



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUÊNIA ALVES DE ARAÚJO

PRIMEIROS PASSOS EM ESTUDO DE TRIGONOMETRIA

CAMPINA GRANDE - PB

2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PRIMEIROS PASSOS EM ESTUDO DE TRIGONOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
junto ao curso de Licenciatura Plena em
Matemática da Universidade Estadual da
Paraíba - UEPB.

Aluna: Suênia Alves de Araújo

Orientador: Ms. Fernando Luiz Tavares da
Silva

CAMPINA GRANDE -PB

2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A659p Araújo, Suênia Alves de.
Primeiros passos em estudo de Trigonometria [manuscrito] /
Suênia Alves de Araújo. - 2014.
46 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva,
Departamento de Matemática".

1. Ensino de trigonometria. 2. Contextualização. 3. Ensino-
aprendizado. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A Banca Examinadora resolveu atribuir a nota 8,0 à aluna Suênia Alves de Araújo na Disciplina de Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Banca Examinadora:

Fernando Luiz Tavares da Silva

Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Orientador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Membro

Marci da Conceição V. Fernandes

Esp. M^a Da Conceição V. Fernandes

Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades e me permitir chegar até aqui.

A essa Universidade, seu corpo docente, direção e administração que me concederam a oportunidade de alcançar meu diploma. Aos coordenadores que me ajudaram nos momentos que precisei de orientação.

Ao meu orientador, por sua paciência, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, e seus incentivos.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e serviram de base para que eu me transformasse a pessoa que sou hoje.

Em especial, a Edriene dos Santos Vieira, minha companheira de todas as horas, melhor amiga e confidente que sempre me deu forças para não desistir nos momentos de dificuldade.

Aos Professores examinadores da banca por terem colaborado com a avaliação do trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, muito obrigada.

*"Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z.
O trabalho é X;
Y é o lazer;
e Z é manter a boca fechada."*

(Albert Einstein)

RESUMO

Para realização deste trabalho, partiu-se do seguinte problema de pesquisa: Como pode estar organizado um plano de ensino, relativo ao ensino da trigonometria, de forma tornar a aprendizagem por parte dos alunos mais eficaz? A partir do mesmo foram traçados os caminhos a serem seguidos, tendo como principal objetivo elaborar um plano de ensino para os fundamentos da trigonometria, de forma fazer com que o aluno desperte curiosidade pela aprendizagem explorando seus conhecimentos e tirando suas dúvidas. Para isso foi feito uso de diferentes instrumentos: livros, revistas, monografias, internet, etc. Esse trabalho envolve sugestões de como abordar o ensino da trigonometria, e como a mesma pode ser aplicada aos alunos em seus primeiros conteúdos, já que o ensino da trigonometria se mostra importante na aprendizagem dos alunos. Mostraremos aqui os primeiros passos desse conteúdo, e como é interessante que os alunos aprendam desde os primeiros assuntos que não são difíceis de compreender, que sejam bem administrados. Esta proposta elaborada traz em sua abordagem de ensino uma sugestão aplicação dos conteúdos para esses alunos, incluindo a busca histórica, a problemática e a contextualização do conteúdo a ser ministrado. Por fim entende-se que é de também responsabilidade do professor, o despertar do interesse no aluno em relação aos assuntos propostos, pois a matemática é a construção permanente de conceitos, onde, em cada um há uma maneira diferente de absorvê-los. Basta descobrir sua melhor maneira para que haja um melhor aproveitamento, de forma competente, com curiosidade, interesse, desenvolvimento intelectual e lógico.

Palavras Chaves: Fundamentos - trigonometria - Ensino-aprendizagem - contextualização.

ABSTRACT

For this study, we started with the following research problem: How can you be arranged a syllabus on the teaching of trigonometry in order to make the learning of learners more effective? From the same paths were traced to be followed, with the primary objective to elaborate a plan for teaching the fundamentals of trigonometry in order to make the student learning arouses curiosity by exploring their knowledge and taking your questions. To this was done using different tools: books, journals, monographs, internet, etc..This work involves suggestions of how to approach the teaching of trigonometry, and how it can be applied to students in their first contents, since the teaching of trigonometry proves important in student learning. Show here the first steps of this content, and how interesting it is that students learn from early issues are not that hard to understand, they are well managed. This elaborate proposal brings in its approach to teaching a suggestion application of content to these students, including historical inquiry, the issues and the context of the content being taught. Finally it is understood that it is also the responsibility of the teacher, awakening interest in student affairs in relation to proposed because mathematics is the ongoing construction of concepts, which, in each there is a different way of absorbing them. Just figure out your best way to allow for a better use, competently, with curiosity, interest, intellectual development, and logical.

Keys words: Trigonometry - Teaching and Learning - contextualization - Foundations:

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.....	17
Figura 2 - Triângulo das relações trigonométricas.....	19
Figura 3 - Círculo trigonométrico.....	20
Figura 4 - Tabela de ângulos notáveis.....	21
Figura 5 - Representação de um triângulo.....	22
Figura 6 - Triângulo trigonométrico.....	23
Figura 7- Lados do triângulo em Pitágoras.....	25
Figura 8 - Triângulo ABC.....	25
Figura 9 - Decomposição do triângulo ABC em duas partes.....	26
Figura 10 - Triângulo formado do triângulo ABC.....	26
Figura 11 - Método de demonstração de Pitágoras.....	27
Figura 12 - Triângulo que representa o trajeto do avião.....	28
Figura 13 - Representação do poste quebrado.....	29
Figura 14 - Triângulo de ângulos α e β	32
Figura 15 - Divisão de ângulos internos em partes iguais.....	32
Figura 16 - Seno, cosseno e hipotenusa no triângulo.....	33
Figura 17 - Ângulo formado entre a escada e a parede	35
Figura 18 - Figura do triângulo feita pelo observador do prédio	36
Figura 19 - Imagem de um teodolito caseiro	39
Figura 20 - Exemplo de como usar o teodolito	39

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	09
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	12
2.1 A matemática e a trigonometria.....	12
2.2 O ensino da matemática.....	13
2.3 O ensino da geometria	14
2.4 O surgimento da trigonometria.....	15
2.5 O Teorema de Pitágoras.....	17
2.6 Relações trigonométricas: Seno, cosseno e tangente.....	18
3. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	22
3.1 A resolução de problemas	22
3.2 Teorema de Pitágoras em uma demonstração.....	24
3.3 Apresentando o teorema de Pitágoras	27
3.4 Aplicação 1.....	28
3.5 Aplicação 2.....	29
4 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO, TANGENTE	31
4.1 Estudo do seno, cosseno e tangente.....	31
4.2 Aplicação 3.....	34
4.3 Aplicação 4.....	36
4.4 Elaboração de situações problema.....	38
4.5 Utilização de um teodolito caseiro para resolução de problemas.....	38
4.5.1 Materiais necessários para a confecção do teodolito	38
4.5.2 Construindo o teodolito	38
4.5.3 Utilizando o teodolito	39
4.6 Usando o teodolito caseiro para a fixação dos exercícios	40
4.6.1 Materiais Utilizados para a prática dos exercícios	40
4.6.2 Avaliação do conteúdo	40
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	43
ANEXOS I	45
ANEXO II	46

1. INTRODUÇÃO

A abordagem da trigonometria no Ensino Médio é de fundamental importância, pois muitas vezes é a única oportunidade que os discentes têm para aprender este conteúdo. Isso porque no Ensino Médio, o ensino de trigonometria nem sempre contempla os conteúdos mínimos, sendo inclusive em sua maioria, apresentado de maneira superficial aos alunos. Isso pode levar o professor a deixá-la de lado, ou tratá-lo de maneira inapropriada.

Temos também o estudo da geometria no Ensino Fundamental e Médio que é de extrema importância, pois está diretamente ligado com a trigonometria, pois, a trigonometria é o estudo da relações entre as medidas de ângulos e lados nos triângulos retângulos (trigono = triângulo e metria = medida). A geometria tem o objetivo de contribuir para a construção e abstração de diversos conceitos e é a mais importante na introdução dos estudos da trigonometria. Para tornar mais significativo seu estudo, um dos recursos que podemos utilizar é a história.

Segundo Boyer (1974), os primeiros indícios de relações entre medidas, da era moderna, datam de aproximadamente de 600 a.C., e apesar de poucos documentos que provem isso, trazem evidências que foram Tales e depois Pitágoras os primeiros a usarem estas relações nas resoluções de problemas do cotidiano.

Pitágoras leva a fama entre outros por descobrir a teoria das proporcionais e a construção das primeiras figuras cósmicas, também com poucos registros. Boyer (1974) ainda dá indícios, em sua obra “A História da Matemática”, que provavelmente tudo começou alguns séculos antes com os Babilônios, sem negar a importância de Tales e Pitágoras para a matemática, como aprimoradores deste conhecimento.

Já no que se refere a trigonometria, embora a obra tenha-se perdido, diversas citações de outros autores acredita-se que Hiparco, muito provavelmente, foi o criador da trigonometria, falaremos um pouco sobre ele no subitem: 2.5 O Surgimento da trigonometria.

1.1 Tema

Primeiros passos em estudo de trigonometria

1.2 Problema

O assunto de trigonometria se destaca dentre outros aspectos, por ser tratado como um conteúdo difícil de assimilar. Consequentemente, pela falta de interesse dos alunos pelo conteúdo, os professores que ministram o mesmo apenas o apresentam superficialmente.

Sabendo que o plano de ensino é um requisito necessário para ajudar nos caminhos do processo ensino aprendizagem de qualquer conteúdo, se faz necessário um novo olhar que trate a trigonometria de forma mais dinâmica, que facilite a sua assimilação por parte do aluno.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver um plano de ensino, para o conteúdo de trigonometria, baseado na contextualização e busca histórica, de forma a tornar a aprendizagem mais fácil, por parte dos alunos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Contextualizar a trigonometria, através de abordagem histórica, por meio da exploração do espaço físico e das formas presentes no ambiente.
- Proporcionar condições para que os alunos assimilem os conceitos básicos da trigonometria (seno, cosseno, tangente).
- Reconhecer em que situações é aplicada e qual a influência que causa.
- Mostrar ao aluno métodos que facilitem sua compreensão com relação à interpretação e resolução de problemas.

1.4 Metodologia

O estudo realizado neste trabalho trata de uma pesquisa exploratória que utilizou informações bibliográficas e documentais, pesquisas em sites da internet, revistas, livros e artigos.

De início é feita uma abordagem em trigonometria, destacando sua origem, demonstrando sua importância e aplicações na vida real. O conjunto de textos elaborados por Boyer, Kallef, Paiva, Brasil e pelo PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) serviram de referencial teórico. Em seguida exploramos o conteúdo no triângulo retângulo bem como as relações trigonométricas, além da utilização de exercícios-problema para uma melhor fixação. Por fim, são feitas algumas considerações finais.

Por ser uma pesquisa que trata da relação entre professores, alunos e práticas de ensino, considera-se uma abordagem de pesquisa qualitativa, que tem como objetivo de propor práticas de ensino aos professores com uma nova visão na abordagem em trigonometria e suas implicações no processo ensino-aprendizagem.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A Matemática e a trigonometria

No decorrer da história, percebe-se que, a matemática é um dos conhecimentos mais antigos da humanidade. “Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios são mais antigos que a arte de escrever.” (BOYER, 1974 p.4).

Ao longo da história a matemática evoluiu muito, e sofreu muitas modificações desde o princípio da contagem, com apenas alguns pares de unidades, até o surgimento da economia, capaz de movimentar milhões em questão de segundos.

O principal responsável por essa evolução foi o “repasso” de conhecimentos, que se dá, através do processo ensino-aprendizagem. Cabe ao educador matemático fazer com que este conhecimento chegue a todos os alunos, de maneira a que ele contribua efetivamente para essa missão.

Para expor o conteúdo, o professor pode utilizar como base, o capítulo3 (pág.21), “Trigonometria no Triângulo Retângulo”, e se a escola ou os alunos tiverem estrutura (material didático ou acesso a internet), uma pesquisa sobre o assunto feita pelos alunos, destacando a evolução do conhecimento dos matemáticos envolvidos. Quanto à pesquisa abaixo está listada algumas sugestões e podem ser feito em grupos, e dividido por temas, que não estão apresentados neste trabalho, como por exemplo:

- 1 – A evolução da trigonometria;
- 2 – Vida e obras de Tales;
- 3 – Vida e obras de Pitágoras;

A explanação poderá ser feita por meio de apresentação, valendo a criatividade e interesse de cada grupo. Após a apresentação o professor poderá fazer suas colocações, destacando a importância do conteúdo.

É importante que o aluno compreenda a origem e a história da matemática antes de avançar nos conteúdos.

Falaremos um pouco sobre o ensino da matemática e geometria dos próximos subitens, destacando a importância dos mesmos na introdução da trigonometria.

2.2 O Ensino da Matemática

De acordo com o processo de ensino vigente, as competências matemáticas devem ser trabalhadas desde o início dos estudos passando por toda carreira estudantil. Para que os objetivos a serem alcançados com a educação matemática nos departamentos educacionais tenham sucesso, deve-se trabalhar de forma objetiva, desenvolvendo o interesse do aluno pela matemática. Cabe aos professores despertar o gosto dos alunos pela disciplina.

O que mais impressiona no ensino da matemática, é a metodologia utilizada. Na atualidade, professores ainda rendem-se aos processos tradicionalistas, e de forma muito abstrata, não dificultando, mas deixando de facilitar a aprendizagem dos alunos.

Alguns professores insistem em reclamar que os conteúdos não têm aplicações, só que “... não existe ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real”. (LOBACHEVSKY apud BOYER, 1974 p.387), leva-se assim a uma conclusão de uma falta de interesse ou gosto de alguns professores por alguns conteúdos.

O saber pensar matemático dar-se-á quando a matemática for trabalhada de forma criativa, crítica e contextualizada. O “o que”, e o “como” fazer precisam ser repensados tendo-se em vista “para que” e o “quando” fazer Educação Matemática.

O documento PCN (2000, p.111) afirma que:

[...] aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação[...]

Partindo do conceito de que a matemática é uma construção histórica da humanidade, um produto cultural produzido por diferentes povos, oriundos de diferentes regiões do planeta, acredita-se que o contato do aluno com estes lugares e tempos diferenciados, marcados pelo contexto sócio - histórico - econômico - cultural, servirá como motivação para um maior entendimento e gosto pela matemática. O estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades presentes quanto ao conceito do que está sendo trabalhado, porém

a ausência do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos em praticamente todos os livros didáticos dificulta a utilização desta proposta, pelo professor.

É necessário que o professor tenha o conhecimento com o qual está trabalhando, tenha a responsabilidade de fazer com que esse conhecimento ajude na formação de seu aluno, tornando-o um cidadão crítico, criativo e transformador da sua realidade.

Para isso, os PCNs (2007) indicam a resolução de problemas:

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se completam quando o indivíduo está empenhado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples analogia: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos semelhantes aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN, 2007 p.112)

É importante que o professor tente contextualizar e enxergar matemática no seu dia-a-dia, e perceber que ela pode ser trabalhada a partir de notícias econômicas dos jornais, da curva da água do bebedouro, de plantas de casas, de revistas, enfim, de todo o ambiente.

Essa consciência só virá quando o professor perceber a si mesmo para muito além de um mero transmissor de conhecimento. O professor precisa encontrar as razões e os fins que darão sentido ao seu fazer. Quando as razões e os fins forem encontrados, a busca pelo conhecimento inovador será uma consequência natural. Ao querer fazer a diferença na construção de uma nova história para a educação, é necessário primeiro acreditar que a mudança é possível, até porque “... a única coisa fácil no que diz respeito ao ato de ensinar é criticar os defeitos desse ou daquele professor” (GIKOVATE, 2001 p.51). É preciso ser otimista, mas só isso não basta. As crenças precisam se transformar em ações.

A seguir será abordado um pouco da história e conceitos de geometria, que é uma disciplina de extreme importância a ser aprendida pelos alunos, antes de serem apresentados a trigonometria.

2.3 O Ensino da Geometria

A origem da geometria assim como a de muitos conhecimentos da matemática não há como atribuir a uma única pessoa o seu descobrimento. Porém, acredita-se que seus

primórdios no Egito e os primeiros indícios da geometria moderna, datam de aproximadamente 600 a.C. com os matemáticos Tales e Pitágoras.

Apesar de sua importância no contexto histórico-cultural a geometria não é ensinada de forma adequada. O problema é tratado por KALEFF (1994, p. 19) da seguinte forma:

“... o ensino de geometria não só é confundido com o desenho geométrico como suas aulas são ministradas separadamente das de matemática... muitas vezes por outros profissionais cuja formação não pode ser adequada à tarefa em questão” (KALEFF, 1994 p.19).

Com isso as competências a serem desenvolvidas nos alunos ficam defasadas.

Vejam alguns fatores que devem ser levados em consideração:

- Estudo ou exploração do espaço físico e das formas;
- Orientação, visualização e representação do espaço físico;
- Visualização e compreensão das formas geométricas;
- Denominação e reconhecimento das formas segundo suas características;
- Classificação de objetos segundo suas formas;
- Estudo das propriedades das figuras e as relações entre elas;
- Construção de figuras e modelos geométricos;
- Medição do espaço métrico uni, bi e tri dimensional.

Para isso, as competências referentes à geometria devem ser repassadas desde o segundo ano do Ensino Fundamental, respeitando o nível de absorção de conteúdo pelo aluno, pois cada um apresentará um nível de aprendizado diferenciado e por esta razão é importante fazer com que o máximo de alunos possível consiga acompanhar as aulas, mas procurando entender as dificuldades dos demais.

2.4 O Surgimento da trigonometria

Os primeiros estudos em trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C.

Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

A utilização da trigonometria para efeito de medida é muito antiga, e acompanha a geometria ao longo de sua história, cerca de 600 a.C., porém os principais estudos com relação as relações entre seus lados e ângulos deve-se a um astrônomo grego chamado Hiparco de Nicéia (190-125 a.C), considerado o pai da trigonometria.

“Trigonometria é um vocábulo criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613), do grego *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida)” (MARQUES, 2008), e trata-se da parte da matemática em que se estudam as funções trigonométricas e se estabelecem os métodos de resolução de triângulos (figura geométrica bidimensional com três lados que formam três ângulos internos. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°).

Esse estudo é ainda subdividido em duas partes: trigonometria plana (Parte da trigonometria que investiga os triângulos planos), e trigonometria esférica (Parte da trigonometria em que se estudam os triângulos sobre as superfícies esféricas, nesse caso, é chamada de Triângulos Geodésicos e têm propriedades diferentes). Para nível de Ensino Médio reduz-se apenas ao estudo da parte plana, por ser de maior utilidade e aplicabilidade, e por ter um número de horas/aula insuficiente, para obter-se de uma maior aproveitamento.

A aplicação da trigonometria nas diversas áreas das ciências exatas é um fato incontestável. Conhecer essa verdade é de fundamental importância para os alunos do Ensino Médio, sendo dever do professor de Matemática expor o assunto da melhor maneira possível, estabelecendo um vínculo necessário em relação às futuras escolhas profissionais. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Segundo PAIVA:

“Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil etc.” (PAIVA, 2003 p. 113)

Nota-se, porém, que uma das maiores dificuldades encontradas por alunos do Ensino Médio no que diz respeito a trigonometria, é o fato da memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável.

A seguir apresentamos uma das principais relações e teoremas relacionados com a geometria e, mais especificamente com a trigonometria.

2.5 Teorema de Pitágoras

Pitágoras (570–496 a.C.), nascido em Samos, Grécia, era matemático e filósofo. Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales. Boyer (1974, p. 35) diz que “embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto seria improvável dada a diferença de meio século entre suas idades”.

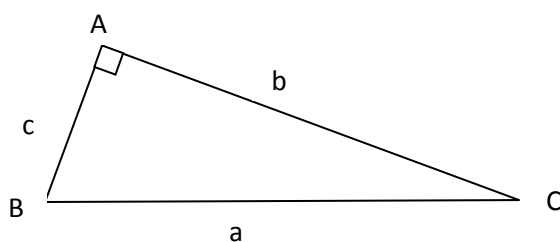
Fundou uma escola mística e filosófica em Crotona (colônias gregas na península itálica), cujos princípios foram determinantes para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidental sendo os principais temas a harmonia matemática, a doutrina dos números e o dualismo cósmico essencial.

Seu nome foi atribuído a uma das mais antigas relações matemáticas e trigonométrica conhecida como "Teorema de Pitágoras", sendo assim a mais importante relação entre os lados de triângulos retângulos (aquele que possui um ângulo de 90°). Alguns defendem que não foi ele quem inventou o teorema, pois esse já era conhecido pelos babilônios, mas é possível que o teorema tenha o seu nome, pois, acredita-se que ele tenha sido o primeiro a dar uma demonstração geral.

Através dessa relação é possível descobrir a medida de um lado de qualquer triângulo retângulo, desde que as outras duas sejam conhecidas, ou, o problema traga informações suficientes para deduzi-lo (por exemplo: as três medidas na forma de polinômios de uma só variável).

Temos por teorema de Pitágoras: “A área de um quadrado construído com a medida da hipotenusa, é igual a soma das áreas dos quadrados construídos com as medidas dos catetos.” Vejamos a seguir na figura 1:

Figura 1: Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Próprio autor

2.6 Relações trigonométricas: seno, cosseno, tangente

Das relações trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos (reunião de dois segmentos de reta orientados, ou duas semirretas orientadas, a partir de um ponto comum).

Não se sabe ao certo quais as razões pelas quais, foi escolhido o número 360 para se dividir a circunferência, sabe-se apenas que o número 60 é um dos menores números, menores do que 100, que possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado. Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 “... é que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias, o que era uma estimativa razoável para a época.” (VIANA, 2005).

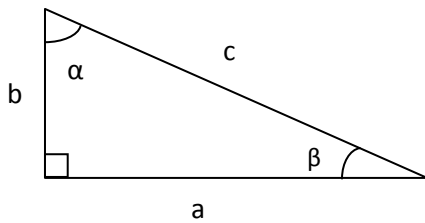
“... medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denota-se 1 rad.” (VIANA, 2005)

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo. Para isto se estabelecem razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto). Para isso, o triângulo retângulo a ser estudado apresenta as seguintes características:

Quanto aos ângulos internos: além do ângulo reto, apresenta dois ângulos agudos e complementares, geralmente são nomeados com as letras gregas α (alfa), β (beta) ou θ (teta). Os catetos e a hipotenusa são nomeados com letras minúsculas do alfabeto português. Desta forma, dar-se o nome de hipotenusa para o lado do triângulo oposto ao ângulo reto, cateto adjacente a α , lado do triângulo que junto com a hipotenusa forma o ângulo agudo que está sendo considerado, e cateto oposto a α , lado do triângulo que se opõe ao ângulo considerado. Veja na figura 2.

Figura 2: Triângulo das relações trigonométricas



Fonte: Próprio autor

Assim sendo, “num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e da hipotenusa”. (BARRETO, 1998 p. 191), denotando-se:

$$\text{sen}A = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Outra das razões é que “num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa” (BARRETO, 1998 p. 191) denotando-se:

$$\text{cos}A = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

A última das razões é que "num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e do cateto adjacente a esse ângulo" (BARRETO, 1998, P. 191) denotando-se:

$$\text{tg}A = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lembre-se que as razões que representam respectivamente o seno, o cosseno e a tangente, são válidas para o triângulo exposto anteriormente e não devem ser decoradas ou tomadas como regra. Desta forma, valoriza-se o conceito e não a memorização de fórmulas.

Uma grande evolução dos conceitos trigonométricos aconteceu após a utilização do ciclo trigonométrico, chamado anteriormente de círculo trigonométrico. Trata-se de “eixos coordenados que possuem como unidade de medida o raio de uma circunferência orientada, esta com centro coincidente com a origem dos eixos coordenados.” (MURARO, 2004 p. 365).

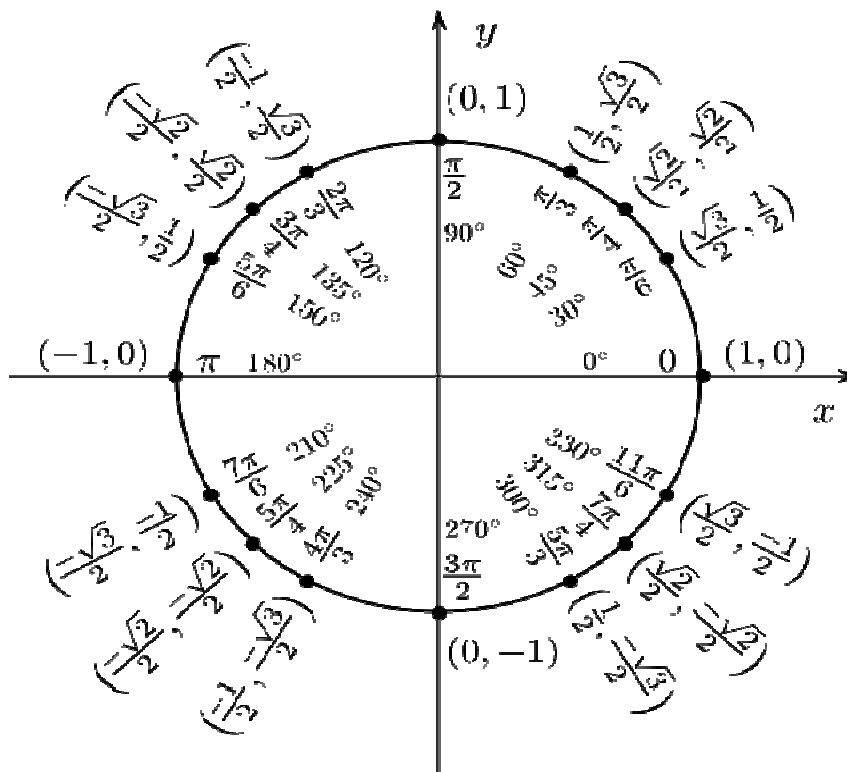
Euler (séc. XVIII), ao usar sistematicamente o círculo trigonométrico de raio 1 introduziu o conceito de seno, cosseno e tangente, como números, razões ou coordenadas de pontos e as notações atualmente utilizadas. Na sua obra "Introduction", de 1748, estabeleceu o tratado analítico das funções trigonométricas. (VARANDAS, 2003)

Euler, Nascido em Basileia, (1707 – 1783), foi um dos melhores e mais produtivos matemáticos da história, e com sua contribuição acima citada convencionou a utilização de raio 1 para o ciclo trigonométrico. Desta forma, “como o ciclo é orientado, a cada medida em graus que se tenha, corresponderá um único ponto no ciclo.”(MURARO, 2004 p. 365)

Com esta definição pode-se estabelecer os mesmos conceitos para o seno, o cosseno e para a tangente. Considerando a figura 3 ao lado, onde está representado um círculo trigonométrico (centro na origem e raio unitário). Tem-se da simples observação da figura os seguintes pontos notáveis: A(1;0) , B(0;1) , A'(-1;0) e B'(0;-1).

Sendo o raio do círculo trigonométrico igual a 1 (por definição), conclui-se que o seno e o cosseno de um arco são números reais que variam no intervalo real de -1 a +1.

Figura 3: Círculo trigonométrico



Fonte: Site Professor Junior Vieira

É importante na aula contemplar os conceitos de ângulo para que todos resgatem ou aprendam sobre este sistema de medida.

No triângulo, os ângulos de 30° , 45° e 60° são considerados notáveis, pois estão presentes em diversos cálculos. Por isso seus valores trigonométricos correspondentes são organizados em uma tabela, veja:

Figura 4: Tabela de ângulos notáveis

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Canal do Educador

Pode-se acrescentar um exemplo de como usar esses ângulos notáveis em simples exercícios para a assimilação do conteúdo pelos alunos.

Exemplo:

Obtenha o valor de seno de 120° .

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } (180^\circ - 120^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \mathbf{0,8660}$$

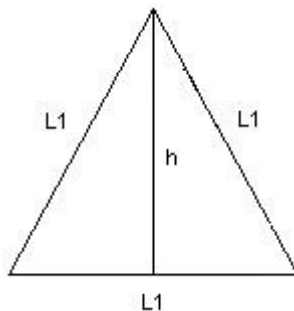
3. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria (do Grego trigōnon "triângulo" + metron "medida", ou seja, medida do triângulo) é um ramo da matemática que estuda os triângulos, particularmente triângulos em um plano onde um dos ângulos do triângulo mede 90 graus. Também estuda especificamente as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas. A abordagem da trigonometria facilita outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Triângulo é uma figura geométrica que possui três lados e três ângulos. Para formarmos um triângulo basta unirmos três pontos quaisquer por segmentos de reta, desde que não alinhados.

Figura 5: Representação de um triângulo

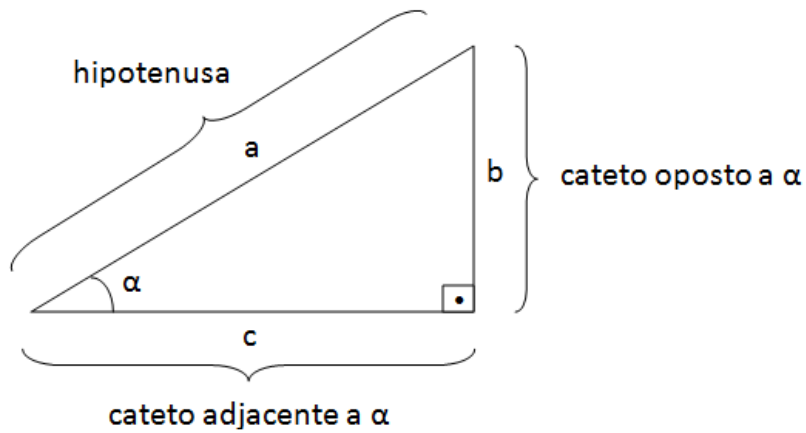


Fonte: Próprio autor

A abertura obtida por duas retas, unidas pelo mesmo ponto, é chamada ângulo que possui como de sistema internacional de medida o radiano, sendo também muito usado o grau. Nos triângulos a soma de seus ângulos internos é 180° .

O triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90° (noventa graus). O ângulo reto é representado pelo símbolo \angle . Num triângulo retângulo, denomina-se hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se catetos.

Assim sendo, tem-se:

Figura 6: Triângulo Trigonométrico

Fonte: Site Sou + Enem

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tga} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

A exploração e compreensão de alguns desses indispensáveis temas leva a um importante item que será apresentado a seguir, que é a "resolução de problemas", que sempre é apresentado como uma grande dificuldade entre os alunos.

3.1 A Resolução de Problemas

O entendimento das dificuldades enfrentadas pela maioria dos alunos passa por grandes desafios. O primeiro deles, certamente, é a compreensão exata do que seja um problema.

De início, pode-se afirmar que a resolução de problemas, como estratégia para o desenvolvimento da educação matemática, não deve parecer um "mal necessário", produzido

pela lista interminável de "problemas", que, normalmente, ao término de cada unidade programática, o professor apresenta aos alunos.

O uso tradicional dos problemas, reduzidos à aplicação e sistematização dos conhecimentos, atrai a antipatia e o desinteresse do aluno, impedindo o seu pleno desenvolvimento intelectual. O treino excessivo de definições, técnicas e demonstrações se tornam uma atividade rotineira e mecânica, no qual a preocupação do aluno é apenas a realização do exercício e não sua compreensão. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das ideias lógica-matemáticas impede a necessária construção dos conceitos. Desta forma, "o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato, incompreensível" (BRASIL, 1995, p. 30).

O conhecimento matemático só evoluiu a partir de muitas respostas às muitas perguntas que foram feitas ao longo da história. A criatividade, o censo crítico, a curiosidade e o prazer formaram o combustível que alimentou este processo de descoberta, a matemática não teria tal evolução se não fosse a insistência em descobrir novos métodos de resolução feito pelos grandes estudiosos.

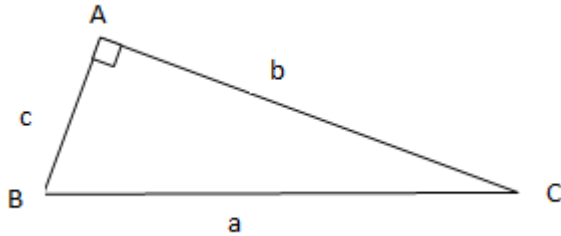
No item seguinte será apresentada uma importante demonstração do teorema de Pitágoras, como exercício de fixação, que pode ser apresentado aos alunos, assim como, mais adiante serão apresentados outros problemas que ajudarão na interpretação dos conceitos.

3.2 Teorema de Pitágoras em uma demonstração

Através dessa relação é possível descobrir a medida de um lado de qualquer triângulo retângulo, desde que as outras duas sejam conhecidas, ou, o problema traga informações suficientes para deduzi-lo (por exemplo: as três medidas na forma de polinômios de uma só variável).

Tem-se pelo teorema de Pitágoras: "A soma do quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos", desta forma, considera-se o triângulo retângulo a seguir:

Figura 7: Lados do triângulo em Pitágoras



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Próprio Autor

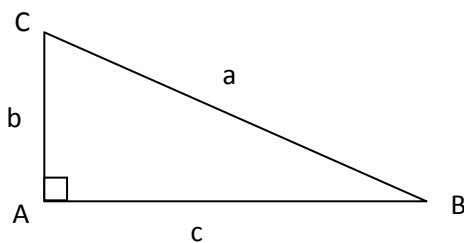
Pelo teorema: $a^2 = b^2 + c^2$, sendo **a** representa a hipotenusa, **b** e **c** os catetos. Lembra-se que as representações algébricas são apenas ilustrativas e não se aconselha decorar a fórmula e sim o conceito.

Demonstração:

Para extrair algumas propriedades, faremos a decomposição do triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos menores: ACD e ADB (Figuras 8 e 9).

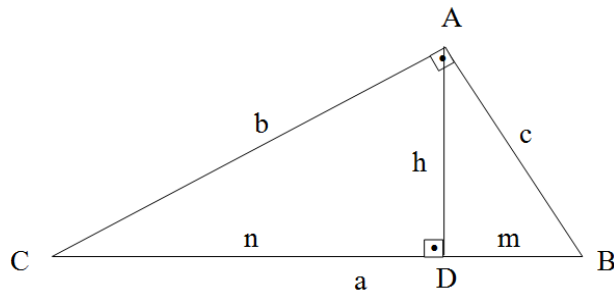
Assim, o ângulo A será decomposto na soma dos ângulos $\hat{C}AD = B$ e $\hat{D}AB = C$.

Figura 8: Triângulo ABC



Fonte: Próprio Autor

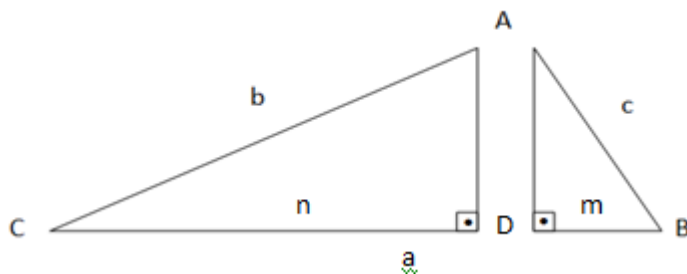
Figura 9: Decomposição do triângulo ABC em duas partes



Fonte: Próprio Autor

Observamos que os triângulos retângulos ABC, ADC e ADB (Figura 10) são semelhantes.

Figura 10: Triângulos formados do triângulo ABC



Fonte: Próprio Autor

Assim no triângulo da figura 10, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m}$$

Logo:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \text{ equivale a } c^2 = a.m$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \text{ equivale a } b^2 = a.n$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \text{ equivale a } a.h = b.c$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \text{ equivale a } h^2 = m.n$$

Existem também outras relações do triângulo inicial ABC. Como $a = m + n$, somando c^2 com b^2 , obtemos:

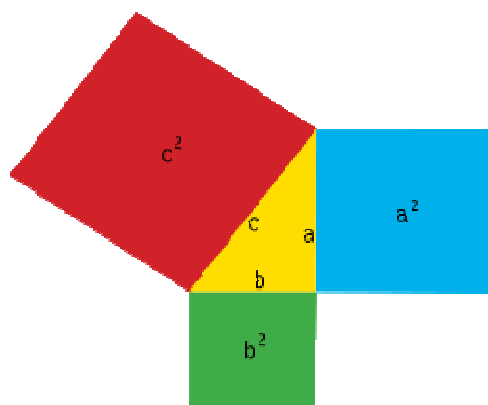
$$c^2 + b^2 = a.m + a.n = a.(m + n) = a.a = a^2$$

Que resulta no Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

3.3 Apresentar o teorema de Pitágoras.

Na explanação do teorema de Pitágoras, o professor previamente vai pedir a seus alunos que tragam de suas casas lápis de colorir, régua e tesoura. Durante a aula o professor vai distribuir duas folhas de ofício do tipo A4 para cada aluno, os mesmos poderão fazer dois quadrados e dividi-los conforme a figura I, exposta a seguir, desta maneira o professor poderá demonstrar que a soma dos quadrados de lado “a” e “b” é igual a soma do quadrado de lado “c”, ou seja, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, sendo esta a base do conceito do Teorema de Pitágoras.

Figura 11: Método de demonstração de Pitágoras



(Provável forma usada por Pitágoras para demonstrar o teorema que leva o seu nome.)

Fonte: Wikipédia

Após a conceituação, destacam-se 2 aplicações interessantes a serem utilizadas, cujas quais, facilitam a exploração criativa dos alunos em seus cotidianos.

3.4 Aplicação 1

Para resolver este problema, inicialmente veremos uma representação gráfica trazida pelo próprio autor.

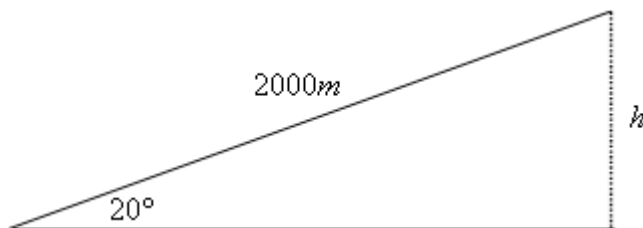
De acordo com os dados apresentados no problema, e verificados na representação gráfica, percebe-se que é possível formar um triângulo retângulo:

Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 20° . Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente?

(Utilize: $\text{sen } 20^\circ = 0,342$; $\text{cos } 20^\circ = 0,94$ e $\text{tg } 20^\circ = 0,364$).

Desta forma, tem-se:

Figura 12: Triângulo que representa o trajeto do avião



Fonte: Exercícios Brasil Escola

Utilizando as relações trigonométricas já vistas anteriormente, temos:

$$\text{Sen}20^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{2000}$$

Substituindo $\text{sen}20^\circ$, temos:

$$0,342 = \frac{h}{2000}$$

Fazendo uma simples regra de Três:

$$h = 2000 \times 0,342$$

$$h = 684\text{m}$$

Logo,

A altura atingida pelo avião será de 684 metros.

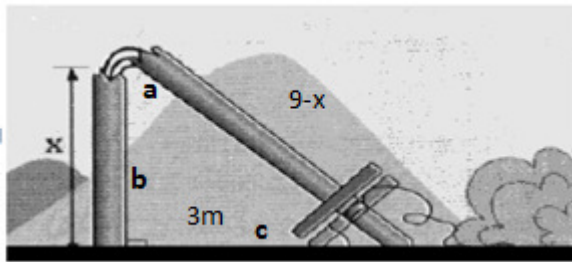
3.5 Aplicação 2

Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em um ponto a distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou?

Resolução do problema de aplicação 2:

A exemplo dos problemas anteriores é de fundamental importância, na resolução de problemas, a representação gráfica do mesmo, para este usaremos uma ilustração:

Figura 13: Representação do poste quebrado



Fonte: Scribd

Neste problema é possível perceber que diversos campos da matemática são integrados, de forma ser necessário o conhecimento de outros conceitos, para obter-se êxito na resolução do mesmo. O objetivo deste problema além da altura em que o poste quebrou, é estimular o aluno a integrar a trigonometria com o conteúdo de sistema, aumentando o poder de abstração de novos conceitos, facilitando a resolução de novos problemas.

Do problema são retirados os seguintes dados:

- x (distância entre o solo e o ponto onde o poste quebrou-se, no triângulo representa um dos catetos).
- $9 - x$ (parte do poste acima da fratura, no triângulo representa a hipotenusa).
- 3 m (distância entre a base do poste e a extremidade superior, cuja qual se encostou ao solo, no triângulo representa outro cateto).
- 9 m (comprimento inicial do poste, antes da quebra).

Fazendo os cálculos usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h_i = 9\text{m}$$

$$b = x = ?$$

$$a = 9 - x$$

$$c = 3\text{m}$$

Sabemos que pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Substituindo os valores:

$$(9 - x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$81 - 18x + x^2 = x^2 + 9$$

$$x^2 - x^2 - 18x = 9 - 81$$

$$-18x = -72 \cdot (1)$$

$$x = \frac{72}{18} = 4$$

Logo, $x = 4$.

Desta forma a altura x em que o poste quebrou é de 4 m.

Destaca-se que se os alunos compreenderem bem o conceito, não há a necessidade de trabalhar muitos exercícios em sala de aula, neste caso poderá haver alguns como tema de casa.

4. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO, TANGENTE

Das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos (reunião de dois segmentos de retas orientados, ou duas semirretas orientadas, a partir de um ponto comum).

Não se sabe ao certo quais as razões pelas quais, foi escolhido o número 360 para se dividir a circunferência, sabe-se apenas que o número 60 é um dos menores números, menores do que 100, que possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado. Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 "... é que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias, o que era uma estimativa razoável para a época." (VIANA, 2005). O sistema sexagesimal justifica ainda a divisão dos graus em minutos, a sexagésima parte de um grau, e do segundo, a sexagésima parte do minuto.

Apesar de muito comum, a utilização da notação em graus, para o sistema internacional, a unidade de medida para ângulos é o radiano, (...) medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denota-se 1 rad. (VIANA, 2005)

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

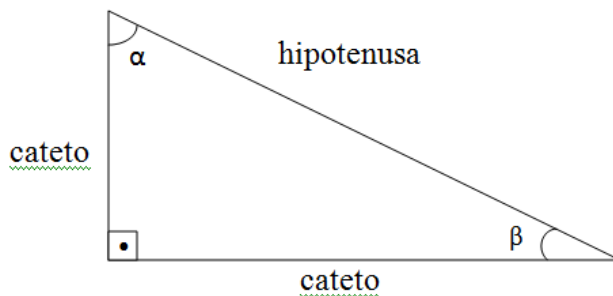
4.1 Estudo do Seno, Cosseno e Tangente

Das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos.

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo, para isto se estabelecem razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto). Para isso, o triângulo retângulo a ser estudado apresenta as seguintes características:

Figura 14: Triângulo de ângulos α e β



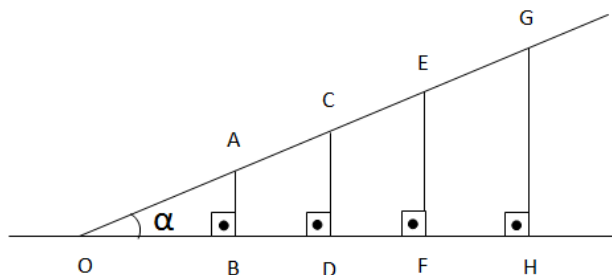
Fonte: Próprio Autor

Quanto aos ângulos internos: além do ângulo reto, apresenta dois ângulos agudos e complementares, geralmente são nomeados com as letras gregas α (alfa), β (beta) ou θ (teta).

Os catetos e a hipotenusa são nomeados com letras minúsculas do alfabeto português. Desta forma, dar-se o nome de hipotenusa para o lado do triângulo oposto ao ângulo reto, cateto adjacente a α , lado do triângulo que junto com a hipotenusa forma o ângulo agudo que está sendo considerado, e cateto oposto a α , lado do triângulo que se opõe ao ângulo considerado.

Consideremos um ângulo agudo qualquer de medida α , levando-se em conta os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α .

Figura 15: Divisão dos ângulos internos em partes iguais



Fonte: Site Ebah

Nota-se que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são todos semelhantes. Logo:

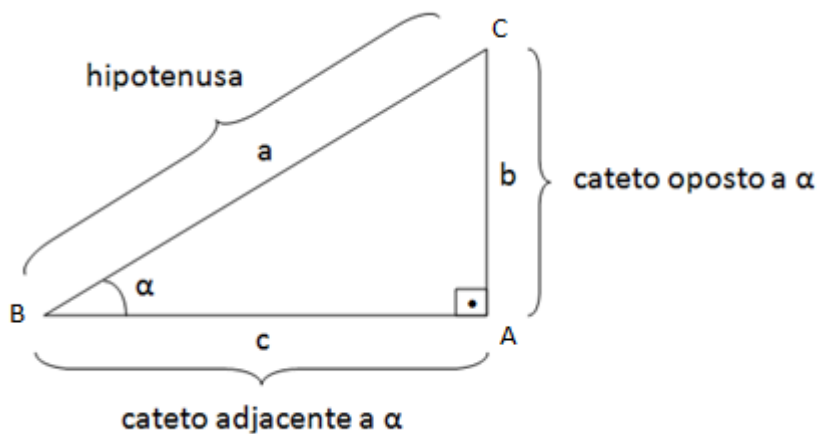
$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = r_2$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = r_3$$

Respectivamente, as razões (trigonométricas) r_1 , r_2 , r_3 são denominadas de: seno do ângulo α ($\text{sen } \alpha$), cosseno do ângulo α ($\text{cos } \alpha$) e tangente do ângulo α ($\text{tg } \alpha$).

Figura 16: Seno, cosseno e hipotenusa no triângulo



Fonte: Site Mundo da Matemática

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

Assim sendo, “num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto à esse ângulo e a hipotenusa”. (BARRETO, 1998 p. 191), denotando-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

ou

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Outra das razões é que “num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente à esse ângulo e a hipotenusa” (BARRETO, 1998 p. 191) denotando-se:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

ou

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

A última das razões é que “num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto à esse ângulo e o cateto adjacente à esse ângulo” (BARRETO, 1998 p. 192), denotando-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

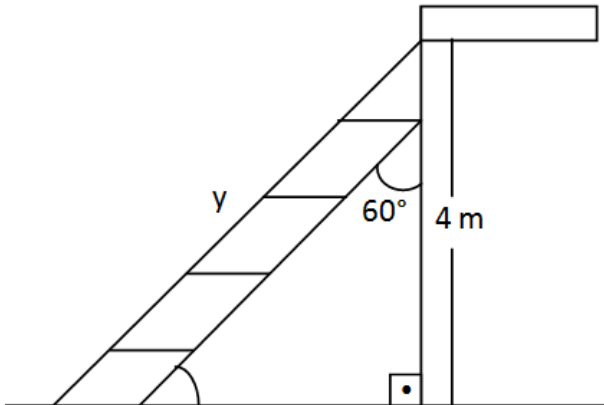
É importante que os alunos se deparem com problemas aplicados, buscando o interesse pelo conteúdo e estimulando-os a resolver problemas do cotidiano de maneira simples. Tais problemas podem ser semelhantes aos expostos a seguir, divididos em 2 importantes aplicações:

4.2 Aplicação 3

Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4 m do solo, forma com esta parede um ângulo de 60° . Qual é o comprimento da escada em m? (GIOVANNI, 1994)

Problema aplicado, de fácil visualização e interpretação dos dados como se vê na ilustração trazida pelo próprio autor.

Figura 17: Ângulo formado entre a escada e a parede



Fonte: Brainly.com.br

De acordo com a ilustração, podem-se organizar os dados:

- 60° (ângulo formado entre a parede e a escada).
- 4 m (altura da parede até o ponto de apoio da escada).
- y (incógnita usada para representar o comprimento da escada).

Após a organização dos dados, percebe-se que a altura da parede até o ponto de apoio da escada, com relação ao ângulo, trata-se do cateto adjacente, enquanto o comprimento da escada trata-se da hipotenusa do triângulo formado pelas retas escada/parede/solo. Através da interpretação dos dados, nota-se que é conveniente a utilização da função cosseno para a resolução do problema, que na sua essência trata-se da razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. Como o ângulo de referência é o de 60° , e a função é o cosseno, busca-se na tabela (anexo I), ou calculadora, e verifica-se que $\cos 60^\circ = 0,5$.

Denotando-se os dados interpretados tem-se:

$$\cos 60^\circ = \frac{4}{y}$$

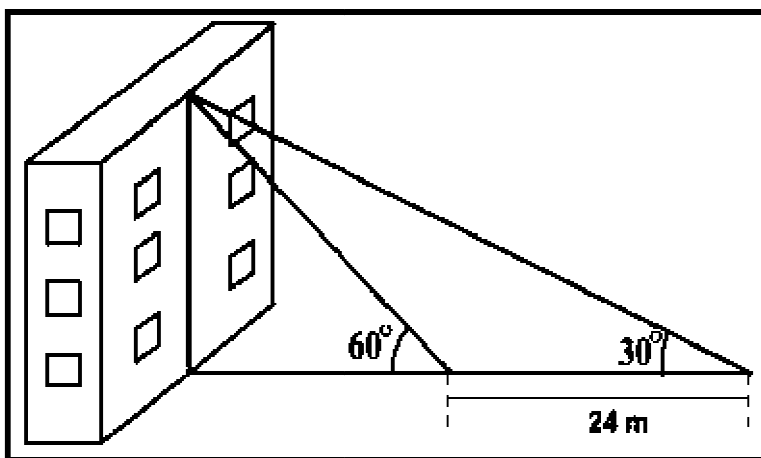
$$\frac{1}{2} = \frac{4}{y} \rightarrow y = 8\text{m}$$

Assim sendo, conclui-se que a escada possui 8 m de comprimento.

4.3 Aplicação 4

A partir de um ponto observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30° . Caminhando 24 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60° . (GIOVANNI, 1994)

Figura 18: Figura do triângulo feita pelo observador do prédio



Fonte: Scibd - Relações trigonométricas no triângulo retângulo 2

Desprezando a altura do observador, calcule, em metros, a altura do prédio.

Problema de fácil aplicação, objetiva integrar diferentes ramos da matemática, aumentando a complexidade e o poder de abstração pelo aluno.

Para resolução do problema, é importante organizar os dados definindo incógnitas para as medidas a serem encontradas.

- y (incógnita que representa a altura do prédio)
- x (incógnita que representa a distância entre o prédio e o segundo ângulo observado).
- $x + 24$ (distância entre o prédio e o ponto onde o primeiro ângulo foi observado).
- 30° e 60° (respectivamente a medida do primeiro e do segundo ângulo observado).

Como as medidas de referência, a altura do prédio e a distância entre o prédio e os pontos observados, referem-se respectivamente ao cateto oposto aos ângulos e aos catetos adjacentes aos ângulos, a função tangente deve ser utilizada, e sabendo que os ângulos observados são 30° e 60° , observando-se os dados na tabela de ângulos notáveis (anexo II), tem-se:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$$

Denotando os dados tem-se:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{y}{x+24} \rightarrow \operatorname{tg}(30^\circ) \cdot (x+24) = y$$

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{y}{x} \rightarrow \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot x = y$$

Logo:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) \cdot (x + 24) = \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot x$$

Resolvendo:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x + 24) = \sqrt{3} \cdot x$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{24\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}x$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{24\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}x}{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}x}{3} = \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$2\sqrt{3}x = 24\sqrt{3}$$

$$2x = 24$$

$$x = 12, \text{ Assim sendo, } y = \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot 12$$

Resolvendo:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 12, \text{ onde } y = 20,76\text{m}$$

Como foi feito um resgate histórico no início do conteúdo, talvez algum aluno pergunte sobre o raio unitário, com isso é importante que o professor demonstre como os matemáticos chegaram aos valores de seno, cosseno e tangente atribuídos para cada ângulo presente na tabela (anexo II de ângulos notáveis) ou calculadora, utilizando um ciclo trigonométrico. Sendo que este plano de ensino limita-se aos fundamentos básicos da trigonometria, o estudo da trigonometria na circunferência ficará para um outro momento.

4.4 Elaboração de situações problema

Neste momento, depois de tiradas as dúvidas pertinentes aos problemas de aplicação (expostos anteriormente), o professor poderá dividir a turma em grupos, com quatro ou cinco

alunos cada grupo, com o propósito dos mesmos elaborarem problemas e desafios a serem solucionados com os conceitos aprendidos. Se os problemas elaborados forem fora dos limites da escola (por exemplo: Qual a altura de tal prédio da cidade?) os mesmos serão solucionados como tema de casa. Para que os problemas a serem elaborados não sejam todos semelhantes, uma vez que os problemas envolvendo a tangente são teoricamente mais fáceis de ser elaborado, o professor pode definir que cada grupo elabore problemas diferenciados, uns aplicando o seno, outros o cosseno e outros a tangente. Se os problemas elaborados possam ser resolvidos dentro do limite da escola (por exemplo: Qual a altura da escola?), o professor acompanhará os alunos até o local onde estes possam ser resolvidos (o pátio da escola, por exemplo).

4.5 Utilização de um teodolito caseiro para resolução de problemas

O teodolito é um “instrumento óptico para medir com precisão ângulos horizontais e verticais”(FERREIRA, 2000 p. 668) utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura.

Basicamente é um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal, e montado sobre um tripé centrado e verticalizado, podendo possuir ou não uma bússola incorporada.

Para solucionar os problemas criados pelos próprios alunos, os mesmos poderão construir um teodolito caseiro de acordo com o modelo a seguir.

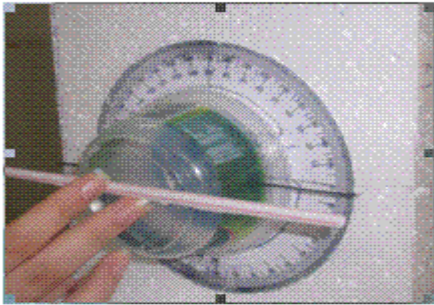
4.5.1 Materiais necessários para confecção do teodolito

- Um transferidor de plástico ou madeira.
- Canudo ou tubo de antena
- Cola
- Tachinha

4.5.2 Construindo o teodolito

Fixe a tachinha na base central do transferidor de forma que ela fique com mobilidade. Cole o canudo na tachinha, de modo que a sua movimentação seja completa.

Figura 19: Imagem de um teodolito caseiro

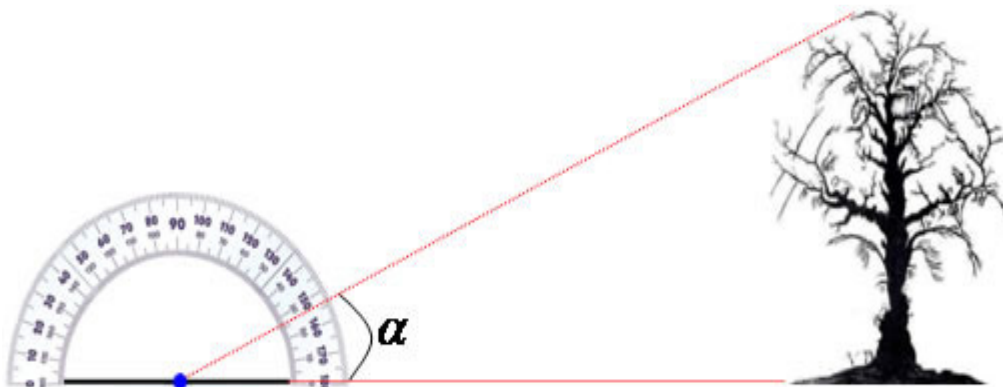


Fonte: Portal do Professor

4.5.3. Utilizando o Teodolito

O primeiro passo consiste em mirar o canudo na posição horizontal correspondente à base do que se deseja medir, uma árvore, um poste, uma casa, etc., fixando o teodolito. O segundo passo consiste em deslocar o canudo focando o ponto extremo do que está sendo medido. O ângulo indicado no transferidor deve ser analisado com cuidado devido à espessura do canudo usado como mira.

Figura 20: Exemplo de como usar o teodolito



Fonte: Canal do Educador

Conhecendo o valor do ângulo e a distância do ponto de medição até o objeto medido, basta utilizarmos a relação trigonométrica adequada para determinarmos a altura.

Caso a medida seja feita por uma pessoa de pé, ressaltamos que a altura entre os olhos da pessoa e o chão deve ser acrescentada ao resultado da medição.

4.6 Usando o teodolito caseiro para fixação dos exercícios

Quanto a resolução dos exercícios, é válido lembrar que os mesmos objetivam a prática dos conceitos adquiridos, e não a memorização para posterior utilização como padrões para resolução de problemas semelhantes. Dos exercícios neste plano de ensino, poderão ser usados todos apenas se o professor achar necessário, caso contrário apenas o suficiente para sanar as dúvidas e a formação dos conceitos dos alunos. A utilização demasiada de exercícios repetitivos pode atrapalhar o interesse do aluno pelo conteúdo.

As demonstrações algébricas também são necessárias, mas devem ser consequência de conceitos obtida na aprendizagem, contudo há algumas formas de demonstrações que podem ser trabalhadas no momento em que os alunos já tenham condição de absorver e relacionar com o conteúdo aprendido.

Para melhor preparação do professor, é recomendado que este tenha o máximo de informações sobre o assunto, para isso é importante que este tenha o conhecimento de todo o projeto aqui desenvolvido, bem como dos tópicos:

“A matemática”, “O Ensino da Matemática”, “O Ensino da Geometria”, “A Resolução de Problemas” e “A Trigonometria”.

4.6.1 Materiais utilizados para prática do exercício

Para o desenvolvimento do conteúdo trigonometria, será necessária a utilização de: lápis, caneta, borracha, transferidor, régua, caderno, quadro-negro, giz, geoplano, teodolito caseiro e trena.

4.6.2 Avaliação do conteúdo

Na avaliação do conteúdo, será levado em consideração a participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos exercícios. Todos os trabalhos poderão ser avaliados: Pesquisa Histórica, Elaboração e Resolução dos Problemas,

Construção do Teodolito Caseiro e Avaliação. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portfólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e a defasagem no decorrer da aprendizagem, podendo ser descartado a necessidade de avaliação escrita formal.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a construção do plano de ensino notou-se que é possível se desligar das abordagens tradicionais, partindo para uma aula mais dinâmica e eficiente despertando o interesse e buscando a aprendizagem do aluno.

Com o passar do tempo, a preocupação com a necessidade de difundir esses conhecimentos dando oportunidade a todos de apropriarem-se deles, também se inicia a preocupação na forma com que estes são ensinados na escola. Ou seja, com os processos adotados pelos professores, que garantam o direito de todos ao conhecimento.

Hoje, em uma época em que os conteúdos de matemática é, em grande parte, abordada de maneira formal e abstrata, é de primordial importância que o professor passe a refletir sobre quais metodologias podem ser mais adequadas a conteúdos como a trigonometria. Deve - se ter a perspectiva de que não aconteça simplesmente o repasse de todos os conteúdos, mas sim, que aconteça a aprendizagem dos mesmos.

Esses pressupostos embasaram o desenvolvimento desse trabalho, visando, ainda, compor um instrumento para oportunizar futuras discussões sobre possibilidades de melhorar a qualidade de ensino, principalmente na área da Trigonometria.

A aprendizagem dos conteúdos de trigonometria na sua essência é tão importante quanto prazerosa, e nos tempos atuais certamente os professores podem fazer a diferença, buscando uma sociedade mais culta, responsável organizada e qualificada. Quando começa-se a pensar, um pouco, como os gênios do passado, entende-se o que realmente eles buscavam em suas descobertas e permitindo entender a fundo os conteúdos por eles registrados, proporcionando tanto a compreensão por parte alunos dos conteúdos que estudam, quanto por parte dos que ensinam.

Dificuldades foram encontradas durante todo o desenvolvimento do trabalho, porém foram encaradas como desafio, e a recompensa é vislumbrar a possibilidade de uma metodologia eficiente visando a aprendizagem dos alunos. Ressalta-se que não havia pretensão de construir “a” metodologia mais adequada para abordar o conteúdo proposto, mas sim, apresentar “uma” maneira de ensinar que atendesse as expectativas de professores e alunos. Nesse sentido, tem-se a consciência de que o assunto não foi esgotado, mas iniciado.

Após a construção deste plano de ensino, sente-se a necessidade de aplicá-lo e pôr em prática o que neste momento foi idealizado o que, possivelmente, oportunizará novas dúvidas e novas buscas.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier. **Matemática: Aula por Aula**. São Paulo. FDT, 1998.

BONGIOVANI; VISSOTO; LAURENTINO. **Matemática e Vida**. 8º série; 5º edição. Editora Ática, 1995.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino fundamental**. Documento introdutório: versão preliminar. Brasília: MEC, 1995.

Canal do Educador; **Teodolito Caseiro**. Disponível em: <http://educador.brasilecola.com/estrategias-ensino/construindo-um-teodolito.htm>.

COSTA, Nilce M. Lobo da. **A História da Trigonometria**. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_trigono.pdf. Acesso em 08/04/2014.

GIKOVATE, Flávio. **A arte de educar**. Curitiba: Nova Didática, 2001. 72p.

GIOVANNI, BONJORNO, GIOVANNI Jr; **Matemática Fundamental**; vol. Único; São Paulo: FDT, 1995.

GIOVANNI, CASTRUCCI, GIOVANNI Jr; **A Conquista da Matemática- A + Nova**; 8º série; São Paulo: FDT, 2002.

KALEFF, Ana Maria. **Geometria Euclidiana – a grande excluída**. A Educação Matemática, Niterói, ano I, nº2, p.19-25, 2ºSem. 1994.

MEIRA, Luciano. **O “Mundo Real” e o Dia-a-Dia no Ensino de Matemática**. A Educação Matemática, Recife, ano 9, nº 1, p. 19-26, julho 2002.

MURARO, Antonio. **Minimanual de pesquisa Matemática**. Palavra em ação, Uberlândia: Claranto, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, Volume único, Ed; São Paulo: Moderna, 2003.

PCN, Ensino Médio; **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad Heitor Lisboa Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

SOUZA, Sandra Esteves de; RAMOS, Ciro de Moura. **Português – Dicionários**. Itapevi: Fênix, 1998.

VARANDAS, José; **Notas históricas**, 2003. Disponível em: acesso em 17/11/2007.

Wikipédia; **Teorema de Pitágoras**. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras acesso em 28/03/2014.

YOUSSEF, SOARES, FERNANDES. **Matemática: de olho no mundo do trabalho**; vol. Único. São Paulo: Scipione, 2005.

ANEXOS

Anexo I

Tabela Trigonométrica

Fonte: BONGIOVANI; VISSOTO; LAURENTINO. Matemática e Vida; 8º série; 5ª edição.
 Editora Ática, 1995.

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Tabela Trigonométrica

	sen	cos	tg		sen	cos	tg
0°	0,000	1,000	0,000	180°	0,000	-1,000	0,000
5°	0,087	0,996	0,087	185°	-0,087	-0,996	0,087
10°	0,174	0,985	0,176	190°	-0,174	-0,985	0,176
15°	0,259	0,966	0,268	195°	-0,259	-0,966	0,268
20°	0,342	0,940	0,364	200°	-0,342	-0,940	0,364
25°	0,423	0,906	0,466	205°	-0,423	-0,906	0,466
30°	0,500	0,866	0,577	210°	-0,500	-0,866	0,577
35°	0,574	0,819	0,700	215°	-0,574	-0,819	0,700
40°	0,643	0,766	0,839	220°	-0,643	-0,766	0,839
45°	0,707	0,707	1,000	225°	-0,707	-0,707	1,000
50°	0,766	0,643	1,192	230°	-0,766	-0,643	1,192
55°	0,819	0,574	1,428	235°	-0,819	-0,574	1,428
60°	0,866	0,500	1,732	240°	-0,866	-0,500	1,732
65°	0,906	0,423	2,145	245°	-0,906	-0,423	2,145
70°	0,940	0,342	2,747	250°	-0,940	-0,342	2,747
75°	0,966	0,259	3,732	255°	-0,966	-0,259	3,732
80°	0,985	0,174	5,671	260°	-0,985	-0,174	5,671
85°	0,996	0,087	11,430	265°	-0,996	-0,087	11,430
90°	1,000	0,000	---	270°	-1,000	0,000	---
95°	0,996	-0,087	-11,430	275°	-0,996	0,087	-11,430
100°	0,985	-0,174	-5,671	280°	-0,985	0,174	-5,671
105°	0,966	-0,259	-3,732	285°	-0,966	0,259	-3,732
110°	0,940	-0,342	-2,747	290°	-0,940	0,342	-2,747
115°	0,906	-0,423	-2,145	295°	-0,906	0,423	-2,145
120°	0,866	-0,500	-1,732	300°	-0,866	0,500	-1,732
125°	0,819	-0,574	-1,428	305°	-0,819	0,574	-1,428
130°	0,766	-0,643	-1,192	310°	-0,766	0,643	-1,192
135°	0,707	-0,707	-1,000	315°	-0,707	0,707	-1,000
140°	0,643	-0,766	-0,839	320°	-0,643	0,766	-0,839
145°	0,574	-0,819	-0,700	325°	-0,574	0,819	-0,700
150°	0,500	-0,866	-0,577	330°	-0,500	0,866	-0,577
155°	0,423	-0,906	-0,466	335°	-0,423	0,906	-0,466
160°	0,342	-0,940	-0,364	340°	-0,342	0,940	-0,364
165°	0,259	-0,966	-0,268	345°	-0,259	0,966	-0,268
170°	0,174	-0,985	-0,176	350°	-0,174	0,985	-0,176
175°	0,087	-0,996	-0,087	355°	-0,087	0,996	-0,087
180°	0,000	-1,000	0,000	360°	0,000	1,000	0,000

Anexo II

Ângulos Notáveis

Sendo α um ângulo qualquer pertencente a um triângulo inscrito, dizem-se ângulos notáveis para os ângulos α iguais a 0° , 30° , 45° , 60° , 90° e para qualquer outro valor pertencente ao 2º, 3º ou 4º quadrantes correspondentes as primeiras medidas citadas. Para os ângulos notáveis temos os seguintes valores pertencentes aos valores de seno, cosseno e tangente:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ou ainda:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0° ou 0	0	1	0
30° ou $\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° ou $\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° ou $\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90° ou $\pi/2$	1	0	A