UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MARIA SIMONE CALIXTO DA SILVA

# ESTUDANDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DE MOSAICOS

CAMPINA GRANDE - PB
Novembro de 2011

**MARIA SIMONE CALIXTO DA SILVA**

# ESTUDANDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DE MOSAICOS

**Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.**

**Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva**

**CAMPINA GRANDE - PB**
**Novembro de 2011**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S381e Silva, Maria Simone Calixto da.
Estudando matemática através de mosaicos [manuscrito] / Maria Simone Calixto da Silva. – 2011.
29 f. : il. color

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, 2011.
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática e Estatística".

1. Matemática - Estudo. 2. Mosaicos. 3. Aprendizagem Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

MARIA SIMONE CALIXTO DA SILVA

**ESTUDANDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DE MOSAICOS**

Aprovada em 29 / 11 /2011

BANCA EXAMINADORA:

Fernando Luiz Tavares da Silva

**Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva**
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Orientador

**Profª. Ms. José Lamartine da Costa Barbosa**
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Examinador

Núbia do Nascimento

**Prof. Esp. Núbia do Nascimento Martins**
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 29 de Novembro de 2011.

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.

Paulo Freire

*Dedico este trabalho a DEUS primeiramente porque sem ele nada disso seria possível, á meus pais (Pedro Calixto da Silva e Maria Jacinto da Silva), aos meus irmãos, a o meu marido Josinaldo, meus filhos e a todos que contribuíram direta ou indiretamente na minha trajetória e que ficarão para sempre escritos no livro da minha vida, meu muito obrigado.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS porque Ele é o refúgio e a fortaleza presente em todos os momentos, meu alicerce e a base do meu ser.

A meus pais, responsáveis pela minha educação, por sua dedicação e pelo incondicional apoio afim de que pudesse alcançar meus objetivos.

Meus familiares: irmãos, primos, cunhados, sobrinhos, amigos entre outros que direta ou indiretamente contribuíram no caminho que escolhi para seguir e vencer.

Meu marido que com sua paciência e dedicação cuidou dos meus filhos para que eu pudesse concluir meu curso.

Ao meu orientador Fernando Luiz que me apoiou desde o primeiro momento, apesar das dificuldades, na construção e no desenvolvimento desta monografia. Obrigado por sua paciência.

Aos professores que durante a minha trajetória estudantil contribuíram na minha formação acadêmica.

A todos que torceram e continuam torcendo pelo meu sucesso, meus sinceros agradecimentos e que DEUS os abençoe grandiosamente.

# RESUMO

Estamos na era da revolução tecnológica, do conhecimento e para tanto, se faz essencial estimular a organização, o debate a interação de valores e a aproximação do ambiente escolar com a sociedade em geral, gerando uma troca de conhecimentos enriquecedores. No intuito de contribuir com essa nova fase do conhecimento, esse trabalho vem realçar a importância da utilização dos *Mosaicos* na formação do pensamento matemático do aluno, contribuindo na interpretação e assimilação de dados e conteúdos de matemática e ao mesmo tempo, busca trazer em sua essência, a realidade de uma sociedade por muitos esquecida e pouco explorada. O professor é peça importante na aprendizagem do aluno, pois é quem armazena e interage com o mesmo na realização de novos métodos na aplicação dos conteúdos ministrados em sala de aula, ou seja, é quem faz, ou melhor, deve fazer a diferença. Portanto tudo começa com o professor, sendo ele, a base desta obra a ser construída gradativamente pelo receptor “aluno” sujeito geralmente passivo (assimila conteúdos) e o transmissor “professor” sujeito ativo (repassa conteúdos). É fundamental que possam atuar em conjunto, tanto como sujeitos passivos ou ativos, capazes de interagir e modificar a sociedade em geral. Este trabalho, realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica, tem por objetivo um estudo sobre o uso de *mosaicos* assinalando a influência e a importância desse conteúdo na construção do conhecimento matemático, explorando a interpretação e a contextualização do mesmo no meio social.

**Palavras-Chave**: Matemática, Mosaícos, Formação do Pensamento Matemático, Aprendizagem Matemática.

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

Mosaico ou arte musiva, é um embutido de pequenas peças (tesselas) de pedra ou de outros materiais (vidro, mármore, cerâmica ou conchas), formando determinado desenho. O objetivo do mosaico é preencher algum tipo de plano, como por exemplo, os pisos e paredes.

A palavra "mosaico" tem origem na palavra grega **mouseîn**, a mesma que deu origem à palavra música, que significa **próprio das musas**. É uma forma de arte decorativa milenar, que nos remete à época greco-romana, quando teve seu apogeu. Na sua elaboração foram utilizados diversos tipos de materiais que tiveram inúmeras e diferentes aplicações ao longo dos tempos.

A técnica da arte musiva consiste na colocação de tesselas, que são pequenos fragmentos de pedras, como mármore e granito moldados com **tagliolo** e **martellina**, pedras semi-preciosas, pastilhas de vidro, seixos e outros materiais, sobre qualquer superfície. Nos dias de hoje, o mosaico ressurgiu, despertando grande interesse, sendo cada vez mais utilizado, artisticamente, na decoração de ambientes interiores e exteriores.

Em Portugal, destacam-se os mosaicos das ruínas romanas de Conímbriga, datados do século II d.C., além do "mosaico das musas", da villa romana de Torre de Palma (século II - IV d.C.), em Monforte, e os da villa romana de Milreu, no Distrito de Faro, no Algarve - belos exemplares decorativos da época romana.

Também são exemplos de mosaico calçadas, como o calçadão de Copacabana, a disposição dos pisos e azulejos de uma casa, até mesmo algumas gravuras do artista holandês M. C. Escher que tratam do preenchimento do plano. Hoje, entre as principais figuras do mosaico contemporâneo, destacam-se Marcelo de Melo (Brasil), Sonia King (E.U.A.) e Emma Biggs (Reino Unido). Vejamos alguns modelos de Mosaicos nas figuras que seguem.

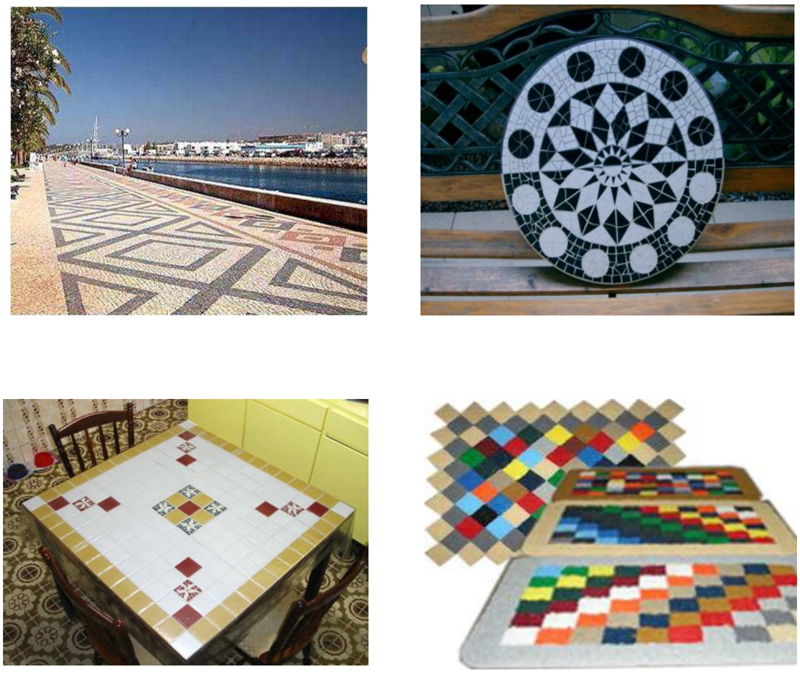

Figura 1: Exemplos de Mosaicos encontrados em locais de fácil acesso.

## 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Educação Matemática também chamada de Didática Matemática (em países europeus) é o estudo das relações de ensino e aprendizagem de Matemática. Está na fronteira entre a Matemática, a Pedagogia e a Psicologia.

Desde o início do século XX professores de matemática se reúnem para pensar o ensino dessa matéria nas escolas. A partir da década de 1950, a Unesco organiza congressos sobre educação matemática. E a partir da década de 1970 surge, inicialmente na França, a didática da matemática enquanto campo para a sistematização dos estudos a cerca do ensino da matemática. Os teóricos envolvidos defendiam que cada área de ensino deveria pensar em sua própria didática, reconhecendo que não poderia haver um campo de estudo único que atendesse as especificidades de ensino de cada campo do conhecimento.

A organização de campos de pesquisa na área dentro das universidades incentivou a criação de organizações de professores de matemática, que atualmente tem grande influência sobre a elaboração das diretrizes curriculares na área em diversos países.

A psicologia aparece como o campo do conhecimento científico que dá instrumentos para compreendermos os processos educativos. Nesse sentido as principais correntes da didática da matemática, abaixo relacionadas, sempre estiveram diretamente ligadas às diferentes tendências da psicologia.

**1. Comportamentalista.**

Esta corrente associou o comportamento humano ao dos outros animais. Possui uma abordagem cartesiana e busca encontrar os elementos básicos do pensamento humano e seu comportamento. Thorndike, primeiro comportamentalista a pensar o ensino da matemática, entende a aprendizagem como uma série de conexões entre situações ou estímulo e resposta e para isso, baseia-se em três leis fundamentais para a aprendizagem, que são:

- Lei do efeito: uma conexão recém estabelecida tem sua força aumentada se acompanhada por uma sensação de satisfação;
- Lei do exercício: quanto mais utilizada uma conexão, mais forte ela se torna;
- Lei da prontidão: parte da idéia de que as conexões podem ou não estar prontas para serem postas em prática. Se uma conexão está pronta, seu uso gera satisfação, se não está, seu uso gera desconforto.

**2. Gestaltista.**

A Gestalt é uma escola da psicologia, iniciada em 1910, que propõe uma abordagem holística do pensamento humano. Baseia-se no pensamento de que a percepção humana não pode ser explicada apenas por estímulos isolados e que se processam de forma individualizada, mas que a ação existe na tentativa de encontrar o equilíbrio do organismo como um todo. A aprendizagem se liga a capacidade de compreender estruturas e não de decorar procedimentos.

### 3. Estruturalistas

Esta corrente aborda a aprendizagem como um processo ativo no qual o aluno infere princípios e regras e os testa. O aluno tem mais instrumentos para lidar com determinados conhecimentos quando entende suas estruturas.

Baseia-se nos estágios do desenvolvimento infantil de Piaget e Bruner, propõe três modos de organização do conhecimento, sendo essas:

- Representação motora: modo de representar acontecimentos passados através de uma resposta motora apropriada.
- Representação icónica: quando os objetos são concebidos na ausência de ação.
- Representação simbólica: consiste na tradução da experiências em termos de linguagem simbólica.

### 4. Construtivista

Baseado principalmente nas idéias de Piaget. Tem como proposta de que a mente é modelada como uma experiência organizativa de modo a lidar com um mundo real que não pode ser conhecido em si.

Envolve dois princípios:

- O conhecimento é ativamente construído pelo sujeito cogniscente e não passivamente recebido do meio.
- É um processo adaptativo que organiza o mundo experiencial de cada um, não descobre um mundo independente, pré-existente, exterior à mente do sujeito.

Acredita que cada ser humano constrói o significado para a linguagem que usa, no caso da matemática, à medida que vai construindo o seu mundo experiencial.

Segundo Libâneo (1991), "o ensino é um meio fundamental do progresso intelectual dos alunos", abrangendo a assimilação de conhecimentos. Citando o que escreve Goldberg (1998), "o ensino resume a instrumentação necessária à transmissão do conhecimento, base do processo de educação".

## 2.2 – UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DA DESCOBERTA E DESENVOLVIMENTO DOS MOSAICOS

A península Ibérica era habitada por dois povos: os iberos e os celtas. No ano 712 foi invadida e dominada pelos mouros vindos do norte da África. A reconquista iniciou-se já em 718, com Pelágio, que fundou o reino das Astúrias. Entretanto os mouros ali permaneceram por vários séculos, tendo chegado próximo à Gália (França). Sua expulsão definitiva da península se deu no século XIV (em Portugal) e no XV (na Espanha), justamente em 1492, ano do descobrimento da América por Colombo.

Nas suas construções, os mouros apresentam vários padrões de simetria, nunca relativos a seres vivos, em razão de preceitos religiosos. O mais famoso legado mouro é o palácio de Alhambra, em Granada, cuja construção foi iniciada no século XIII. Além de ter servido como fortaleza, o palácio apresenta arquitetura e decorações artística de beleza incomparável.

Nesse magnífico palácio, são encontrados em seus painéis decorativos os padrões de simetria possíveis, indicando o amplo conhecimento empírico mouro.

As simetrias relativas às pavimentações planas, intimamente ligadas aos mosaicos e às artes, desempenharão um papel importante no desenvolvimento deste trabalho.

O registro mais antigo data de 3.500 a.C., na cidade de Ur, região da Mesopotâmia, o Estandarte de Ur compõe-se de dois painéis retangulares de 55 cm, feitos de arenito avermelhado e lápis-lazúli. No antigo Egito, existiam preciosos trabalhos feitos em sarcófagos de antigas múmias, bem como, mosaicos que decoravam colunas e paredes de templos.

Entre os gregos, existiam pisos feitos com pedaços de mármore branco ou de cor, embutidos numa massa compacta muito resistente. Um motivo que alcançou certo sucesso na Grécia foi de pombas, conhecidas como "Os Passarinhos de Plínio". Essa arte consiste em construir mosaicos a partir de aves, como podemos observar na figura 2. Em Roma esta arte começou no 1º século a.C. e foi largamente usada em pisos, murais fontes e até painéis transportáveis. Em Pompéia, que foi um viveiro de mosaicistas, desde os poderosos e abastados, até o povo em geral, apreciavam esta arte.

Figura 2: day and night

Figura 3: obra de Escher

Figura 4: mosaico

fonte: http://www.tessellations.org

No período paleo-cristão abre-se para o mosaico uma nova era: a arte bizantina que é o verdadeiro triunfo das artes visuais do cristianismo. Combinando harmonicamente elementos ocidentais e orientais, deu origem a uma arte intelectualizada, onde o sentido de divino, de sobrenatural, manifestava-se através de um original abstracionismo. Nunca o mosaico teve tanto esplendor e foi tão largamente usado no mundo como nesse período. No mundo islamítico a arte do mosaico teve importante aplicação na ornamentação de edifícios e mesquitas. Um outro tipo de mosaico foi o de pequenas tesselas de madeira, usado para decoração de móveis, caixas e outros objetos. Eram também usados pedaços de marfim e madrepérolas. No século XIX cai quase em abandono. Os estetas subdividiram a produção artística em artes maiores (pinturas a óleo, afresco, têmpera e esculturas) e em artes menores (cerâmica, esmalte sobre metal, tapeçaria e o mosaico). No período moderno o mosaico, arte mural por excelência, consegue a metamorfose: parede-cimento-pedra-cor. Com isto ele consegue harmonizar a arquitetura moderna.

## 3 - CONSTRUINDO ALGUNS MOSAICOS

Procuraremos mostrar como a partir de simples peças podem-se obter interessantes mosaicos. Para isso usaremos apenas os três únicos polígonos regulares que pavimentam o plano: os triângulos eqüiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares. A partir de uma peça triangular eqüilátera, com um friso interno, usando-se suas réplicas, obtem-se o mosaico.

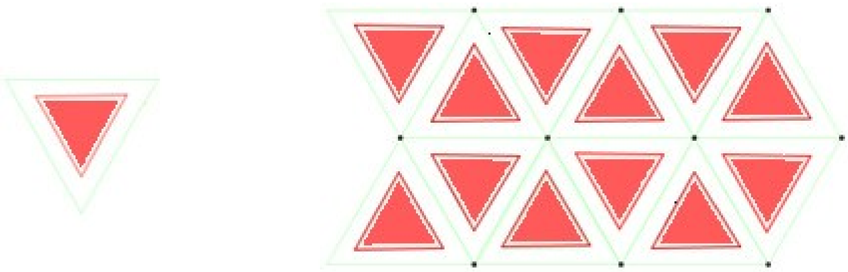

Figura 5 – Mosaico com triângulos eqüiláteros

Considere uma peça quadrada, na qual fazemos um pequeno ornamento losangular. Com suas réplicas podemos obter o padrão do mosaico a seguir.

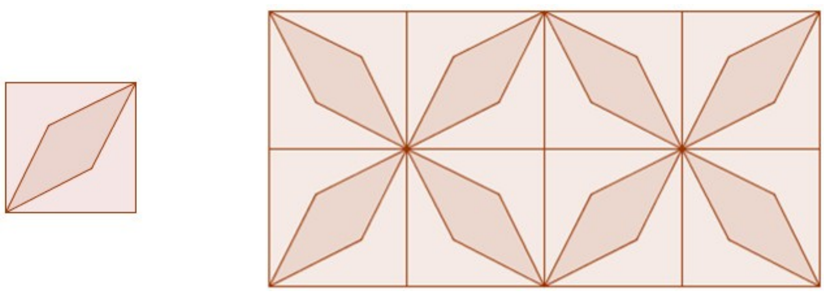

Figura 6 – Mosaico com quadrados

"Fazendo todas as figuras-vértice no padrão regular de quadrados, obtemos uma nova pavimentação de quadrados com padrão regular." (BARBOSA, 1993, p.21).

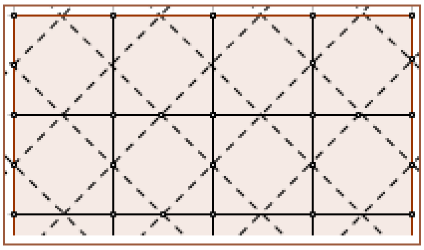

Figura 7 – Mosaico quadrados auto-afin.

### 3.1 - PAVIMENTAÇÃO DO PLANO COM POLÍGONOS REGULARES DE UM TIPO

Pavimentar consiste em cobrir superfícies planas com figuras regulares ou não, de um tipo ou mais, sem falhas entre as figuras e sem sobreposição. Os padrões geométricos obtidos pelas pavimentações são observados na natureza, como por exemplo, no arranjo das escamas de peixes, nas bolhas de sabão, nos arranjos de cristais e nas colméias e que são reproduzidas pelo homem desde os tempos antigos.

Esses padrões geométricos estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, romana, persa, egípcia, grega, islâmica, árabe, chinesa e outras. Aparecem em todos os lugares e tem uma grande variedade de aplicação em Física, Geologia, Engenharia, Computação Gráfica, Artes, Arquitetura e na decoração de objetos, como cerâmicas, forros, tecidos e outros.

Pavimentações com ladrilhos quadrangulares são comuns com terraços, copas, cozinhas e banheiros de nossas casas. Os hexagonais, menos usuais, são encontrados também em algumas pavimentações de ruas e praças e mesmos nos favos onde é armazenado o meu da abelha.

Ao polígono que possui por vértice os pontos médios dos lados que concorrem no mesmo nó chamamos de figura-vértice.

Um padrão de pavimentação é padrão regular se, e só se, as figuras-vértice do padrão são polígonos regulares. Em caso contrário dizemos que o padrão é não regular. Para um mesmo trabalho utilizando pavimentação com hexágonos regulares, verifica-se que qualquer figura vértice é triangulo eqüilátero; portanto o padrão com hexágonos regulares é também padrão regular.

Considerando-se padrões regulares com quadrados, triângulos, eqüiláteros e hexágonos regulares e construindo os padrões duais, obtidos traçando-se as arestas correspondentes a cada dois pontos centrais contínuos, portanto perpendiculares ao lado, teremos:

- ✓ Do padrão (3,3,3,3,3)

Obteremos o padrão dual (6,6,6), conforme a figura 8.

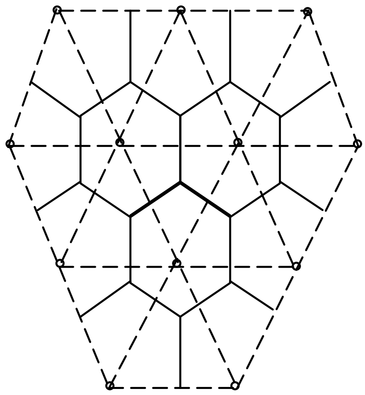

Figura 8: Padrão (6,6,6)

- ✓ Do padrão (6,6,6)

Observando a figura 8 , verificamos que o seu padrão dual é o (3,3,3,3,3,3), de onde descobrimos que esses padrões são duais-recíprocos.

- ✓ Do padrão (4,4,4,4)

Obtemos o padrão dual, que é também (4,4,4,4), Resulta portanto que o padrão (4,4,4,4) é auto-dual. Conforme a figura 9.

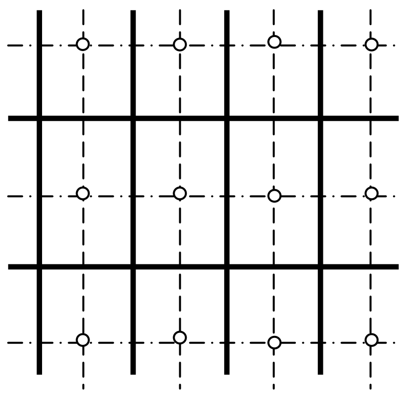

Figura 9: Padrão (4,4,4,4)

## 3.2 - POLÍGONOS REGULARES QUE PAVIMENTAM O PLANO

Colocando polígonos regulares de certo tipo ao redor de um ponto e encostando-os lado a lado, temos duas possibilidades. Seja k o número de polígonos colocados e i a medida do ângulo interno de cada polígono.

• Completamos a volta e os polígonos se ajustam bem; Para isso devemos ter k. i = 360º.

• Não completamos a volta, mas se colocarmos mais um haverá remonte. Se k. i _ 360º e (k + 1). i _ 360º, constatamos a impossibilidade de pavimentação com esse tipo de polígono.

Colocando novos polígonos regulares do mesmo tipo ao redor dos já colocados, e obtendo êxito, concluí-se que a pavimentação é possível para o tipo.

Triângulo: k = 6 e i = 60º, então 6 .60º = 360º

Quadrado: k = 4 e i = 90º, então 4. 90º = 360º

Hexágono: k = 3 e i = 120º, então 3.12º = 360º

Experimentando pavimentar só com Pentágonos regulares:

- ✓ Se seu ângulo interno vale i = 108º e k = 1, temos: 1 . 108º = 108º.

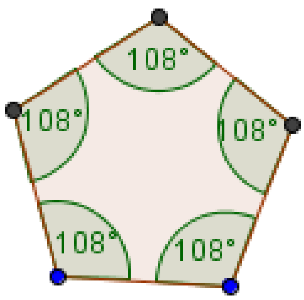


Figura 10 – Pentágono regular

- ✓ Se k = 3, ou seja, três pentágonos regulares ao redor de um ponto. (ocorre lacuna). Fazendo 3. 108º = 324º _ 360º = 36º

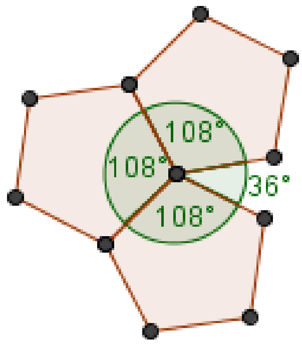


Figura 11 – T rês Pentágonos regulares

✓ Se k = 4, ou seja, quatro pentágonos regulares ao redor de um ponto. (ocorre superposição). Fazemos 4. 108º = 432º _ 360º = 72º

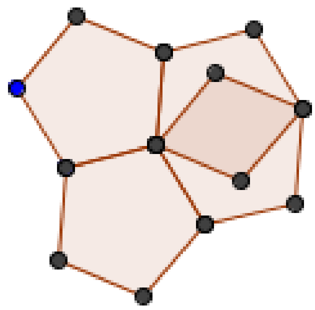

Figura 12 – Pentágono regular com sobreposição

Como para todo polígono regular o ângulo interno é sempre menor que 180º, devemos ter 3 polígonos ao redor de um ponto; assim, a experiência deve parar no hexágono regular, cujo ângulo vértice é i = 120º. A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é sempre igual a 360º. Assim, nos polígonos regulares, nos quais todos os ângulos são congruentes, para determinar a medida de cada um deles basta dividir 360º pelo número de lados.

Um padrão de pavimentação é padrão regular se, e somente se, for construída de polígonos convexos congruentes tal que cada figura vértice do padrão seja polígonos regulares. Chamamos de figura-vértice o polígono que possui por vértice os pontos médios dos lados que concorrem num mesmo vértice.

Na tabela a seguir temos os ângulos internos em polígonos regulares.

Tabela 1 – Ângulos internos em polígonos regulares.

| Polígono regular | Soma das medidas de todos os ângulos internos | Medida de cada ângulo interno |
|---|---|---|
| Triângulo eqüilátero | 180º | 60º |
| Quadrado | 360º | 90º |
| Pentágono Regular | 540º | 108º |
| Hexágono regular | 720º | 120º |
| Decágono regular | 1440º | 144º |
| Polígono regular de n lados | (n - 2). 180º | {(n - 2). 180º }/2 |

Fonte: DANTE, L.R. Tudo é matemática. São Paulo, Ática, 2004, p.137.

### 3.3 – PAVIMENTAÇÃO COM POLÍGONOS REGULARES DE TIPOS DIFERENTES

A descoberta experimental de configurações ao redor de um ponto com polígonos regulares de vários tipos, congruentes entre si, pode ser realizada como se faz para polígonos regulares de um só tipo. Poderá ocorrer um engano de pequenas imperfeições do material e de deficiências na acuidade visual, quando se aceitará o aproximado pelo errado.

A pavimentação ao redor de um ponto com polígonos regulares de vários tipos, congruentes entre si, pode ser realizada utilizando os mesmos procedimentos usados para a pavimentação com polígonos regulares de um só tipo.

Ao conjunto de polígonos regulares que se ajustam ao redor de um ponto (vértice) chamamos de *configuração*, a qual receberá uma notação que irá designar quais polígonos a formam. Tomando por exemplo a configuração (3,4,6,4), devemos compreender que existem os seguintes polígonos, dispostos rigorosamente nesta ordem: triângulo, quadrado, hexágono e quadrado.

Das 21 configurações de polígonos regulares em torno de um vértice, só as configurações (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) e (6,6,6) pavimentam o plano.

## 3.4 – SIMETRIAS, ESPELHOS E CALEIDOSCÓPIOS

A natureza apresenta-se na natureza sob diversas formas e com grande beleza, seja em uma folha de árvore, seja no ser humano. O homem procura reproduzir isso no dia-a-dia, seja numa construção ou numa obra de arte.

> *"Simetria, como largo ou estreito, como você pode definir seu significado, é uma idéia pela qual o homem através dos tempos tenta compreender e criar ordem, beleza e perfeição."* **Hermann Weyl**

No ensino da matemática as simetrias das figuras serão estudadas para propiciar a conceituação de congruência e de semelhança, procurando desenvolver a capacidade de perceber se duas figuras tem ou não a mesma forma e o mesmo tamanho independentemente da posição que elas ocupam no espaço.

Temos algumas formas de simetria, sendo algumas delas:

- ✓ Simetria Axial: É uma isometria – mesma medida, como conseqüência conserva-se também os ângulos, entretanto inverte os sentidos. A simetria axial é também conhecida como simetria reflexional.
- ✓ Simetria Rotacional: Significa dar uma rotação ao ponto. A rigor a cada ponto correspondem em geral dois pontos por simetria rotacional de mesmo ângulo. A rotação é uma isometria que conserva os sentidos.
- ✓ Simetria Translacional: A cada ponto correspondem dois simétricos por simetria translacional. Costuma-se dizer que a transformação geométrica é uma translação e a translação não tem ponto invariante.

Como estamos tratando de simetria é importante entender algumas características das imagens, em particular, entender sobre espelhos.

Quando um feixe de luz atinge uma superfície de separação de dois meios (transparentes), parte da luz volta para o primeiro meio e se diz refletida, e outra penetra no segundo meio e se diz refratada.

A geração de imagens em um espelho, ou seja, a reflexão é explicada pelas leis da ótica geométrica, conforme a figura 13:

1ª) O raio incidente, a normal à superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano.

2ª) O ângulo de incidência i (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio refletido com a normal): i = r

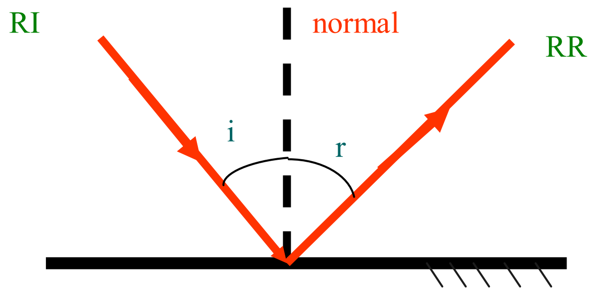


Figura 13: Reflexão

Em particular, se o raio incidente já é a normal ao espelho, o raio refletido volta na mesma direção. Quando a superfície do espelho é plana, dizemos que o espelho é plano. A imagem de um ponto é o encontro dos raios refletidos, como no caso de espelhos planos essas imagens são chamadas de virtuais.

Qualquer conjunto de espelhos planos, perpendiculares a um mesmo plano, que possibilite a reflexão perfeita de imagens é chamado de Caleidoscópio.

Nos caleidoscópios são formadas imagens múltiplas, pois as imagens produzidas pelas reflexões em dois espelhos são refletidas no outro e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano. Existem caleidoscópios com dois, três e quatro espelhos, o de três espelhos é o mais utilizado.

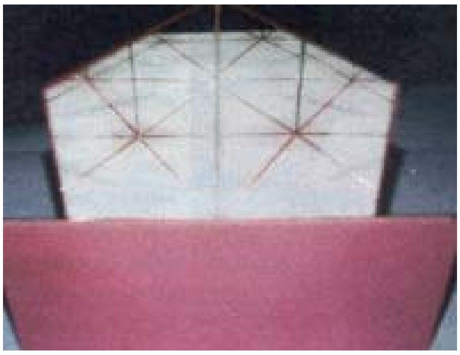

Figura 14 – Imagem de um Caleidoscópio

O nome caleidoscópio origina-se das palavras gregas **kalos** (belo); **eidos** (formas); **skopein** (ver); denominação dada por Sir David Brewester, em seu livro *A Treatise On The Kaleidoscope.*

Nos caleidoscópios existe uma região que contém em seu interior segmentos apropriados, possibilitando a visualização de pavimentações do plano, região esta chamada de base caleidoscópica. Ela também pode ser denominada: base substituível, base geradora, base transformada, padrão-básico, triângulo-base e figura-base.

No caleidoscópio são formadas imagens múltiplas, pois as imagens obtidas num dos espelhos formam novas imagens nos outros dois e assim sucessivamente. Conforme as disposições de fragmentos coloridos são fornecidas novas e belas figuras.

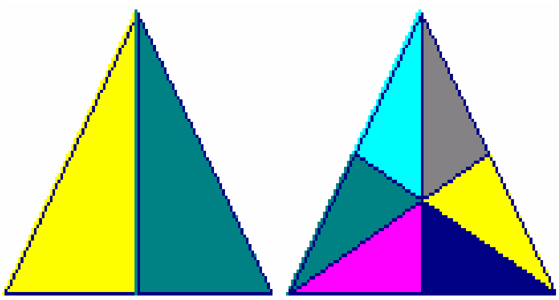

Fig. 15: Bases caleidoscópicas que permitem a visualização da pavimentação (3,3,3,3,3,3).

Fig. 16: Bases caleidoscópicas que permitem a visualização da pavimentação (3,3,3,3,3,3).

Os caleidoscópios surgiram como material didático por volta de 1950/1960 nas disciplinas de Ciências e Física. Nas décadas de 70 e 80, já encontrava-se obras que influenciavam em atividades educacionais de matemática. Através do estudo de pavimentações do plano por polígonos regulares via caleidoscópios podemos explorar vários conceitos geométricos como simetrias, ângulos, construção de polígonos, paralelismo e perpendicularismo, congruência, etc.

No comércio encontramos, normalmente, o caleidoscópio popular do tipo equilátero envolto por uma superfície cilíndrica (fig. 2.2). Uma das extremidades possui um orifício para observação e na outra se encontram pequenos objetos que produzem belas imagens, porém imprevisíveis.

Figura 17: Imagem de um caleidoscópio comercial

O caleidoscópio educacional individual é semelhante ao popular, mas gera imagens previsíveis. Uma de suas extremidades é aberta para a substituição de "desenhos" (bases) que irão produzir, através das reflexões nos espelhos, o visual desejado. Outra extremidade possui um orifício para observação.

### 3.5 – MOSAICOS COM POLÍGONO IRREGULARES

Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos, gozando de várias propriedades, por exemplo:

- 1ª propriedade: Os lados opostos são congruentes;
- 2ª propriedade: Os ângulos opostos são congruentes;
- 3ª propriedade: Os ângulos são dois a dois suplementares.

Resulta que o paralelogramo pavimenta o plano lado-lado (2ª propriedade), uma vez que, pela 3ª propriedade, em todo nó se têm 360º.

Entretanto, ainda pela 3ª propriedade, segue que, em geral podemos deslocar os paralelogramos por faixas (translações) em duas direções, obtendo uma infinidade de novas pavimentações.

## 3.6 – MOSAICO TIPO ESCHER

Um grande estudioso sobre mosaicos foi M.C. Escher. Mauritus Cornelis Escher nasceu em 1898, em Leeuwarden na Holanda, faleceu em 1970. Escher foi para a Escola de Belas Artes de Haarlem para estudar arquitetura onde conheceu o seu mestre, Jesserum de Mesquita, um professor de Artes Gráficas. Conheceu as técnicas de desenho e se apaixonou pela arte da gravura. Teve grande interesse pela arte árabe, sendo esta, a base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se repetem e refletem, pelas pavimentações.

Duas fases marcaram o trabalho de Escher: A primeira corresponde a realidade visível de cidades e regiões italianas, expressando detalhes, peculiaridades e irregulares, mas também preocupação com a estrutura espacial e mostrando notável uso de perspectivas, destaca-se sua obra *Tower of Babel* (1928), assim como seus belíssimos trabalhos de reflexão, como, por exemplo, Still *life with mirror* (1934), *Still life with reflection sphere* (1934), e ainda *Hand With reflecting sphere*, com reflexões em esfera. Na segunda fase, posterior a 1937, seus trabalhos mostram o afastamento do mundo físico. Usando a partir de então sua própria imaginação e visão detalhista, mas buscando regularidade, produziu composições geométricas de várias geometrias. (Barbosa, 1993)

Outro de seus trabalhos segue mostrado na figura 17:

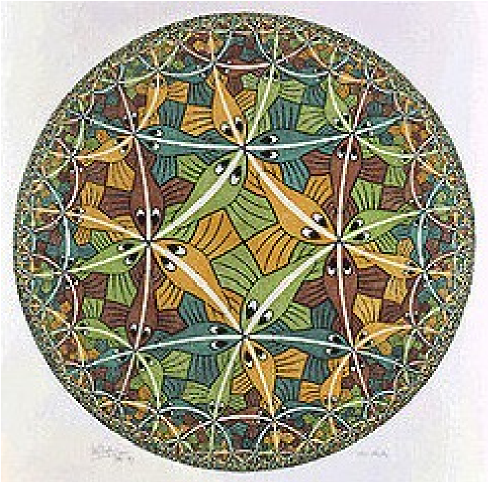

Figura 17 - Circle Limit III, 1959.

## 4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que esta é uma pequena parte de tudo que buscamos estudar e do muito mais que existe para ser estudado. No entanto, além de despertar o professor para uma abordagem diferente daquela que normalmente é encontrada nos livros, faz-se necessário que ele identifique e busque um caminho para propor suas atividades. Revelar a matemática oculta nos padrões em mosaicos, através do relato de sua história, distribuída adequadamente pelas etapas de um trabalho, possibilita um ambiente, além de belo, agradável para a absorção de determinados conteúdos. Com isso, entendemos que o trabalho explicita um de seus objetivos, ao mostrar atividades simultâneas da "matemática pura" e da "educação matemática". Por seu intermédio, foi possível enriquecer nossos conhecimentos, obtivemos informações para apresentações em aulas, estudos dirigidos, laboratórios de ensino, oficinas, etc. Com certeza, um estudo mais detalhado sobre o tema em tela, revelará a sua importância e presença em outros ramos de conhecimento, tais como, engenharia, arquitetura, artes plásticas, dentre outros. É essa, a nossa modesta contribuição.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário – **Mosaicos no plano** – IME USP; Montividel Uruguai.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões em mosaicos.** 4 ed. São Paulo: Atual, 1993.

CARVALHO, M. J.; - **A utilização do laboratório de informática para o ensino de geometria no ensino fundamental**- Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus de Foz do Iguaçu. Cascavel, 2008.

CASTRO, Rosiene de Fátima Corrêa Ruiz; **Pavimentações no plano euclidiano** Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais - Belo Horizonte, Julho de 2008.

DANTE, L.R. **Tudo é matemática.** São Paulo, Ática, 2004, p.137.

GOMES, Graciele de Borba Gomes; **O uso de mosaicos no plano para o ensino de geometria -** Trabalho final de graduação apresentado ao Curso de Matemática – Área de Ciências Naturais e Tecnológicas, do Centro Universitário Franciscano, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática. Santa Maria, RS 2008.

LIBÂNEO, José Carlos. **Ditática.** São Paulo. Cortez.2008.

MARTINS, Renata parecida - **Ensino-aprendizagem de geometria: uma Proposta fazendo uso de caleidoscópios, Sólidos geométricos e *softwares* educacionais.** Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Rio Claro (SP) 2003.

SANTOS, Marli Regina; **Pavimentações do plano: um estudo com professores de matemática e arte.** Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Rio Claro (SP), 2006.

ZENI, Jorge Ricardo R.; PINTO, Josimary de Oliveira - **Arte e Matemática: Mosaico da Tabuada -** Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, UNESP - Departamento de Matemática, Guaratinguetá – SP.