UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RENATO DOS SANTOS DINIZ

O TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON

Campina Grande/PB
2011

RENATO DOS SANTOS DINIZ

O TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Vandenberg Lopes Vieira

Campina Grande/PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

D615t Diniz, Renato dos Santos.

Teorema de Cayley - Hamilton [manuscrito] / Renato dos Santos Diniz. – 2011.

29 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Vandemberg Lopes Vieira, Departamento de Matemática e Estatística".

1. Matemática - Estudo. 2. Álgebra Linear. 3. Operadores Lineares. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

RENATO DOS SANTOS DINIZ

O TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Orientador

Luciana Roze de Freitas
Prof^a^. Dr^a^. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

Aldo Trajano Lourêdo
Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática e Computação – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 22 de Junho de 2011

Agradecimentos

A fora maior, Deus de amor, O qual me concedeu sade, paz e prosperidade no desenvolvimento de minhas tarefas e, também, a todos os bons Espíritos de Luz que me assistiram.

Aos meus avós, pais Ivone Alves e Cícero Diniz, tios, de modo especial: Ivonete Alves, Irenaldo e Ivete, primos, irmãos: Diego Renan e Mylena Diniz, sempre me mostrando incentivo e apoio.

Aos meus mestres do ensino básico, fundamental e médio, e superior, que participaram e tem uma grande importância em minha formaccão, Abigail Lins, Aldo Trajano, Humberto Brito, Janeide Dias, Luciana Freitas, Orlando Almeida, Thanya Maria e, de forma particular ao meu orientador Vandenberg Lopes Vieira.

Aos meus amigos e amigas, aqueles e aquelas que de fato estavam presentes em minha caminhada, ajudando, torcendo e comemorando a cada vitória por mim conquistada.

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo principal apresentar e demonstrar o Teorema de Cayley-Hamilton sobre o corpo dos complexos ou reais. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliogrfica em busca de alguns resultados preliminares necessrios demonstração deste teorema. Ressaltando sempre que, diversas bibliografias foram consultadas em busca de demonstrações diferentes para este mesmo problema, trazendo então neste trabalho uma demonstrao elegante, todavia de simples compreensão.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Operadores Lineraes, Matriz de uma Tranformação Linear.

Sumário

Introdução

A Álgebra Linear é o ambiente de estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Ela é útil para resolver problemas na Matemática, Física, Biologia, Estatística, etc. Dentre as muitas aplicações da Álgebra Linear, destacamos: a criptografia, Análise Canônica e o mecanismo dos sites do Busch hoje desenvolvidos. Pode-se encontrar essa e outras aplicações em quase todos livros de Álgebra Linear. Isso mostra a importância do seu estudo.

O estudo dos Espaços Vetorias de dimensão finita é essencialmente realizado com matrizes, haja visto que a cada Transformação Linear $T : V \to W$, associa-se uma, não única, matriz B. Neste direção, vê-se a importância do conceito elementar de matrizes e outros inerentes no estudo estudo da Álgebra Linear.

Neste trabalho, considera-se o Teorema de Cayley-Hamilton. O mesmo é um importante resultado sobre Operadores Lineares e é bastate usado nas ciências exatas.

Embora este seja um trabalho de conclusão de curso de Licenciatura, não será apresentado aqui os conceitos preliminares, tais como: matrizes, espaço vetorial e outros que surgem de modo natural. Tais conceitos podem ser estudados com detalhes em qualquer uma das referências [1], [2] e [4] .

Arthur Cayley nasceu em 16 de agosto de 1821 em Richmond na Inglaterra, sendo filho de uma família de comerciantes. Seu pai desejava que continuasse os negócios da família, porém em 1835 ingressou no Kings College School onde sua aptidão para a matemática se tornou mais aparente, assim seu pai resolveu envia-lo para Cambridge. Em 1838 começou seus estudos no Trinity College em Cambridge onde se graduou em 1842. Em 1843 trabalhou fundamentalmente em álgebra, mas, também trabalhou em geometrias não-euclideanas e geometria n-dimensional, usando determinantes como elemento essencial.

Durante esses catorze anos publicou aproximadamente 250 trabalhos matemáticos, a maioria sobre a teoria dos invariantes algébricos.

Durante a conferência de Hamilton sobre os Quatérnios que foi assistir em Dublin, conheceu Salmon, com quem trocou idéias matemáticas por muitos anos. Outro amigo era Sylvester, um advogado com quem trabalhava junto e durante os dias de trabalho conversavam sobre matemática. Ele é considerado, junto com Sylvester, o fundador da teoria dos invariantes.

Foi um dos primeiros matemáticos a estudar matrizes, definindo a idéia de operacionalização de matrizes como na álgebra. Descobriu a álgebra das matrizes em 1857. As matrizes surgiram para Cayley ligadas às transformações lineares do tipo:

$$Y = ax + by,$$
$$X = cx + dy,$$

onde a, b, c e d são números reais, e que podem ser imaginados como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (X, Y).

Quando se criou em Cambridge, em 1863 a cadeira sadleriana, está lhe foi oferecida. Assim Cayley aceitou regê-la abandonando a carreira da lei. Tornando-se professor de matemática pura em Cambridge.

Em 1881 foi convidado a dar um curso sobre funções abelianas e funções teta, na Johns Hopkins University nos EUA, onde seu amigo Sylvester era professor.

Cayley ocupa o terceiro lugar entre os escritores de matemática mais prolíferos em toda história desta ciência, perdendo apenas para Euler e Cauchy. Em Collected Mathematical Papers de Cayley há 966 artigos, num total de treze volumes com cerca de 600 páginas cada um, abordando todas as áreas da matemática. Foi neste que Cayley deu construções pioneiras à geometria analítica, teoria das transformações, teoria das curvas e superfícies, o estudo de formas binárias e ternárias.

Charles Hermite registrou as seguintes palavras: o talento de Cayley se caracterizou pela clareza e extrema elegância da forma analítica; reforçando por uma capacidade incomparável de trabalho.

Willian Rowan Hamilton, nasceu em Dublin, Irlanda, em 1805. Aos quinze anos de idade encontrou-se com Zerah Colburn, jovem americano que realizava cálculos mentais instantaneamente, despertando seu interesse pela matemática. Leu os Princípios de Newton e Mécanique Celeste de Laplace onde descobriu um erro matemático e escreveu em artigo a respeito.

Em 1824 ingressou no Trinity College, Dublin e aos 22 anos de idade, ainda aluno de graduação, foi nomeado Royal Astronomer da Irlanda, diretor do Observatório de Dunsik e professor de astronomia da universidade. Pouco depois, baseado em considerações teóricas, prognosticou a refração cônica em cristais biaxiais, o que veio a ser confirmado experimentalmente pelos físicos. Em 1833 comunicou à Academia Irlandesa significativo artigo em que a álgebra dos números complexos era definida como uma álgebra de pares ordenados de números reais, definição que usamos até hoje. Do ponto de vista físico, o sistema dos números complexos é extremamente conveniente para o estudo dos vetores e das rotações do plano. Hamilton vislumbrou a possibilidade de um sistema de números análogo para o estudo dos vetores e das rotações do espaço tridimensional. Em suas pesquisas considerou quádruplos ordenados (a, b, c, d) de números reais, tendo imersos neles tanto os números reais como os números complexos. Chamando esses elementos de quatérnios (reais). Hamilton definiu a adição e a multiplicação dos quatérnios, verificando as propriedades associativas e comutativa da adição e que a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição, mas não vale a lei comutativa da multiplicação. Este é, historicamente, o primeiro exemplo de uma álgebra não-comutativa.

Hamilton contava a história de que a idéia de abandonar a lei comutativa da multiplicação ocorreu enquanto caminhava com a esposa ao longo do Royal Canal perto de Dublin, pouco antes de escurecer. Ele pegou seu canivete e com ele gravou a parte fundamental da tábua de multiplicação dos quatérnios numa das pedras da Ponte Brougham (ainda hoje existe a pedra e uma placa contando a história citada).

Assim, a álgebra dos quatérnios, a primeira álgebra não-comutativa, subitamente nasceu e abriu as portas da álgebra abstrata.

Sua obra Suas Lectures on Quaternions foi publicada em 1853, e depois disso dedicou-se à preparação da obra ampliada, Elements of Quaternions. Esta não estava terminada quando ele morreu em 1865, mas foi editada e publicada por seu filho no ano seguinte. Hamilton definiu conceitos hoje muito utilizados como versor, gradiente, divergência, etc.

Os métodos dos quatérnios motivaram, tempo depois, a introdução de análise vetorial. Hamilton escreveu também sobre ótica, dinâmica, a solução das equações de quinto grau, o hodógrafo de uma partícula em movimento e soluções numéricas de equações diferencias.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Transformações Lineares

Convidamos a observar que estaremos sempre considerando espaços vetorias sobre o corpo real ou complexo. Sempre que omitirmos citar em qual corpo estar definido o espaço vetorial, consideramos que seja real ou complexo e, se caso, for somente real, indicaremos. Salientamos também que as demonstrações dos principais resultados deste capítulos se encontram no Apêndice 2.

Definição 1.1.1 *Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetorias sobre o corpo K. Uma função $T : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma* ***transformação linear****, quando satisfaz os seguintes propriedades:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \ \forall u \ , v \in V_1$;

2. $T(\alpha v) = \alpha T(v), \ \forall \alpha \in K \quad \text{e} \quad \forall v \in V_1$.

Para uma transformação linear $T : V_1 \longrightarrow V_2$, tem-se as propriedades:

1. $T(0) = 0$;

2. $T(-v) = -T(v)$;

3. $T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u)$.

Mais geralmente,

$$T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n), \ \forall \alpha_i \in K \quad \text{e} \quad \forall v_i \in V_1.$$

Dois conjuntos inerentes ao conceito de transformação linerar T são o núcleo e imagem de T. Eles são definidos como segue.

Definição 1.1.2 *Chama-se de **núcleo** de uma transformação linear* $T : V_1 \longrightarrow V_2$*, em símbolos* $Nuc(T)$*, ao subconjunto de* V_1 *dado por*

$$Nuc(T) = \{v \in V_1 : T(v) = 0\} \subset V_1.$$

*A **imagem** de* T*, em símbolos* $\mathrm{Im}(T)$*, é o conjunto*

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) : v \in V_1\} \subset V_2.$$

Como $T(0) = 0$*, então* $Nuc(T)$ *e* $\mathrm{Im}(T)$ *são sempre não-vazios.*

Exemplo 1.1.3 Seja K um corpo e $M_2(K)$ o espaço de todas as matrizes de ordem $n\ x\ n$ com entradas em K. A função

$$\begin{array}{rccc} T: & K^3 & \to & M_2(K) \\ & (a,b,c) & \mapsto & \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma transformação linear. Vamos provar esse fato e determinar $Nuc(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$. Para $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$,

$$\begin{array}{rcl} T(v_1 + v_2) & = & (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \\ & = & \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 - b_1 + b_2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & c_1 - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2 & 0 \\ 0 & c_2 - b_2 \end{pmatrix} \\ & = & T(v_1) + T(v_2). \end{array}$$

Agora, para $\alpha \in K$ e $v = (a,b,c) \in K^3$, $T(\alpha(a,b,c)) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ *e*

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) & = & \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b & 0 \\ 0 & \alpha c - b\alpha \end{pmatrix} \\ & = & \alpha \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} \\ & = & \alpha T(a,b,c). \end{array}$$

O que prova que T é linear. Determinemos ape $Nuc(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$. Seja $v = (a,b,c) \in Nuc(T)$. Ora,

$$v = (a, b, c \in Nuc(T) \Leftrightarrow T(v) = 0.$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, $a + b = 0$ *e* $c - b = 0$*. Portanto,* $v = (-b, b, b)$*, ou seja,*

$$Nuc(T) = \{(-b, b, b) : b \in K\}.$$

Port outro lado, tem-se claramente que

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in K \right\}.$$

Teorema 1.1.4 *Sejam V_1 e V_2 espaços vetorias sobre K e $T : V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear. Então $Nuc(T)$ é uma subespaço de V_1 e $Im(T)$ é um subespaço de V_2.*

Demonstração: Sejam $v, w \in Nuc(T)$ um subconjunto de V_1. Temos que,

1. $0 \in Nuc(T)$;
2. $\forall u, w \in Nuc(T)$,temos $u+w \in Nuc(T)$. Pois, $T(u+w) = T(u)+T(w) = 0+0 = 0$;
3. E por fim, $\forall \alpha \in K$ e $\forall u \in Nuc(T)$,tem-se $\alpha u \in Nuc(T)$.Por, $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha .0 = 0$.

Como são satisfeitas as condições: $(1), (2)$ e (3), então $Nuc(T)$ é um subespaço de V_1. De maneira análoga, faz-se ao caso da $Im(T)$.

O próximo teorema é o principal resultados sobre as transformações lineares $T : V_1 \longrightarrow V_2$ com dimensão $\dim V = n$. O mesmo tem analogia com o Teorema dos Homomorfismos em álgebra abstrata.

Teorema 1.1.5 (***Teorema do Núcleo e da Imagem***) *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre K , com dimensão de V_1 finita, e $T : V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear. Então:*

$$\dim V_1 = \dim Nuc(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$

Exemplo 1.1.6 *Para a transformação T do exemplo 1.1.3, temos que* $\dim K^3 = 3$, $\dim Nuc(T) = 1$. *Logo $dim Im(T) = 2$,pois,* $3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T)$.

Entre as consequências do Teorema 1.1.5, destacamos:

Corolário 1.1.7 *Sejam U e V espaços vetorias sobre $\mathbb{R}$ com a mesma dimensão finita n e suponhamos $F : U \to V$ uma transformação linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *F é sobrejetora.*
2. *F é bijetora.*
3. *F é injetora.*
4. *F transforma uma base de U em uma base de V (isto é, se α é uma base de$U$, então $F(\alpha)$ é base de V).*

1.1.1 Operadores Lineares

Nesta seção descamos um tipo especial de transformação linear — operador linear —, que é objeto de estudo do trabalho.

Definição 1.1.8 *Uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ é um* ***operador linear****.*

Exemplo 1.1.9 Sejam $P(\mathbb{C})$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{C}$ e D a função:

$$\begin{array}{cccc} D: & P(\mathbb{C}) & \rightarrow & P(\mathbb{C}) \\ & a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n & \mapsto & a_1 + 2a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}. \end{array}$$

Nota-se que D envia um polinômio em $P(\mathbb{C})$ em sua derivada formal (sem a relação com o conceito de derivada do cálculo diferencial). Com as mesmas propriedades do cálculo diferencial, temos, para $p(x), q(x) \in P(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$D(p(x) + q(x)) = D\,(p(x)) + D(q(x)) \quad e \quad D(\lambda p(x)) = \lambda D(p(x)).$$

Portanto, D é um operador linear.

Observação 1.1.10 *Dados o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e o operador $T : V \longrightarrow V$, a notação $p(T)$ indica o operador $p(T) = a_0Id + a_1T + ... + a_nT^n$, em que $Id : V \longrightarrow V$ é o operador identidade e $T^n = T \cdot T \cdot \cdots \cdot T$ (n vezes)*

Matriz de uma Transformação Linear

Nesta seção vamos considerar o conceito de matriz de uma transformação linear T. De um certo modo, o estudo das tranformações lineares pode ser reduzido ao estudo das matrizes. Desse modo, pode-se obter informações relevantes de T de modo mais prático.

Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetorias sobre o corpo K e $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ bases ordenadas de V_1 e V_2 , respectivamente. Então,

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m$$

para cada $j = 1, ..., n$. A matriz T relativa às bases ordenadas[1] α e β é a matriz m **x** n com entradas em K, denotada por $[T]^{\beta}_{\alpha}$, é a matriz

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[1]Quando dizemos que $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base ordenada, queremos dizer que v_1 é o primeiro vetor, v_2 e o segundo, e assim sucessivamente. Isso é importante considerar, pois mudando a ordem de um desses vetores, obtemos outra matriz que também representa a transformação T.

Exemplo 1.1.11 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, y)$ uma transformação linear. Então, a representação de T na base canônica é:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observação 1.1.12 *Seja o conjunto de todas as trasformações linear de V_1 em V_2, ou seja,*

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) = \{T : V_1 \longrightarrow V_2 : T \text{ é linear}\}.$$

*Sabe-se $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ que é um espaço vetorial. Quando $V_1 = V_2$, denota-se $\mathcal{L}(V_1, V_1)$ por $\mathcal{L}(V_1)$. Vamos denotar o espaço de todas as matrizes de ordem m **x** n com entradas em K por $M_{m \text{ x } n}(K)$; caso $m = n$, o indicaremos por $M_n(K)$.*

Definição 1.1.13 *Seja $T : V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear. Diz-se que T é um **isomorfismo linear** quando a mesma for bijetora.*

Exemplo 1.1.14 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-y, x)$. Temos $Nuc(T) = \{0\}$, logo T é injetora. Portanto, pelo colorário X, tem-se T bijetora. Assim, T é um isomorfismo linear.*

Teorema 1.1.15 (***Teorema da Representação Matricial***) *Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetorias sobre o corpo K e $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ bases ordenadas de V_1 e V_2 , respectivamente. Então a transformação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(V_1, V_2) & \to & M_{m \text{ x } n}(K) \\ & T & \mapsto & \Phi(T) = [A]_\beta^\alpha \end{array}$$

é um isomorfismo linear. Nota-se também que $\dim \mathcal{L}(V_1, V_2) = \dim V_1 . \dim V_2$.

1.2 Polinômio Característico

Antes da definição de polinômio característico de um operador linear, vamos considerar os conceitos de autovalores e autovalores. A questão consiste em: Dado um operador linear T, deseja-se saber quais vetores têm imagens sob T múltiplos de si mesmos. Esse vetores são especiais em álgebra linerar, pois em alguns casos é possível formar uma base com eles, a qual é bastante privilegiada.

Definição 1.2.1 *Um vetor $v \in V$, não nulo, chama-se um **autovetor** do operador $T : V \longrightarrow V$ quando existe $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$, e chama-se λ de **autovalor.***

Para um operador $T : V \longrightarrow V$ e $\lambda \in K$, o conjunto

$$Aut_T(\lambda) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

é um subespaço de V, o qual chama-se **subespaço próprio** de λ.

Definição 1.2.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K, $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e α uma base de V. Chama-se o determinante da matriz $[\lambda Id - T]$ de **polinômio característico** de T, em símbolos $p_T(\lambda)$. Assim,*

$$p_T(\lambda) = \det[\lambda Id - T].$$

Segue desta definição e da anterior que os autovalores de T, serão as raízes de seu polinômio característico, caso existam.

Exemplo 1.2.3 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, x + y)$. O seu polinômio característico é*

$$p_T(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Daí, vem que 0 e 2 são autovalores, e mais, $Aut_T(2) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\} = [1, -1]$.

1.3 Subespaço T-invariante

Definição 1.3.1 *Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço de V e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que W é um subespaço **T-invariante**, ou **invariante** sob T, quando $T(W) \subseteq W$, isto é, $T(w) \in W$, $\forall w \in W$.*

Proposição 1.3.2 *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear em que V é um K-espaço vetorial. Então*

1. *Os subespaços $Nuc(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ são T-invariantes;*

2. *Se λ for um autovalor de T, então $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V.*

Demonstração: Demonstremos apenas o item 2.Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear em que V é um K-espaço vetorial e $w \in Aut_T(\lambda)$, isto é, $T(w) = \lambda w \in Aut_T(\lambda)$. Assim, para todo w em $Aut_T(\lambda)$, tem-se $T(w)$ em $Aut_T(\lambda)$. ■

1.4 Produto interno

Definição 1.4.1 *Seja V um K-espaço vetorial. Uma função $\langle , \rangle : V$ **x** $V \to K$ é dita **produto interno** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \quad \forall u, v, w \in V.$
2. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \quad \forall u, v, \in V, \quad \forall \lambda \in K.$
3. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$, $\forall u, v \in V.$
4. $\langle u, u\rangle > 0$, *se* $u \neq 0$.

Definição 1.4.2 *Seja V um espaço Vetorial com produto interno. O **complemento ortogonal** de um conjunto não-vazio $W \subset V$, denotado por $W^{\perp}$, são todos os $v \in V$ tais que $\langle v, w\rangle = 0$, para todo w em W, isto é, $W^{\perp :} = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}$.*

Exemplo 1.4.3 Seja $V = C([-1,1], \mathbb{R})$ *o espaço das funções contínuas do intervalo* $[-1,1]$ *em* $\mathbb{R}$ *e* com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Seja $W \subset V$ formado por todas as funções ímpares, isto é, $W = \{f \in V : f(-t) = -f(t), \forall t \in [-1,1]\}$. Verifica-se que $W^{\perp}$ é formado por todas as funções pares.

Definição 1.4.4 *Seja $T \in \mathcal{L}(V, V)$, onde V é um K-espaço vetorial com produto interno. Diz-se que T possui um adjunto se existir um operador linear $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$$

*para todos $u, v \in V$. Neste caso, diz-se que T^* é o **adjunto** de T.*

Exemplo 1.4.5 *Consideremos no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $V = M_n(\mathbb{C})$ o produto interno dado por*

$$\langle A, B\rangle = tr(\overline{B}^t A), \quad \forall A, B \in V.$$

Dada uma matrix $M \in M_n(\mathbb{C})$, consideremos o operador linear $T_M : V \to V$ dada por $T_M(A) = MA$. Assim, $(T_M)^*(B) = \overline{M}^t B$ e

$$\langle T_M(A), B\rangle = \langle MA, B\rangle = tr(\overline{B}^t(MA)) = tr((\overline{B}^t M)A) = tr(\overline{(\overline{M}^t B)^t} A) = \left\langle A, \overline{M}^t B \right\rangle.$$

Proposição 1.4.6 *Se o subespaço $W \subset V$ é invariante pelo operador linear $T : V \longrightarrow V$, então seu complemento ortogonal $W^{\perp}$ é invariante pelo operador adjunto $T^* : V \longrightarrow V$.*

Demonstração: Seja $u \in W$ e $v \in W^{\perp}$. Daí, $Tu \in W$, o que implica $\langle u, T^*v\rangle = \langle Tu, v\rangle = 0$. Logo, $T^*v \in W^{\perp}$ e, portanto, $W^{\perp}$ é invariante por T^*. ■

Capítulo 2

Teorema de Cayley-Hamilton

Vamos considerar agora o principal resultado do trabalho — o Teorema Cayley-Hamilton. Como destacamos anteriormenre, trata-se de uns dos principais resultados da álgebra linear. Sua demonstração pode ser estudada com mais detalhes em qualquer das referências [1] ou [4].

Definição 2.0.7 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e $dimV = n \geq 1$. Chama-se de* ***leque*** *de T em V a uma cadeia de subespaços $\{V_1, ..., V_n\}$ tais que V_i esteja contido em V_{i+1} para cada $i = 1, ..., n-1$, $\dim V_i = i$, e por fim, sejam T-invariantes. Por uma base associada ao leque entende-se uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que $\{v_1, ..., v_i\}$ é uma base de V_i.*

Exemplo 2.0.8 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear, definido da seguinte forma:*

$$T(x, y, z) = (0, y, z).$$

Nota-se que, $\{V_1 = [(1, 0, 0)], V_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)], V_3 = [(1, 0, 0)(0, 1, 0), (0, 0, 1)]\}$, assim decorre que $\{(1, 0, 0)(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base associada ao leque.

Proposição 2.0.9 *Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base associada a um leque de T. Então $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$ se, somente se , a matriz associada a T, com respeito a essa base, é uma matriz triangular.*

Demonstração: Suponhamos que $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$, assim notamos que existem escalares tais que

$$\begin{aligned}
Tv_1 &= a_{11}v_1,\\
Tv_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2,\\
&\vdots\\
Tv_i &= a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ii}v_i,\\
&\vdots\\
Tv_n &= a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n,
\end{aligned}$$

isto é, a representção matricial com relação a base associada ao leque é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, sendo T triangularizável, para fixar idéias e sem perda de generalidade, suponhamos triangular superior, ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Tv_1 &= a_{11}v_1, \\ Tv_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2, \\ &\vdots \\ Tv_i &= a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ii}v_i, \\ &\vdots \\ Tv_n &= a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n, \end{aligned}$$

ou seja, $T(V_k) \subset V_k$. Ademais, $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$ e $\dim V_i = i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. ■

Observação 2.0.10 *Se a matriz da representação do operador for triangular inferior na base $\{v_1, ..., v_n\}$, tyemos que na base $\{v_n, ..., v_1\}$ a representação é triangular superior e repetimos o argumento anterior.*

Lema 2.0.11 *Seja $W \subset V$ um subespaço T-invariante pelo operador $T : V \to V$. Se $T' : W \to W$ representa a restrição de$T$ ao subespaço W, então o polinômio $p_{T'}$ é um divisor de p_T.*

Demonstração: Consideremos u e u' base de V e W, respectivamente, com $u' \subset u$. Se $[T]_u$ e $[T']_{u'}$, então

$$[T]_u = \begin{bmatrix} [T']_{u'} & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_u - I_n = \begin{bmatrix} [T']_{u'} - \lambda I_r & A \\ 0 & B - \lambda I_{n-r} \end{bmatrix}$$

■

em que mr é a dimensão de W e n a de V. Segue que

$$p_T(\lambda) = det([T]_u - \lambda I_n) = det([T']_{u'} - \lambda I_r).det(B - \lambda I_{n-r}) = p_{T'}(\lambda).q(\lambda),$$

com $q(\lambda) = det(B - \lambda I_{n-r})$. Sendo assim, $p_T(\lambda)$ é múltiplo de $p_{T'}(\lambda)$. ■

Proposição 2.0.12 *Todo operador linear $T : V \longrightarrow V$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ é triangularizável.*

Demonstração: Para $\dim V = 1$ decorre direto. Provaremos usando indução, suponhamos válido em dimensão $n-1$ e sendo $dimV = n$. Como T e T^* têm o mesmo polinômio característico, o operador $T^* : V \to V$ tem autovalor. Logo existe um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1, invariante por T^*. Sabe-se que o complemento ortogonal $W^{\perp} = W_{n-1}$ é um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ em V, invariante por T. Assim, as raízes do polinômio característico $p_{T\prime}$ são também as de p_T. Por hipótese de indução, existem subepaços $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1}$, com $\dim W_i = i$, e invariantes por T', portanto T-invariantes. Sendo assim, o operador linear $T : V \longrightarrow V$ é triagularizável. ■

Apresentemos agora o nosso principal resultado que é um dos mais importantes teoremas da álgebra linerar.

Teorema 2.0.13 (***Cayley-Hamilton***) *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, de dimensão maior ou igual a um, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se p é seu polinômio característico, então $p_T(T) = 0$.*

Demonstração: Sabemos que existe uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V relativamente à qual a representação matricial de T é triangular, digamos, superior. Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Denotamos $W_0 = \{0\}$ e W_i subespaço vetorial de V gerado por $v_1, ..., v_i$, então $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset ... \subset W_n = V$ e, também, cada W_i é invariante por T, ou seja, $T(Wi) \subset Wi$. Então,

$$Tv_i = a_{ii}v_i + w,$$

com $w \in V_{i-1}$. Desde que $(T - a_{ii}I)v_i = Tv_i - a_{ii}v_i$, temos $(T - a_{ii}I)v_i \in V_{i-1}$. Além disso, o polinômio característico de T é dado por

$$p_T(x) = (x - a_{11})...(x - a_{nn}),$$

de modo que

$$p_T(T) = (T - a_{11}I)...(T - a_{nn}I).$$

Mostremos usando princípio de indução finita que

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)v = 0, \ \forall v \in V_i, \ i = 1, ..., n.$$

Para $i = 1$, temos $(T - a_{11}I)v_1 = Tv_1 - a_{11}v_1 = 0$. Assim, o resultado é válido. Seja $i > 1$, e suponhamos que afirmação seja verdadeira para $i - 1$. Observemos que qualquer elemento de V_i pode ser escrito $w + \alpha v_i$ com w pertencente a V_{i-1} e α algum escalar em $\mathbb{C}$. Notemos que $(T - a_{ii}I)w \in V_{i-1}$, pois $T(V_{i-1}) \subset V_{i-1}$ e $a_{ii}w \in V_{i-1}$. Logo, usando a nossa hipótese de indução,

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)w = 0.$$

Agora, usando novamente a hipótese de indução,

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)\alpha v_i = 0,$$

já que $(T - a_{ii}I)\alpha v_i$ pertence a V_{i-1}. Como, para qualquer v em V_i,

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{nn}I)v = 0,$$

o que conclui a demonstração. ■

Destacamos agora algumas cosequências do Teorema de

Corolário 2.0.14 *Seja A uma matriz n* **x** *n de números complexos, e seja p seu polinômio característico. Então $p(A) = 0$.*

Demonstração: Digamos que A seja a representação matricial numa certa base do operador T de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, sobre o corpo $\mathbb{C}$. Assim, usando o Teorema de Cayley-Hamilton, teremos que $p(A) = 0$. ■

Corolário 2.0.15 (***Cayley-Hamilton para operadores reais***) *Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço vetorial V sobre o corpo real. Se p_T é o seu polinômio característico, então $p_T(T)$.*

Demonstração: Seja A a matriz de T relativamente a uma certa base de V. Então, $p_A(A) = 0$, do corolário anterior. Como $p_A(A)$ é a matriz do operador $P_T(T)$ nessa mesma base, segue-se que $p_T(T) = 0$. ■

Exemplo 2.0.16 Considerando o operador do Exemplo 1.1.11, então $p_T(T) = T^2 - 2T + Id = 0$, pois

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apêndice

Demonstração: (Teorema do Núcleo e da Imagem) Digamos que $Nuc(T) = \{0\}$, então T é injetora, e por conseguinte se $B = \{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V_1, então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é uma base de $Im(T)$, pois toda transformação linear injetora preserva independência linear. Se $Nu(T) \neq \{0\}$, então seja $\{v_1, ..., v_m\}$ uma base de $Nuc(T)$. Com isso, consideremos $\{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_n\}$ uma base de V_1. Pelas observações anteriores[1],

$$\mathrm{Im}(T) = [T(v_1), ..., T(v_n), T(u_1), ..., T(u_n)] \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = [T(u_1), ..., T(u_n)].$$

O que temos, é $\dim(V_1) = m + n$, em que $m = \dim Nuc(T)$. Para concluir a demonstração, provaremos que $n = \dim Im(T)$, ou seja, que vetores $T(u_1), ..., T(u_n)$ são L.I. Seja

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i) = 0 \Rightarrow T(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in Nuc(T).$$

Isto implica que existem $\alpha_1, ..., \alpha_m$ escalares tais que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Logo, todos os a_i e α_i são zeros. ■

Demonstração: (Teorema da Representação Matricial) Sejam $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ as bases de V_1 e V_2, respectivamente. Vamos mostrar que Ψ é linear. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ e escrevemos as combinações lineares

$$A(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + ... + a_{mj} w_m,$$

e

$$B(v_j) = b_{1j} w_1 + b_{2j} w_2 + ... + b_{mj} w_m.$$

Como sabemos, as representações matricias são $[A]^\alpha_\beta = [a_{ij}]$ e $[B]^\alpha_\beta = [b_{ij}]$.Dado um escalar $\lambda \in K$,

$$(A + \lambda B)v_j = A(v_j) + \lambda B(v_j) = (a_{1j} + \lambda b_{1j}) + (a_{2j} + \lambda b_{2j}) + \cdots + (a_{mj} + \lambda b_{\mathbf{mj}}).$$

[1] A notação $[v_1, v_2, ..., v_n]$ indica o subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Logo, vale a identida isto significado de matricial:

$$[A+\lambda B]_\beta^\alpha = [a_{ij}+\lambda b_{ij}] = [a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] = [A]_\beta^\alpha + \lambda[B]_\beta^\alpha,$$

isto é, $\Psi(A+\lambda B) = \Psi(A) + \lambda\Psi(B)$, mostrando a linearidade de Ψ. Seja $A \in Nuc(\Psi)$; isto significa que todas as entradas da representação matricial $[A]_\beta^\alpha = [a_{ij}]$ são nulas,$a_{ij} = 0$. Portanto,

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m, \quad \text{com} \quad j = 1, ..., n.$$

Logo, A deve ser a transfomação identicamente nula. Portanto, $Nuc\Psi = \{0\}$, mostrando a injetividade.

Provemos a sobrejetividade de Ψ. Dada uma matriz $N = [a_{ij}] \in M_{mxn}(K)$, considere a única transformação linear tal que

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m.$$

Esta construção nos garante que $\Psi(A) = N$. Como isomorfismos lineares preservam dimensões,

$$dim\mathcal{L}(V_1, V_2) = \dim M_{mxn}(K)$$

e a dimensão do espaço das matrizes $m\times\ n$ é igual a produto $\dim V_1 \cdot \dim V_2$, concluímos a demonstração do teorema. ■

Demonstração: (**Outra demonstração do teorema de Cayley-Hamilton**) Seja β uma base de V e escreva $A = [T]_\beta$. Considere também $A' = \mathbf{x}id_n - A$ e portanto $p_T(x) = \det A'$. Por fim, seja $B = ad(A') = (b_{ij})$ a matriz adjunta a A. Os elementos b_{ij} são os cofatores da matriz $\mathbf{x}Id_n - A$ e, portanto, representam polinômios em x de grau no máximo $n-1$. Escreva para cada par i, j, tal polinômio como

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}x + \cdots + b_{ij}^{(n-1)}x^{n-1}$$

Se denotarmos, para $k = 0, 1, ..., n-1$,

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \cdots & b_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \cdots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

teremos que $B = B^{(0)} + B^{(1)}x + \cdots + B^{(n-1)}x^{n-1}$. Agora, escrevendo $p_T(x) = a_0 + a_1x + \cdots + x^n$ e usando o fato que

$$B.A' = ad(A') = (\det A')Id_n = p_T(x)Id_n,$$

segue que

$$B^{(0)} + B^{(1)}x + \cdots + B^{(n-1)}x^{n-1}(xId_n - A')id_n = p_T(x)Id_n$$

Logo, comparando-se os coeficientes destes polinômios, temos que

$$\begin{array}{rcc} a_0 Id_n & = & -B^{(0)}A \\ a_1 Id_n & = & B^{(0)} - B^{(1)}A \\ & \vdots & \\ a_{n-1} Id_n & = & B^{(n-2)} - B^{(n-1)}A \\ Id_n & = & B^{(n-1)} \end{array}$$

Multiplicando-se estas equações por $Id_n, A, A^2, ..., A^n$, respectivamente, e somando-as,

$$p_T(T) = a_0 Id_n + a_1 A + \cdots + A^n = 0$$

como queríamos. ■

Bibliografia

[1] Lang, S. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

[2] Lima, E.L. *Álgebra Linear*. 8ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[3] Hoffmmann, K.Kunze, R. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1979.

[4] Coelho, F.U. Mary, L.L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2 ed.São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2007.

[5] http://www.ime.usp.br/˜leo/imatica/histinaoria/cayley.html,página consultada em 09/06/2011. Texto de Fernanda Buhrer Rizzato/Bárbara Leister Rinaldi; supervisão e orientação: Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies.

[6] http://www.gap-system.org/˜history/PictDisplay/Cayley.html, página consultada em 09/06/2011.

[7] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2008/10/sir-william-rowan-hamilton.html, página consultada em 09/06/2011.postado por: Larry Freeman.