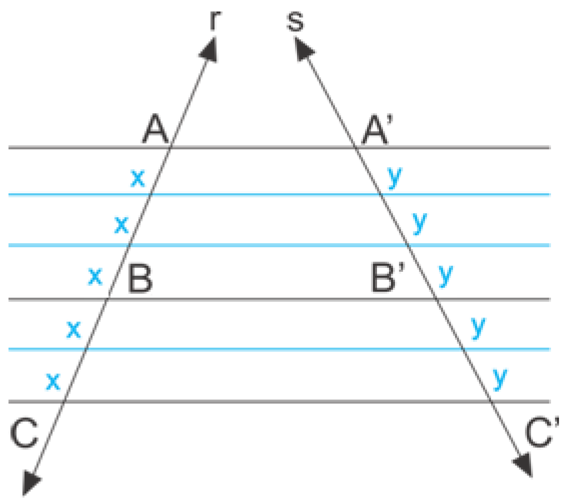


Figura 2.4.2. As retas r e s são cortadas por retas paralelas

Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ têm medidas diferentes, podemos dividir $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em um número inteiro de partes iguais.

No caso ao lado, $\overline{AB}$ em p partes (p = 3) e $\overline{BC}$ em q partes (q = 2), todas de medida x.

Pelo que foi visto na primeira demonstração, traçando as paralelas, cada segmento de medida x em r corresponde a um segmento de y em s, de modo que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p.x}{q.x} = \frac{p}{q} \text{ e } \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p.y}{q.y} = \frac{p}{q}$$

Comparando as igualdades, chega-se, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Observações: A demonstração feita pode ser estendida para feixes para feixes com mais de três retas paralelas. Também já foi demonstrado e provado que a proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ vale também para quando as medidas AB, BC, A'B', B'C' são dadas por números irracionais.

Essa demonstração é a mais utilizada nos principais livros didáticos adotados nas escolas brasileiras, primeiramente ela é mais fácil de o aluno observar a proporção de segmentos e o mais importante é que ela serve para qualquer tipo de segmento, comensurável ou incomensurável.

3 ENSINO DO TEOREMA DE THALES

Durante todo o ensino fundamental a geometria é abordada e trabalhada em etapas onde na maioria das vezes o aluno em si fica restrito sobre as verdadeiras aplicações da geometria plana. Sem a introdução geométrica o aluno fica focado basicamente no ensino geométrico, na grande maioria, os professores não dão importância ao ensino e aplicações da geometria. A falta de professores especializados no ensino de geometria também é um fato que contribui com o mau ensino de geometria.

Alguns assuntos da geometria, como o estudo de áreas de figuras planas é bastante perceptível as aplicações no cotidiano. As figuras planas fazem com que os alunos se familiarizem logo com o conteúdo de áreas, pois elas já vêem na mente do aluno desde a sua infância. Isso acaba facilitando nas aplicações em sala de aula e acarreta num melhor aproveitamento. Outro assunto que também gera bastantes aplicações em torno do cotidiano do aluno é o conteúdo onde envolve semelhança de figuras planas onde o aluno se familiariza logo com o meio em que vive.

O Teorema de Thales é um estudo focado na proporcionalidade de segmentos, onde se trabalha com a relação de um feixe de retas paralelas interceptado por duas retas transversais gerando a proporção de medidas. A didática hoje da sala de aula e dos livros didáticos, abordam o Teorema de Thales da seguinte forma. Primeiramente quando o conteúdo é abordado, o aluno é levado a compreender conceitos de razão de segmentos[5] e segmentos proporcionais, depois se relembra noções de paralelismo, onde fará entender o feixe de retas paralelas, de retas concorrentes e proporção (onde é utilizada a regra de três). Onde o objetivo é mostrar o Teorema de Thales ocasionado pela proporcionalidade dos segmentos das retas transversais, que são cortadas por um feixe de retas paralelas. Conseqüentemente é mostrada a demonstração clássica do Teorema de Thales, onde foi retratada na Figura 2.4.2 no tópico 2.4, assim para evidenciar ao aluno como se chegou a proporcionalidade das retas transversais. Para fechar a parte do ensino do Teorema de Thales, mostram-se as aplicações geométricas, onde o aluno é levado a exercitar o conteúdo abordado, (DANTE, 2005.p.120)

3.1 METODOLOGIA DO ENSINO

Na sala de aula, antes de o aluno ser levado a compreender a demonstração clássica, que foi visto na Figura 2.4.2 no tópico 2.4 ele vai ser levado a entender cada integrante do teorema de Thales. Primeiramente trabalhamos com razão de segmentos e segmentos proporcionais, com objetivo de mostrar ao aluno a divisão de segmentos e a proporção. Onde tomados quatro segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, quando formam a proporção

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}.$$

É um feixe de retas paralelas, onde temos duas ou mais retas de um mesmo plano que formam um feixe de retas paralelas quando, tomadas duas a duas, são sempre

[5] A razão entre dois segmentos é razão de suas medidas, tomadas na mesma unidade. Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a razão entre eles é indicada por $\frac{AB}{CD}$.

paralelas. Observando a Figura 3.1.1, temos uma representação de um feixe de retas paralelas

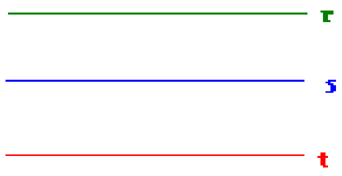


Figura 3.1.1. As retas r, s e t são paralelas

Ao analisar a Figura 3.1.1 temos r//s, r//t e s//t, fazendo a relação r//s//t. Dessa forma veremos a seguir uma forma de se observar uma aplicação do feixe de paralelas no cotidiano do aluno. Neste caso é fácil mostrar ao aluno uma aplicação, pois fica perceptível o aluno debater com o professor a análise das retas paralelas. A Figura 3.1.1 mostra exemplos de um feixe de retas paralelas.

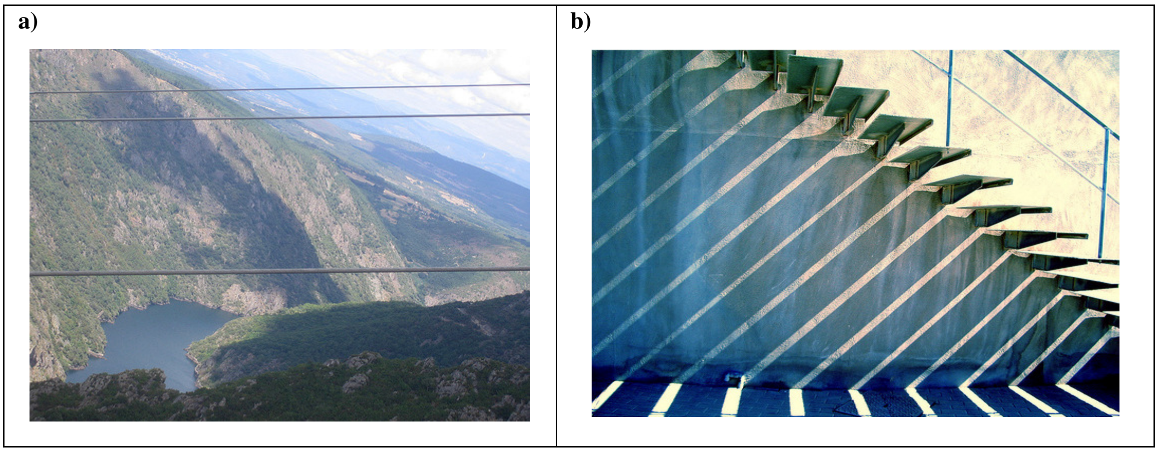


Figura 3.1.2. a) Fios de eletricidade, b) Escadaria.

As duas figuras mostram a clareza de uma aplicação de um feixe de retas paralelas, onde temos na Figura 3.1.2.a uma região montanhosa rodeadas de fios de alta tensão paralelos entre si formando um feixe. Na Figura 3.1.2.b temos uma escada onde os degraus paralelos entre si formam um feixe de retas paralelas. O segundo passo é mostrar a relação das retas transversais com o feixe de retas paralelas, observamos a Figura 3.1.3

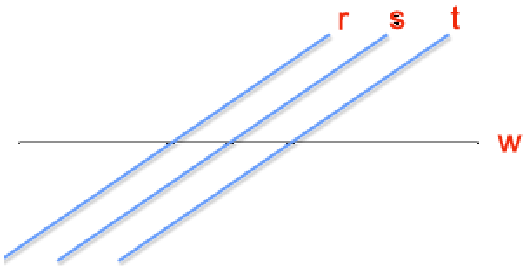


Figura 3.1.3 A reta w é transversal as retas paralelas r, s, e t

Na Figura 3.1.4, mostram-se alguns tipos de representações envolvendo a relação do feixe de retas paralelas com uma transversal. Tendo em vista que ao abordar a representação, o aluno consegue uma melhor compreensão.

Figura 3.1.4. Uma cerca de madeira com uma ripas verticais paralelas interceptam por uma barra horizontal

Na Figuras acima, é preciso trazer para sala de aula a noção das relações existentes entre um feixe de retas paralelas com uma transversal, para que possa mostrar o aluno o que está tentando propor no Teorema de Thales. Portanto nos dois primeiros passos ficou observado como é a abordagem do ensino em sala de aula, de um feixe de retas paralelas e da à relação com as retas transversais.

Após alguns exemplos, a relação do feixe de retas paralelas com as retas transversais, vem o terceiro passo que conclui a compreensão do teorema de Thales, que é a proporção das medidas dos segmentos correspondentes as retas transversais. A proporção é um tema basicamente derivado da fração e multiplicação, justamente nesses dois aspectos, em que o teorema de Thales se posiciona, onde ao trabalhar a relação das retas transversais com o feixe de retas paralelas ele determina duas frações ocasionadas pelos segmentos das retas transversais e logo após relacionando as frações na igualdade vem à multiplicação de segmentos inversos, são nesses casos onde grande parte do alunado não sabe desenvolver e compreender a proporcionalidade nos segmentos das retas transversais. Isso é ocasionado pelo péssimo aprendizado que os alunos obtiveram, sobre o ensino de proporção. Na figura 3.1.5 mostra-se a relação dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sobre a reta **r** com os segmentos $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}$ sobre a reta **r'**.

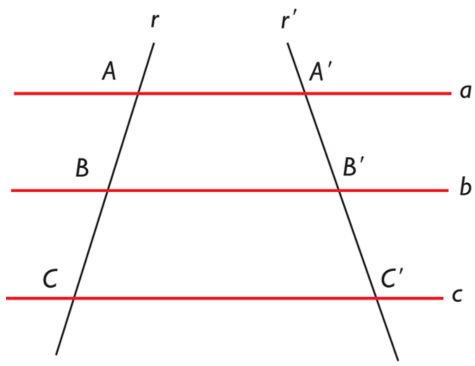


Figura 3.1.5. As retas a, b e c, são paralelas cortadas pelas transversais r e r'

Conforme a primeira demonstrada no item 2.4, tem-se a proposição seguinte

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

em que, AB x B'C' = BC x A'B'.

Ao analisar a Figura 3.1.1 vimos que a proporcionalidade de segmentos é um assunto derivado do conteúdo de proporção, pois retrata a fração e multiplicação. É nesse ponto que o aluno não entende a relação dos segmentos na fração e depois na multiplicação. Portanto Antes de abordar o terceiro passo do Teorema de Thales, que é a proporção de medidas dos seguimentos, deve-se fazer um pequeno levantamento das dificuldades de proporção que os alunos se deparam antes de entrar no conteúdo de proporcionalidade de segmentos.

Desde primeiros anos escolares, nas séries primárias os alunos conseguem resolver problemas do tipo; se duas laranjas custam 1,00 real, qual será o valor de quatro laranjas? Para resolver o problema utilizam estratégias variadas, como os desenhos, adição sucessiva e exemplos do dia-a-dia e não costumam encontrar obstáculos. O desenho é uma forma de representar o raciocínio, o professor pode desenhar casas e dizer que em cada uma moram três coelhos que vão se encontrar num restaurante, depois pede para a turma abastecer o restaurante com uma bola de comida para cada coelho, a base do raciocínio multiplicativo é a correspondência de um para muitos. Nesse caso observamos que, para cada casa são necessárias três porções de comida. Essa relação, que se mantém proporcional não importa qual for o número de casas, é facilmente compreendida, mas precisa ser explicitada, sobre a multiplicação como a adição de parcelas iguais

Ao analisar um exemplo de constantes, temos o seguinte exemplo: Um colecionador produziu um folheto para divulgar a venda de seus discos antigos. Observe a tabela abaixo e responda se existe uma razão de proporcionalidade entre a quantidade de discos e o preço cobrado. Se sim, qual é ela?

Quantidades de discos	1	2	3	4
Preço- R$	5	9	13	17

Olhando a tabela de preços, o aluno não enxerga que depois de uma unidade vendida os valores ficam diretamente proporcionais, sendo assim fazendo relação com a primeira unidade ele erra, pois só acontece a proporção depois da segunda unidade vendida. Portanto aluno é levado a erros por falta de compreensão.

Os alunos demonstram dificuldades de compreender e aplicar o conceito de proporção. O Teorema de Thales é uma conseqüência de proporção. Ao se debater com a demonstração do teorema e sua aplicação geométrica, o aluno sequer perceber que a

Teorema de Thales é um aprofundamento do conteúdo de proporção e na cabeça dele, não vem em mente à relação de inversamente proporcionais, devido ao fraco conhecimento de proporção vindo de séries anteriores.

Mostram-se agora exemplos geométricos do teorema de Thales, onde é utilizado a relação de um feixe de retas paralelas com duas retas transversais, que geram segmentos proporcionais.

Exemplo 01: Na Figura 3.1.6 **r//s//t** e **m** e **n** são transversais, vejamos se ocorre a proporcionalidade de segmentos.

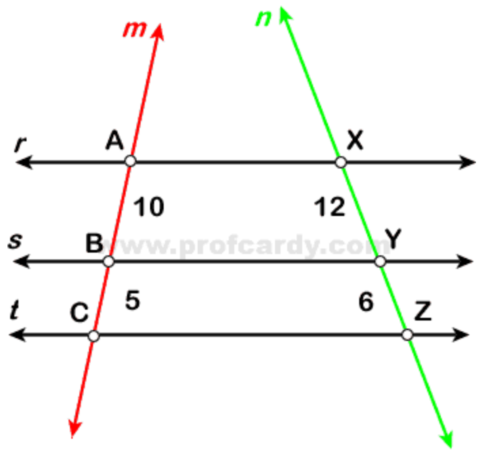


Figura 3.1.6, r//s//t, onde m e n são transversais.

Solução: Na Figura 3.1.6 os segmentos das retas **m** e **n** estão associados da forma $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$, assim fica $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$, pela igualdade de frações. Por serem diretamente proporcionais temos 10x6 = 12x5, logo 60 = 60. Concluímos que ocorreu de fato a proporcionalidade pelo teorema de Thales.

Exemplo 02: Na Figura 3.1.7 a//b//c e temos duas retas transversais. Determine o valor de **x**.

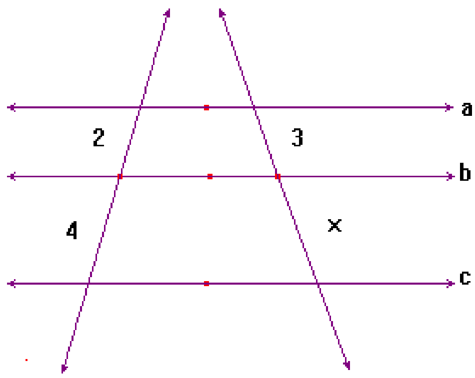


Figura 3.1.7, a//b//c.

Solução: É de conhecimento que os segmentos das retas transversais estarão organizados da seguinte forma, $\frac{2}{4} = \frac{3}{x}$, assim pela igualdade de frações temos 2.x = 4.3 continuando o raciocínio temos 2x = 12, logo x = $\frac{12}{2}$, portanto x = 6.

Exemplo 03: Na figura 3.1.8 **a//b//c**, onde **r** e **s** são transversais. Calcule **x** e depois determine as medidas dos segmentos **AB** e **BC**.

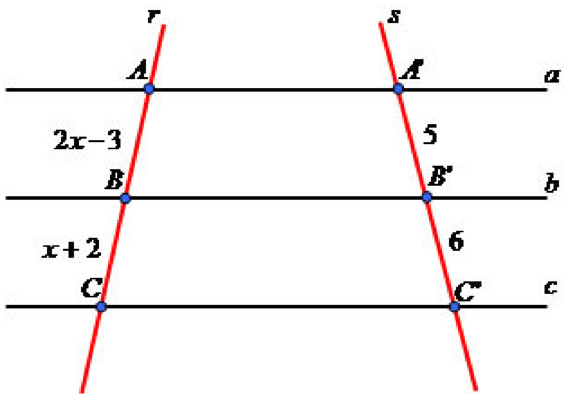


Figura 3.1.8, a//b//c, onde r e s são transversais.

Solução: Na Figura 3.1.8, a relação das retas r e s tem $\frac{2x-3}{x+2}=\frac{5}{6}$, realizando o raciocínio teremos;

(2x-3).6=(x+2).5 → 12x-18 = 5x+10 → 12x-5x = 10+18 → 7x = 28 → x = $\frac{28}{7}$ → **x = 4.**

Substituindo o valor de x nos segmentos **AB** e **BC** obtemos **AB= 5** e **BC= 6**

Exemplo 04: Na Figura 3.1.9 sabe-se que $\overline{DE} // \overline{BC}$ e são paralelas a reta que contém o ponto A, portanto determine **x**, sabendo que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são retas transversais.

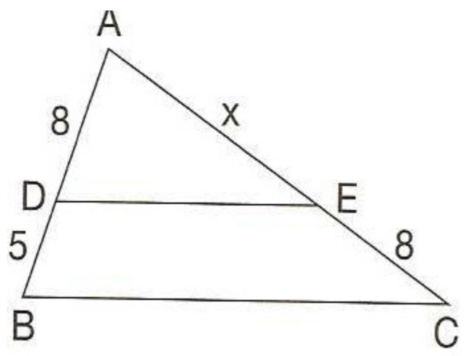


Figura 3.1.9. As retas DE e BC são paralelas e AB, AC retas transversais.

Solução: Na Figura 3.1.9. O triângulo ABC é uma representação do teorema de Thales. De modo que;

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}, \text{ logo } \frac{8}{5}=\frac{x}{8}, \text{ Portanto} \rightarrow 64 = 5x \rightarrow x = \frac{64}{5} \rightarrow \mathbf{x = 12{,}8}$$

Exemplo 05: Na Figura abaixo a//b//c, onde r e s são retas transversais. Determine **x.**

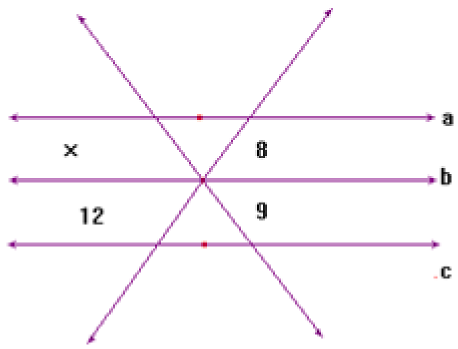


Figura 3.1.10. As retas a,b e c são paralelas.

Solução: Analisando a Figura os segmentos x e 9, estão sobre a reta transversal **r** e 8 e 12 estão sobre a reta transversal **s**, assim aplicando o teorema

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{12} \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = \frac{72}{12} \rightarrow \mathbf{x = 6}$$

Os livros didáticos que foram analisados neste trabalho (Gelson Iezzi, Antonio machado, Osvaldo Dolce e Luis Roberto Dante), seguem praticamente a mesma linha didática onde são utilizadas, poucas ilustrações envolvendo feixe de retas paralelas e retas transversais, na grande maioria todos abordam bastantes exercícios na parte geométrica e as aplicações em cima de triângulos, em alguns livros mencionados, a casos com poucos exemplos na parte em que envolve aplicação do cotidiano do aluno.

O livro *Tudo é matemática*, escrito por Luis Roberto Dante, grande escritor matemático de renome nacional, por muitos anos é um dos livros didáticos mais adotados nas escolas brasileiras. Sobre o conteúdo de Teorema de Thales abordado na parte de geometria no 9º ano do ensino fundamental, primeiramente o autor traz um contexto histórico acerca da proporcionalidade, onde ele relata como foi descoberta a proporcionalidade de medidas e suas aplicações. Depois ele descreve o Teorema de Thales começando pela relação entre o feixe de retas paralelas e as retas transversais. Onde estabelece a definição do feixe de retas paralelas, logo após mostra as retas transversais interceptando o feixe de retas paralelas, assim a relação das retas geram segmentos. Com a relação, o autor sugere que uma pessoa indicada faça uma medição com uma régua dos segmentos gerados, e depois realize a proporção pra ver se vai ocasionar a proporcionalidade de segmentos. Depois da experiência realizada pela pessoa indicada, o autor define o Teorema de Thales (DANTE, 2005, p.120)

Ao abordar o Teorema de Thales e as partes que o integra, o autor, relata duas demonstrações, uma envolvendo segmentos transversais congruentes como mostra a Figura 2.4.1 e outra mostrando segmentos não congruentes como a Figura 2.4.2, porém na segunda demonstração o autor relata algumas observações sobre a questão dos segmentos serem incomensuráveis e a extensão do feixe de retas paralelas. O assunto é concluído, fazendo exemplificações em torno do geométrico e muitos exercícios na parte geométrica. Onde se trabalha com exemplos nas retas e aplicações em cima dos triângulos. Mas não é mostrado quase nenhum exemplo acerca de aplicações do cotidiano.

Analisando o autor Dante, é notória a falta de aplicações sobre o Teorema de Thales na parte em que envolve uma interpretação geométrica. É mostrado que o autor trabalha com muitos exemplos voltados ao geométrico e trabalha com poucas ilustrações acerca dos elementos utilizados na demonstração do Teorema de Thales. Na parte que envolve o contexto histórico da proporcionalidade, faltou o autor mostrar as diferenças de proporção. Praticamente a didática desse livro é voltada ao ensino geométrico, sem dar menção ao ensino de aplicações do cotidiano, onde teria o objetivo de fazer que o aluno interpretasse o Teorema de Thales.

O livro *Matemática e Realidade*, escrito por Osvaldo doce, Gelson Iezzi e Antonio machado. É o principal livro didático adotado hoje nas escolas brasileiras. O livro aborda o Teorema de Thales primeiramente sobre a razão de segmentos e os segmentos proporcionais, depois se explica o feixe de retas paralelas acerca de uma ilustração e também a transversal do feixe com outra ilustração. Ele utiliza a demonstração clássica para explicar a proporcionalidade de segmentos Figura 2.4.2, durante a demonstração, os autores exemplificam melhor a proporcionalidade através de várias proporções diferentes, onde faz análise de cada razão de segmento, assim o aluno vai enxergando cada detalhe proposto. Durante a abordagem dos exercícios, se vê praticamente a matemática pura, onde é voltada em cima de muitos exemplos geométrico, trabalhados com as retas, e através de aplicações com triângulos. É proposta uma atividade extra, onde se trabalha com a questão onde o aluno é levado a construir o Teorema de Thales com ajuda de uma régua,onde ele constrói dois Teoremas, um com segmentos congruentes e outro não congruentes.Pra finalizar são poucos os exemplos acerca de aplicações voltadas para o ambiente do aluno, (GELSON IEZZI, 2005.p.106).

O livro *matemática e realidade* nos mostram que o livro trabalho muito com exemplos geométricos, ressaltando a matemática pura. Traz um contexto histórico acerca da história da proporcionalidade de medidas, onde se teve menções no tempo dos egípcios por Thales de Mileto e são utilizadas poucas ilustrações acerca dos elementos que compõe o Teorema de Thales. O principal é a falta de aplicações acerca do cotidiano do aluno. Assim não acontece possa a introdução geométrica do conteúdo, praticamente no livro só foi trabalhado com um exemplo de aplicação do Teorema de Thales.

Foi possível analisar que os principais livros didáticos, dos maiores nomes na área da educação, estão precisando de uma nova didática acerca de ilustrações e exercícios acerca de aplicações envolvendo o meio em que vive o aluno, sendo preciso fazer introduções geométricas, para conseguir mostrar o aluno as verdadeiras aplicações do Teorema de Thales de modo a dar mais importância ao conteúdo.

3.3 APLICAÇÕES

As pesquisas feitas em torno do Teorema de Thales sugerem uma nova didática ao ensino do Teorema de Thales, voltada para aplicações. Essa nova didática produz uma grande melhora no ensino, pois o aluno ao se deparar com as aplicações, ele usa o Teorema de Thales para realizar a introdução geométrica e assim perceber que o Teorema de Thales é utilizado em várias áreas diferentes.

Essa nova didática que veio a ser abordado nesse trabalho foi testada e aplicada na escola onde sou Professor, (COLÉGIO IMACULADA CONCEIÇÃO- CAMPINA GRANDE- PB), onde o colégio é de rede particular. Sou responsável pelas séries equivalentes ao 9° ano do ensino fundamental. Durante os testes, primeiramente aplicamos o exercício retratando o estudo ao geométrico e depois em outra aula se propôs a realização de exemplos envolvendo aplicação do cotidiano, onde se tem o objetivo que aluno possa fazer uma interpretação do conteúdo do Teorema de Thales.

No que segue, apresentam-se alguns exemplos de aplicações do cotidiano.

Exemplo-01. Na Figura à direita nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm 80m e 90m de comprimento. Na segunda avenida, um dos quarteirões mede 60m. Qual o comprimento do outro quarteirão?

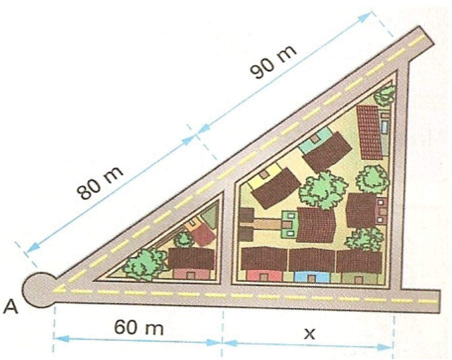


Figura 3.2.1.a

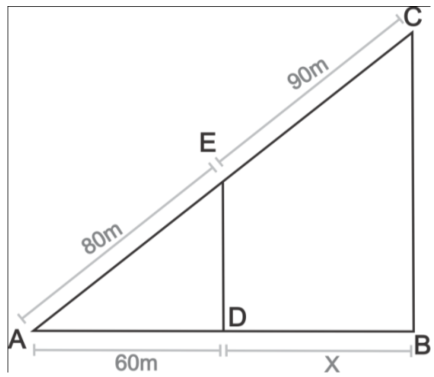


Figura 3.2.1.b

Solução: Observando a Figura 3.2.1.a, o aluno é levado a interpretar a figura, onde ele irá aplicar os conhecimentos obtidos do Teorema de Thales. Vejamos o seguinte, temos na ilustração dois quarteirões cortados por ruas e avenidas, compostos de quatro medidas, onde temos uma variável que será calculada. Ao fazer a análise o aluno percebe que as ruas que interceptam os quarteirões são paralelas e que as avenidas que passam do lado são transversais. Assim o aluno é levado a fazer a introdução geométrica e montando o Teorema de Thales na Figura 3.2.1.b, aplicando o estudo geométrico, temos a proporcionalidade de segmentos na figura 3.2.1.b. Assim o aluno observou que $\overline{DE} // \overline{BC}$ e o ponto A pertence a uma reta que é paralela as duas retas citadas, sendo $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ transversais. Portanto realizando o raciocínio do Teorema de Thales tem-se:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{60}{x} = \frac{80}{90} \rightarrow \text{x. } 80 = 90.60 \rightarrow \text{x} = \frac{90.60}{80} \rightarrow \mathbf{x = 67{,}5}.$$

Exemplo-02. A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que tem frente para Rua **A** e para rua **B**. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Quais são as medidas **x** e **y** indicadas na figura?

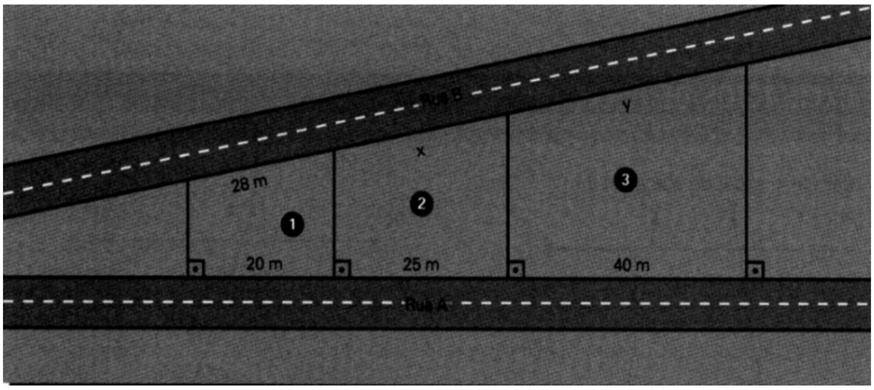


Figura 3.2.2.a, rua A e rua B.

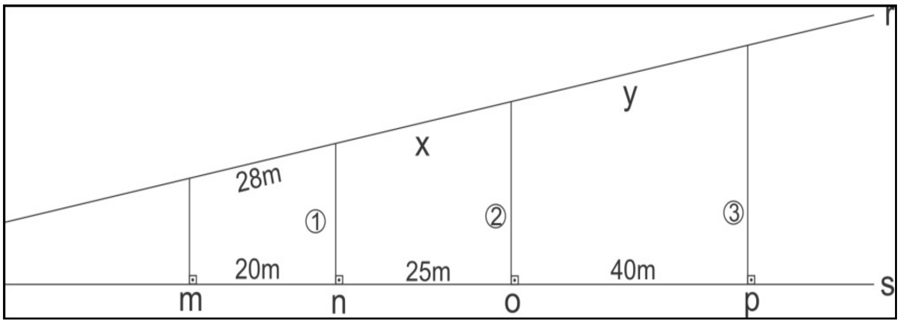


Figura 3.2.2.b, m//n//o//p e r e s transversais.

Solução: Interpretando a Figura 3.2.2.a, observamos que as avenidas **A** e **B** são retas transversais. Entre as ruas temos três lotes de terrenos com determinadas medidas. As linhas que dividem os lotem são perpendiculares, assim temos um feixe de retas paralelas entre si. Analisando a Figura 3.2.2.a, o aluno já sabe que está diante de um Teorema de Thales e faz a aplicação geométrica fornecida na Figura 3.2.2.b, onde as retas **m**, **n**, **o** e **p** são as divisas laterais dos lotes e são paralelas. As retas **r** e **s** são as ruas transversais **A** e **B**. Então resolvendo o exemplo por Teorema de Thales, vamos determinar as medidas **x** e **y.**

Determinando a medida **x,** seguindo raciocínio do Teorema de Thales tem-se;